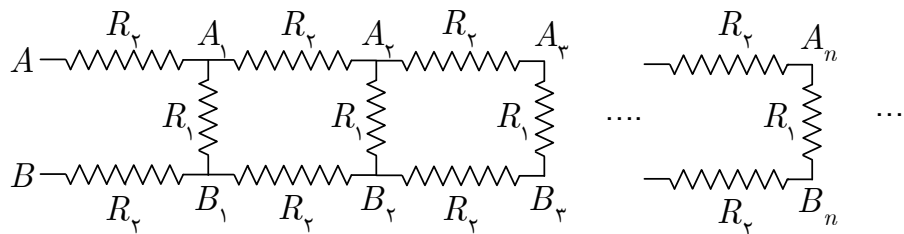
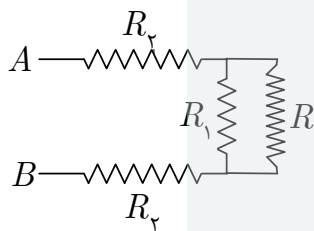




۱) در مدار شکل ۱، الگوی مقاومت های $R_p - R_1 - R_p$ بین دو نقطه A و B بی نهایت بار تکرار می شود.



شکل ۱



شکل ۲

چون الگوی سه مقاومت تا بی نهایت تکرار می شود مقاومت دو سر مدار با اضافه شدن یک الگوی اضافه در ابتدای آن تغییری نمی کند. یعنی اگر مقاومت دو نقطه A و B برابر R باشد، مدار شکل ۱ معادل مدار شکل ۲ می شود.

آ) مقاومت R بین دو نقطه A و B را بر حسب R_1 و R_p به دست آورید.

در بخش های زیر فرض کنید منبع ولتاژ V_0 را به دو سر A و B وصل کرده ایم.

ب) ولتاژ V_1 بین A_1 و B_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0 ، R_1 و R_p چقدر است؟

پ) ولتاژ بین A_n و B_n روی دو سر n امین R_1 در مدار شکل ۱ بر حسب V_0 ، R_1 ، R_p و n چقدر است؟

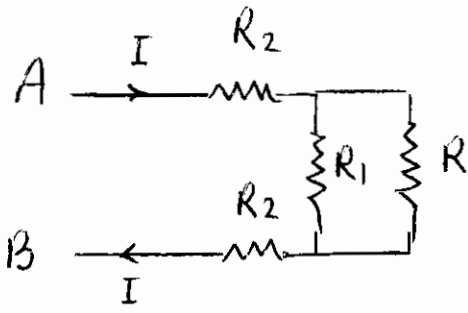
ت) مجموع توان مصرفی در تمام مقاومت های R_1 را با P_1 نشان می دهیم. P_1 را بر حسب V_0 ، R_1 و R_p به

دست آورید.

ث) با فرض آن که $x = \frac{R_1}{R_p}$ و $y = \frac{P_1}{P}$ که P توان کل مصرفی در مدار است، رابطه y بر حسب x را به

دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

(1) مسئله



$$R = 2R_2 + \frac{RR_1}{R+R_1} \quad (1)$$

$$R^2 - 2R_2R - 2R_1R_2 = 0$$

$$R = R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2} \quad (1)$$

$$I = \frac{V_0}{R}, \quad V_{A_1B_1} = V_0 - 2R_2I \quad (2)$$

$$V_1 = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)$$

$$V_2 \equiv V_{A_2B_2} = V_1 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right) = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2 \quad (3)$$

$$V_n \equiv V_{A_nB_n} = V_0 \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^n$$

(ت) توان مصرفی در n امین R_1 ها $P_n^{(R_1)}$ است

$$P_n^{(R_1)} = \frac{V_n^2}{R_1} = \frac{V_0^2}{R_1} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n}$$

ذهن زیبا

و مجموع توان مصرفی در R_1 ها

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(R_1)} = \frac{V_0^2}{R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^{2n} = \frac{V_0^2}{R_1} \frac{\left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{2R_2}{R}\right)^2} \quad (4)$$

$$P_1 = \frac{V_0^2 (R_1 + R_2 - \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2})}{2R_1 \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

با قرار دادن R از معادله (1) در (4) و ساده کردن جواب

$$P = \frac{V_0^2}{R} = \frac{V_0^2}{R_2 + \sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}}$$

