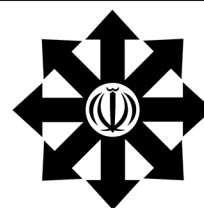




جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. « امام خمینی (ره) »

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۵ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و پنجمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۱/۰۲/۱۴ - ساعت: ۸:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه



شماره سندلی

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده:

استان:

کد ملی:

منطقه:

نام پدر:

پایه تحصیلی:

نام مدرسه:

حوزه:

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پانویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.
- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

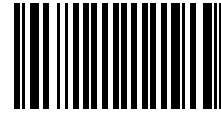
در صورت لزوم از این
صفحه به عنوان چرک



تصحیح نخواهد شد



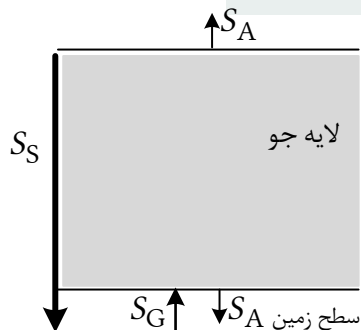
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



(۱) نیمی از جایزه نوبل سال ۲۰۲۱ به پژوهشگرانی اهدا شد که اقلیم زمین را مدل سازی کرده بودند. چنین مدل هایی متغیرهای بسیاری دارد و به طور معمول به سبب پیچیدگی شان، حل آنها نیازمند محاسبات و شبیه سازی های رایانه ای است.

در این مسئله می خواهیم با مدلی بسیار ساده، پدیده گرمایش زمین بر اثر وجود لایه های جو را بررسی کنیم. برای این که بتوانیم مدل را تحلیل کنیم، نیاز به ساده سازی های فراوانی داریم. برای مثال سطح وسیعی از زمین را اقیانوس ها پوشانده اند که تأثیر به سزایی در اقلیم دارند، اما در این مسئله اثر اقیانوس ها را کنار می گذاریم. همچنین اثر شب و روز را در نظر نمی گیریم. هر چند نتیجه کمی این مدل ساده با واقعیت تفاوت دارد، اما نقطه شروع خوبی برای مدل های واقعی تر است.

مهم ترین منبع انرژی زمین، خورشید است. شدت نور خورشید در سطح زمین بر حسب بسامد متغیر است. کمیت شدت عبارت است از انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح می تابد. شدت متوسط نور خورشید در سطح زمین را با S_0 نشان می دهیم. تابش خورشید به طور عمده در بسامدهایی صورت می گیرد که بدون جذب به طور کامل از تمامی لایه های جو عبور می کند، به زمین می رسد و به طور کامل توسط زمین جذب می شود.

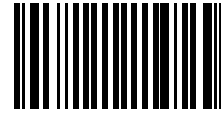


شکل ۱

شدت تابش گرمایی هر جسم در دمای T در محل جسم برابر با $S_0 = kT^4$ است که در آن k ثابت است. در این مسئله ثابت k را برای زمین و لایه های جو یکسان می گیریم. اگر زمین جو نداشت، در دمای ثابت، یعنی در حالت تعادل گرمایی، شدت متوسط دریافتی توسط زمین از سوی خورشید، با شدت

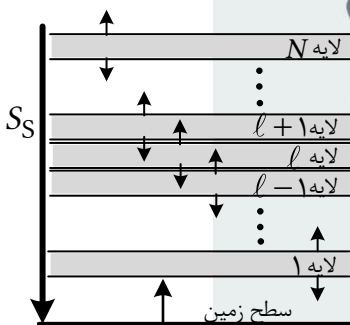


نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



تابشی زمین برابر بود. در این حالت دمای زمین را با T_B نشان می‌دهیم و داریم $S_S = kT_B^4$. در هر جای مسئله که به شدت نور خورشید در سطح زمین احتیاج داشتید از این رابطه استفاده کنید.

آ) مطابق شکل ۱ جو زمین را تک لایه‌ای فرض کنید. در این وضعیت دمای زمین را با T_G و دمای لایه جو را با T_A نشان می‌دهیم. این لایه با شدت یکسان $S_A = kT_A^4$ هم به سمت زمین و هم به سمت فضا تابش دارد. همچنین فرض کنید تمام تابش لایه که به سمت زمین است توسط زمین جذب می‌شود و تمام تابش زمین نیز توسط لایه جو جذب می‌شود. با فرض تعادل گرمایی و ثابت بودن دمای زمین و لایه، T_G و T_A را بر حسب T_B به دست آورید.



شکل ۲

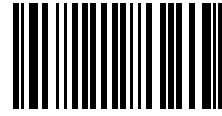
حال فرض کنید که مطابق شکل ۲ جو زمین از N لایه مجزا تشکیل شده باشد. مانند قبل تمام نور خورشید بدون جذب شدن از همه لایه‌ها عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط آن جذب می‌شود. این مجموعه در حال تعادل گرمایی است و دمای تمام اجزای آن ثابت است. دمای زمین را با T_E و دمای لایه l ام را با T_l نشان می‌دهیم. تابش گرمایی زمین به طور کامل توسط

لایه اول جذب می‌شود. تابش لایه اول به سمت زمین به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود. لایه نوعی l ام با شدت یکسان kT_l^4 به لایه‌های $l-1$ و $l+1$ تابش می‌کند که به طور کامل توسط آن‌ها جذب می‌شود. لایه N ام نیز مشابه سایر لایه‌ها هم به سمت فضا و هم به سمت لایه $N-1$ تابش می‌کند.

ب) معادله‌های تعادل گرمایی را برای زمین، لایه l ام ($1 \leq l < N$) و لایه N ام بنویسید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پ) T_N را بر حسب T_B به دست آورید.

ت) T_ℓ را بر حسب T_B ، N و ℓ به دست آورید.

ث) T_E را بر حسب T_B و N به دست آورید.



در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

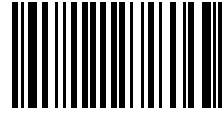
پاسخ سوال ۱

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 1, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



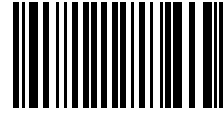
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 1.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



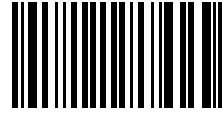
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 1, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

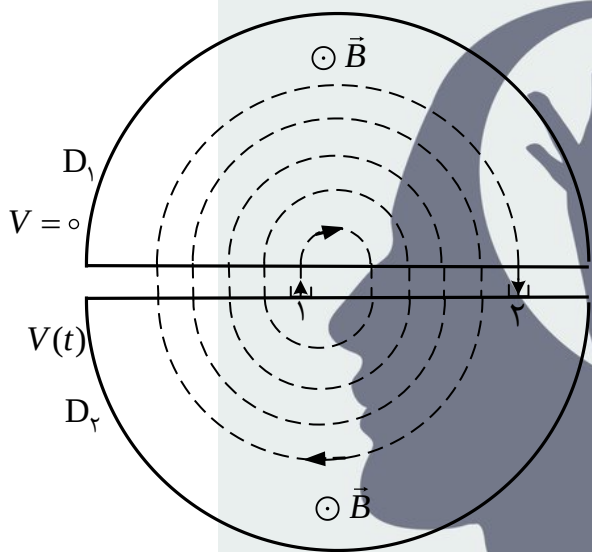
Blank area for writing the answer to question 1, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



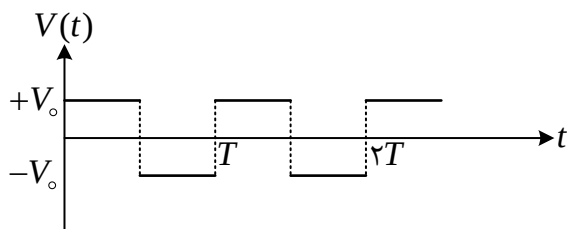
(۲) یک بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. صفحه دایره عمود بر امتداد B است. با به کار بردن قانون دوم نیوتن دوره چرخش این حرکت دایره‌ای را بر حسب m ، q و B به دست آورید.



شکل ۱

حال می‌خواهیم فرایند شتاب دادن ذرات باردار در دستگاهی موسوم به سیکلوترون را در چارچوب فیزیک نیوتونی بررسی کنیم. شتاب‌دهنده سیکلوترون دستگاهی مطابق شکل ۱ است که دارای دو رسانای نیم‌استوانه‌ای توخالی با مقطعی به شکل حرف انگلیسی D است. این دو رسانا را D_1 و D_2 می‌نامیم. فاصله قسمت تخت D_1 و D_2 از یکدیگر برابر S است. قسمت

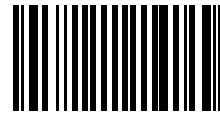
تخت هر دو آن‌ها به صورت توری است به طوری که یک ذره باردار می‌تواند از آن عبور کند. رسانای D_1 همواره دارای پتانسیل الکتریکی صفر است و رسانای D_2 به پتانسیل الکتریکی $V(t)$ مطابق نمودار شکل ۲ متصل است. این پتانسیل الکتریکی با دوره تناوب T به صورت زیر است.



