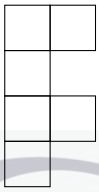
- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارایه شده است.

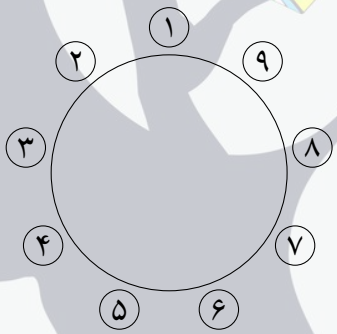
---

۱ یک جدول ۱۲ × ۴ داریم. حداقل چند خانه‌ی آن را باید مسدود کنیم تا نتوان در خانه‌های باقی‌مانده حتی یک کاشی به شکل زیر (یا دوران‌ها و قرینه‌های آن) قرار داد؟



۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸ ۵) ۱۶

۲ ۹ نفر با شماره های ۱ تا ۹ دور یک دایره نشسته‌اند:



به ازای هر نفر، دو نفری که بیش‌ترین فاصله را از او دارند، **دوستان** او گوییم. برای مثال دوستان فرد شماره ۱، افراد شماره ۵ و ۶ هستند. در ابتدا توپی در اختیار نفر شماره ۱ است. در هر مرحله، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به سمت یکی از دوستانش پرتاب می‌کند و دوست مورد نظر آن را می‌گیرد. به چند طریق می‌توان توپ را پس از دقیقاً ۱۴ مرحله به فرد شماره ۴ رساند؟ تا قبل از مرحله‌ی ۱۴ نیز توپ می‌تواند به نفر شماره ۴ برسد، اما مهم این است که پس از مرحله‌ی ۱۴اُم توپ در اختیار نفر شماره ۴ باشد.

۱) ۱۴ ۲) ۲۲۳ ۳) ۱۰۰۱ ۴) ۱۳۶۵ ۵) ۱۰۱۵

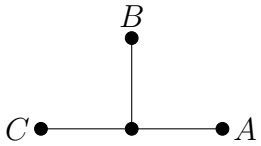
۳ پنج سیب یکسان و پنج پرتقال یکسان در یک سبد داریم. در هر مرحله، می‌توانیم یکی از سه کار زیر را انجام دهیم:

- یک سیب از سبد برداریم و بخوریم.
- یک پرتقال از سبد برداریم و بخوریم.
- یک سیب و یک پرتقال از سبد برداریم و بخوریم.

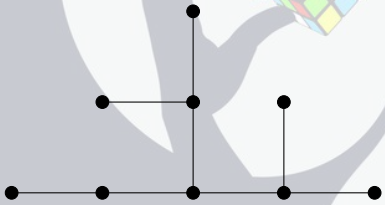
به چند طریق می‌توانیم کل میوه‌ها را بخوریم، طوری که به جز ابتدا و انتهای کار، در هیچ لحظه‌ای تعداد سیب و پرتقال‌های سبد برابر نباشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۶۸ ۴) ۴۷۲ ۵) ۸۴

۴ یک بوته در مبدأ صفحه‌ی مختصات کاشته شده است. به نقاط با مختصات صحیح صفحه، نقاط **شبکه‌ای** گوییم. در هر ثانیه از هر نقطه‌ی شبکه‌ای بوته که رشدی از آن صورت نگرفته، سه شاخه به طول واحد در جهت‌های راست، بالا و چپ شروع به رشد می‌کنند. در صورتی که در آن جهت شاخه‌ای از قبل موجود باشد، شاخه‌ی جدیدی رشد نمی‌کند. هم‌چنین اگر دو شاخه‌ی در حال رشد به یک نقطه برسند، یکی از آن‌ها به طور تصادفی می‌شکند. اگر هم شاخه‌ی در حال رشد به نقطه‌ای برسد که قبلاً در آن نقطه شاخه‌ای وجود داشته، می‌شکند. برای مثال پس از یک ثانیه بوته به شکل زیر در می‌آید:



در ثانیه‌ی دوم از هر کدام از نقاط شبکه‌ای جدید (A، B و C)، شاخه‌ها شروع به رشد می‌کنند. با توجه به این که شاخه‌ی سمت چپ A و شاخه‌ی سمت راست C از قبل موجود است، این دو شاخه رشد نخواهند کرد. هم‌چنین شاخه‌ی بالای A و شاخه‌ی سمت راست B به یک نقطه می‌رسند، پس یکی از آن‌ها باید به تصادف بشکند (همین امر برای شاخه‌ی بالای C و شاخه‌ی چپ B صادق است). برای مثال یکی از حالات بوته پس از ثانیه‌ی دوم در شکل زیر قابل مشاهده است:



پس از ۴ ثانیه، شکل بوته چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳۲۷۶۸ ۲) ۱۲۸ ۳) ۴۰۹۶ ۴) ۳۶ ۵) $\binom{۱۲}{۶}$

۵ شایان، بهنود و سینا به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف با سه صندلی نشسته‌اند و می‌خواهند بازی کنند. قرار است این افراد سه بار از صندلی‌ها بلند شده و به ترتیبی دیگر بنشینند. هر مرحله‌ی بازی به صورت زیر انجام می‌شود:

اگر ترتیب کنونی افراد $\langle a, b, c\rangle$ باشد، فرد b یکی از دو حالت $\langle b, a, c\rangle$ یا $\langle a, c, b\rangle$ را برای ترتیب نشستن بعدی انتخاب می‌کند.

برنده‌ی بازی کسی است که پس از مرحله‌ی سوم روی صندلی وسط باشد. هر فرد یک **دشمن** نیز دارد. دشمن‌های شایان، بهنود و سینا به ترتیب بهنود، سینا و شایان هستند. هر فرد می‌خواهد در اولویت اول خودش ببرد و در اولویت دوم دشمنش نبرد. کدام گزاره یا گزاره‌های زیر درست هستند؟

آ) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، شایان برنده خواهد شد.
ب) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، بهنود برنده خواهد شد.
پ) اگر هر سه نفر به بهترین شکل ممکن برای رسیدن به اهدافشان بازی کنند، سینا برنده خواهد شد.
ت) بهنود مستقل از نحوه‌ی بازی دیگران می‌تواند طوری بازی کند که سینا برنده نشود.