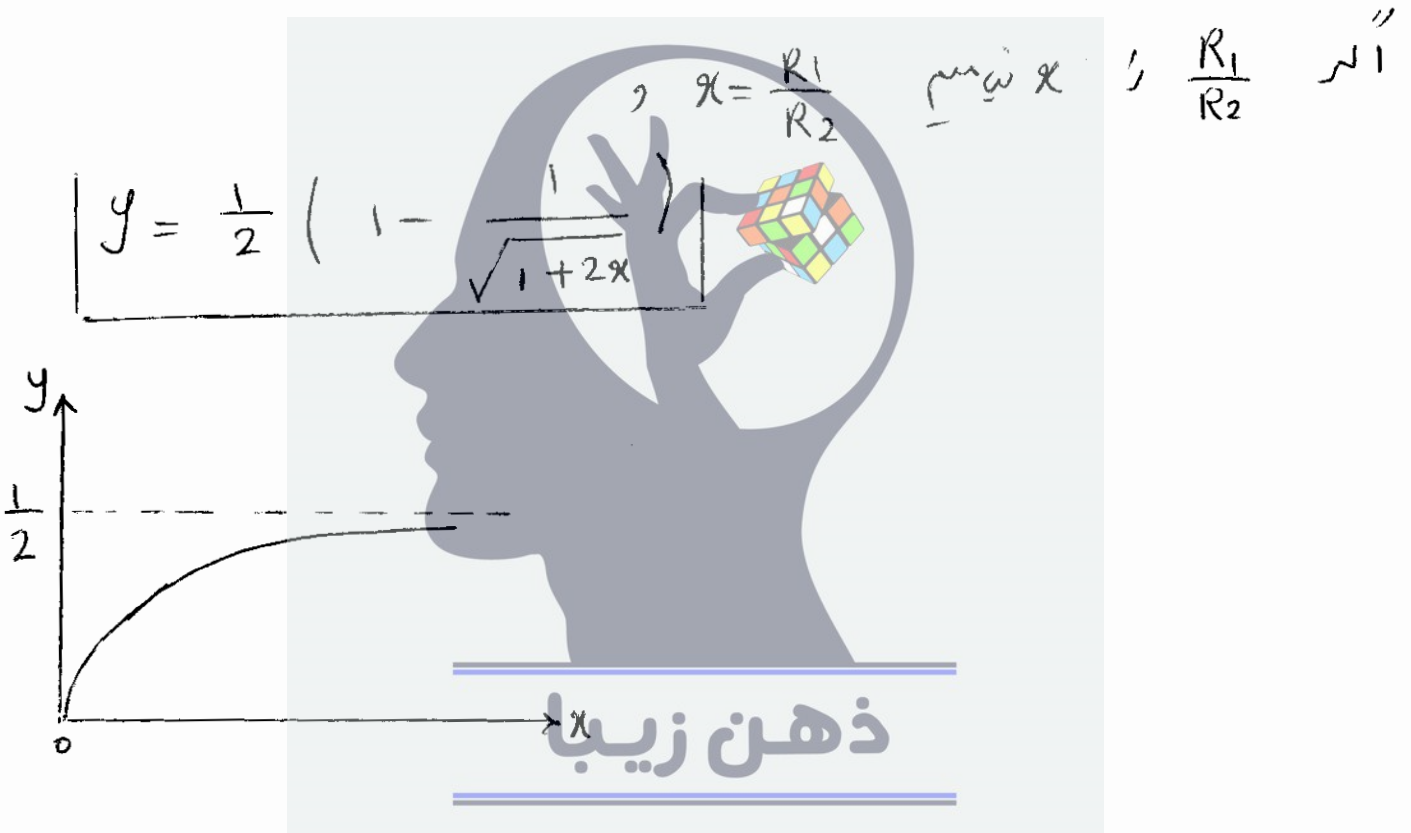
توان کل مصدقی در مدار

$$y = \frac{P_1}{P}$$

نسبت توان برگردانده شده y در معادله

به نسبت توان ورودی

$$y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + 2R_1R_2}} \right)$$





۲) در پدیده دوپلر اگر یک چشمه صوتی متحرک با بسامد f_s با سرعت لحظه‌ای v_s حرکت کند، بسامد دریافت شده

توسط یک گیرنده ساکن $f = f_s \frac{u}{u \pm v_s}$ است که u سرعت صوت در هوای ساکن است و علامت مثبت برای

وضعیتی است که چشمه از گیرنده دور می‌شود و علامت منفی برای وضعیتی است که چشمه به گیرنده نزدیک می‌شود.

در صورتی که سرعت چشمه با زمان تغییر کند باید توجه داشت که اگر صوت با بسامد f_s در لحظه t' از چشمه منتشر

شود، در لحظه متفاوت t توسط گیرنده دریافت می‌شود. در این حالت v_s در فرمول بالا سرعت چشمه در لحظه t'

است و f بسامد دریافت شده توسط گیرنده در لحظه t است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی با بسامد f_s از ارتفاع h از سطح زمین در لحظه $t' = 0$ از حال سکون رها شود.

گیرنده‌ای درست زیر آن روی سطح زمین قرار دارد و بسامد $f(t)$ دریافت شده بر حسب زمان را اندازه‌گیری می‌کند.

فرض کنید چشمه در زمان t' بعد از رها شدن، صوت با بسامد f_s منتشر می‌کند. شتاب گرانش را g بگیرید و از نیروی

مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

آ) زمان t' را بر حسب u, g, h و t به دست آورید.

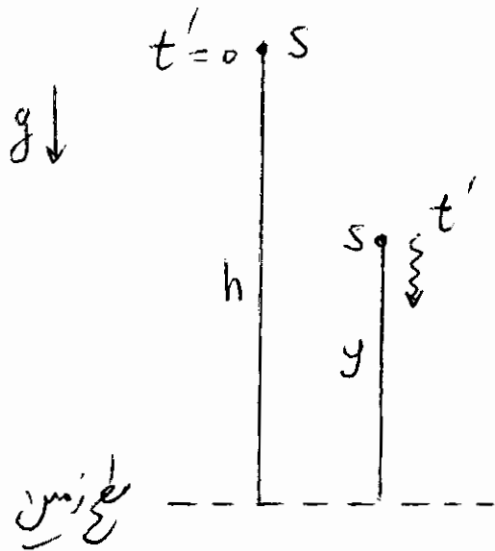
ب) سرعت چشمه در زمان t' یعنی $v_s(t')$ را بر حسب u, g, h و t به دست آورید.

