



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت آموزش و پرورش  
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان

مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «لام خمینی (ره)»

اینجانب ..... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۲ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب ..... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

## دفترچه سوالات سی و یکمین دوره المپیاد کامپیوتر - روز دوم

تاریخ: ۱۴۰۰/۰۳/۲۳ - ساعت: ۸:۰۰ - مدت: ۲۷۰ دقیقه



شماره صندلی

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

### توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پانویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- سوالات ترتیب خاصی ندارند و لزوماً از ساده به سخت نیستند. شخصیت و داستان سوالات ربطی به حل سوالات ندارند و صرفاً جنبه طنز دارند.
- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می شوند.
- تصحیح برگه آزمون روز دوم، مشروط به کسب حد نصاب مورد نظر کمیته علمی در آزمون تستی روز اول مرحله دوم می باشد.

در صورت لزوم از این

صفحه به عنوان چرک

نویس استفاده کنید



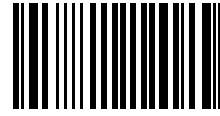
مطالب این صفحه

**ذهن زیبا**  
تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



## سوال اول. جدول بازی ..... ۲۴ نمره

امید و دخترش فرناز بازی زیر را در یک جدول  $n \times n$  انجام می‌دهند:

امید بازی را شروع می‌کند. هر کس در هر نوبت خود در طول بازی، یکی از خطوط جدول (یکی از  $n + 1$  خط عمودی یا یکی از  $n + 1$  خط افقی) را به طور کامل پاک می‌کند. در ابتدای بازی، همه  $n^2$  خانه  $1 \times 1$  جدول سالم هستند، اما پس از هر نوبت ممکن است تعدادی از خانه‌های سالم به دلیل پاک شدن یکی از ضلع‌هایشان خراب شوند (واضح است خانه‌ای که خراب شده است تا انتها خراب باقی می‌ماند). وضعیت جدول را **ویران** می‌نامیم، اگر تمام  $n^2$  خانه  $1 \times 1$  از جدول اولیه خراب شده باشند. به محض این که جدول ویران شود، بازی به پایان می‌رسد.

می‌گوییم یک بازی کن/استراتژی برد دارد اگر بتواند به نحوی بازی کند که مستقل از حرکات نفر مقابل همیشه برنده‌ی بازی باشد.

(الف) در این بخش، کسی که آخرین حرکت بازی را انجام دهد بازندهی بازی می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۰ نمره)

(ب) در این بخش، کسی که آخرین حرکت بازی را انجام دهد برندهی بازی می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟ (۱۴ نمره)

## ذهن زیبا

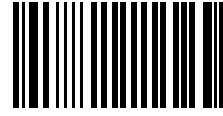
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس

استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۱

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



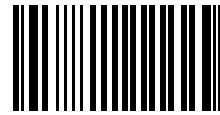
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 1, featuring horizontal dashed lines.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



## سوال دوم. بینش ابوالفضل مظفری ..... ۲۴ نمره

یک گراف کامل ۱۴۰۰ رأسی داریم که رأس‌های آن با شماره‌های ۱ تا ۱۴۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند. ابوالفضل هر یال آن را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی می‌کند (ممکن است تمام یال‌ها با یک رنگ، رنگ‌آمیزی شوند). مظفر می‌داند که گراف ابوالفضل یک گراف کامل ۱۴۰۰ رأسی است که یال‌های آن با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند، اما از رنگ هر یال آن اطلاعی ندارد و می‌خواهد رنگ یال‌های گراف او را بفهمد. برای این کار، مظفر در هر مرحله یک دور از گراف را (با گفتن شماره‌ی رأس‌های دور به ترتیب) مشخص می‌کند و ابوالفضل تعداد یال‌های قرمز آن دور را به مظفر می‌گوید.

الف) مظفر ادعا می‌کند پس از آن که تعداد یال‌های قرمز در هر یک از دوره‌های ۱۴۰۰ رأسی را از ابوالفضل بپرسد، می‌تواند رنگ یال‌های گراف ابوالفضل را در هر شکلی از رنگ‌آمیزی بفهمد. نشان دهید ادعای مظفر اشتباه است. (۱۰ نمره)

ب) به مظفر نشان دهید اگر دست از لچ‌بازی بردارد و علاوه بر دوره‌های ۱۴۰۰ رأسی، تعداد یال‌های قرمز در هر یک از دوره‌های ۱۳۹۹ رأسی را هم بپرسد، آن‌گاه می‌تواند رنگ یال‌های گراف ابوالفضل را در هر شکلی از رنگ‌آمیزی بفهمد. (۱۴ نمره)

## ذهن زیبا

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس

استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۲

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 2.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



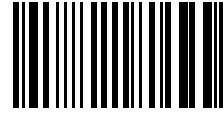
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :

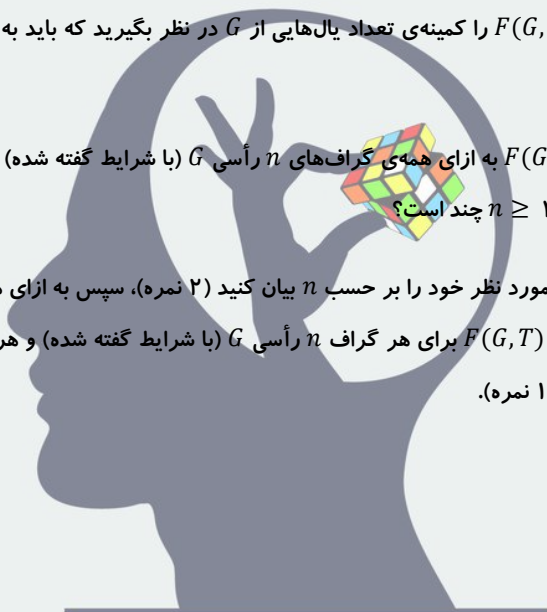


سوال سوم. رأس نباید درجه یک باشد ..... ۲۴ نمره

گراف ساده و  $n$  رأسی  $G$  را با این شرط در نظر بگیرید که دور همیلتونی (دور به طول  $n$ ) دارد و  $T$  یک زیردرخت فراگیر آن است (یعنی زیرگرافی  $n$  رأسی که درخت باشد).  $F(G, T)$  را کمینه‌ی تعداد یال‌هایی از  $G$  در نظر بگیرید که باید به درخت  $T$  اضافه کنیم تا درجه‌ی هر رأس آن حداقل ۲ شود.

مقدار  $p(n)$  را برابر بیشینه‌ی مقدار  $F(G, T)$  به ازای همه‌ی گراف‌های  $n$  رأسی  $G$  (با شرایط گفته شده) و همه‌ی زیردرخت‌های فراگیر  $T$  از  $G$  تعریف می‌کنیم. مقدار  $p(n)$  به ازای  $n \geq 3$  چند است؟

توضیح: برای پاسخ لازم است ابتدا مقدار مورد نظر خود را بر حسب  $n$  بیان کنید (۲ نمره)، سپس به ازای هر  $n$  مثالی بزنید که مقدار بیشینه را داشته باشد (۸ نمره) و نهایتاً نشان دهید  $F(G, T)$  برای هر گراف  $n$  رأسی  $G$  (با شرایط گفته شده) و هر زیردرخت فراگیر  $T$  از  $G$  مقدار  $p(n)$  مورد نظر شما بیش تر نمی‌شود. (۱۴ نمره).



## ذهن زیبا

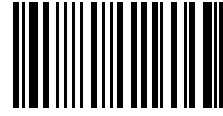
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس

استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۳

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 3.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



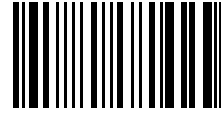
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



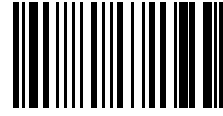
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



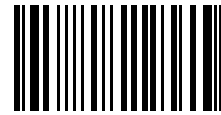
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



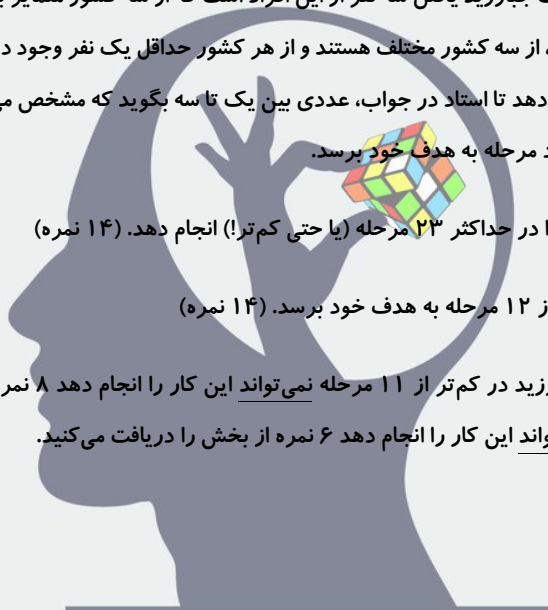
## سوال چهارم. جبارزید و استاد سحرآمیز ..... ۲۸ نمره

۱۴۰۰ نفر از سه کشور مختلف داریم. هدف جبارزید یافتن سه نفر از این افراد است که از سه کشور متمایز باشند. جبارزید تعداد افراد هر کشور را نمی‌داند و فقط می‌داند که این ۱۴۰۰ نفر، از سه کشور مختلف هستند و از هر کشور حداقل یک نفر وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند تعدادی از این افراد را انتخاب کند و به استاد نشان دهد تا استاد در جواب، عددی بین یک تا سه بگوید که مشخص می‌کند این افراد از چند کشور مختلف هستند. جبارزید می‌خواهد با کم‌ترین تعداد مرحله به هدف خود برسد.

الف) ثابت کنید جبارزید می‌تواند این کار را در حداکثر ۲۳ مرحله (یا حتی کم‌تر!) انجام دهد. (۱۴ نمره)

ب) ثابت کنید جبارزید نمی‌تواند در کم‌تر از ۱۲ مرحله به هدف خود برسد. (۱۴ نمره)

توضیح برای بخش ب: اگر ثابت کنید جبارزید در کم‌تر از ۱۱ مرحله نمی‌تواند این کار را انجام دهد ۸ نمره از ۱۴ نمره‌ی بخش را می‌گیرید و اگر ثابت کنید در کم‌تر از ۱۰ مرحله نمی‌تواند این کار را انجام دهد ۶ نمره از بخش را دریافت می‌کنید.



