

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت

سوال ۱ ۱۰ امتیاز

در یک مهمانی n نفر حضور دارند. هر یک از این افراد با k نفر از بقیه‌ی مهمان‌ها دست می‌دهد (k یک عدد ثابت بین ۱ و $n-1$ است). می‌دانیم که لااقل $1 + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم دست داده‌اند. ثابت کنید که در این مهمانی هر دو نفری با هم دست داده‌اند.

سوال ۲ ۱۰ امتیاز

دو نفر با هم یک بازی را به این صورت انجام می‌دهند:
دو نفر به طور متناوب ارقام یک عدد $2k$ رقمی را روی کاغذ می‌نویسند، بدین معنی که ابتدا نفر اول رقم اول، سپس نفر دوم رقم دوم، سپس نفر اول رقم سوم، ... و در k امین دور بازی نفر اول رقم $2k-1$ ام و نفر دوم رقم $2k$ ام این عدد را می‌نویسند. هر یک از این افراد در نوبت خود تنها می‌توانند یکی از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، و یا ۵ را بنویسند.
در صورتی که عدد $2k$ رقمی حاصل بر ۹ بخش‌پذیر باشد، نفر دوم، و در غیر این صورت نفر اول برنده‌ی این بازی است.
برای چه مقادیری از k نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که در این بازی برنده شود؟ ادعای خود را ثابت کنید.

سوال ۳ امتیاز ۱۰

سه میله با شماره‌های ۱، ۲، و ۳ و n مهره‌ی سوراخ‌دار با شماره‌های ۱ تا n داریم. مهره‌های زوج قرمز و مهره‌های فرد آبی هستند. هر مهره فقط می‌تواند روی مهره‌ی بزرگتر و غیرهمرنگ با خود قرار بگیرد. همچنین بزرگترین مهره‌ی میله‌ی شماره‌ی ۱ و ۲ باید آبی و بزرگترین مهره‌ی میله‌ی شماره‌ی ۳ باید قرمز باشد. با این قواعد به چند طریق می‌توان این مهره‌ها را روی میله‌ها قرار داد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

موفق باشید.