پ) بسامد اندازه‌گیری شده توسط گیرنده روی زمین در زمان t ، یعنی $f(t)$ را بر حسب f_s, u, g, h و t به

ذهن ریز

دست آورید. فرض کنید سرعت چشمه همواره کمتر از سرعت صوت است.

ت) نشان دهید $\frac{1}{f^2} = A + Bt$ و A و B را بر حسب f_s, u, g, h تعیین کنید.



مسئله (۲)
 (۱) ضربه در لحظه $t'=0$ در ارتفاع h از سطح زمین

و در لحظه t' در ارتفاع y از سطح زمین است

و سرعت آن v_s است

$$v_s = gt' \quad \text{و} \quad y = h - \frac{1}{2}gt'^2$$

صوت در لحظه t' ارسال می شود و در لحظه t

بناگه برنده دور زمین می رود

$$t = t' + \frac{y}{u}$$

از دو معادله اخذ

$$gt'^2 - 2ut' + 2ut - 2h = 0$$

$$t' = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 2gh - 2ugt}}{g}$$

$$v_s(t) = u - \sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}$$

(ب)

$$f(t) = f_s \frac{u}{u - v_s(t)}$$

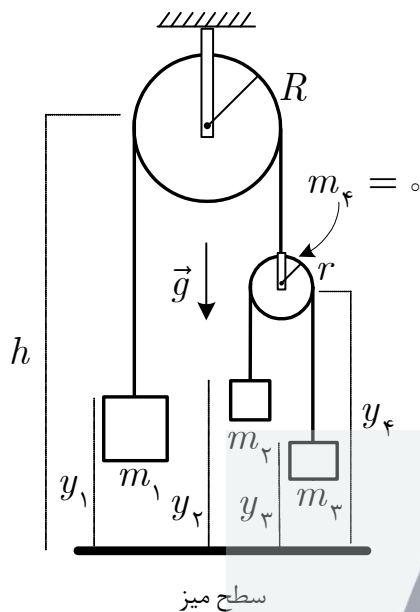
ذهن زیبا

(پ)

$$f(t) = f_s \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2g(h - ut)}}$$

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{f_s} \left(1 + \frac{2gh}{u^2} - \frac{2gt}{u} \right) \quad \text{در نتیجه}$$

$$A = \frac{1}{f_s} \left(1 + \frac{2gh}{u^2} \right), \quad B = -\frac{2g}{uf_s}$$



۳) سه جسم به جرم های m_1 ، m_2 و m_3 به یک مجموعه نخ و قرقره مطابق شکل متصل اند. قرقره متحرک را جسم چهارم به جرم $m_4 = 0$ در نظر بگیرید. قرقره ثابت و نخ ها نیز بدون جرم هستند. شتاب گرانش g ، شعاع قرقره ثابت R ، شعاع قرقره متحرک r ، طول نخ روی قرقره ثابت D و طول نخ روی قرقره متحرک d است. در لحظه $t = 0$ در حالی که جرم ها در فواصل اولیه y_{1_0} ، y_{2_0} ، y_{3_0} و y_{4_0} از سطح میز قرار دارند، دستگاه از حالت سکون رها می شود. شتاب این چهار جسم نیز به ترتیب a_1 ، a_2 ، a_3 و a_4 است.

آ) ارتفاع جرم ها از سطح میز در لحظه دلخواه t را به ترتیب y_1 ، y_2 ، y_3 و y_4 بگیرید. D و d را بر حسب این کمیت ها، h فاصله مرکز قرقره ثابت از سطح میز، R و r بنویسید.

ب) در روابطی که در قسمت آ به دست آوردید، به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ ، هر کدام از y_i ها را بر حسب زمان، شتاب مربوطه a_i و فاصله اولیه از سطح میز y_{i_0} بنویسید.

پ) روابط قسمت ب را برای لحظه $t = 0$ بنویسید و با ترکیب نتیجه به دست آمده با روابط قسمت ب، دو رابطه مستقل بین شتاب ها به دست آورید.

ت) قانون دوم نیوتون را برای جرم های m_1 ، m_2 ، m_3 و قرقره متحرک بنویسید و با استفاده از رابطه بین شتاب ها که در قسمت پ به دست آوردید، کلیه شتاب ها و کشش نخ ها را بر حسب جرم ها و شتاب گرانش به دست آورید.

ث) جسم m_2 چه شرطی باید داشته باشد تا شتاب حرکتش نسبت به میز رو به بالا باشد؟

ذهن زیبا



ج) با فرض $y_{۳۰} = y_{۲۰}$ ، مدت زمانی که طول می کشد تا لبه بالایی جسم m_p هم تراز با پایین ترین نقطه قرقره

متحرک شود، چقدر است؟



(۳) سینه

$$\begin{cases} D = (h - y_1) + \pi R + (h - y_4) \\ d = (y_4 - y_2) + \pi R + (y_4 - y_3) \end{cases}$$

(۲)

$$\begin{cases} D = (h - \frac{1}{2} a_1 t^2 - y_{10}) + \pi R + (h - \frac{1}{2} a_4 t^2 - y_{40}) \\ d = (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_2 t^2 - y_{20}) + \pi R + (\frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - \frac{1}{2} a_3 t^2 - y_{30}) \end{cases}$$

(۱)