شکل ۲



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

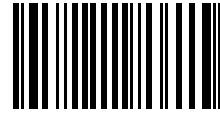


$$V(t) = \begin{cases} +V_0, & nT < t < nT + \frac{T}{2} \\ -V_0, & nT + \frac{T}{2} < t < nT + T \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

به این ترتیب در شکاف بین D_1 و D_2 ، یعنی در فاصله S ، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که به طور متناوب جهت آن معکوس می‌شود، اما داخل D ها میدان الکتریکی صفر است. همچنین مطابق شکل ۱ میدان مغناطیسی برون‌سوی B عمود بر سطح مقطع D ها وجود دارد. در این شتاب‌دهنده ابتدا ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی مثبت q از نقطه a روی D_2 در لحظه $t = 0$ از حالت سکون به دلیل پتانسیل الکتریکی $+V_0$ شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_1 برسد. این ذره داخل D_1 می‌رود و بر اثر میدان مغناطیسی داخل آن می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_1 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 برابر $-V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_1 مجدداً شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_2 برسد و داخل آن برود. در داخل D_2 ذره بر اثر میدان مغناطیسی می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_2 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 دوباره $+V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_2 مجدداً به سمت D_1 شتاب می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود (شکل ۱). با توجه به محدود بودن دفعات چرخش و اندازه شکاف S ، ذره همواره در شکاف بین D ها حرکت تندشونده دارد. اثر میدان مغناطیسی در شکاف بین دو رسانا را ناچیز بگیرد به طوری که مسیر حرکت ذره در شکاف بین D ها همواره عمود بر سطح تخت D ها است. توجه کنید که تغییر علامت پتانسیل تقریباً به طور لحظه‌ای صورت می‌گیرد و قبل و بعد از این لحظه سرعت ذره یکسان است. فرض کنید دوره تناوب T در شکل ۲، برابر با دوره چرخش ذره باردار بخش آ است.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ب) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، سرعت ذره را بر حسب k, m, q و V_0 به دست آورید.

پ) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، شعاع چرخش ذره در میدان مغناطیسی را بر حسب k, m, q, B و V_0 به دست آورید.

ت) فرض کنید بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، مطابق شکل ۱، ذره به نقطه ۲ روی D_2 برسد. زمان رسیدن ذره به نقطه ۲، t ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

ث) کل مسافتی که ذره در قسمت T طی می کند، l ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

ج) حداکثر مقدار S چقدر باشد تا در تمام k بار عبور ذره از شکاف، حرکت تندشونده باشد؟

چ) با فرض $\frac{m}{q} = 1.04 \times 10^{-8} \text{ kg/C}$ ، $V_0 = 507.0 \text{ kV}$ ، $S = 2700 \text{ mm}$ ، $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ و

$B = 1.04 \text{ T}$ اگر بخواهیم انرژی جنبشی ذره وقتی به نقطه ۲ می رسد 257.0 MeV باشد، مقادیر k ، t و l را

به دست آورید. در این جا، برای k های بزرگ از رابطه تقریبی $\sum_{i=1}^k \sqrt{i} \cong \frac{2}{3} \sqrt{k^3} + \frac{1}{2} \sqrt{k}$ می توانید استفاده

ذهن زیبا

کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۲

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 2, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



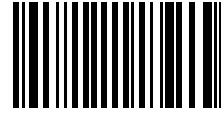
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



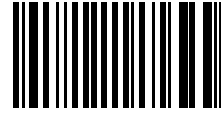
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



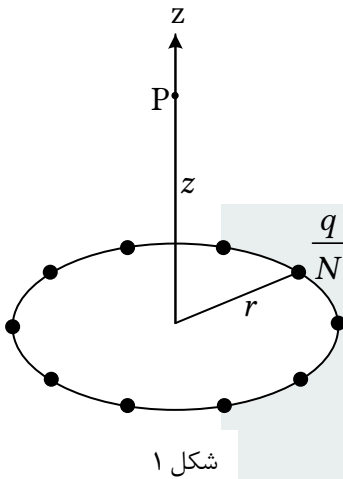
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



(۳) آ) بار الکتریکی q را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را مطابق شکل ۱ بر روی رئوس یک N ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است قرار داده‌ایم. محور تقارن دستگاه بر صفحه دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد. مقدار و جهت میدان الکتریکی در نقطه P واقع بر محور تقارن دستگاه و به فاصله z از مرکز دایره را به دست آورید. برای سهولت می‌توانید N را زوج فرض کنید.

ب) حلقه‌ای به شعاع r در نظر بگیرید که بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. به کمک بخش آ میدان الکتریکی این حلقه را در نقطه‌ای به فاصله z از مرکز حلقه بر روی محور آن به دست آورید.

پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصله D از یک بار نقطه‌ای q نسبت به مبدأ دوردست برابر $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}$ است. پتانسیل

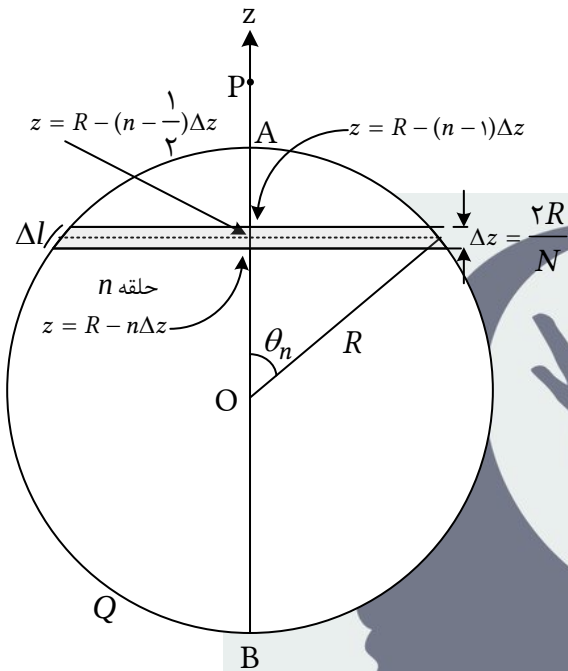
الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع جبری پتانسیل الکتریکی آن‌ها است.

ب) پتانسیل الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r و بار الکتریکی q در نقطه‌ای بر روی محور آن و به فاصله z از مرکز حلقه را به دست آورید.

مطابق شکل ۲، یک پوسته کروی به شعاع R در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. نقطه P واقع بر محور z و به فاصله d ($d > R$) از مرکز کره است. مبدأ مختصات را در مرکز کره بگیرید. بازه بین نقاط A به مختصه $z = R$ و B به مختصه $z = -R$ را به N قسمت مساوی تقسیم کنید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



شکل ۲

از هر نقطه تقسیم، صفحه‌ای فرضی عمود بر محور Z در نظر

بگیرید. فاصله هر دو صفحه متوالی از هم $\Delta z = 2R/N$

است. هر صفحه، کره را در یک دایره قطع می‌کند. در میان

هر دو صفحه فرضی متوالی باریکه‌ای از سطح کره قرار

می‌گیرد. اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد هر کدام از

باریکه‌های یاد شده مشابه حلقه بخش ب خواهد بود. حلقه

n ام را بین صفحات $z = R - n\Delta z$ و $z = R - (n-1)\Delta z$

نظر بگیرید. مرکز حلقه n ام روی محور Z در نقطه

$z = R - (n - \frac{1}{2})\Delta z$ است. زاویه θ_n مربوط به حلقه n ام

در شکل ۲ مشخص شده است.

(ت) کمیت $\cos \theta_n$ را بر حسب n و N به دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

(ث) مساحت حلقه n ام و بار الکتریکی روی آن را به دست آورید.

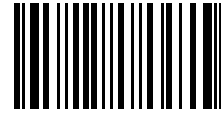
راهنمایی: سطح هر حلقه را می‌توان تقریباً مشابه سطح نواری مستطیل شکل به عرض Δl در نظر گرفت.

(ج) از برهم‌نهی میدان الکتریکی حلقه‌ها، میدان الکتریکی کره را در نقطه P به صورت یک جمع روی شماره‌ده

n بر حسب Q ، R ، d و θ_n ها به دست آورید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



چ) به روش مشابه، پتانسیل الکتریکی پوسته کروی شکل ۲ در نقطه P را به صورت یک جمع روی شمارنده n بر حسب Q، R، d و θ_n ها به دست آورید.