# ذهن زیبا

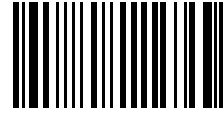
در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس

استفاده کنید مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی

تصحیح نخواهد شد



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

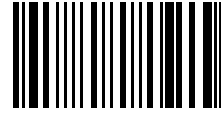
پاسخ سوال ۴

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 4.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



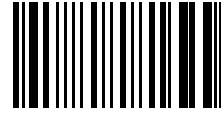
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



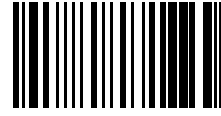
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



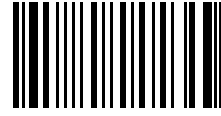
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :  
نام خانوادگی :  
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادی درمندان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۹ تا ۱۸ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ آقای دایی از این که داور بازیکن تیم او را با نام اشتباهی خطاب کرده، ناراحت است و قصد دارد در نشست خبری بعد از بازی به این موضوع اعتراض کند. به همین منظور، او قالبی را برای متن خودش آماده کرده است که در این نشست آن را با انتخاب حروف الفبای مناسب ایراد خواهد کرد:

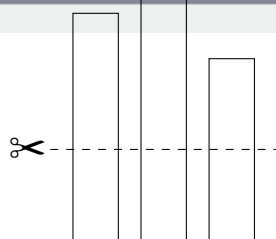
«محمدی» نامی کجای تیم من وجود دارد؟  
 «عباس بوعدار» کجاش شبیه «محمدی» هست؟  
 از بین حروف «محمدی»، «عباس بوعدار» نه  $x$ ،  $y$ ،  $z$ ،  $w$  را با حروف الفبای فارسی جایگزین کند. او چند متن سخن‌رانی  
 فقط به دونه!  $w$  دارد، که اونم «محمدی» نداره!

آقای دایی می‌خواهد متغیرهای  $x$ ،  $y$ ،  $z$  و  $w$  را با حروف الفبای فارسی جایگزین کند. او چند متن سخن‌رانی صحیح متمایز می‌تواند ایجاد کند؟ توجه کنید که او حرف تکراری انتخاب نخواهد کرد!

۹۶ (۱)      ۴۸۰ (۲)      ۱۶۸ (۳)      ۲۴۰۱ (۴)      ۸۴۰ (۵)

۲ پارسا در جگرکی آبولف استخدام شده و مسئول برش زدن جگرهاست. هر جگر در ابتدا به صورت یک نوار مستطیلی است که طول یک ضلع آن یک سانتی‌متر و طول ضلع دیگر عددی طبیعی (بر حسب سانتی‌متر) است. در هر عمل برش، پارسا می‌تواند تعدادی جگر را انتخاب کرده، آن‌ها را به صورت عمودی، از طرف ضلع یک سانتی‌متری در یک سطح قرار داده و با یک برش افقی، همگی را از ارتفاعی دل‌خواه برش بزند. برای مثال اگر سه جگر  $۱ \times ۵$ ،  $۱ \times ۷$  و  $۱ \times ۴$  داشته باشیم، با برشی از ارتفاع ۲ سانتی‌متر، مطابق شکل زیر چهار تکه‌ی  $۱ \times ۲$ ، یک تکه‌ی  $۱ \times ۳$  و یک تکه‌ی  $۱ \times ۵$  ساخته خواهد شد:

### ذهن زیبا



برش‌ها باید به نحوی باشند که اضلاع جگرها طبیعی باقی بمانند (بر حسب سانتی‌متر). مشتری‌های آبولف بسیار حساس هستند و دوست دارند جگرهای یک‌دست و هم‌اندازه‌ای تحویل بگیرند. فرض کنید پارسا در ابتدا پنج جگر با اندازه‌های  $۱ \times ۹۱$ ،  $۱ \times ۲۷۳$ ،  $۱ \times ۴۲۹$ ،  $۱ \times ۵۴۶$  و  $۱ \times ۳۳۸$  داشته باشد. او حداقل به چند عمل برش نیاز دارد تا تمام تکه‌های جگر هم‌اندازه شوند (پارسا اجازه ندارد بخشی از جگرها را دور بریزد و باید همه‌ی آن‌ها را تحویل آشپز بدهد)؟

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۰ (۵)

۶ (۴)

۵ (۳)

۸ (۲)

۳ (۱)

می‌خواهیم یک جدول  $2 \times 8$  را با استفاده از ۵ رنگ طوری رنگ‌آمیزی کنیم که مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در سطر اول با مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در سطر دومش برابر باشد. هم‌چنین می‌خواهیم به ازای هر  $i$  (برای  $1 \leq i < 8$ )، مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در  $i$  ستون نخست با مجموعه‌ی رنگ‌های استفاده شده در  $i - 1$  ستون دیگر برابر باشد. به چند روش می‌توان جدول را با این شرایط رنگ کرد؟

۱۶۳۸۴۵ (۵)