ب) روابط قسمت آ) برار کنیم $t=0$ نیز به دست می آید

$$D = (h - y_{10}) + \pi R + (h - y_{40})$$

$$d = (y_{40} - y_{20}) + \pi R + (y_{40} - y_{30})$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} a_1 t^2 - \frac{1}{2} a_4 t^2 = 0 \\ a_4 t^2 - \frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_3 t^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

از معادله ب) روابط قسمت ب) به دست می آید

$$a_1 + a_4 = 0$$

$$\Rightarrow -2a_1 - a_2 - a_3 = 0$$

$$2a_4 - a_2 - a_3 = 0 \quad (1)$$



ج) نمودار جسم آزاد

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 a_1 & (2) \\ T' - m_2 g &= m_2 a_2 & (3) \\ T' - m_3 g &= m_3 a_3 & (4) \\ T - 2T' - (0)g &= (0)a_4 & (5) \end{aligned}$$

$$T' = T/2$$

اگر معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به ترتیب در $m_1 m_2$ ، $m_1 m_3$ و $2m_2 m_3$ ضرب و جمع بگیریم

لشیم و با توجه به (۱) خواهیم داشت

$$2 m_2 m_3 (T - m_1 g) + m_1 m_3 (T/2 - m_2 g) + m_1 m_2 (T/2 - m_3 g) = 0$$

$$T = \frac{8 m_1 m_2 m_3 g}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3} \quad , \quad T' = \frac{T}{2}$$

با قرار دادن T و T' در معادلات (۲) و (۳) و (۴)؛

$$a_1 = \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_4 = -a_1$$

$$a_2 = \frac{3m_1m_3 - m_1m_2 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$a_3 = \frac{3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3}{m_1m_2 + m_1m_3 + 4m_2m_3} g$$

$$\frac{3}{m_2} > \frac{1}{m_3} + \frac{4}{m_1}$$

ث (ب) بار این $a_2 > 0$ و $a_4 < 0$

$$y_{20} + \frac{1}{2}(d - \pi r) = y_{40} \quad ; \quad y_{20} = y_{30}$$

(ج) وقتی

$$y_2(t) = y_4(t) - r$$

ی خواص

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + y_{20} = \frac{1}{2} a_4 t^2 + y_{40} - r$$

$$(a_2 - a_4) t^2 = d - r(2 + \pi)$$

درستی

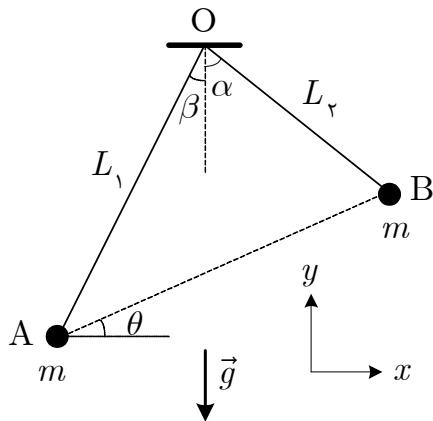
$$2 (m_1 m_3 - m_1 m_2) g t^2 = d - r(2 + \pi)$$

$$m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3$$

که $m_3 > m_2$ و $a_2 > 0$

$$t = \sqrt{\frac{d - r(2 + \pi)}{2g} \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}{m_1 (m_3 - m_2)}}$$

در نتیجه



۴) دو گلوله کوچک هر یک به جرم m دارای بار الکتریکی هم‌نام هستند و مطابق شکل به دو نخ بسیار سبک به طول‌های L_1 و L_2 متصل‌اند. دو انتهای دیگر نخ‌ها به تکیه‌گاهی واقع در نقطه O بسته شده‌اند. مقدار بار الکتریکی روی گلوله‌ها به گونه‌ای است که دستگاه در حضور نیروی دافعه الکتریکی بین بارها و نیروی گرانش در حالت تعادل است و زاویه α معلوم است.

آ) قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y برای هر یک از گلوله‌ها بر حسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α ، β ، θ ، اندازه نیروی دافعه کولنی F ، mg و نیروی کشش نخ‌ها بنویسید.

ب) با استفاده از معادلات قسمت آ، $\tan \theta$ را بر حسب توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β به دست آورید.

پ) طول پاره خط AB را d بنامید. $d \cos \theta$ و $d \sin \theta$ را بر حسب L_1 ، L_2 و توابع مثلثاتی زاویه‌های α و β بنویسید.

ت) زاویه β را بر حسب $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویه α به دست آورید.

ذهن زیبا

ث) نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها را بر حسب mg ، $\frac{L_2}{L_1}$ و توابع مثلثاتی زاویه α به دست آورید.

ج) به ازای $\frac{L_2}{L_1} = 1$ نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها چقدر است؟



چ) فرض کنید طول نخ‌ها به اندازه‌ای است که $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $\beta = \frac{\pi}{6}$ باشد. نیروی کشش هر کدام از نخ‌ها و اندازه

نیروی دافعه کولنی را بر حسب mg به دست آورید.