ح) فرض کنید پاسخ بخش های ج و چ برای میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر باشد،

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2 N} \sum_{n=1}^N f(x_n, \alpha), \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d N} \sum_{n=1}^N g(x_n, \alpha)$$

که در آن $\alpha = R/d$ و $x_n = \cos \theta_n$ فرض شده اند. توابع $f(x, \alpha)$ و $g(x, \alpha)$ را بنویسید. برای $\alpha = \frac{1}{3}$ شکل تقریبی این دو تابع را رسم کنید. برای این کار توجه کنید که مشتق اول و دوم هر دو تابع مثبت هستند. بنابراین کافی است مقدار توابع یاد شده را در ابتدا و انتهای بازه مجاز و در $x=0$ به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به

عنوان چکرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۳

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 3, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



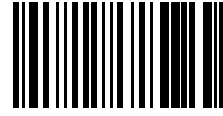
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, consisting of horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



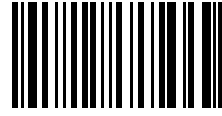
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



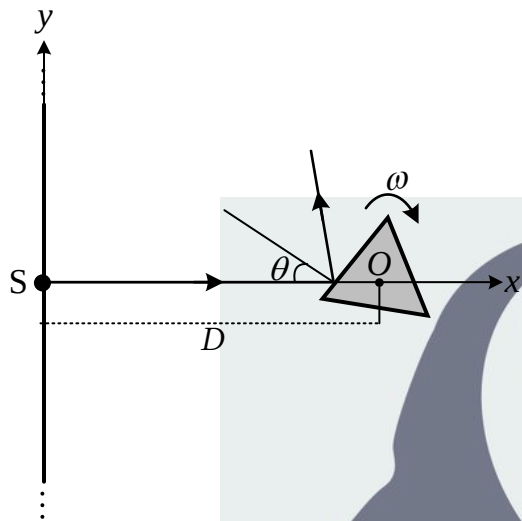
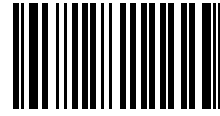
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal dashed lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۴) باریکه‌ای از نور مطابق شکل از چشمه S در راستای محور

x به سمت راست منتشر می‌شود. امتداد باریکه از نقطه O مرکز

یک N-ضلعی منتظم می‌گذرد. در شکل مقابل، حالت $N = 3$

نشان داده شده است. این N-ضلعی منتظم مقطعی از یک منشور

با صفحه شکل است که وجوه خارجی آن آینه است. آینه‌ها بر

صفحه شکل عمودند. منشور حول محوری که از نقطه O گذشته

و بر صفحه شکل عمود است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به طور

ساعتگرد می‌چرخد. باریکه نور پس از بازتاب از آینه‌ای که در لحظه معینی در مسیر آن است، به پرده‌ای نامتناهی

که در پشت چشمه قرار دارد برخورد می‌کند و باعث ایجاد نقطه‌ای نورانی می‌شود. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد

که زاویه نور بازتابیده با محور x مناسب باشد. در شکل، محور y مقطع پرده با صفحه شکل است. زاویه تابش نور

به آینه در یک لحظه نامشخص را θ بگیرید. فاصله SO را برابر D بگیرید که بسیار بزرگتر از ابعاد N-ضلعی

است. فاصله چشمه از پرده را ناچیز بگیرید. در بخش‌های آ و ب این مسئله فرض کنید انتشار نور به طور آبی

صورت می‌گیرد، یعنی سرعت انتشار آن نامتناهی است. طولی از محور y که توسط نقطه روشن جاروب می‌شود را

ΔL بگیرید و فرض کنید $f = \frac{\Delta L}{D}$. همچنین g را کسری از یک بازه زمانی طولانی بگیرید که طی آن، یک نقطه

روشن روی پرده وجود دارد.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



آ) کسرهای f و g را برای موارد ذکر شده در جدول زیر به دست آورید. در پاسخنامه خود جدولی مشابه این جدول بکشید و جوابهای خود را در خانههای خالی آن پر کنید.

N	۳	۴	$N > 4$	۶
f				
g				

در ادامه مسئله فرض کنید $N = 3$ است یعنی مقطع منشور مثلث متساوی الاضلاع است.

ب) سرعت نقطه روشن روی پرده را بر حسب θ به دست آورید. به ازای چه مقادیری از θ اندازه سرعت نقطه روشن از مقدار معین V بیشتر است؟

حال فرض کنید نور از ذراتی موسوم به فوتون تشکیل شده که با سرعت ثابت c منتشر می شوند. فوتونها در برخورد با آینه از قانون بازتاب عمومی (برابری زوایای تابش و بازتاب) تبعیت می کنند. فرض کنید در لحظه $t_m = 0$ یکی از آینهها بر خط SO عمود است و در لحظه دلخواه t_m به اندازه زاویه $\theta = \omega t_m$ چرخیده است. فوتونی که در لحظه

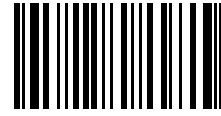
t_m به آینه برخورد کرده در لحظه t به پرده می رسد.

پ) t را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

ت) فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد می کند در نقطه y به پرده می رسد. y را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ث) سرعت نقطه نورانی روی پرده، $v = \frac{dy}{dt}$ ، که به معنی مشتق y نسبت به t است، را با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

مشتق زنجیره‌ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

یادآوری قاعده مشتق زنجیره‌ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد،

مشتق f نسبت به s از رابطه $\frac{df}{ds} = \frac{df}{du} \frac{du}{ds}$ به دست می‌آید. همچنین توجه داشته باشید که $\frac{du}{ds} = \left(\frac{ds}{du}\right)^{-1}$.

ج) نمودار کمیت $z = \frac{v\omega D}{v}$ را بر حسب $p = \sin^2 \theta$ رسم کنید. سپس نمودار $\frac{v}{c}$ را بر حسب p رسم کنید.

در محاسبات و رسم نمودارها، نسبت $\frac{\omega D}{c}$ را α بگیرید و فرض کنید $1 < \alpha < \frac{1}{3}$. بر روی نمودارها هر

مشخصه‌ای از قبیل نقاط تقاطع با محورها، محل کمینه‌ها و بیشینه‌ها و مقدار آن‌ها، محل مجانب‌ها، بازه‌های معتبر حرکت و مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه‌های مذکور را مشخص کنید.

چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب p معلوم کنید در چه بازه‌ای از θ اندازه سرعت نقطه نورانی روی پرده از c

ذهن زیبا

بیشتر است؟

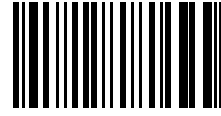
ح) اگر بازه زمانی بسیار کوتاه بین ارسال دو فوتون متوالی از چشمه T_0 فرض شود، بازه زمانی بین رسیدن دو

فوتون متوالی به پرده، T ، را بر حسب T_0 و θ به دست آورید. معلوم کنید T همواره از T_0 بزرگتر است یا همواره

از آن کوچکتر است و یا گاهی از آن بزرگتر و گاهی کوچکتر است؟



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۴

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 4, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



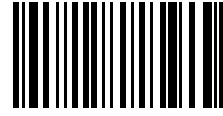
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, consisting of horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



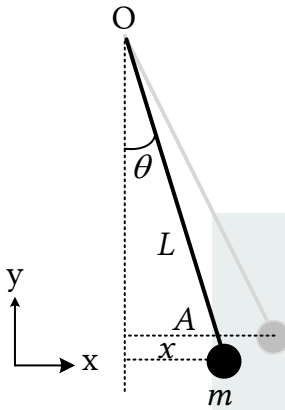
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



شکل ۱

۵) گوی فلزی کوچکی به جرم m در انتهای یک میله فلزی نازک بسیار سبک به طول L قرار دارد. میله مطابق شکل ۱ از نقطه O آویزان است و می تواند حول امتداد قائم نوسان کند. گوی فلزی را از حالت تعادل به اندازه فاصله افقی A منحرف می کنیم و در زمان $t = 0$ آن را رها می کنیم. در تمام این مسئله زاویه انحراف آونگ کوچک است به طوری که انحراف افقی گوی، x ، با زاویه انحراف θ رابطه تقریبی $x \approx L\theta$ دارد. انرژی پتانسیل گرانشی آونگ، $U(x)$ ، را نسبت به پایین ترین نقطه حرکت آن بر

حساب x به دست آورید. با توجه به این که x از L بسیار کوچکتر است، با استفاده از رابطه

$1 + \frac{1}{\epsilon} \approx (1 + \epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}}$ که برای $|\epsilon|$ خیلی کوچکتر از یک، تقریب خوبی است، تابع انرژی پتانسیل گرانشی را

به صورت $U(x) = \frac{1}{\rho} kx^2$ به دست آورید و ضریب k را بر حسب داده های مسئله بنویسید.

ب) انرژی کل این دستگاه، $E = K + U$ ، ثابت است و با زمان تغییر نمی کند. مشتق این کمیت نسبت به زمان

را حساب کنید و برابر صفر قرار دهید. از این طریق برای حرکت آونگ نسبت $\frac{a}{x}$ را بر حسب ثابت های مسئله به

دست آورید که a شتاب افقی گوی و x جابه جایی آن از حالت تعادل است. سرعت لحظه ای افقی گوی را v

بگیرید. لازم به ذکر است که در تمام این مسئله مؤلفه قائم سرعت گوی قابل چشم پوشی است.

راهنمایی: برای محاسبه مشتق کمیت های x^2 و v^2 نسبت به زمان از قاعده مشتق زنجیره ای استفاده کنید.



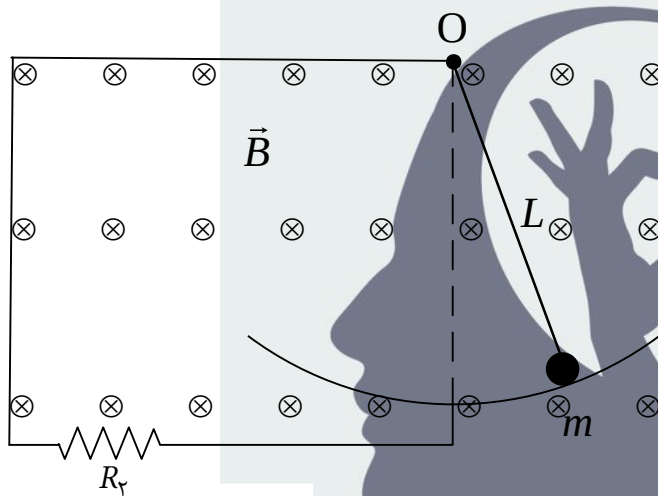
نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



پ) برای حرکت نوسانی با معادله $x = A \cos(\omega t + \beta)$ نسبت $\frac{a}{x}$ را به دست آورید. از مقایسه این نتیجه با

نتیجه بخش ب بسامد زاویه‌ای ω را برای حرکت آونگ حساب کنید. همچنین با توجه به شرایط اولیه مسئله،

β (فاز اولیه) را نیز تعیین کنید.