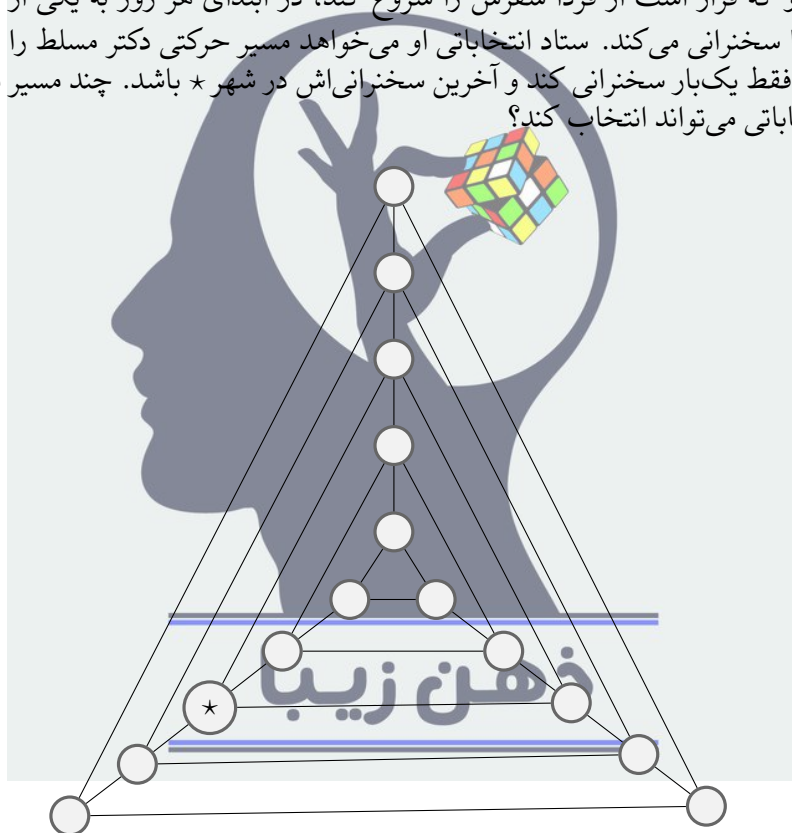
۸۰۶۵۵ (۴)

۱۶۱۳۰۵ (۳)

۶۵۵۳۵۵ (۲)

۸۱۹۲۰ (۱)

مدتی است تبلیغات انتخاباتی در کشور مثلث شروع شده است؛ دکتر مسلط با شعار «آینده‌ی مثلث، نیازمند تسلط»، در انتخابات ثبت نام کرده است و ستاد انتخاباتی او در حال برنامه‌ریزی برای سفر تبلیغاتی شهری اش می‌باشند. کشور مثلث شامل ۱۵ شهر است که شکل زیر اتصالات میان این شهرها را نشان می‌دهد. دکتر مسلط در شهر \* زندگی می‌کند. او که قرار است از فردا سفرش را شروع کند، در ابتدای هر روز به یکی از شهرهای مجاورش می‌رود و در آن‌جا سخنرانی می‌کند. ستاد انتخاباتی او می‌خواهد مسیر حرکتی دکتر مسلط را طوری انتخاب کند که او در هر شهر فقط یک‌بار سخنرانی کند و آخرین سخنرانی اش در شهر \* باشد. چند مسیر متفاوت وجود دارد که این ستاد انتخاباتی می‌تواند انتخاب کند؟



۱۸ (۵)

۲۷ (۴)

۸۱ (۳)

۲۴ (۲)

۷۲ (۱)

باب اسفنجی و پاتریک تصمیم گرفتند که پس از مدت‌ها، از مغزشان استفاده کنند. به همین دلیل از اختاپوس خواستند که یک بازی فکری به آن‌ها معرفی کند. اختاپوس یک جدول و یک مهره‌ی اسب شطرنج به آن دو داد و گفت:

«بازی من بر روی یک جدول  $4 \times 4$  سفید رنگ انجام می‌شود. یک مهره نیز در این بازی وجود دارد که در هر زمان، در یکی از ۱۶ خانه‌ی جدول قرار می‌گیرد. زیر این مهره به رنگ سیاه آغشته است و در نتیجه، در هر خانه‌ای که قرار بگیرد، رنگ آن خانه سیاه می‌شود. باب اسفنجی! ابتدا یک خانه از جدول را انتخاب کن و مهره را در آن بگذار (رنگ آن خانه پس از این کار سیاه

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

می‌شود). سپس بازی بین تو و پاتریک شروع می‌شود. پاتریک نفر اول است و پس از حرکت هر شخص، نوبت فرد دیگر می‌شود. هر کدام از شما در نوبت خود، حق دارید که مهره را مطابق حرکات اسب در شطرنج یک بار جابه‌جا کنید؛ اما تنها حق دارید مهره را به خانه‌ای سفید حرکت بدهید. رنگ خانه‌ی مقصد نیز پس از حرکت شما سیاه می‌شود. هر کس که نتواند مهره را حرکت دهد، بازی را می‌بازد.»

چند خانه از جدول هستند که اگر در ابتدای بازی، باب اسفنجی مهره را در یکی از آن‌ها قرار دهد، حتماً می‌تواند پاتریک را شکست دهد؟

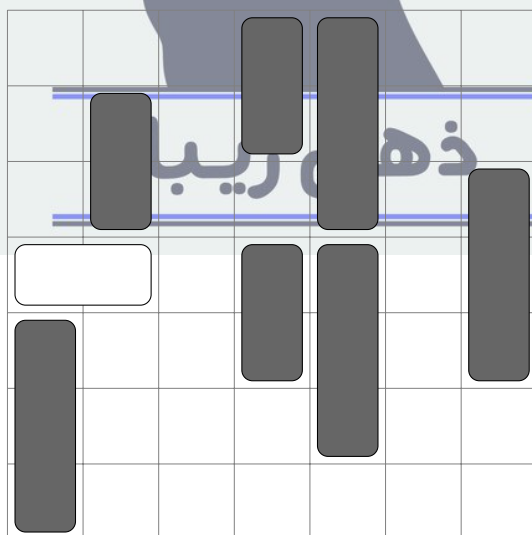
**توضیح:** حرکت مهره‌ی اسب در شطرنج به این صورت است که ابتدا دو خانه در جهت افقی یا عمودی جابه‌جا می‌شود و سپس  $90^\circ$  درجه به چپ یا راست می‌پیچد و در نهایت یک خانه‌ی دیگر جلو می‌رود.