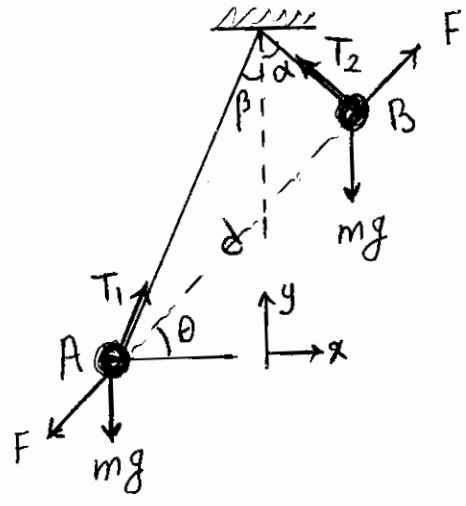
مسئله ۴

بار جرم m است راستی

x: $F \cos \theta - T_2 \sin \alpha = 0$ (۱)
 y: $F \sin \theta + T_2 \cos \alpha - mg = 0$ (۲)

بار جرم m است چپ

x: $-F \cos \theta + T_1 \sin \beta = 0$ (۳)
 y: $-F \sin \theta + T_1 \cos \beta - mg = 0$ (۴)



با تکرار دایره T_2 از معادله (۱) و معادله (۲)

$F (\sin \theta + \cos \theta \cot \alpha) = mg$ (۵)

و با تکرار دادن T_1 از معادله (۳) و معادله (۴)

$F (-\sin \theta + \cos \theta \cot \beta) = mg$ (۶)

از تقسیم معادلات (۵) و (۶)

$\tan \theta = \frac{1}{2} (\cot \beta - \cot \alpha)$ (۷)

ذهن زیبا

$d \sin \theta = L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha$
 $d \cos \theta = L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha$

از تقسیم دو معادله

$\tan \theta = \frac{L_1 \cos \beta - L_2 \cos \alpha}{L_1 \sin \beta + L_2 \sin \alpha}$ (۸)

از مساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و پس از ساده کردن

$\sin \beta = \frac{L_2 \sin \alpha}{L_1}$ (۹)

ث) با تکرار راجع $\sin\beta$ از معادله (۹) در معادله (۷)

$$\tan\theta = \frac{1}{2\sin\alpha} \left(\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2\alpha} - \cos\alpha \right) \quad (10)$$

با حذف F بین دو معادله (۱) و (۲)

$$T_2 = \frac{mg}{\tan\theta \sin\alpha + \cos\alpha} \quad (11)$$

و با حذف F بین دو معادله (۳) و (۴) و استفاده از معادله (۷)

$$T_1 = \frac{mg}{\tan\theta \sin\alpha + \cos\alpha} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad (12)$$

با تکرار راجع (۱۰) در (۱۱)

$$T_2 = \frac{2mg}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2\alpha} + \cos\alpha} \quad (13)$$

با تکرار راجع (۱۰) در (۱۲) و استفاده از معادله (۹)

$$T_1 = \frac{2mg \left(\frac{L_1}{L_2}\right)}{\frac{L_1}{L_2} \sqrt{1 - \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \sin^2\alpha} + \cos\alpha} \quad (14)$$

ع) به اِز ان $L_1 = L_2$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

ب) به اِز ان $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، $\beta = \frac{\pi}{6}$ از معادله (۹) خواصم داشت

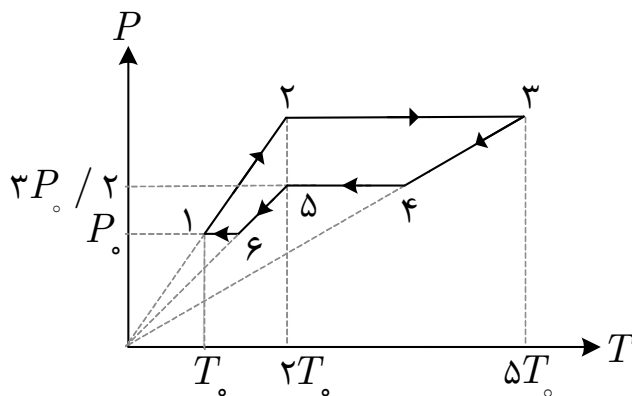
$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

با تکرار راجع $\frac{L_2}{L_1}$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) و $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$T_2 = \frac{2mg}{\sqrt{3 - \sin^2\alpha} + \cos\alpha} = mg \quad , \quad T_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{\sqrt{3 - \sin^2\alpha} + \cos\alpha} = \sqrt{3}mg$$

از معادله (۱۰) به دست می آید $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و در نتیجه

$$F = T_2 = mg$$



(۵) چرخه ۱۲۳۴۵۶۱ در شکل مقابل، فرآیند n مول گاز

کامل تک اتمی را نشان می‌دهد. کمیت‌های T_0 و P_0

معلوم‌اند. ثابت گازها R است. انرژی داخلی n مول

گاز کامل تک‌اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است.

(آ) چرخه را در صفحه $P-V$ رسم کنید و

مختصات (P, V, T) نقاط متناظر با شش نقطه نشان داده شده در نمودار فوق را به دست آورید.

(ب) کار کل انجام شده روی گاز را در چرخه کامل بر حسب n ، R و T_0 به دست آورید. این کار مثبت است یا

منفی؟

(پ) در کدام یک از فرآیندهای $۱ \rightarrow ۲$ ، $۲ \rightarrow ۳$ ، $۳ \rightarrow ۴$ ، $۴ \rightarrow ۵$ ، $۵ \rightarrow ۶$ و $۶ \rightarrow ۱$ گاز از محیط گرما

می‌گیرد؟ مجموع گرماهای داده شده از محیط به گاز در این چرخه را بر حسب n ، R و T_0 به دست آورید.