شکل ۲

حال دستگاه شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این

دستگاه، آونگ شکل ۱ در یک مدار الکتریکی قرار

داده شده است. گوی فلزی مماس بر سطح یک

رسانای بدون مقاومت و بدون اصطکاک با مقطع

دایره‌ای حرکت می‌کند و همواره اتصال مدار برقرار

است. مقاومت الکتریکی میله و گوی را R_1 بگیرید و

از مقاومت الکتریکی سیم‌ها چشم‌پوشید. همچنین مدار دارای یک مصرف‌کننده با مقاومت R_p است. میدان

مغناطیسی یکنواخت \vec{B} عمود بر سطح مدار و به سمت داخل شکل برقرار است. لازم به ذکر است که در این حالت،

گوی فلزی حرکت هماهنگ ساده ندارد.

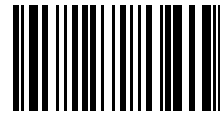
ت) نیروی محرکه الکتریکی القاء شده در مدار را بر حسب سرعت افقی گوی، v ، و سایر داده‌های مسئله به

دست آورید.

راهنمایی: برای زاویه‌های کوچک می‌توان کمان مقابل به زاویه را با وتر متناظر با آن یکی گرفت.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



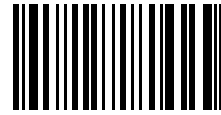
ث) انرژی این دستگاه به دلیل اتلاف در مقاومت‌ها ثابت نیست و با زمان کاهش می‌یابد. می‌دانیم اندازه انرژی تلف شده در واحد زمان در مقاومت الکتریکی R برابر Ri^2 است که i جریان لحظه‌ای گذرنده از مقاومت است. حال مشتق انرژی دستگاه نسبت به زمان را با منفی اندازه آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌ها برابر بگیرید، و به معادله‌ای به صورت $ma + bv + kx = 0$ برسید که در آن a شتاب، v سرعت و x جابه‌جایی افقی گوی است. ضرایب b و k را معین کنید.

ج) جواب معادله‌ای که در بخش ث به دست آمد به صورت $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \beta)$ است. در این معادله از تابع نمایی $e^{-\gamma t}$ استفاده شده است که در آن e عدد نپر نام دارد و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار برابر 2.72 است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d(e^{-\gamma t})}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}$ است. این حل را در معادله به دست آمده در بخش ث قرار دهید و کمیت‌های γ و ω را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

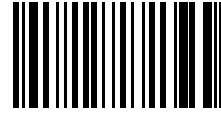
پاسخ سوال ۵

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 5, featuring horizontal dashed lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, consisting of horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



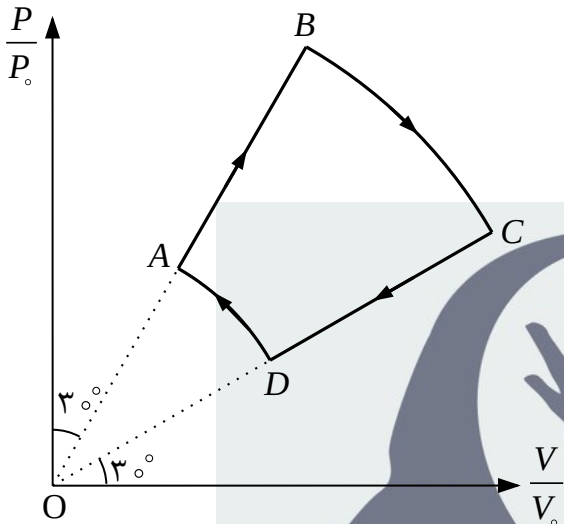
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



۶) n مول گاز کامل تک اتمی فرآیند ترمودینامیکی چرخه‌
شکل مقابل در صفحه نمودار P/P_0 بر حسب V/V_0 را
طی می‌کند که P_0 فشاری معین و V_0 حجمی معین است.
فرآیندهای $D \rightarrow A$ و $B \rightarrow C$ به ترتیب کمانی از دایره‌های
به شعاع ۲ و ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در این صفحه‌اند.
مطابق شکل امتداد OC با محور افقی و امتداد OB با محور
عمودی زاویه 3° می‌سازند. کمیت‌های خواسته شده را بر

حسب n ، R ، V_0 ، P_0 و $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$ بنویسید و پاسخ‌های خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید. در ارائه

جواب‌های عددی، محاسبه جذر اعداد ضروری نیست. لازم به ذکر است که انرژی داخلی n مول گاز کامل تک

اتمی در دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که R ثابت جهانی گازها است.

آ) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T) ، هر یک از نقاط A ، B ، C و D را به دست آورید.

ب) کار محیط روی گاز در هر یک از فرآیندهای $A \rightarrow B$ ، $B \rightarrow C$ ، $C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه و همراه با علامت آن بنویسید.

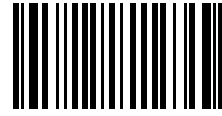
پ) کار محیط روی گاز در کل این چرخه چه قدر است؟

ت) گرمای خالص داده شده به گاز (گرمای داده شده به گاز منهای گرمای گرفته شده از گاز) در هر یک از

فرآیندهای $A \rightarrow B$ ، $B \rightarrow C$ ، $C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه کنید و همراه با علامت آن بنویسید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ث) نقطه‌ای روی فرآیند $B \rightarrow C$ و نقطه مشابهی روی فرآیند $D \rightarrow A$ وجود دارد که گرمای مبادله شده با محیط قبل و بعد آن تغییر علامت می‌دهد. مختصات ترمودینامیکی این نقاط را به دست آورید.

راهنمایی: به عنوان مثال در فرآیند $B \rightarrow C$ اگر گرمای داده شده به گاز از نقطه B تا نقطه دلخواهی روی

کمان BC را $Q(V)$ بگیریم، نقطه مورد نظر جایی است که مشتق Q نسبت به V تغییر علامت دهد.

ج) گرمای داده شده به گاز از طرف محیط در این چرخه و گرمای گرفته شده از گاز در این چرخه را به دست آورید. در ارائه جواب می‌توانید از توابع معکوس مثلثاتی استفاده کنید. به عنوان مثال اگر $\tan \theta = c$ باشد می‌توان نوشت $\theta = \tan^{-1} c$ که θ بر حسب رادیان است.

در صورت لزوم از این قسمت به

عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

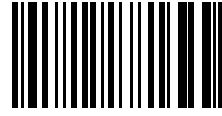
پاسخ سوال ۶

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing the answer to question 6.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



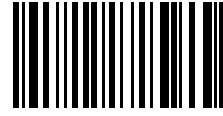
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

A large rectangular area with horizontal dashed lines for writing answers.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



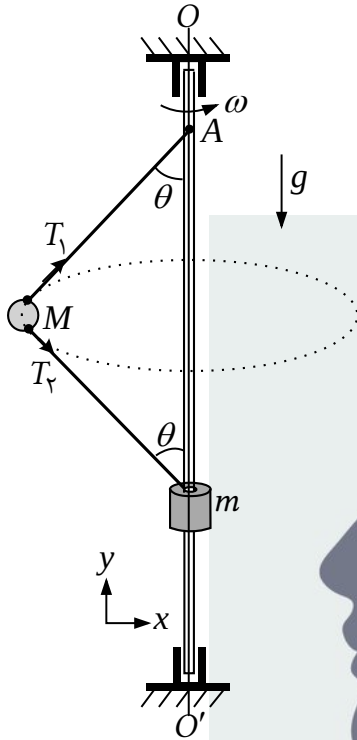
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



شکل ۱

(۷) مطابق شکل ۱ به مهره‌ای با جرم M دو ریسمان (نخ) یکسان هر یک به طول $\frac{l}{2}$ متصل شده است. انتهای یکی از ریسمان‌ها به نقطه ثابت A از میله‌ای قائم و انتهای ریسمان دیگر به جرم m که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد، وصل شده‌اند. میله قائم به موتوری وصل است که آن را حول راستای OO' می‌چرخاند. از جرم ریسمان‌ها و شعاع میله صرف‌نظر کنید. شتاب گرانش g است.

(آ) در وضعیتی که مهره و ریسمان‌ها در صفحه شکل هستند قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه θ ، نیروهای کشش ریسمان‌ها (T_1 و T_2)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

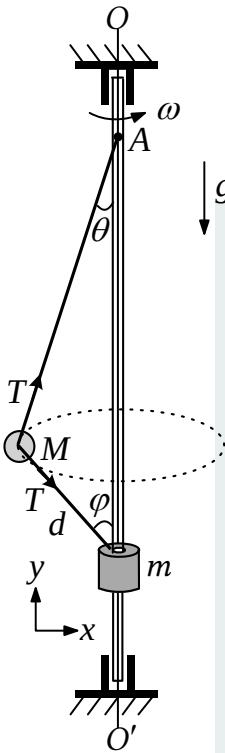
(ب) یک جواب بدیهی برای این دستگاه $\theta = 0$ است. اگر ω از مقدار کمینه ω_m بزرگ‌تر باشد جواب دیگری نیز برای زاویه θ به دست می‌آید. ω_m را بر حسب M ، m ، l و g تعیین کنید.