۱) ب و ت ۲) پ و ت ۳) آ ۴) ب ۵) آ و ت

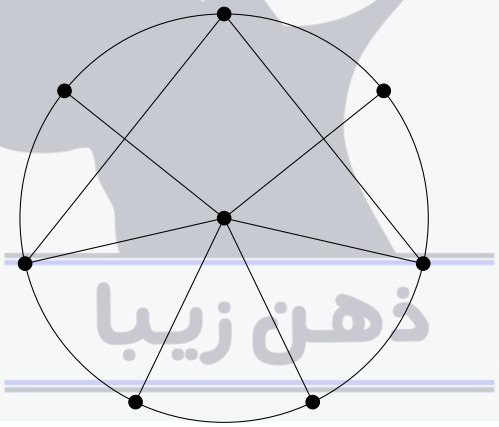
۶ ۱۳۹۸ نفر دور یک دایره هستند و همگی زامبی شده‌اند. دانشمندان دریافته‌اند که عامل زامبی شدن، ویروسی به نام **زابون** است و دستگاهی اختراع کرده‌اند که زابون را از بدن زامبی بیرون می‌کشد. هر زامبی یکی از این دستگاه‌ها در اختیار دارد. در هر مرحله به طور همزمان، هر زامبی زابون را از بدن خود با استفاده از دستگاه بیرون می‌کشد، سپس یکی از دو نفر مجاور خود را انتخاب کرده و ویروس را به او منتقل می‌کند. پس از انجام مرحله، هر فردی که از یک یا هر دو مجاور خود زابون دریافت کند، زامبی و بقیه سالم می‌شوند. کمینه‌ی تعداد مراحل را بیابید تا به وضعیتی برسیم که فقط دو زامبی در میان افراد باشد.

۱) رسیدن به چنین وضعیتی امکان ندارد ۲) ۱۳۹۸ ۳) ۶۹۹ ۴) ۶۹۸ ۵) ۱۳۹۷

۷ **سلطان** و **ایلیچ** با هم بازی می‌کنند. پنج ماشین به ترتیب با شماره‌های ۱ تا ۵ پشت سر هم قرار گرفته‌اند (ماشین شماره ۱ جلوترین ماشین است). ابتدا ایلیچ دنباله‌ای از اعداد ۲ تا ۵ ارائه می‌کند که به ازای هر $i \in \{۲, ۳, ۴, ۵\}$ عدد i دقیقاً $i-۱$ بار در دنباله آمده است. سپس سلطان در جایی دل‌خواه از دنباله، یک عدد ۱ قرار می‌دهد؛ به این ترتیب دنباله‌ای از ۱۱ عدد مانند $\langle a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۱} \rangle$ به دست می‌آید. نهایتاً در مرحله‌ی jاُم ($۱۱ \geqslant j \geqslant ۱$)، ماشین a_j از ماشین جلوی خودش سبقت می‌گیرد (اگر a_j جلوترین ماشین بود، سبقتی در آن مرحله انجام نمی‌شود). سلطان می‌خواهد پس از انجام مراحل، ماشین شماره ۱ در جلوترین مکان ممکن و ایلیچ می‌خواهد ماشین شماره ۱ در عقب‌ترین مکان ممکن باشد. اگر دو نفر به شکل بهینه بازی کنند، ماشین شماره ۱ در کجای صف خواهد بود؟

۱) سومین ماشین از جلو ۲) دومین ماشین از جلو ۳) عقب‌ترین ماشین ۴) جلوترین ماشین ۵) چهارمین ماشین از جلو

۸ هشت شایعه‌ساز داریم که گراف آشنایی آن‌ها به شکل زیر است (آشنایی را رابطه‌ای دوطرفه در نظر بگیرید):



هر شایعه‌ساز هر روز می‌تواند یکی از سه کار زیر را انجام دهد:

- استراحت کند.
- یک شایعه‌ی جدید بسازد! در این صورت او به دلیل فشار کاری، روز بعد را باید استراحت کند.
- تمام شایعه‌هایی را که تا قبل از آن روز داشته (چه خودش ساخته باشد و چه از طریق آشنایانش گرفته باشد)، به تمام آشنایانش بگوید.

دریافت کردن شایعه‌های آشنایان، مستقل از سه حالت بالاست و حتی شایعه‌ساز در حال استراحت هم می‌تواند شایعه دریافت کند. به یک شایعه **فراگیر** گوییم، اگر تمام هشت نفر آن را بدانند. پس از ۱۶ روز حداکثر چند شایعه‌ی فراگیر متمایز وجود خواهد داشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۱۲ ۳) ۵۶ ۴) ۱۴ ۵) ۱۲۰

۹ در یک صف تاکسی تعداد زیادی آدم ایستاده‌اند. هر خودرو که می‌آید به احتمال $\frac{۱}{۲}$ سمند است که چهار نفر جلوی صف را سوار می‌کند و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ ون است که ۱۰ نفر جلوی صف را سوار می‌کند. سلطان و ایلیچ نفرات ۹۹اُم و ۱۰۰اُم صف هستند. به چه احتمالی این افراد در یک خودرو قرار خواهند گرفت؟

۱) $\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۲۰۴۷}{۲۰۴۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱ ۵) $\frac{۲^{۹۹}-۱}{۲^{۹۹}}$

۱۰ الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقادیر ans، s و i را به ترتیب ۰، ۰ و ۱ قرار بده.
۲. مجموعه‌ی X را تهی قرار بده.
۳. مقدار i را $i+۱$ قرار بده.
۴. اگر i برابر ۱۰ بود، مقدار ans را $ans+s$ قرار بده؛ در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.
۵. مقدار i را $i-۱$ قرار بده.
۶. اگر i برابر صفر بود، به مرحله‌ی ۱۰ برو.
۷. اگر $i \in X$ نبود به مرحله‌ی ۹ برو.
۸. عدد i را از X حذف کن و مقدار s را $s-i$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۵ برو.
۹. عدد i را به X اضافه کن و مقدار s را $s+i$ قرار بده. سپس به مرحله‌ی ۳ برو.
۱۰. پایان.

