مسئله‌ی اول: تقسیم پول .... ۱۰ امتیاز

مقداری پول را بین n نفر تقسیم کرده‌ایم. عدد طبیعی k را در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم کاری کنیم که اختلاف مقدار پولی که این افراد دارند از k تومان بیشتر نباشد. برای این کار عمل زیر را انجام می‌دهیم:

- دو نفر مانند a و b پیدا می‌کنیم که a حداقل $k+1$ تومان بیشتر از b پول داشته باشد. سپس a را مجبور می‌کنیم که k تومان به b بدهد.

این کار را تا وقتی که چنین دو نفری وجود داشته باشند، تکرار می‌کنیم. ثابت کنید به هر ترتیبی که این کار را انجام دهیم، بالاخره به حالتی خواهیم رسید که هیچ دو نفری وجود نداشته باشند که اختلاف مقدار پول‌شان از k تومان بیشتر باشد.

مسئله‌ی دوم: بازی .... ۱۰ امتیاز

دو نفر این بازی را با تعدادی سنگ‌ریزه انجام می‌دهند: در ابتدا، n سنگ‌ریزه موجود است ($n > 1$). با توجه به قاعده‌ی زیر، دو نفر به ترتیب، یک در میان، از این سنگ‌ریزه‌ها برمی‌دارند. قاعده‌ی بازی به این صورت است که در اولین حرکت، بازی‌کن می‌تواند به هر تعدادی که بخواهد از این سنگ‌ریزه‌ها بردارد؛ ولی باید حداقل یک، و حداکثر $n-1$ سنگ‌ریزه بردارد. پس از آن هر بازی‌کن در نوبت خودش، می‌تواند حداقل یک، و حداکثر به اندازه‌ی تعدادی که بازی‌کن دیگر در حرکت قبل برداشته، سنگ‌ریزه بردارد. برای مثال، اگر بازی‌کن اول، در اولین حرکت‌اش ۲ سنگ‌ریزه بردارد، در حرکت بعد، بازی‌کن دوم می‌تواند ۱ یا ۲ سنگ‌ریزه بردارد.

برنده‌ی بازی کسی خواهد بود که آخرین سنگ‌ریزه را بردارد.

الف) ثابت کنید اگر $n = 6$ باشد، نفر اول (کسی که بازی را شروع کرده است) می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود؛ یعنی نفر اول می‌تواند به‌گونه‌ای بازی کند که اگر نفر دوم در هر مرحله بهترین حرکتی که می‌تواند را انجام دهد، نفر اول برنده شود.

ب) ثابت کنید که در حالت کلی اگر n توانی از دو باشد، نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که همواره برنده شود، و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود.

مسئله‌ی سوم: مسیر فراگیر .... ۱۵ امتیاز

یک شبکه‌ی $m \times n$ شامل mn نقطه است که مطابق شکل زیر در m ردیف و n ستون قرار گرفته‌اند.

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{matrix}$$

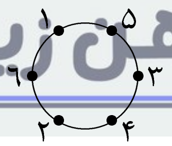
یک مسیر فراگیر در این شبکه، مسیری است که از نقطه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ آغاز شده، از هر نقطه‌ی شبکه دقیقاً یک بار عبور کند، و به نقطه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت راست شبکه برسد. در طی این مسیر تنها مجازیم که از هر نقطه به یکی از نقاط سمت راست، چپ، بالا، یا پایین آن (در صورت وجود) برویم.

ثابت کنید که مسیر فراگیر تنها در صورتی وجود دارد که دست‌کم یکی از m و n فرد باشد.

مسئله‌ی چهارم: اعداد روی دایره .... ۱۵ امتیاز

$2n$ نقطه محیط یک دایره را به $2n$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. A' را نقطه‌ی مقابل نقطه‌ی A می‌نامیم، اگر AA' یک قطر دایره باشد. می‌خواهیم هر یک از عددهای ۱ تا $2n$ را روی یکی از این نقاط بنویسیم (هر نقطه یک عدد) به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متوالی روی دایره مانند A و B، اگر نقطه‌های مقابل این دو نقطه به ترتیب A' و B' باشد، مجموع عددهای نوشته‌شده روی A و B، با مجموع عددهای نوشته شده روی A' و B' برابر باشد.

برای مثال شکل زیر یک جواب مسئله برای حالت $n = 3$ است.



الف) ثابت کنید که اگر n یک عدد فرد باشد، این کار همواره ممکن است.

ب) ثابت کنید که اگر n یک عدد زوج باشد، این کار ممکن نیست.

مسئله‌ی پنجم: فرش‌ها .... ۱۰ امتیاز

یک اتاق به شکل مستطیل را با تعدادی فرش مستطیل شکل پوشانده‌ایم؛ به طوری که هر نقطه از کف اتاق توسط دقیقاً یک فرش پوشانده شده است.

ثابت کنید مجموع عرض این فرش‌ها از عرض اتاق کم‌تر نیست. منظور از عرض یک مستطیل، اندازه‌ی کوتاه‌ترین ضلع آن است.

مسئله‌ی ششم: پیچ‌ها و مهره‌ها .... ۱۰ امتیاز

n پیچ و n مهره که از نظر ظاهری شبیه به هم هستند، داده شده‌اند. می‌دانیم که هر پیچ تنها به یک مهره می‌خورد (با آن هم‌اندازه است) و هیچ دو پیچی هم‌اندازه نیستند.