(پ) به ازای $\omega = 2\omega_m$ کشش ریسمان‌ها، $\cos \theta$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم M را به دست آورید.

اکنون مطابق شکل ۲، ریسمانی به طول l در نظر بگیرید که یک سر آن به نقطه ثابت A روی میله قائم بسته شده و انتهای آن به وزنه‌ای به جرم m متصل است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد. ریسمان از داخل مهره‌ای به جرم M عبور داده شده و مهره نیز می‌تواند بدون اصطکاک در طول ریسمان حرکت کند. در این حالت نیز میله



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



شکل ۲

قائم به موتوری وصل است که میله را حول راستای OO' می چرخاند. موتور با چنان سرعت زاویه‌ای ω می چرخد که در نتیجه آن مهره بر روی یک مسیر دایره‌ای حول راستای قائم می چرخد. مطابق شکل ۲ زاویه ریسمان‌ها با راستای قائم θ و φ و طول ریسمان واقع بین دو جرم d است. از جرم ریسمان و شعاع میله صرف‌نظر کنید. حرکت بدون اصطکاک مهره در طول ریسمان باعث می‌شود کشش در طول ریسمان یکسان باشد.

ت) قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه‌های θ و φ ، نیروی کشش ریسمان (T) ، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

در قسمت‌های بعدی مسئله فرض کنید $M = 2m$.

ث) کمیت $\cos^2 \theta$ را بر حسب متغیر $u = \frac{d}{l}$ به دست آورید. (فرض کنید جواب در محدوده قابل قبول است.)

ذهن زیبا

ج) کمیت ω^2 را بر حسب u ، l و g به دست آورید.

چ) به ازای $u = \frac{1}{4}$ ، سرعت زاویه‌ای، کشش ریسمان، $\cos \theta$ ، $\cos \varphi$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم $2m$ را به دست آورید.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



ح) به ازای مقدار خاصی از u کمیت $\frac{l\omega^2}{g}$ کمینه می‌شود. این مقدار خاص u ریشه حقیقی و مجاز یک معادله

درجه چهار به صورت $u^4 + c_3u^3 + c_2u^2 + c_1u + c_0 = 0$ است. مقدار عددی ضرایب c_0 ، c_1 ، c_2 و c_3 را به

دست آورید. (حل این معادله لازم نیست.)



در صورت لزوم از این قسمت به

عنوان چرک نویس استفاده کنید

مطالب این قسمت تحت هیچ

شرایطی تصحیح نخواهد شد



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

پاسخ سوال ۷

از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing the answer to question 7, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



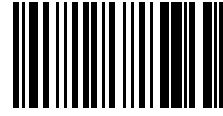
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



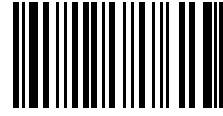
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :



سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

ادامه پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

Blank area for writing answers, featuring horizontal lines.



جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان



سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «نام محبتی (ره)»

اینجانب (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۵ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب (منشی حوزه) تعداد برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و پنجمین دوره المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۱/۰۲/۱۴ - ساعت: ۸:۰۰ - مدت: ۲۴۰ دقیقه



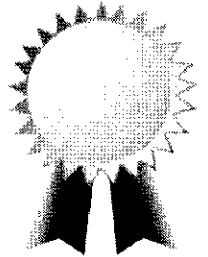
شماره صندلی

.....

استان: ----
منطقه: ----
پایه تحصیلی: ----

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: .
کد ملی: .
نام پدر: ----
نام مدرسه: ----



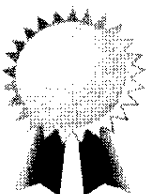
حوزه: ----

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

- این پاسخ نامه به صورت نیه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از مشخصات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکتویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- آزمون مرحله دوم برای دانش آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.
- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.





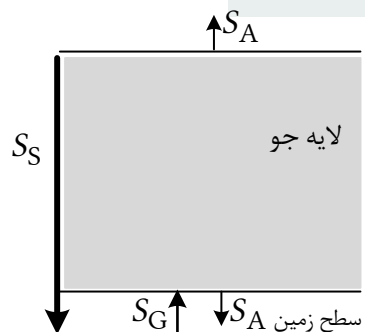
نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



۱) نیمی از جایزه نوبل سال ۲۰۲۱ به پژوهشگرانی اهدا شد که اقلیم زمین را مدل سازی کرده بودند. چنین مدل هایی متغیرهای بسیاری دارد و به طور معمول به سبب پیچیدگی شان، حل آنها نیازمند محاسبات و شبیه سازی های رایانه ای است.

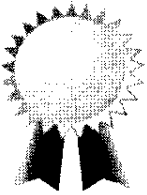
در این مسئله می خواهیم با مدلی بسیار ساده، پدیده گرمایش زمین بر اثر وجود لایه های جو را بررسی کنیم. برای این که بتوانیم مدل را تحلیل کنیم، نیاز به ساده سازی های فراوانی داریم. برای مثال سطح وسیعی از زمین را اقیانوس ها پوشانده اند که تأثیر به سزایی در اقلیم دارند، اما در این مسئله اثر اقیانوس ها را کنار می گذاریم. همچنین اثر شب و روز را در نظر نمی گیریم. هر چند نتیجه کمی این مدل ساده با واقعیت تفاوت دارد، اما نقطه شروع خوبی برای مدل های واقعی تر است.

مهم ترین منبع انرژی زمین، خورشید است. شدت نور خورشید در سطح زمین بر حسب بسامد متغیر است. کمیت شدت عبارت است از انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح می تابد. شدت متوسط نور خورشید در سطح زمین را با S_0 نشان می دهیم. تابش خورشید به طور عمده در بسامدهایی صورت می گیرد که بدون جذب به طور کامل از تمامی لایه های جو عبور می کند، به زمین می رسد و به طور کامل توسط زمین جذب می شود.



شکل ۱

شدت تابش گرمایی هر جسم در دمای T در محل جسم برابر با $S_0 = kT^4$ است که در آن k ثابت است. در این مسئله ثابت k را برای زمین و لایه های جو یکسان می گیریم. اگر زمین جو نداشت، در دمای ثابت، یعنی در حالت تعادل گرمایی، شدت متوسط دریافتی توسط زمین از سوی خورشید، با شدت

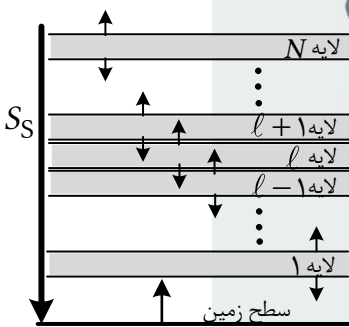


نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



تابشی زمین برابر بود. در این حالت دمای زمین را با T_B نشان می‌دهیم و داریم $S_S = kT_B^4$. در هر جای مسئله که به شدت نور خورشید در سطح زمین احتیاج داشتید از این رابطه استفاده کنید.

آ) مطابق شکل ۱ جو زمین را تک لایه‌ای فرض کنید. در این وضعیت دمای زمین را با T_G و دمای لایه جو را با T_A نشان می‌دهیم. این لایه با شدت یکسان $S_A = kT_A^4$ هم به سمت زمین و هم به سمت فضا تابش دارد. همچنین فرض کنید تمام تابش لایه که به سمت زمین است توسط زمین جذب می‌شود و تمام تابش زمین نیز توسط لایه جو جذب می‌شود. با فرض تعادل گرمایی و ثابت بودن دمای زمین و لایه، T_G و T_A را بر حسب T_B به دست آورید.

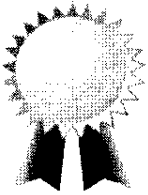


شکل ۲

حال فرض کنید که مطابق شکل ۲ جو زمین از N لایه مجزا تشکیل شده باشد. مانند قبل تمام نور خورشید بدون جذب شدن از همه لایه‌ها عبور می‌کند، به زمین می‌رسد و به طور کامل توسط آن جذب می‌شود. این مجموعه در حال تعادل گرمایی است و دمای تمام اجزای آن ثابت است. دمای زمین را با T_E و دمای لایه l ام را با T_l نشان می‌دهیم. تابش گرمایی زمین به طور کامل توسط

لایه اول جذب می‌شود. تابش لایه اول به سمت زمین به طور کامل توسط زمین جذب می‌شود. لایه نوعی l ام با شدت یکسان kT_l^4 به لایه‌های $l-1$ و $l+1$ تابش می‌کند که به طور کامل توسط آن‌ها جذب می‌شود. لایه N ام نیز مشابه سایر لایه‌ها هم به سمت فضا و هم به سمت لایه $N-1$ تابش می‌کند.

ب) معادله‌های تعادل گرمایی را برای زمین، لایه l ام ($1 \leq l < N$) و لایه N ام بنویسید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



پ) T_N را بر حسب T_B به دست آورید.

ت) T_ℓ را بر حسب T_B ، N و ℓ به دست آورید.

ث) T_E را بر حسب T_B و N به دست آورید.