پس از پایان اجرای الگوریتم مقدار ans چه خواهد بود؟

۱) ۱۱۵۲۰ ۲) ۴۵ ۳) ۲۳۰۴۰ ۴) ۲۸۱۶۰ ۵) الگوریتم هیچ گاه پایان نمی‌یابد

۱۱ جدولی به شکل زیر داریم و رباتی در خانه‌ی ۱ قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند به یک خانه‌ی مجاور (در ضلع) برود.

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

شایان یک عدد شش رقمی با ارقام ۲ تا ۹ به ربات می‌دهد که هیچ دو رقم متوالی آن یکسان نیستند. سپس ربات رقم سمت چپ عدد را می‌بیند و با کوتاه‌ترین مسیر ممکن به خانه‌ی متناظر آن رقم می‌رود (اگر چند کوتاه‌ترین مسیر وجود داشت، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کند). سپس به ازای تمام ارقام دیگر عدد نیز به ترتیب از چپ به راست همین کار را انجام می‌دهد. اگر بدانیم دنباله‌ی خانه‌هایی که ربات دیده به ترتیب از چپ به راست برابر

۱, ۲, ۵, ۶, ۳, ۶, ۹, ۸, ۵, ۸, ۷

باشد، چند حالت برای عدد شایان وجود دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶ ۵) ۱۲

۱۲ ۱۳۹۸ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۸ در یک جمع حضور دارند. یک تاس ۱۳۹۸ وجهی داریم که روی وجه‌های آن اعداد ۱ تا ۱۳۹۸ حک شده‌اند و در هر پرتاب، اعداد به احتمال برابر می‌آیند. ابتدا یک بار تاس را می‌اندازیم و هر عددی مانند k آمد، تصمیم می‌گیریم یک تیم k نفره از جمع تشکیل دهیم. سپس هر مرحله تاس را می‌اندازیم و فرض کنید عدد a بیاید؛ اگر نفر شماره a در تیم انتخاب نشده بود، a را به تیم اضافه می‌کنیم و در غیر این صورت کاری نمی‌کنیم. آن قدر تاس را می‌اندازیم تا تعداد نفرات تیم k شود. امید ریاضی مجموع شماره‌ی افراد تیم را بیابید.

۱) $\frac{۱۳۹۸\times۱۳۹۹}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳۹۸^۲}{۴}$ ۳) $\frac{۱۳۹۸\times۱۳۹۹}{۴}$ ۴) $\frac{۱۳۹۹^۲}{۴}$ ۵) $\frac{۱۳۹۸\times۱۳۹۷}{۴}$

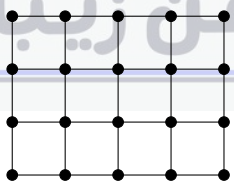
۱۳ سلطان، ایلیچ و آبولف سه برادر هستند. پدر آن‌ها شش هدیه برای آن‌ها خریده است. هر کدام از بچه‌ها به ازای هر هدیه گفتند به چه میزانی با گرفتن آن هدیه خوشحال می‌شوند. این مقادیر در جدول زیر آمده است:

	هدیه‌ی ۱	هدیه‌ی ۲	هدیه‌ی ۳	هدیه‌ی ۴	هدیه‌ی ۵	هدیه‌ی ۶
سلطان	۱۰	۱۳	۸	۶	۳	۴
ایلیچ	۲	۱۱	۴	۵	۶	۳
آبولف	۶	۱۰	۶	۴	۸	۴

پدر می‌خواهد این شش هدیه را بین سه فرزندش تقسیم کند. لزومی ندارد به هر کس دقیقاً دو هدیه برسد. هم‌چنین ممکن است مجموعه‌ی هدایای یک فرد تهی باشد. گوییم فرد A به فرد B **حسادت** خواهد کرد، اگر با عوض کردن هدیه‌هایشان، مجموع خوشحالی A بیش‌تر شود. تعداد زوج مرتب‌های (A, B) را که A به B حسادت کند، میزان **بدبختی** پدر می‌گوییم. کمینه‌ی میزان بدبختی پدر را بیابید.

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱ ۵) ۴

فرض کنید یک جدول $m \times n$ داریم. نقاط گوشه‌های مربع‌های واحد جدول را رأس و اضلاع آن‌ها را یال در نظر بگیرید؛ به این ترتیب یک گراف به دست می‌آید. برای مثال به ازای $m = ۳$ و $n = ۴$ گرافی با ۲۰ رأس و ۳۱ یال به شکل زیر به دست می‌آید:



به این گراف، **گراف جدولی** حاصل از یک جدول $m \times n$ گوییم. فرض کنید G یک گراف جدولی و T یک زیردرخت فراگیر از آن باشد. به ازای هر خانه از جدول، تعداد یال‌هایی از T را که ضلع آن خانه هستند، **استحکام** آن خانه می‌نامیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

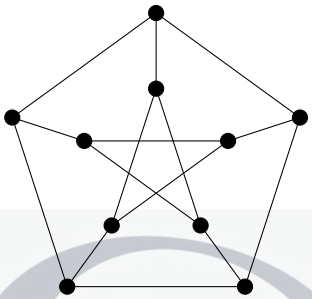
۱۴ به ازای $m = ۱۰$ و $n = ۱۰$، کمینه‌ی مجموع استحکام خانه‌ها را در میان تمام زیردرخت‌های فراگیر ممکن بیابید.

۱) ۲۰۱ ۲) ۱۹۹ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۹ ۵) ۲۴۰

۱۵ **دوام** هر خانه را مجذور استحکام آن (استحکام به توان دو) در نظر می‌گیریم. به ازای $m = ۱۰$ و $n = ۱۰$، کمینه‌ی مجموع دوام خانه‌ها را در میان تمام زیردرخت‌های فراگیر ممکن بیابید.

۱) ۹۰۱ ۲) ۴۰۱ ۳) ۳۰۱ ۴) ۲۹۲ ۵) ۴۰۵

سال‌ها پیش فردی به نام **پترسن** گراف زیر را از صندوق‌چه‌ی **سلطان** دزدید و به نام خود زد!



سلطان دلش برای این گراف تنگ شده است و می‌خواهد اندکی با آن بازی کند! او در ابتدا رأس‌های گراف را با قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس هر مرحله به طور همزمان رنگ هر رأس را برابر با رنگی قرار می‌دهد که در همسایه‌هایش بیش‌تر تکرار شده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۶ سلطان در ابتدا به چند طریق می‌تواند سه رأس را قرمز و بقیه را آبی کند، طوری که هم‌واره حداقل یک رأس قرمز در گراف باقی بماند؟ رأس‌های گراف را متمایز در نظر بگیرید.