- ۸ (۱)      ۱۶ (۲)      ۴ (۳)      ۱۲ (۴)      ۰ (۵)

۶ اکبر آقا در هر یک از دو جیب شلوارش یک سکه‌ی  $200$  تومانی و یک سکه‌ی  $500$  تومانی دارد. او از هر کدام از جیب‌هایش یک سکه به صورت تصادفی درآورده و آن‌ها را پرتاب می‌کند تا به احتمال برابر شیر یا خط بیاید. اگر بدانیم بین سکه‌های پرتاب شده سکه‌ی  $200$  تومانی‌ای وجود دارد که شیر آمده باشد، چه قدر احتمال دارد که هر دو سکه شیر آمده باشند؟

- $\frac{1}{5}$  (۱)       $\frac{1}{4}$  (۲)       $\frac{3}{7}$  (۳)       $\frac{1}{4}$  (۴)       $\frac{1}{5}$  (۵)

۷ یک پارکینگ به شکل یک جدول  $7 \times 7$  در نظر بگیرید که ماشین‌هایی به عرض  $1$  و طول  $2$  یا  $3$  در آن پارک شده‌اند. هر خانه از جدول توسط حداکثر یک ماشین می‌تواند اشغال شده باشد. مانند شکل زیر، یک ماشین سفید به طول دقیقاً  $2$  به صورت افقی در انتهای چپ سطر چهارم قرار دارد و چند ماشین خاکستری نیز به صورت عمودی پارک شده‌اند. ماشین سفید فقط راست، و ماشین‌های خاکستری بالا یا پایین می‌توانند بروند (در صورتی که خانه‌ی مقصد خالی باشد). چند حالت قرار دادن ماشین‌های خاکستری (به هر تعداد دل‌خواه) وجود دارد که بتوان با تعدادی حرکت، ماشین سفید را به انتهای راست سطر چهارم رساند؟ باقیمانده جواب را بر  $10$  پیدا کنید. در ضمن، ماشین‌های خاکستری هم طول هیچ تفاوتی با هم ندارند و نیز جلو و عقب ماشین‌ها هم با هم تفاوتی ندارد.



- ۳ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)      ۳ (۵)

۸ بیماری کرونا به تازگی به شهر باب اسفنجی و دوستان رسیده است. آقای خرچنگ که صاحب یک رستوران است، حاضر نیست از درآمدش بگذرد و نمی‌خواهد رستورانش را تعطیل کند. اما سازمان بهداشت دریا به او این اجازه را

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

نداده است و رستورانش باید فقط به شکل بیرون بر فعالیت کند. رستوران آقای خرچنگ به شکل یک جدول  $7 \times 7$  است و سه نفر در آن کار می‌کنند (آقای خرچنگ، اختاپوس و باب‌اسفنجی) که هر کدام در یک خانه‌ی متمایز از جدول قرار دارند. آقای خرچنگ که می‌ترسد یکی از کارکنان مریض شود و رستوران تعطیل گردد، می‌خواهد که کارکنان در ایمن‌ترین چینش ممکن رستوران کار کنند. مقدار ایمنی یک چینش مجموع فاصله‌ی منتهی دوه‌دوی کارکنان در آن چینش است. ایمن‌ترین چینش، بیشترین مقدار ممکن ایمنی را در بین تمام حالات چینش دارد. باب‌اسفنجی که عاشق چیدمان‌های جدید است، از شما می‌پرسد چند چینش ایمن‌ترین مختلف برای رستوران وجود دارد.

**توضیح:** فاصله‌ی منتهی دو خانه، برابر است با مجموع قدر مطلق تفاضل طول‌ها و قدر مطلق تفاضل عرض‌های آن دو خانه.

۱۳۳۲ (۵)      ۱۴۰۴ (۴)      ۱۱۷۶ (۳)      ۱۲۸۴ (۲)      ۱۳۵۶ (۱)

به تازگی امین وارد دنیای مین‌گذاری شده است. دنیای مین‌گذاری، یک بعدی و روی محور اعداد حقیقی است و هر مین، به صورت یک نقطه روی این محور قرار می‌گیرد. می‌دانیم که او در روز صفرم در دو نقطه‌ی ۰ و ۱ مین کاشته است. امین در هر روز، به ازای هر دو مین متوالی‌ای که در روزهای قبل در زمین کاشته است، به احتمال فاصله‌ی بین‌شان، مینی در میان‌شان می‌کارد. به بیانی دقیق‌تر، اگر  $a$  و  $b$  مکان کاشت دو مین متوالی در انتهای روز  $i - 1$  ام باشند ( $a < b$ )، امین در روز  $i$  ام به احتمال  $b - a$ ، در نقطه‌ی  $\frac{a+b}{2}$  مین می‌کارد. دقت کنید که مین‌هایی که امین در روزهای پیشین کاشته است از بین نمی‌روند و باقی می‌مانند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۹ امید ریاضی تعداد مین‌های کاشته شده از روز صفرم تا پایان روز ۱۲۸ ام چه قدر است؟