(A) بدار این که دما در زمین T_G و دمای لایه T_A باقی بماند بود

$$\begin{cases} S_S + S_A = S_G \\ 2 S_A = S_G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_B^4 + T_A^4 = T_G^4 \\ 2 T_A^4 = T_G^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} T_A = T_B \\ T_G = 2^{1/4} T_A \end{matrix}$$

(B) بدار لایه l ام : $S_{l+1} + S_{l-1} = 2 S_l$, $1 \leq l < N$

بدار لایه N ام : $S_{N-1} = 2 S_N$

بدار زمین : $S_S + S_1 = S_E$

(C) از معادلات قسمت (B) و این که $S_0 = S_E$ است :

زمین $S_S + S_1 = S_E$

$l=1$: $S_2 + S_1 = 2 S_1$

$l=2$: $S_3 + S_1 = 2 S_2$

⋮

$l=N-1$: $S_N + S_{N-2} = 2 S_{N-1}$

N ام $S_{N-1} = 2 S_N$

$S_S + S_N = 2 S_N$

↓

$T_B^4 = T_N^4$

↓

$T_N = T_B$

از جمع این معادلات \Rightarrow

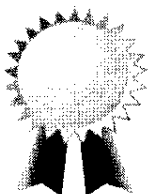
(C) از معادله لایه N : $T_{N-1}^4 = 2 T_B^4$

از معادله لایه $l=N-1$: $T_{N-2}^4 = 3 T_B^4$

تا رسیدیم به معادله سطح l : $T_l^4 = (N-l+1) T_B^4$

$T_l = (N-l+1)^{1/4} T_B$

(D) در نتیجه $S_0 = S_E$: $T_E = (N+1)^{1/4} T_B$



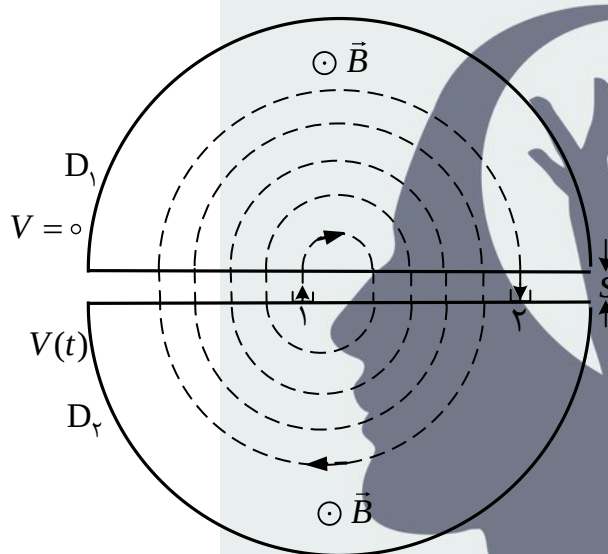
نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



(۲) یک بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی یکنواخت B حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. صفحه

دایره عمود بر امتداد B است. با به کار بردن قانون دوم نیوتن دوره چرخش این حرکت دایره‌ای را بر حسب m

، q و B به دست آورید.



شکل ۱

حال می‌خواهیم فرایند شتاب دادن ذرات باردار در

دستگاهی موسوم به سیکلوترون را در چارچوب فیزیک

نیوتونی بررسی کنیم. شتاب‌دهنده سیکلوترون

دستگاهی مطابق شکل ۱ است که دارای دو رسانای

نیم‌استوانه‌ای توخالی با مقطعی به شکل حرف انگلیسی

D است. این دو رسانا را D_1 و D_2 می‌نامیم. فاصله

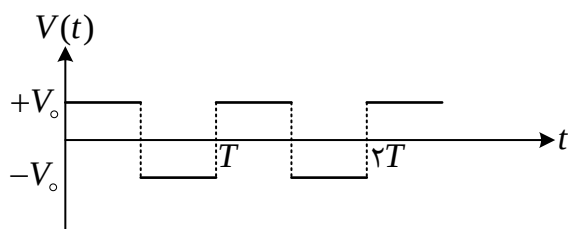
قسمت تخت D_1 و D_2 از یکدیگر برابر S است. قسمت

تخت هر دو آن‌ها به صورت توری است به طوری که یک ذره باردار می‌تواند از آن عبور کند. رسانای D_1 همواره

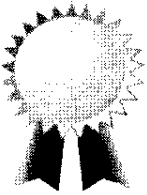
دارای پتانسیل الکتریکی صفر است و رسانای D_2 به پتانسیل الکتریکی $V(t)$ مطابق نمودار شکل ۲ متصل است.

این پتانسیل الکتریکی با دوره تناوب T به صورت زیر

است.



شکل ۲

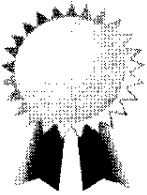


نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



$$V(t) = \begin{cases} +V_0, & nT < t < nT + \frac{T}{2} \\ -V_0, & nT + \frac{T}{2} < t < nT + T \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

به این ترتیب در شکاف بین D_1 و D_2 ، یعنی در فاصله S ، یک میدان الکتریکی یکنواخت ایجاد می‌شود که به طور متناوب جهت آن معکوس می‌شود، اما داخل D ها میدان الکتریکی صفر است. همچنین مطابق شکل ۱ میدان مغناطیسی برون سوی B عمود بر سطح مقطع D ها وجود دارد. در این شتاب‌دهنده ابتدا ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی مثبت q از نقطه 1 روی D_2 در لحظه $t = 0$ از حالت سکون به دلیل پتانسیل الکتریکی $+V_0$ شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_1 برسد. این ذره داخل D_1 می‌رود و بر اثر میدان مغناطیسی داخل آن می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_1 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 برابر $-V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_1 مجدداً شتاب می‌گیرد تا به قسمت تخت D_2 برسد و داخل آن برود. در داخل D_2 ذره بر اثر میدان مغناطیسی می‌چرخد و دوباره به قسمت تخت D_2 برمی‌گردد. قبل از این که ذره به این نقطه برسد پتانسیل الکتریکی D_2 دوباره $+V_0$ شده است و ذره خارج شده از D_2 مجدداً به سمت D_1 شتاب می‌گیرد و این فرایند تکرار می‌شود (شکل ۱). با توجه به محدود بودن دفعات چرخش و اندازه شکاف S ، ذره همواره در شکاف بین D ها حرکت تندشونده دارد. اثر میدان مغناطیسی در شکاف بین دو رسانا را ناچیز بگیرید به طوری که مسیر حرکت ذره در شکاف بین D ها همواره عمود بر سطح تخت D ها است. توجه کنید که تغییر علامت پتانسیل تقریباً به طور لحظه‌ای صورت می‌گیرد و قبل و بعد از این لحظه سرعت ذره یکسان است. فرض کنید دوره تناوب T در شکل ۲، برابر با دوره چرخش ذره باردار بخش آ است.



نام : ---
 نام خانوادگی : ---
 کد ملی : ---



(ب) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، سرعت ذره را بر حسب k, m, q و V_0 به دست آورید.

(پ) بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، شعاع چرخش ذره در میدان مغناطیسی را بر حسب k, m, q, B و V_0 به دست آورید.

(ت) فرض کنید بعد از k بار عبور از شکاف بین D ها، مطابق شکل ۱، ذره به نقطه ۲ روی D_2 برسد. زمان رسیدن ذره به نقطه ۲، t ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

(ث) کل مسافتی که ذره در قسمت T طی می کند، l ، را بر حسب k, m, q, B, V_0 و S به دست آورید.

(ج) حداکثر مقدار S چقدر باشد تا در تمام k بار عبور ذره از شکاف، حرکت تندشونده باشد؟

(چ) با فرض $\frac{m}{q} = 1.04 \times 10^{-8} \text{ kg/C}$ ، $V_0 = 50.0 \text{ kV}$ ، $S = 2.00 \text{ mm}$ ، $q = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ و

$B = 1.04 \text{ T}$ اگر بخواهیم انرژی جنبشی ذره وقتی به نقطه ۲ می رسد 25.0 MeV باشد، مقادیر k ، t و l را

به دست آورید. در این جا، برای k های بزرگ از رابطه تقریبی $\sum_{i=1}^k \sqrt{i} \cong \frac{2}{3} \sqrt{k^3} + \frac{1}{2} \sqrt{k}$ می توانید استفاده

ذهن زیبا

کنید.

$$q\alpha B = \frac{m\alpha^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m\alpha}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{\alpha} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(ب) اگر $K_0 = 0$ انداز چینی ذره در نقطه 1 روی D_2 باشد و K_1 انداز چینی ذره پس از عبور از شگاف بدین اولین بار باشد

$$\Delta K_1 = K_1 - K_0 = qV_0$$

$$\Delta K_2 = K_2 - K_1 = qV_0$$

پس از بار دوم

⋮

$$\Delta K_k = K_k - K_{k-1} = qV_0$$

و پس از بار k ام

$$K_k - K_0 = kqV_0$$

از جمع معادلات فوق

$$\frac{1}{2} mU_k^2 - 0 = kqV_0 \Rightarrow U_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}}$$

$$r_k = \frac{mU_k}{qB}$$

(پ) مشابه با قسمت (ب) !

$$r_k = \sqrt{\frac{2kV_0 m}{qB^2}}$$

(ت) اگر $v_0 = 0$ سرعت ذره هنگام ترک نقطه 1 باشد ، سرعت ذره ، v_1 ، پس از اولین عبور از شگاف بدین است

$$v_1 = at_1 + v_0$$

اندازه سرعت ذره هنگام طی مسیر نیم دایره ای در میدان متناهی ثابت می ماند.