عمل «آزمون» یعنی برداشتن یک پیچ و یک مهره و امتحان کردن آن‌ها. با این کار تشخیص می‌دهیم که پیچ از مهره بزرگ‌تر است، مهره از پیچ بزرگ‌تر است، یا این که هر دو هم‌اندازه هستند.

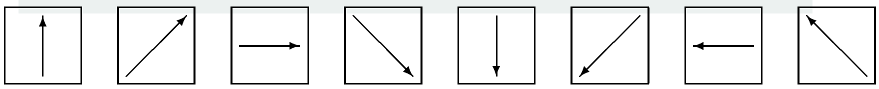
می‌خواهیم با انجام تعدادی عمل «آزمون»، کوچک‌ترین پیچ و کوچک‌ترین مهره (که مسلماً به هم می‌خورند) را پیدا کنیم. توجه کنید که نمی‌توان دو مهره یا دو پیچ را مستقیماً با هم مقایسه کرد.

الف) نشان دهید که برای $n = ۲$ مسئله را در بدترین حالت می‌توان با دو آزمون حل کرد.

ب) روشی ارائه دهید تا بتوان مسئله را در حالت کلی با $۲n - ۲$ آزمون حل کرد.

مسئله‌ی هفتم: فلش‌ها .... ۱۵ امتیاز

در هر یک از خانه‌های یک جدول ۱۰۰۰×۱۰۰۰، یک فلش رسم شده است. هر فلش یکی از هشت جهت زیر را نشان می‌دهد.

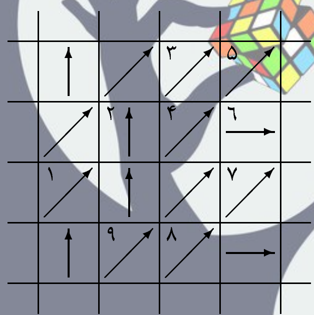


۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

دو خانه از این جدول مجاور به حساب می‌آیند، اگر دست‌کم در یک رأس مشترک باشند. (بنابراین هر یک از خانه‌های این جدول حداکثر ۸ خانه‌ی مجاور دارد.) می‌دانیم که جهت فلش‌های کشیده‌شده در دو خانه‌ی مجاور حداکثر به اندازه‌ی ۴۵ درجه با هم

اختلاف دارند. یعنی برای مثال اگر فلش یک خانه به شکل ۱ (مطابق با شکل فوق) باشد، فلش هر یک از خانه‌های مجاورش به یکی از سه شکل ۱، ۲، یا ۸ است.

الف) از یک خانه‌ی دل‌خواه این جدول شروع به حرکت می‌کنیم و در هر مرحله، به یکی از خانه‌های مجاور خانه‌ای که در آن هستیم، می‌رویم. با توجه به شرایط مسئله، جهت فلش خانه‌ای که به آن می‌رویم نسبت به جهت فلش خانه‌ای که در آن هستیم، به اندازه‌ی -۴۵، ۰، یا ۴۵ درجه در جهت عقربه‌های ساعت اختلاف دارد. مقدار این اختلاف درجه را یادداشت می‌کنیم. برای مثال، اگر شکل زیر نشان‌دهنده‌ی قسمتی از جدول باشد و به ترتیب خانه‌های ۱ تا ۹ را طی کرده و به خانه‌ی ۱ بازگردیم، به ترتیب عددهای -۴۵، ۴۵، ۰، ۴۵، -۴۵، ۰، ۰، و ۰ را یادداشت خواهیم کرد.



ثابت کنید اگر پس از طی چند مرحله به خانه‌ای که حرکت را از آن‌جا آغاز کرده بودیم برسیم، مجموع عددهایی که یادداشت کرده‌ایم، برابر با صفر خواهد بود.

ب) حال می‌خواهیم در این جدول با توجه به جهت فلش‌ها حرکت کنیم؛ به این صورت که از یک خانه‌ی دل‌خواه جدول شروع می‌کنیم و در هر مرحله اگر در خانه‌ی a باشیم، به خانه‌ی مجاوری می‌رویم که فلش a به سمت آن اشاره می‌کند. اگر a کنار جدول باشد و فلش آن به سمت خارج از جدول اشاره کند، از جدول خارج می‌شویم. ثابت کنید که با این نحوه‌ی حرکت بالاخره از جدول خارج خواهیم شد.

مسئله‌ی هشتم: ماتریس عجیب .... ۱۵ امتیاز

یک ماتریس به ابعاد $(n+1) \times n^2$ (n^2 سطر و $n+1$ ستون) داده شده است. این ماتریس با اعداد ۱ تا n پر شده است، به طوری که برای هر دو ستون این ماتریس، اگر عناصر این دو ستون را در کنار هم بنویسیم، هر یک از n^2 زوج ممکن از عددهای ۱ تا n را در یک

سطر می‌بینیم. برای مثال، برای $n = ۲$، ماتریس زیر دارای چنین خاصیتی است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

ثابت کنید هر دو سطر این ماتریس دقیقاً در یک درایه‌ی متناظر، با هم برابرند؛ یعنی برای هر دو سطر دل‌خواه i و j، فقط یک ستون وجود دارد که مقادیر درایه‌های سطر iام و سطر jام در آن یکسان باشند.