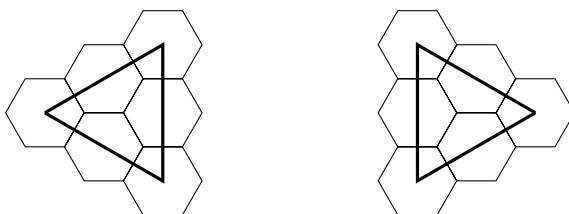
۱۲۸ (۱)      ۶۶ (۲)      ۱۳۰ (۳)      ۶۴ (۴)      ۹ (۵)

۱۰ پس از گذشت ۷ روز، به چه احتمالی در نقطه‌ی  $\frac{1}{2}$  (۰/۱۰۱۰۰) مین کاشته شده است؟ دقت کنید که عدد داده شده در مبنای ۲ نوشته شده است.

۳۸۵ (۱)       $\frac{1}{215}$  (۲)       $\frac{161}{210}$  (۳)       $\frac{129}{210}$  (۴)       $\frac{221}{217}$  (۵)

## ذهن زیبا

در کهکشان نمکستان سفینه‌های فضایی شکل خاصی دارند و از ۶ عدد شش‌ضلعی منتظم تشکیل شده‌اند که شکل آن را در پایین مشاهده می‌کنید.



همچنین در نمکستان برای فرود این سفینه‌ها، به فرودگاه خاصی نیاز است که زمین آن از شش‌ضلعی‌های منتظم (با همان اندازه‌ی شش‌ضلعی‌های سفینه‌ها) تشکیل شده باشد. برای آن که یک سفینه بتواند در جایی از یک فرودگاه فرود بیاید، باید شش‌ضلعی‌های سفینه بر شش‌ضلعی‌های فرودگاه منطبق شود و همه‌ی شش‌ضلعی‌های فرودگاه که در زیر سفینه‌اند، سالم باشند.

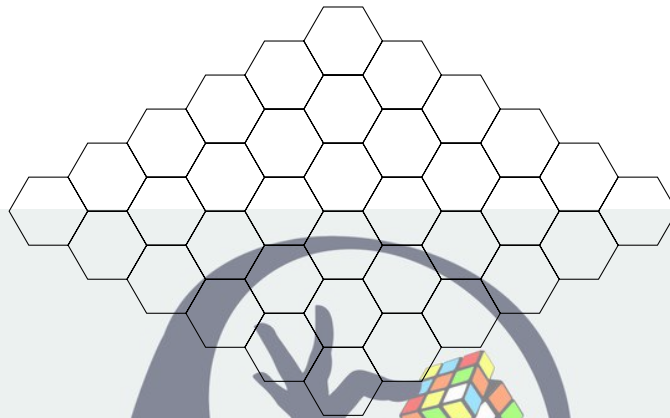
«نمکیه» و «شکریه» دو سیاره در نمکستان هستند که به تازگی وارد جنگ با هم شده‌اند. نیروی هوایی سیاره‌ی

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

نمک‌یه با یک موشک نقطه‌زن می‌تواند یکی از شش ضلعی‌های فرودگاه سیاره‌ی شکرپه را منهدم کند. هدف نیروی هوایی سیاره‌ی نمک‌یه این است که هیچ سفینه‌ای نتواند در فرودگاه فرود بیاید.

\_\_\_\_\_ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید \_\_\_\_\_

۱۱ اگر تصویر زیر نشان‌دهنده‌ی فرودگاه سیاره‌ی شکرپه باشد، نیروی هوایی نمک‌یه حداقل به چند موشک نیاز دارد؟



۵ (۵)

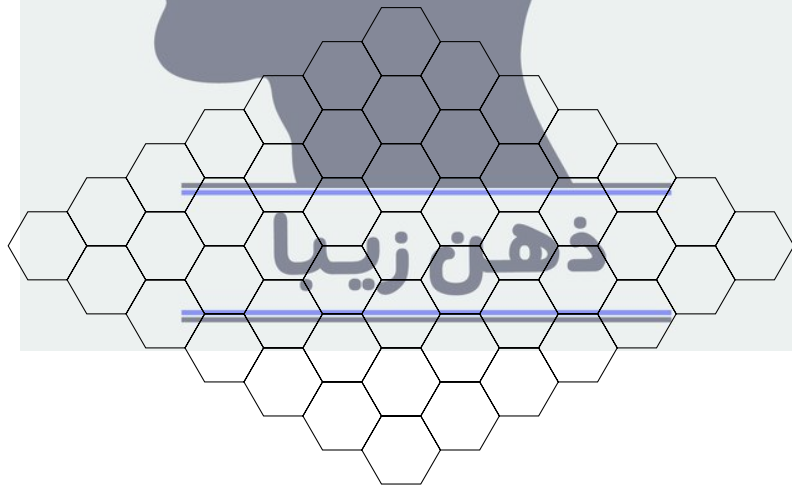
۷ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۱۲ در یک عملیات ضربتی، نیروهای خدمت‌گزار سیاره‌ی شکرپه از یک فرودگاه جدید و بزرگ‌تر مطابق شکل زیر پرده‌برداری کرده‌اند. مشابه سؤال قبلی، نیروی هوایی نمک‌یه حداقل به چند موشک نیاز دارد؟



۷ (۵)

۸ (۴)

۱۰ (۳)

۱۱ (۲)

۹ (۱)

الگوریتم زیر که  $Zip$  نام دارد، رشته‌ای دودویی (از ارقام ۰ و ۱) را به عنوان ورودی می‌گیرد و به صورت زیر اجرا می‌شود:

۱.  $S$  را مجموعه‌ای تهی در نظر بگیر و ورودی را در  $z$  بریز.
۲. اگر  $z$  یک رقمی است یا  $z \in S$ ، آن را برگردان و به پایان برس.