پس از دومین عبور ذره از شگاف :

$$v_2 = at_2 + v_1$$

و پس از k ام عبور ذره از شگاف :

⋮

$$v_k = at_k + v_{k-1}$$

از جمع طرفین معادلات :

$$v_k = a(t_1 + t_2 + \dots + t_k) + v_0$$

بنابراین مجموع زمان هایی که ذره بین شگاف ها سپری می کند

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = \frac{v_k}{a}$$

که a برابر است با $a = \frac{qV_0}{ms}$ زیرا $ma = qE = \frac{qV_0}{s}$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k = \sqrt{\frac{2kqV_0}{m}} / \frac{qV_0}{ms}$$

در نتیجه

ثابت T زمان طی مسیرها s در هر بار هم با هم برابرند بنابراین تا رسیدن ذره به نقطه 2 ، $k-1$ بار مسیر s طی کرده است.

سرایم زمان کل برابر است با

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_k + (k-1)\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2mk}{qV_0}} s + (k-1)\frac{m\pi}{qB}$$

$$l = ks + \sum_{i=1}^{k-1} \pi r_i = ks + \pi \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{i}$$

(ث)

$$l \approx ks + \pi \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{(k-1)^3} + \frac{1}{2} \sqrt{k-1} \right)$$

$$l \approx ks + \pi \sqrt{\frac{2mV_0}{qB^2}} \sqrt{k-1} \left(\frac{2}{3}k - \frac{1}{6} \right)$$

ج. با توجه به این که بعد از زمان $\frac{T}{2}$ پتانسیل الکتریکی D_2 معکوس می شود و این که بار q مثبت است ، حرکت در صورتی تند شونده است که پتانسیل D_2 قبل از ورود ذره از D_1 به D_2 منفی و قبل از خروج ذره از D_2 به D_1 مثبت باشد. اگر این فرآیند برعکس شود حرکت ذره بین کُلاف ها کند شونده می شود. یعنی مجموع زمان هایی که ذره بین D ها می گذراند از $\frac{T}{2}$ کمتر باشد

$$t_1 + t_2 + \dots + t_k < \frac{T}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2mk}{qV_0}} s < \frac{T}{2} \Rightarrow s < \sqrt{\frac{mV_0}{2kq}} \frac{\pi}{B}$$

$$k = \frac{\frac{1}{2} m v_k^2}{qV_0} = \frac{25 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \times 50 \times 10^3 \text{ J}} = 500$$

(ج)

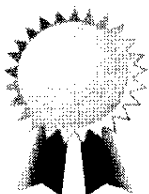
$$t = 1.57 \times 10^{-5} \text{ s}$$

از نتیجه قسمت 1:

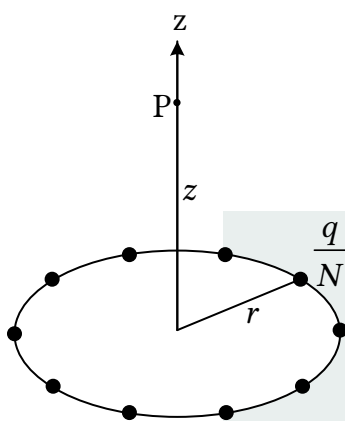
از نتیجه قسمت 2:

$$l = 72.6 \text{ m}$$

آموزشگاه علمی ذهن زیبا



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱

(۳) آ) بار الکتریکی q را به N قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را مطابق شکل ۱ بر روی رئوس یک N ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است قرار داده‌ایم. محور تقارن دستگاه بر صفحه دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد. مقدار و جهت میدان الکتریکی در نقطه P واقع بر محور تقارن دستگاه و به فاصله z از مرکز دایره را به دست آورید. برای سهولت می‌توانید N را زوج فرض کنید.

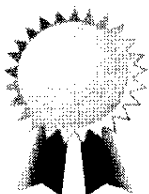
ب) حلقه‌ای به شعاع r در نظر بگیرید که بار الکتریکی q به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. به کمک بخش آ میدان الکتریکی این حلقه را در نقطه‌ای به فاصله z از مرکز حلقه بر روی محور آن به دست آورید.

پتانسیل الکتریکی نقطه‌ای به فاصله D از یک بار نقطه‌ای q نسبت به مبدأ دوردست برابر $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}$ است. پتانسیل

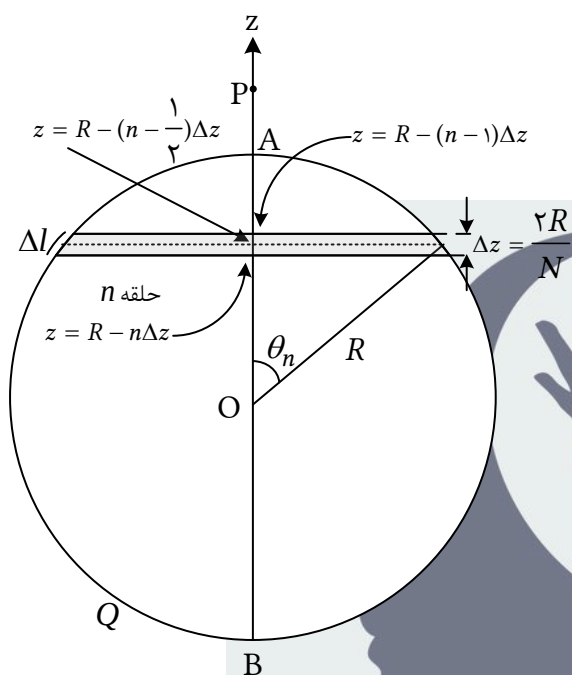
الکتریکی مجموعه‌ای از بارها جمع جبری پتانسیل الکتریکی آن‌ها است.

پ) پتانسیل الکتریکی حلقه‌ای به شعاع r و بار الکتریکی q در نقطه‌ای بر روی محور آن و به فاصله z از مرکز حلقه را به دست آورید.

مطابق شکل ۲، یک پوسته کروی به شعاع R در نظر بگیرید که بار الکتریکی Q به طور یکنواخت روی سطح آن توزیع شده است. نقطه P واقع بر محور z و به فاصله d ($d > R$) از مرکز کره است. مبدأ مختصات را در مرکز کره بگیرید. بازه بین نقاط A به مختصه $z = R$ و B به مختصه $z = -R$ را به N قسمت مساوی تقسیم کنید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۲

از هر نقطه تقسیم، صفحه‌ای فرضی عمود بر محور Z در نظر

بگیرید. فاصله هر دو صفحه متوالی از هم $\Delta z = 2R/N$

است. هر صفحه، کره را در یک دایره قطع می‌کند. در میان

هر دو صفحه فرضی متوالی باریکه‌ای از سطح کره قرار

می‌گیرد. اگر N به اندازه کافی بزرگ باشد هر کدام از

باریکه‌های یاد شده مشابه حلقه بخش B خواهد بود. حلقه

n ام را بین صفحات $z = R - n\Delta z$ و $z = R - (n-1)\Delta z$

نظر بگیرید. مرکز حلقه n ام روی محور Z در نقطه

$z = R - (n - \frac{1}{2})\Delta z$ است. زاویه θ_n مربوط به حلقه n ام

در شکل ۲ مشخص شده است.

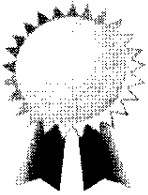
(ت) کمیت $\cos \theta_n$ را بر حسب n و N به دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

(ث) مساحت حلقه n ام و بار الکتریکی روی آن را به دست آورید.

راهنمایی: سطح هر حلقه را می‌توان تقریباً مشابه سطح نواری مستطیل شکل به عرض Δl در نظر گرفت.

(ج) از برهم‌نهی میدان الکتریکی حلقه‌ها، میدان الکتریکی کره را در نقطه P به صورت یک جمع روی شماره‌دهنده

n بر حسب Q ، R ، d و θ_n ها به دست آورید.



نام : ---
 نام خانوادگی : ---
 کد ملی : ---



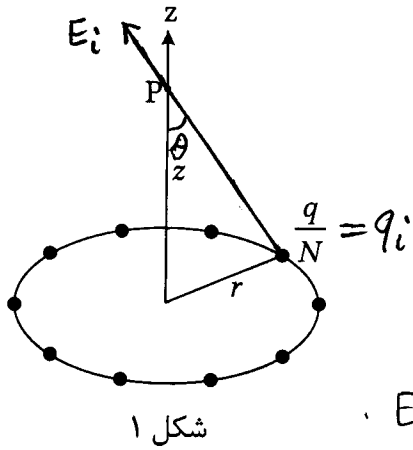
چ) به روش مشابه، پتانسیل الکتریکی پوسته کروی شکل ۲ در نقطه P را به صورت یک جمع روی شمارنده n بر حسب Q، R، d و θ_n ها به دست آورید.

ح) فرض کنید پاسخ بخش های ج و چ برای میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر باشد،

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2 N} \sum_{n=1}^N f(x_n, \alpha), \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d N} \sum_{n=1}^N g(x_n, \alpha)$$

که در آن $\alpha = R/d$ و $x_n = \cos \theta_n$ فرض شده اند. توابع $f(x, \alpha)$ و $g(x, \alpha)$ را بنویسید. برای $\alpha = \frac{1}{3}$ شکل تقریبی این دو تابع را رسم کنید. برای این کار توجه کنید که مشتق اول و دوم هر دو تابع مثبت هستند. بنابراین کافی است مقدار توابع یاد شده را در ابتدا و انتهای بازه مجاز و در $x=0$ به دست آورید.