۱) ۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰ ۵) ۱۲

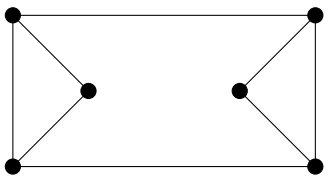
۱۷ کمینه‌ی k را بیابید، طوری که سلطان در ابتدا به هر روشی که k رأس را قرمز و بقیه را آبی کند، هم‌واره دست کم یک رأس قرمز در گراف باقی بماند.

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷ ۵) ۶

سلطان به تازگی شهردار **خوشوآباد** شده و می‌خواهد به روان شدن ترافیک شهر کمک کند. استراتژی او، یک‌طرفه کردن خیابان‌هاست. از طرفی او دوست ندارد با این کار، فاصله‌ی قسمت‌های مختلف شهر از هم خیلی زیاد شود. در هر سوال، گراف خیابان‌ها و تقاطع‌های یک محله داده می‌شود (رأس‌های گراف، تقاطع‌ها و یال‌های آن، خیابان‌های محله هستند) و از شما در مورد یک‌طرفه کردن خیابان‌های آن پرسشی صورت خواهد گرفت. در هر سه سوال، رأس‌های (تقاطع‌های) گراف را متمایز در نظر بگیرید.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

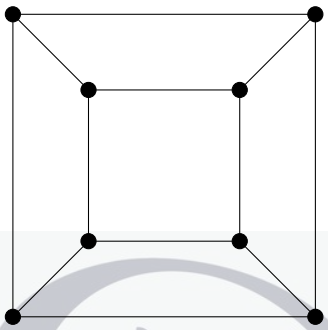
۱۸ محله‌ی کوچک **رامتینک** در این شهر گرافی به شکل زیر دارد:



سلطان می‌خواهد تمام خیابان‌های این محله را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب (X, Y) از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر چهار خیابان از X به Y برسیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶ ۵) ۰

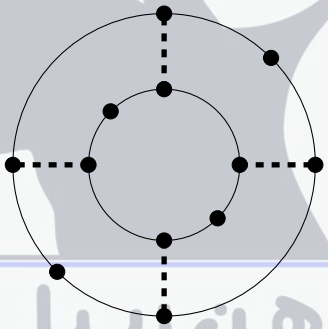
۱۹ محله‌ی قدیمی **میرزامحمد خان** گرافی به شکل زیر دارد:



سلطان می‌خواهد تمام خیابان‌های این محله را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب (X, Y) از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر سه خیابان از X به Y برسیم. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) ۳۲ ۲) ۴ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲ ۵) ۰

۲۰ محله‌ی زیبای **پارساییان** گرافی به شکل زیر دارد:



در این سوال بر خلاف دو سوال قبل، سلطان نمی‌خواهد تمام خیابان‌ها را یک‌طرفه کند، زیرا چهار خیابان مشخص شده با خط‌چین به اندازه‌ی کافی عریض هستند و نیازی به یک‌طرفه شدن آن‌ها نیست. سلطان به چند طریق می‌تواند تمام ۱۲ خیابان دیگر را یک‌طرفه کند، طوری که به ازای هر زوج مرتب (X, Y) از تقاطع‌ها، بتوانیم با طی کردن حداکثر پنج خیابان از X به Y برسیم؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱۲ ۵) ۹۶

زابونیان در دریای مدیترانه ..... ۲۰ امتیاز

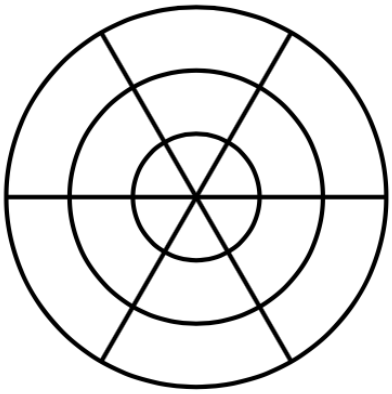
کاروان ۱۳۹۸ نفره‌ی **زابونیان** در حال عبور از دریای مدیترانه بودند که در جزیره‌ی آدم‌خوارها گیر افتادند. رئیس قبیله‌ی آدم‌خوارها روش عجیبی برای محاکمه‌ی این ۱۳۹۸ نفر طراحی کرد. او به هر یک از ۱۳۹۸ نفر گفت: «از بین ۱۳۹۷ نفر دیگر، نام دو نفر متمایز را روی یک کاغذ بنویسید و به من تحویل دهید.»

به یک نفر از کاروان، **سربه‌زیر** گوییم، اگر نامش دقیقاً یک بار روی کاغذها نوشته شده باشد. به فردی از کاروان که نامش بیش از یک بار روی کاغذها نوشته شده باشد، **رسوا** گوییم. به یک نفر از کاروان **رسواگر** گوییم، اگر نام حداقل یک فرد رسوا را روی کاغذش نوشته باشد.

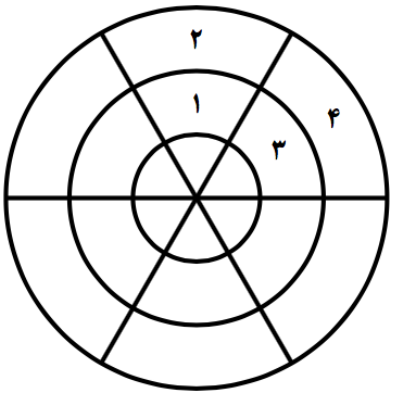
رئیس قبلیه، تمام افراد سربه‌زیر و رسواگر را برای تهیه‌ی شام قبیله خواهد کشت و بقیه را آزاد خواهد کرد. حداکثر چند نفر از کاروان زابونیان جان سالم به در خواهند برد؟

دیرالسلطان ..... ۲۰ امتیاز

دیرالسلطان شکلی است که از سه دایره‌ی هم‌مرکز و n قطاع تشکیل شده است ($n \geq ۳$). برای مثال شکل زیر، یک دیرالسلطان به ازای $n = ۶$ است:



به این ترتیب، یک دیرالسلطان $۳n$ خانه دارد. دو خانه از یک دیرالسلطان را **مجاور** گوییم، اگر بیش از یک نقطه‌ی مرزی مشترک داشته باشند. برای مثال در شکل زیر، خانه‌ی ۱ با خانه‌های ۲ و ۳ مجاور است، ولی با خانه‌ی ۴ مجاور نیست:



آبولف و **ایلیچ** در حال بازی بر روی یک دیرالسلطان به ازای $n = ۱۳۹۸$ هستند. در هر مرحله آبولف یک قطاع را انتخاب می‌کند، طوری که آن قطاع حداقل یک خانه‌ی رنگ نشده داشته باشد؛ سپس ایلیچ یکی از خانه‌های رنگ نشده از قطاع را انتخاب می‌کند و آن خانه رنگ زده می‌شود. در مراحل زوج، خانه‌ی انتخاب شده را آبی و در مراحل فرد، خانه‌ی انتخاب شده را قرمز می‌کنیم. پس از آن که تمام خانه‌ها رنگ زده شد، بازی خاتمه می‌یابد.

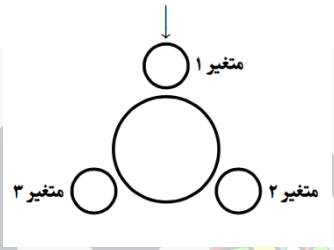
در انتها به ازای هر دو خانه‌ی مجاور ناهم‌رنگ، ایلیچ باید یک واحد به آبولف پول بدهد. اگر هر دو نفر به روش بهینه بازی کنند، ایلیچ چه مقدار پول خواهد داد؟

زبان چرخشی ..... ۲۰ امتیاز

در این سوال با یک زبان برنامه‌نویسی جدید سر و کار دارید. ابتدا توضیحات زیر را در مورد بخش‌های مختلف زبان بخوانید:

حافظه و اشاره‌گر:

این زبان تنها از سه خانه‌ی حافظه با شماره‌های ۱ تا ۳ استفاده می‌کند که به شکل زیر، دور یک دایره قرار گرفته‌اند و هر کدام از آن‌ها می‌توانند یک عدد صحیح را ذخیره کنند. به این خانه‌ها متغیر نیز می‌گوییم. یک اشاره‌گر (که در شکل با فلش مشخص شده) هم وجود دارد که در هر لحظه به یکی از سه متغیر اشاره می‌کند و در هنگام شروع برنامه، روی متغیر شماره ۱ است. در هر لحظه از برنامه، به متغیری که اشاره‌گر به آن اشاره می‌کند، متغیر **درگیر** می‌گوییم. برنامه دارای تعدادی دستور است که پس از اجرای هر یک، اشاره‌گر یک واحد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند تا به متغیر بعدی اشاره کند.



زیربرنامه‌ها:

هر برنامه در این زبان از تعدادی زیربرنامه تشکیل می‌شود. فرض کنید زیربرنامه‌های یک برنامه به ترتیب C_1 تا C_k باشند. به ازای هر $1 \le i \le k-1$ زیربرنامه‌ی بعدی C_i را C_{i+1} در نظر می‌گیریم. زیربرنامه‌ی بعدی C_k را نیز C_1 در نظر می‌گیریم. هم‌چنین به ازای هر $2 \le i \le k$ زیربرنامه‌ی قبلی C_i را C_{i-1} در نظر می‌گیریم. زیربرنامه‌ی قبلی C_1 را نیز C_k در نظر می‌گیریم.

هر زیربرنامه تعدادی خط دارد که در هر خط یک دستور نوشته شده است. به ازای هر دستور، منظور از دستور بعدی، دستور واقع در خط بعد زیربرنامه است. به ازای دستور آخر زیربرنامه نیز، دستور بعدی را دستور واقع در خط یکم زیربرنامه در نظر می‌گیریم.

اجرای برنامه از خط اول زیربرنامه‌ی C_1 آغاز می‌شود.

دستورها:

دستورهای مجاز به صورت زیر هستند:

- **افزایش**: این دستور را با کلمه‌ی INC نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، به عدد متغیر درگیر یک واحد اضافه کرده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **کاهش**: این دستور را با کلمه‌ی DEC نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، از عدد متغیر درگیر یک واحد کم کرده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **پرش**: این دستور را با کلمه‌ی JMP نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **خروج**: این دستور را با کلمه‌ی EXT نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، اجرای برنامه خاتمه می‌یابد؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **حرکت به جلو**: این دستور را با کلمه‌ی NXT نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، به خط اول زیربرنامه‌ی بعدی می‌رویم؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **حرکت به عقب**: این دستور را با کلمه‌ی PRV نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، به خط اول زیربرنامه‌ی قبلی می‌رویم؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.

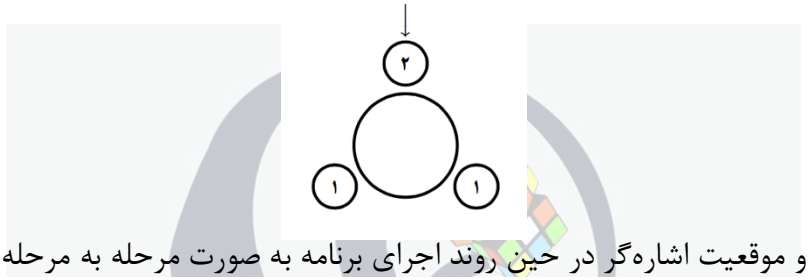
یادآوری می‌کنیم پس از اجرای هر یک از دستورات بالا، اشاره‌گر یک واحد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند.