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۳.  $z$  را به  $S$  اضافه کن.  
 ۴. دو رقم سمت راست  $z$  را در نظر بگیر؛ اگر این دو رقم برابر باشند، رقم سمت راست  $z$  را حذف کن؛ در غیر این صورت، رقم سمت راست  $z$  را حذف کن و آن را به سمت چپ  $z$  اضافه کن.  
 ۵. به مرحله‌ی ۲ بازگرد.  
 برای مثال، اگر رشته‌ی ۱۱۱۰ را به عنوان ورودی به این الگوریتم بدهیم، مقدار  $z$  به این صورت تغییر می‌کند:

$$1110 \rightarrow 0111 \rightarrow 011 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 01$$

و در نتیجه، مقدار  $Zip(1110)$  برابر با ۰۱ می‌شود. دقت کنید که رقم سمت چپ رشته‌ی  $z$  می‌تواند صفر باشد.

\_\_\_\_\_ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید \_\_\_\_\_

۱۳ به ازای همه‌ی رشته‌های دودویی یازده رقمی ممکن، این الگوریتم چند خروجی متفاوت را برمی‌گرداند؟

- ۱۰ (۱)      ۱۲ (۲)      ۲۲ (۳)      ۵ (۴)      ۲ (۵)

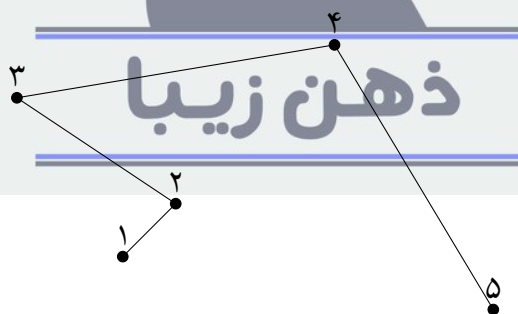
۱۴ بزرگ‌ترین مجموعه از رشته‌های دودویی یازده رقمی متمایز که خروجی الگوریتم برای همه‌ی اعضایش یکسان باشد، چه اندازه‌ای دارد؟

- ۳۳۰ (۱)      ۲۵۲ (۲)      ۵۰۴ (۳)      ۹۲۴ (۴)      ۴۶۲ (۵)

فرض کنید  $n$  نقطه‌ی متمایز در صفحه داریم. عملیات شکسته‌بندی به صورت زیر انجام می‌شود:

ابتدا نقاط با اعداد ۱ تا  $n$  شماره‌گذاری می‌شوند. سپس خطی شکسته کشیده می‌شود که به ازای هر  $i$  (برای  $1 \leq i \leq n-1$ )، نقطه‌ی شماره‌ی  $i$  را به نقطه‌ی شماره‌ی  $i+1$  متصل می‌کند.

برای مثال در شکل زیر، یک عملیات شکسته‌بندی روی پنج نقطه انجام شده است:



دو شکسته‌بندی متمایز هستند، اگر و تنها اگر شماره‌گذاری‌های متفاوتی داشته باشند.

\_\_\_\_\_ با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید \_\_\_\_\_

۱۵ ۹ نقطه‌ی متمایز در صفحه داریم که همگی روی یک دایره قرار دارند. به چند طریق می‌توان عملیات شکسته‌بندی را روی این نقاط انجام داد، طوری که خط شکسته‌ی ایجاد شده خودش را قطع نکند؟

- (۱) بسته به چینش نقاط، پاسخ متفاوت است.      ۲۳۰۴ (۲)      ۱۱۵۲ (۳)      ۲۵۶ (۴)      ۵۱۲ (۵)

## مرحله‌ی دوم سی و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور

۱۶ ۹ نقطه در صفحه داریم که هیچ سه‌تا از آن‌ها هم‌خط نیستند. هم‌چنین، هیچ چهار نقطه‌ی متمایز  $A, B, C$ ، و  $D$  از آن‌ها را نمی‌توان یافت که پاره‌خط‌های  $AB$  و  $CD$  موازی باشند. فرض کنید برای عملیات شکسته‌بندی، نقاط را به روش زیر شماره‌گذاری کنیم:

ابتدا یک محور مختصات دو بُعدی را در جهتی (زاویه‌ای) دل‌خواه تعیین می‌کنیم، با این شرط که مقدار طول  $(x)$  هیچ دو نقطه‌ای برابر نباشد. سپس نقاط را طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که هر نقطه‌ی با طول  $(x)$  بیش‌تر، شماره‌ی بیش‌تری داشته باشد.