(ت) اگر این چرخه مربوط به یک ماشین گرمایی باشد، بازده این ماشین گرمایی چقدر است؟

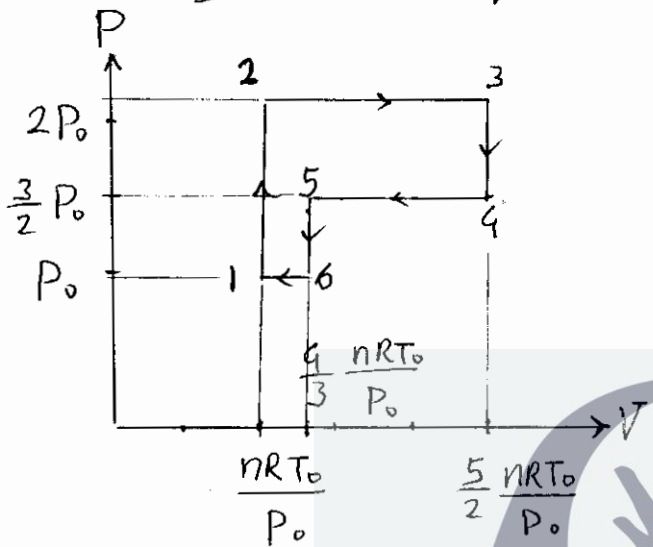
ذهن زیبا

مسئله ۵

(۲) با توجه به معادله گاز کامل $PV = nRT$ در نمودار P

بر حسب T شیب (ضریب زاویه) $\frac{nR}{V}$ است، بنابراین خطوط

دارای شیب یکسان هم رسم هستند



نقطه (۱) $(P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, T_0)$

نقطه (۲) $(2P_0, \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۳) $(2P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, 5T_0)$

نقطه (۴) $(\frac{3}{2} P_0, \frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{15}{4} T_0)$

نقطه (۵) $(\frac{3}{2} P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, 2T_0)$

نقطه (۶) $(P_0, \frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0}, \frac{4}{3} T_0)$

(ب) کار، صرفه منفی مساحت داخل حوضه $P-V$ است

$$|W| = \left(\frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2} + \left(\frac{4}{3} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) \frac{P_0}{2}$$

ذهن زیبا

$$|W| = \frac{11}{12} nRT_0$$

W صرفه منفی است.

(پ) اگر Q گرمای داده شده به گاز در یک صرفه باشد

در فرآیندهای $1 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 3$ گاز از محیط بیرون می‌گیرد:

$$Q = Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

اما طبق قانون اول ترمودینامیک

$$U_2 - U_1 = W_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

$$\frac{3}{2} nR(2T_0) - \frac{3}{2} nRT_0 = 0 + Q_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} nRT_0$$

$$U_3 - U_2 = W_{2 \rightarrow 3} + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$\frac{3}{2} nR(5T_0) - \frac{3}{2} nR(2T_0) = -(2P_0) \left(\frac{5}{2} \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_0} \right) + Q_{2 \rightarrow 3}$$

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{15}{2} nRT_0$$

$$Q = \frac{3}{2} nRT_0 + \frac{15}{2} nRT_0$$

بنا بر این

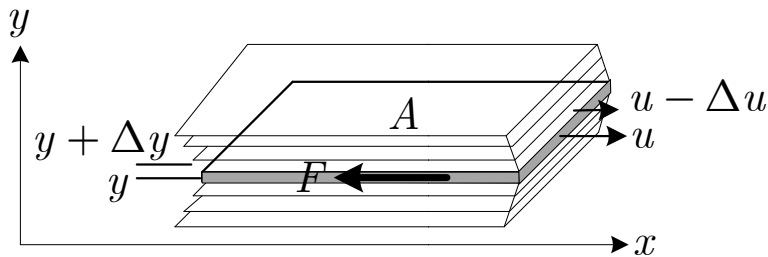
$$Q = 9nRT_0$$

$$\text{بازده} = \frac{\text{حرفه}}{\text{قرمائی داده شد}} = \frac{11}{12} \frac{1}{9} \approx \frac{1}{10}$$

۱۵

$$\text{بازده} = \frac{11}{108} \approx \frac{1}{10}$$





۶) گرانیروی (Viscosity) خاصیتی از یک سیال است که باعث کندی حرکت اجسام نسبت به سیال می‌شود. سیال را به صورت لایه‌هایی با ضخامت ناچیز Δy در نظر

بگیرید. اگر جسمی در راستای x با سرعت u در داخل یک سیال حرکت کند، لایه‌ای از سیال که در مجاورت آن است تقریباً همراه آن کشیده می‌شود. لایه‌های دورتر نیز به دلیل خاصیت گرانیروی به حرکت در می‌آیند و هر چه در جهت عمود بر لایه‌های متحرک (راستای y در شکل بالا) از جسم دورتر شویم سرعت آن‌ها کمتر می‌شود. به بیان دیگر اگر Δu اختلاف سرعت دو لایه مجاور باشد، $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ کمیته مخالف صفر است. به این ترتیب اگر سطح تماس جسم با سیال A باشد نیروی اصطکاک F در خلاف جهت حرکتش به آن وارد می‌شود که اندازه آن از رابطه $F = \eta A \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|$ به دست می‌آید. در این رابطه، η ضریب گرانیروی نامیده می‌شود.