حال می‌خواهیم یک برنامه برای شما مثال بزنیم که دو زیربرنامه به صورت زیر دارد:

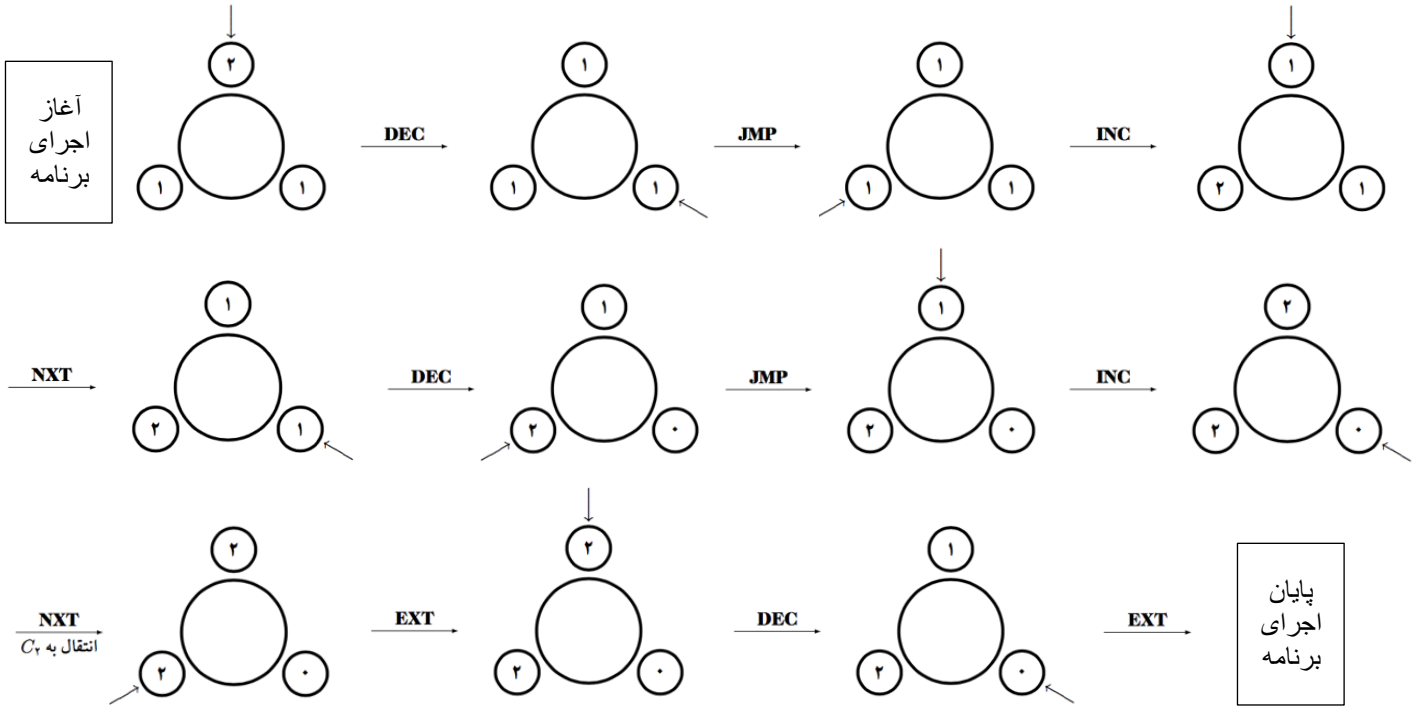
$C_۲$:
EXT
DEC

$C_۱$:
DEC
JMP
INC
NXT

فرض کنید در ابتدا مقادیر متغیرها به شکل زیر باشد:



در شکل زیر، مقدار متغیرها و موقعیت اشاره‌گر در حین روند اجرای برنامه به صورت مرحله به مرحله تا خاتمه‌ی آن آمده است:



پس در انتهای برنامه مقدار متغیرها به ترتیب ۱، ۰ و ۲ خواهد بود.

حال شما برای هر یک از قسمت‌های زیر، با زبان گفته شده یک برنامه متشکل از تعدادی زیربرنامه بنویسید. زیربرنامه‌های خود را با گذاشتن نام‌های $C_۱$، $C_۲$ و ... مشخص کنید و در هر زیربرنامه، دستورات را به صورت منظم و به ترتیب بنویسید. برای درستی برنامه‌ی خود اثباتی مختصر نیز بنویسید. تنها کسانی نمره‌ی کامل می‌گیرند که هر دوی برنامه و اثبات را به درستی نوشته باشند.

آ) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر $A + B$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ب) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر $\max(A, B)$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

پ) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر ب.م.م دو عدد A و B شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ت) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر عدد طبیعی N، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب N، صفر و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۲ برابر $N \times N$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۳ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ذهن زیبا

باغچه‌ی آفت‌زده‌ی آبولف ..... ۲۰ امتیاز

باغچه‌ی **آبولف** به صورت یک جدول ۱۳۹۸ در ۱۳۹۸ است. به مجموعه‌ای از ۱۳۹۸ خانه‌ی جدول **سلطانی** گوییم، اگر هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند. خانه‌ی واقع در سطر iاُم و ستون jاُم را با (i,j) نشان می‌دهیم.

در ابتدا، در تمام خانه‌های (i,j) که $j < i$ است، آفتی قرار دارد. **دگرگون** کردن یک خانه به معنی تغییر وضعیت آفت داشتن یا نداشتن آن است؛ به عبارت دیگر اگر خانه‌ای آفت داشته باشد، پس از دگرگون کردن آفت نخواهد داشت و بالعکس. آبولف می‌خواهد با آفت‌ها مبارزه کند. او دستگاهی خریده است که در هر مرحله می‌تواند مجموعه‌ای سلطانی از جدول انتخاب کند و تمام خانه‌های آن را دگرگون کند. پس از تعداد دل‌خواهی مرحله استفاده از دستگاه، کمینه‌ی تعداد آفت‌هایی که آبولف در باغچه‌اش خواهد داشت چیست؟

پاسخ‌های روز دوم مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر ایران

زابونیان در دریای مدیترانه ..... ۲۰ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۴۶۶ = \frac{۱۳۹۸}{۳}$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم امکان ندارد بیش از ۴۶۶ نفر زنده بمانند. فرض کنید فرد A زنده بماند و نام افراد B و C را روی کاغذش نوشته باشد. A رسواگر نیست، زیرا زنده می‌ماند. بنابراین فرد دیگری به جز A نام B یا C را روی کاغذش نمی‌نویسد؛ یعنی B و C سربه‌زیر هستند و کشته می‌شوند. پس به ازای هر فرد که زنده می‌ماند، دو فرد متناظر وجود دارد که می‌میرند (و این دو فرد به فرد زنده‌ی دیگری متناظر نمی‌شوند). بنابراین حداکثر $\frac{۱}{۳}$ افراد زنده می‌مانند.