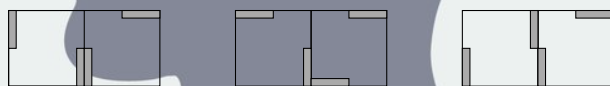
با این روش، چند شکسته‌بندی متمایز می‌توان انجام داد؟

(۱) ۷۲ (۲) ۳۶ (۳) ۹۰ (۴) ۱۸ (۵) بسته به چینش نقاط، پاسخ متفاوت است.

کاخ آبولف به شکل جدولی  $10 \times 10$  است. در هر خانه از این جدول، دو دریچه وجود دارد که بر دو گوشه‌ی مقابل از آن خانه نصب شده‌اند. هر دریچه می‌تواند با چرخش  $90^\circ$  درجه‌ای (حول گوشه‌ای که بر آن نصب شده)، از حالت افقی به عمودی یا برعکس، تغییر وضعیت بدهد. برای مثال در شکل زیر، با چرخش دریچه‌ای که به گوشه‌ی بالا چپ خانه‌ی جدول متصل است، می‌توانیم از وضعیت سمت چپ به وضعیت سمت راست برسیم:

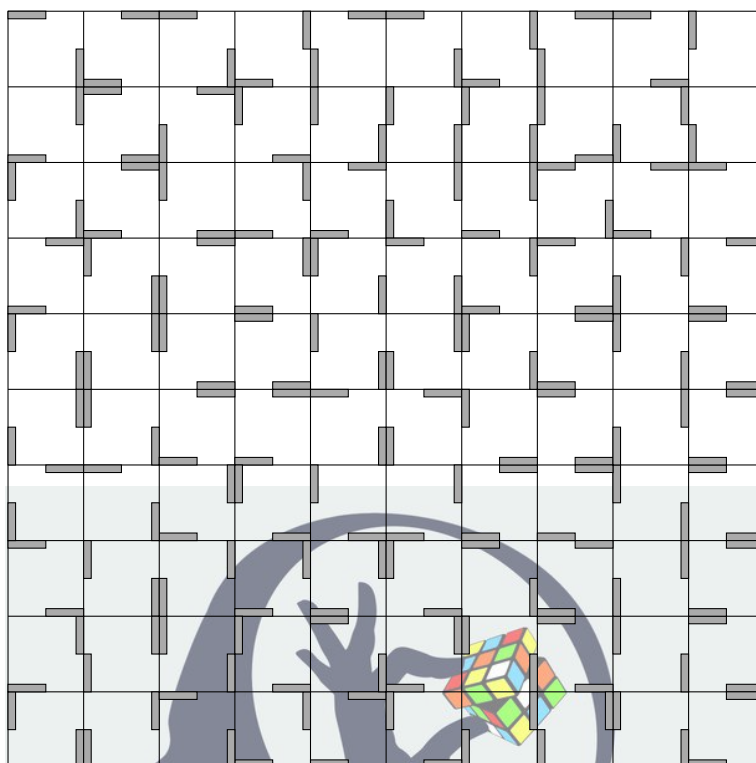


در صورتی که دو خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک) دو دریچه‌ی کاملاً به هم چسبیده (و با نصب در گوشه‌ی یکسان) داشته باشند، یک فرد می‌تواند از یکی از این خانه‌ها به دیگری برود. برای مثال در شکل زیر، در حالت سمت چپ امکان جابه‌جایی بین دو خانه وجود دارد، اما در دو حالت دیگر خیر:



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ در شکل زیر، آبولف در خانه‌ی پایین چپ جدول قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی بالا راست برود. او هر زمان که بخواهد، می‌تواند یکی از دریچه‌های یکی از خانه‌ها را انتخاب کند و به مأمور آن دریچه دستور دهد که آن را بچرخاند (لزومی ندارد دریچه‌ی انتخاب شده در خانه‌ی فعلی آبولف باشد). آبولف حداقل چند دستور باید بدهد تا بتواند به مقصد برسد؟



۲۰ (۵)

۱۷ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۹ (۱)

۱۸ در بازسازی کاخ، آبولف می‌خواهد تمام دریچه‌ها را بردارد و برای خانه‌ها از نو دریچه بگذارد (هم‌چنان برای هر خانه، باید دو دریچه در دو گوشه‌ی مقابل، هر یک به صورت افقی یا عمودی، قرار داده شود). او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، طوری که از هر خانه بتوان با تعدادی گام به هر خانه‌ی دیگر رسید (می‌توان دریچه‌ها را حین پیمودن مسیر هم چرخاند)؟

۳ × ۲۳۰۰ (۵)

۲۳۰۰ (۴)

۲۲۰۰ (۳)

۲۱۰۱ (۲)

۲۲۰۱ (۱)

**ذهن زیبا**

کلید اولیہ آزمون مرحلہ دوم بیست و چہارمین المپیاد کامپیوتر

سؤال (۱) ۱ و ۳ (ہر دو گزینہ پذیرفتہ می شود).

سؤال (۲) ۴

سؤال (۳) ۳

سؤال (۴) حذف

سؤال (۵) ۵

سؤال (۶) ۳

سؤال (۷) ۱

سؤال (۸) ۲

سؤال (۹) ۳

سؤال (۱۰) حذف

سؤال (۱۱) ۲

سؤال (۱۲) ۴

سؤال (۱۳) ۲

سؤال (۱۴) ۵

سؤال (۱۵) ۳

سؤال (۱۶) ۱

سؤال (۱۷) ۳

سؤال (۱۸) ۱