آ) واحد ضریب گرانیروی در دستگاه واحدهای SI را بر حسب پاسکال و سایر کمیت‌های اصلی بیان کنید.
 اگر یک جسم کروی به شعاع r با سرعت u در داخل یک سیال گرانیرو حرکت کند می‌توان نشان داد نیروی اصطکاک $F = 6\pi\eta r u$ به آن وارد می‌شود که به این رابطه قانون استوکس گفته می‌شود. برای اجسام کوچک نیروی گرانیروی را می‌توان تنها نیروی اصطکاک مهم در نظر گرفت.

ب) یک جسم کروی به شعاع r و چگالی ρ داخل سیالی به چگالی ρ' ($\rho > \rho'$) و ضریب گرانیروی η سقوط می‌کند و پس از مدتی به سرعت ثابتی می‌رسد که به آن سرعت حد می‌گوییم. این سرعت را بر حسب ρ ، ρ' ، η ، r و g به دست آورید.

پ) سرعت حد سقوط یک قطره کوچک کروی آب به قطر 0.4 mm را در جو زمین به دست آورید. همچنین سرعت حد سقوط یک ویروس کرونا که آن را کره ای به قطر $0.12 \mu\text{m}$ و با چگالی نزدیک آب می گیریم، به دست آورید. به داده های آخر مسئله توجه کنید.

در آزمایش معروف میلیکان تعداد بسیار زیادی از قطرات باردار روغن توسط یک عطرباش به داخل محفظه ای که بین دو الکترود صفحه ای افقی قرار دارد پاشیده و به صورت عمودی سقوط می کنند. کلیه قطرات به دلیل کوچک بودن، در بازه زمانی ناچیزی به سرعت حد می رسند. با اعمال اختلاف پتانسیل بین صفحات می توان یک میدان الکتریکی یکنواخت در راستای قائم برقرار کرد. توسط یک میکروسکوپ می توان از بیرون، حرکت یک قطره روغن را با دقت رصد کرد و سرعت آن را اندازه گیری کرد.

ت) در شکل زیر رابطه خطی سرعت حد یک قطره روغن با ولتاژ اعمال شده بین صفحات داده شده است. فرض کنید ولتاژ صفحه بالایی به اندازه V از صفحه پایینی بیشتر است. در حرکت به سمت بالا u مثبت و در حرکت به سمت پایین u منفی فرض شده است. اگر V_0 و $-u_0$ به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ رابطه خطی u بر حسب V باشد، شعاع قطره روغن و بار روی آن را بر حسب u_0 ، V_0 ، η (ضریب گرانروی هوا)، ρ_a (چگالی هوا)، ρ_0 (چگالی روغن)، g (شتاب گرانش) و d (فاصله عمودی بین الکترودها) به دست آورید.

ث) با فرض مقادیر عددی زیر و با استفاده از مقادیر عددی V_0 و u_0 از روی نمودار، شعاع قطره و بار الکتریکی آن را حساب کنید.

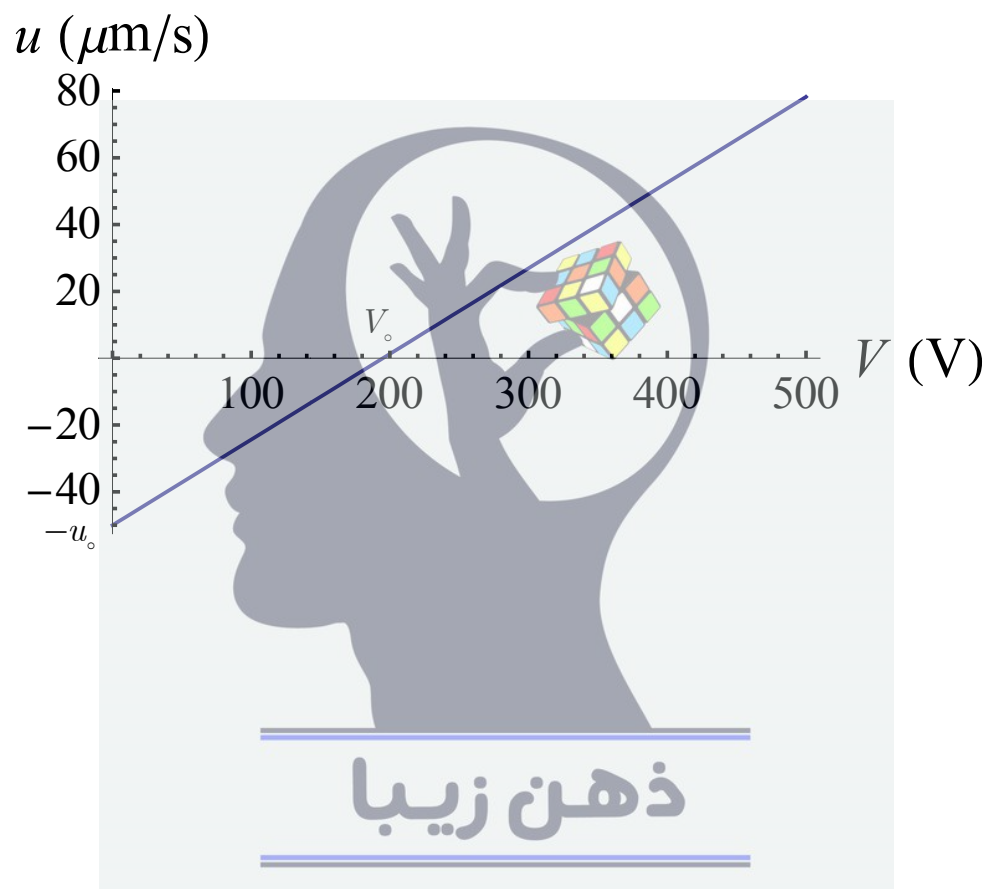
ذهن زیبا



داده های عددی:

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3 \text{ (آب)}, \rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3 \text{ (هوا)}, \rho_o = 880 \text{ kg/m}^3 \text{ (روغن)}$$

$$\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ (در دستگاه SI)}, g = 9.8 \text{ m/s}^2, d = 1.7 \text{ mm}$$

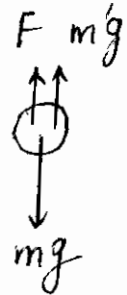


$$\frac{F}{A} = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right| \Rightarrow Pa = (\eta \omega) \left(\frac{m}{s} \right)$$

(4) $\frac{m}{s}$
(1)

$$(\eta \omega) = Pa \cdot s$$

بعد از رسیدن به سرعت حد - تمام جسم صفر است، در نتیجه



(ب)

$$F + m'g - mg = 0 \quad (a)$$

$$6 \pi r \eta u_{\infty} + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho' g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 0$$

F : نیروی اصطکاک

$m'g$: نیروی شناور

mg : نیروی کشش

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho') g r^2}{\eta}$$

برای قطر آ - به شعاع $r = 0.2 \text{ mm}$ در هوا $\rho' = \rho_a$ بقوت می‌اند

$$u_{\infty} = \frac{2}{9} \frac{(\rho_w - \rho_a) g r^2}{\eta} = \frac{2}{9} \frac{(1000 - 1.02)(9.8)}{1.8 \times 10^{-5}} (2 \times 10^{-4})^2$$

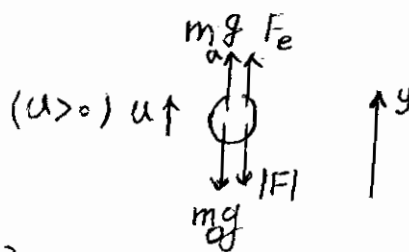
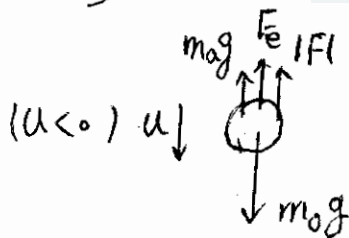
$$u_{\infty} = 4.8 \text{ m/s}$$

برای دیدن گردان به شعاع $r = 0.06 \mu\text{m}$

$$u_{\infty} = 0.44 \mu\text{m/s}$$

(پ)

(ت) با توجه به نمودار داده شده در صورت مسئله در حالت تعادل که $u = 0$ است، نیروی الکتریکی وارد بر قطره روغن باید به سمت بالا باشد، بنابراین بار الکتریکی قطره منفی است که آن را -191 e می‌گیریم.



نمودار جسم آزاد برای حرکت قطره به سمت بالا و پایین:

$$191 \frac{V}{d} - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 g + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_a g - 6 \pi \eta r u = 0 \quad \text{در هر دو حالت:}$$

$$u_{\infty} = \frac{191}{6 \pi \eta r d} \frac{V}{d} - \frac{2}{9} \frac{(\rho_0 - \rho_a) g r^2}{\eta}$$

از آنجا که $\rho_a \ll \rho_0$ است از ρ_a در مقابل ρ_0 چشم پوشی می کنیم. با توجه به نمودار:
 به ازای $V=0$ داریم $u = -u_0$ در نتیجه

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}}$$

به ازای $u = 0$ داریم $V = V_0$ در نتیجه

$$|q| = \frac{q}{3} \pi r^3 \rho_0 g \frac{d}{V_0}$$

با قرار دادن مقدار r به دست می آوریم:

$$|q| = \frac{18 \pi d}{V_0} \sqrt{\frac{\eta^3 u_0^3}{2 \rho_0 g}}$$

مث) با توجه به نمودار $u_0 = 50 \mu\text{m/s}$ و $V_0 = 195 \text{V}$ در نتیجه:

$$r = \sqrt{\frac{q \eta u_0}{2 \rho_0 g}} = 3 \sqrt{\frac{(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})}{(2)(880)(9.8)}} = \frac{(3)(3 \times 10^{-5})}{4 \sqrt{(110)(9.8)}} \approx \frac{9 \times 10^{-5}}{(4)(33)}$$

$$= \frac{30}{44} \mu\text{m} \Rightarrow |r \approx 0.68 \mu\text{m}|$$

$$|q| = \frac{6 \pi \eta u_0 d}{V_0} r = \frac{(6)(3.14)(1.8 \times 10^{-5})(5 \times 10^{-5})(8 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-6})}{(195) \times (44)}$$

$$= \frac{(6)(3.14)(9)(20)}{65 \times 11} \times 10^{-19}$$

$$= \frac{(54)(6.28)}{71 \times 6.5} \times 10^{-19}$$

$$\approx (5)(9.6) \times 10^{-19} \text{ C} = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$|q| = 4.8 \times 10^{-19} \text{ C} = 3e$$