اکنون حالتی ارائه می‌دهیم که در آن ۴۶۶ نفر زنده بمانند. افراد را به دسته‌های شش‌تایی تقسیم کرده و افراد هر دسته را با $X_۱$ تا $X_۶$ نام‌گذاری می‌کنیم. نوشته‌های افراد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

- $X_۱$ نام $X_۳$ و $X_۴$ را بنویسد.
- $X_۲$ نام $X_۵$ و $X_۶$ را بنویسد.
- هر کدام از $X_۳$ تا $X_۶$ نام $X_۱$ و $X_۲$ را بنویسند.

به این ترتیب، افراد $X_۱$ و $X_۲$ زنده می‌مانند و بقیه می‌میرند. پس در این روش از هر شش نفر، دو نفر زنده می‌مانند (در کل $۴۶۶ = ۲ \times \frac{۱۳۹۸}{۶}$ نفر).

ذهن زیبا

پاسخ‌های روز دوم مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر ایران

دیرالسلطان ..... ۲۰ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۴۱۹۴ = ۱۳۹۸ \times ۳$ است.

ابتدا روشی برای سلطان ارائه می‌کنیم که مستقل از نحوه‌ی بازی ایلیچ، بتواند دست کم ۴۱۹۴ واحد پول بگیرد. قطاع‌ها را به ترتیب با ۱ تا ۱۳۹۸ شماره‌گذاری می‌کنیم. سلطان در مراحل زوج، قطاع‌های زوج و در مراحل فرد، قطاع‌های فرد را انتخاب کند. مستقل از نحوه‌ی بازی ایلیچ، در پایان بازی هر قطاع با شماره‌ی زوج، به طور کامل آبی و هر قطاع با شماره‌ی فرد، به طور کامل قرمز خواهد شد و ایلیچ ۱۳۹۸×۳ واحد پول خواهد داد.

حال روشی برای ایلیچ ارائه می‌کنیم که مستقل از حریف، حداکثر ۴۱۹۴ واحد پول بدهد. ایلیچ در مراحل زوج، نزدیک‌ترین خانه‌ی ممکن به مرکز دایره و در مراحل فرد، دورترین خانه‌ی ممکن به مرکز دایره را انتخاب کند. فرض کنید C یک قطاع دل‌خواه و D قطاع بعدی آن در جهت ساعت‌گرد باشد. پس از بازی، مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

- $f(C)$: تعداد زوج خانه‌های مجاور ناهم‌رنگ که هر دو خانه در C هستند.
- $g(C)$: تعداد زوج خانه‌های مجاور ناهم‌رنگ که یکی در C و دیگری در D است.

با استراتژی به کار گرفته شده توسط ایلیچ، در هر قطاع با حرکت از مرکز به سمت محیط، ابتدا خانه‌های آبی و سپس خانه‌های قرمز دیده خواهند شد. پس $f(C) \leq ۱$ است. همچنین $g(C) \leq ۳$ خواهد بود، زیرا C سه قطاع دارد.

ثابت می‌کنیم $f(C) + g(C) \leq ۳$. دو حالت داریم:

- قطاع C تک‌رنگ باشد. در این صورت مقدار $f(C)$ برابر صفر است. پس:

$$f(C) + g(C) \leq ۰ + ۳ = ۳$$

- دو خانه از قطاع C به یک رنگ و دیگری به رنگ دیگر باشد. در این صورت $f(C) = ۱$ است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم؛ فرض کنید $f(C) + g(C) > ۳$ باشد. از آن‌جایی که $g(C) \leq ۳$، پس $g(C)$ برابر سه است. پس تمام خانه‌های قطاع D با خانه‌ی متناظر خود در C ناهم‌رنگ هستند. بنابراین در D خانه‌ای آبی وجود دارد که نسبت به یک خانه‌ی قرمز در D دورتر از مرکز است. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

حال اگر مقدار $f(C) + g(C)$ را به ازای تمام قطاع‌ها جمع کنیم، هر زوج مجاور ناهم‌رنگ را یک بار شمرده‌ایم. پس ایلیچ حداکثر ۱۳۹۸×۳ واحد پول خواهد داد.

ذهن زیبا

پاسخ‌های روز دوم مرحله‌ی دوم بیست و نهمین المپیاد کامپیوتر ایران

زبان چرخشی ..... ۲۰ امتیاز

آ) برنامه‌ی زیر، دو زیربرنامه دارد. در زیربرنامه‌ی C_1 تا زمانی که مقدار متغیر ۱ برابر صفر نیست، یک واحد از آن کم شده و به متغیر ۳ اضافه می‌شود. سپس به زیربرنامه‌ی C_2 رفته و همین کار با متغیر ۲ انجام می‌شود. به این ترتیب مقدار $A+B$ در متغیر ۳ ریخته خواهد شد.

subprogram C_1:

1) NXT
2) JMP
3) JMP
4) DEC
5) JMP
6) INC

subprogram C_2:

1) JMP
2) EXT
3) JMP
4) JMP
5) DEC
6) INC

ذهن زیبا

ب) برنامه‌ی زیر، سه زیربرنامه دارد. در زیربرنامه‌ی C_1 تا زمانی که مقدار هیچ کدام از دو متغیر ۱ و ۲ برابر صفر نیست، یک واحد از هر کدام کم شده و به متغیر ۳ اضافه می‌شود. با این کار، $min(A,B)$ در متغیر ۳ ریخته می‌شود. حال مقدار یکی از متغیرهای ۱ و ۲ برابر صفر و مقدار دیگری برابر $|A-B|$ است. کافی است در زیربرنامه‌های C_2 و C_3 مقادیر باقی‌مانده‌ی متغیرهای ۱ و ۲ را در متغیر ۳ بریزیم (مانند قسمت آ):

subprogram C_1:

1) NXT
2) NXT
3) JMP
4) DEC
5) DEC
6) INC

subprogram C_2:

1) NXT
2) JMP
3) JMP
4) DEC
5) JMP
6) INC

subprogram C_3:

1) JMP
2) EXT
3) JMP
4) JMP
5) DEC
6) INC

ج) ایده‌ی کلی، استفاده از الگوریتم نردبانی و استفاده از این ویژگی است که:

$$(p,q) = (p-q,q)$$

در زیربرنامه‌ی C_1 مقدار متغیر ۲ در متغیر ۳ ریخته می‌شود. اگر مقدار متغیر ۱ برابر صفر باشد کار تمام است، زیرا $(0,B) = B$. پس در زیربرنامه‌ی C_2 اگر مقدار متغیر ۱ برابر صفر باشد، اجرای برنامه را به پایان می‌رسانیم. در زیربرنامه‌ی C_3 هر مرحله از متغیرهای ۱ و ۳ یک واحد کم شده و به متغیر ۲ اضافه می‌شود (این کار را تا زمانی انجام می‌دهیم که مقدار دست کم یکی از متغیرهای ۱ و ۳ برابر صفر شود). حال مقدار متغیر یکی از متغیرهای ۱ و ۳ برابر $|A-B|$ و مقدار متغیر ۲ برابر $min(A,B)$ است. کافی است مقدار متغیر ۳ را به متغیر ۱ اضافه کرده (در زیربرنامه‌ی C_4) و کار را از ابتدا با اعداد $|A-B|$ و $min(A,B)$ انجام دهیم.

subprogram C_1:

1) JMP
2) NXT
3) JMP
4) JMP
5) DEC
6) INC

ذهن زیبا

subprogram C_2:

1) EXT
2) NXT

subprogram C_3:

1) NXT
2) JMP
3) NXT

4) DEC

5) INC

6) DEC

subprogram C_4:

1) JMP

2) JMP

3) NXT

4) INC

5) JMP

6) DEC

د) ایده‌ی کلی، استفاده از عبارت زیر است:

$$۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)=n^۲$$

هر مرحله اگر مقدار متغیر ۱ برابر k باشد، $۲k-۱$ را به متغیر ۳ اضافه می‌کنیم و سپس یک واحد از متغیر ۱ کم می‌کنیم تا زمانی که صفر شود.

به طور دقیق‌تر، ابتدا چک می‌کنیم که مقدار متغیر ۱ صفر نباشد (در غیر این صورت اجرای برنامه را پایان می‌دهیم). سپس مقدار متغیر ۱ (برای مثال k) را در متغیر ۲ می‌ریزیم و با استفاده از آن مقدار $k-۱$ را به متغیر ۱ و $۲k-۱$ را به متغیر ۳ اضافه می‌کنیم.

subprogram C_1:

1) EXT

2) NXT

subprogram C_2:

1) NXT
2) JMP
3) JMP
4) DEC
5) INC
6) JMP

subprogram C_3:

1) JMP
2) NXT
3) JMP
4) INC
5) DEC
6) INC
7) JMP
8) JMP
9) INC

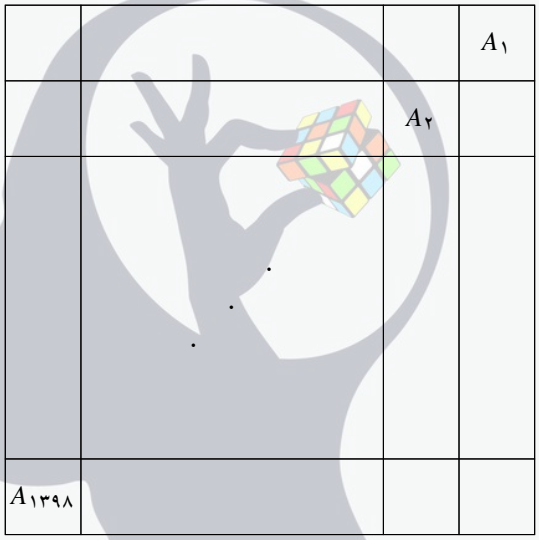
subprogram C_4:

1) DEC
2) JMP
3) DEC
4) JMP
5) NXT

باغچه‌ی آفت‌زده‌ی آبولف ..... ۲۰ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $۶۹۹ = \frac{۱۳۹۸}{۲}$ است.

ابتدا روشی برای سلطان ارائه می‌کنیم که در پایان، حداکثر ۶۹۹ آفت در باغچه وجود داشته باشد. فرض کنید سطرها از بالا به پایین و ستون‌ها از چپ به راست شماره‌گذاری شده باشند. به قطری که خانه‌ی $(۱, ۱۳۹۸)$ تا خانه‌ی $(۱۳۹۸, ۱)$ را در بر می‌گیرد، قطر **آبولفی** می‌گوییم که در شکل زیر، خانه‌های آن با $A_۱$ تا $A_{۱۳۹۸}$ مشخص شده‌اند:



خانه‌های زیر قطر اصلی (که در ابتدا آفت دارند) را به صورت قطری لایه‌بندی می‌کنیم. برای مثال، این لایه‌بندی برای یک جدول ۶×۶ در شکل زیر مشخص است (خانه‌های با شماره‌ی i متعلق به لایه‌ی شماره‌ی i هستند):

۱					
۲	۱				
۳	۲	۱			
۴	۳	۲	۱		
۵	۴	۳	۲	۱	

به ازای هر $۱ \leq i \leq ۱۳۹۸$، سلطان در مرحله‌ی i ام خانه‌های لایه‌ی i به همراه خانه‌های A_1 تا A_i از قطر آبولفی را انتخاب کند. با این روش در انتهای کار، هیچ آفتی خارج از قطر آبولفی وجود نخواهد داشت. حال اگر تعداد آفت‌های روی قطر آبولفی از ۶۹۹ بیش‌تر بود، یک بار تمام خانه‌های قطر آبولفی را انتخاب کرده و دگرگون می‌کنیم. با روش گفته شده حداکثر ۶۹۹ آفت در باغچه خواهیم داشت.

حال ثابت می‌کنیم در هر لحظه حداقل ۶۹۹ آفت در جدول وجود دارد. به یک سطر، **فرد** گوییم، اگر تعدادی فردی آفت داشته باشد؛ به همین ترتیب سطر **زوج** را تعریف می‌کنیم. در هر مرحله سطرهای زوج، فرد می‌شوند و بالعکس (زیرا از هر سطر دقیقاً یک خانه تغییر وضعیت می‌دهد). در ابتدا ۶۹۹ سطر فرد و ۶۹۹ سطر زوج داریم. پس هم‌واره ۶۹۹ سطر فرد خواهیم داشت که هر کدام دست کم یک آفت دارند.

ذهن زیبا