ذهن زیبا



$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2 + r^2} \quad (1) \quad ۳$$

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \cos\theta = \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2 + r^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{چون } \sum_{i=1}^N q_i = N \left(\frac{q}{N} \right) = q \quad (2)$$

$N \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^N q_i = q$$

$$q_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q}{N} \quad \text{این بار، از طرفی باز هم}$$

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{در نتیجه}$$

$$V_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \quad , \quad q_i = \frac{q}{N} \quad (3)$$

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$\cos\theta_n = \frac{R - n\Delta z + \frac{1}{2}\Delta z}{R} = 1 + \left(-n + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta z}{R} = 1 - \frac{2n-1}{N} \Delta z \quad (4)$$

$$\Delta S = (2\pi R \sin\theta_n) \Delta l \quad , \quad \Delta l = \frac{\Delta z}{\sin\theta_n} \quad \Delta z \begin{matrix} \Delta l \\ \Delta \theta_n \end{matrix} \quad (5)$$

$$= 2\pi R \Delta z = 2\pi R \left(\frac{2R}{N} \right) = \frac{4\pi R^2}{N}$$

$$\Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \Delta S = \frac{Q}{N} \quad \text{یعنی هر قطعه برابر و } \frac{1}{N} \text{ مساحت کروی است.}$$

$$z_n = d - R \cos\theta_n \quad \text{در سمت (-) برای قطعه nام، } \Delta Q \quad (6)$$

$$r_n = R \sin\theta_n \quad \text{و به شعاع } P \text{ از نقطه}$$

$$E_n = \frac{\Delta Q z_n}{4\pi\epsilon_0 (z_n^2 + r_n^2)^{3/2}}$$

$$E = \sum_{n=1}^N E_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N} \frac{d - R\cos\theta_n}{[(d - R\cos\theta_n)^2 + (R\sin\theta_n)^2]^{3/2}}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N} \sum_{n=1}^N \frac{d - R\cos\theta_n}{(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta_n)^{3/2}}$$

(ع) در قسمت ب) بارها را ΔQ و r_n بارها را $r_n = R\sin\theta_n$ و $z_n = d - R\cos\theta_n$ قرار دهیم

$$V_n = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z_n^2 + r_n^2}}, \quad V = \sum_{n=1}^N V_n$$

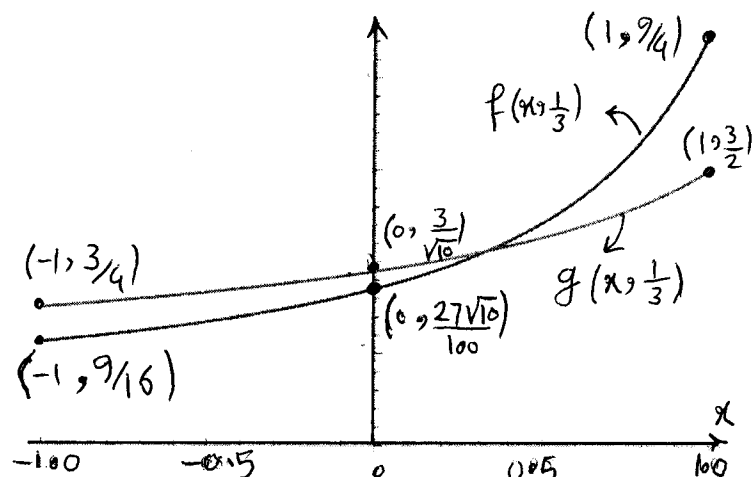
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta_n)^{1/2}}$$

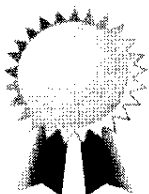
$$f(x, \alpha) = \frac{1 - \alpha x_n}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x_n)^{3/2}}, \quad f(x, \alpha) = \frac{1 - \alpha x}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x)^{3/2}} \quad (ع)$$

$$g(x, \alpha) = \frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x_n)^{1/2}}, \quad g(x, \alpha) = \frac{1}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x)^{1/2}}$$

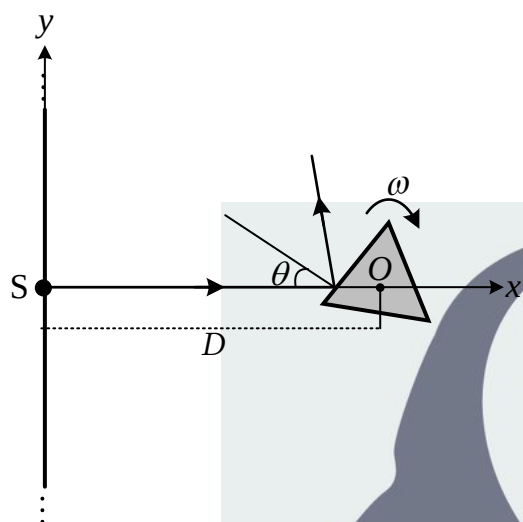
$$f(x, \frac{1}{3}) = \frac{1 - \frac{x}{3}}{(\frac{10}{9} - \frac{2}{3}x)^{3/2}}$$

$$g(x, \frac{1}{3}) = \frac{1}{(\frac{10}{9} - \frac{2}{3}x)^{1/2}}$$





نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



۴) باریکه‌ای از نور مطابق شکل از چشمه S در راستای محور

x به سمت راست منتشر می‌شود. امتداد باریکه از نقطه O مرکز

یک N-ضلعی منتظم می‌گذرد. در شکل مقابل، حالت $N = 3$

نشان داده شده است. این N-ضلعی منتظم مقطعی از یک منشور

با صفحه شکل است که وجوه خارجی آن آینه‌ها است. آینه‌ها بر

صفحه شکل عمودند. منشور حول محوری که از نقطه O گذشته

و بر صفحه شکل عمود است با سرعت زاویه‌ای ثابت ω به طور

ساعتگرد می‌چرخد. باریکه نور پس از بازتاب از آینه‌ای که در لحظه معینی در مسیر آن است، به پرده‌ای نامتناهی

که در پشت چشمه قرار دارد برخورد می‌کند و باعث ایجاد نقطه‌ای نورانی می‌شود. این اتفاق در صورتی رخ می‌دهد

که زاویه نور بازتابیده با محور x مناسب باشد. در شکل، محور y مقطع پرده با صفحه شکل است. زاویه تابش نور

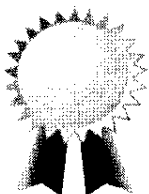
به آینه در یک لحظه نامشخص را θ بگیرید. فاصله SO را برابر D بگیرید که بسیار بزرگتر از ابعاد N-ضلعی

است. فاصله چشمه از پرده را ناچیز بگیرید. در بخش‌های **آ و ب** این مسئله فرض کنید انتشار نور به طور آنی

صورت می‌گیرد، یعنی سرعت انتشار آن نامتناهی است. طولی از محور y که توسط نقطه روشن جاروب می‌شود را

ΔL بگیرید و فرض کنید $f = \frac{\Delta L}{D}$. همچنین g را کسری از یک بازه زمانی طولانی بگیرید که طی آن، یک نقطه

روشن روی پرده وجود دارد.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



(آ) کسرهای f و g را برای موارد ذکر شده در جدول زیر به دست آورید. در پاسخنامه خود جدولی مشابه این جدول بکشید و جوابهای خود را در خانههای خالی آن پر کنید.

N	۳	۴	$N > 4$	۶
f				
g				

در ادامه مسئله فرض کنید $N = 3$ است یعنی مقطع منشور مثلث متساوی الاضلاع است.

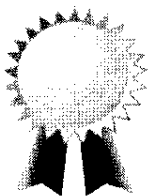
(ب) سرعت نقطه روشن روی پرده را بر حسب θ به دست آورید. به ازای چه مقادیری از θ اندازه سرعت نقطه روشن از مقدار معین V بیشتر است؟

حال فرض کنید نور از ذراتی موسوم به فوتون تشکیل شده که با سرعت ثابت c منتشر می شوند. فوتونها در برخورد با آینه از قانون بازتاب عمومی (برابری زوایای تابش و بازتاب) تبعیت می کنند. فرض کنید در لحظه $t_m = 0$ یکی از آینهها بر خط SO عمود است و در لحظه دلخواه t_m به اندازه زاویه $\theta = \omega t_m$ چرخیده است. فوتونی که در لحظه

t_m به آینه برخورد کرده در لحظه t به پرده می رسد.

(پ) t را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.

(ت) فوتونی که در لحظه t_m به آینه برخورد می کند در نقطه y به پرده می رسد. y را به صورت تابعی از t_m به دست آورید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



ث) سرعت نقطه نورانی روی پرده، $v = \frac{dy}{dt}$ ، که به معنی مشتق y نسبت به t است، را با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای حساب کنید و سپس جواب را به صورت تابعی از θ به دست آورید.

یادآوری قاعده مشتق زنجیره‌ای: اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبه خود تابعی از متغیر s باشد،

مشتق f نسبت به s از رابطه $\frac{df}{ds} = \frac{df}{du} \frac{du}{ds}$ به دست می‌آید. همچنین توجه داشته باشید که $\frac{du}{ds} = \left(\frac{ds}{du}\right)^{-1}$.

ج) نمودار کمیت $z = \frac{v\omega D}{v}$ را بر حسب $p = \sin^2 \theta$ رسم کنید. سپس نمودار $\frac{v}{c}$ را بر حسب p رسم کنید.

در محاسبات و رسم نمودارها، نسبت $\frac{\omega D}{c}$ را α بگیرید و فرض کنید $1 < \alpha < \frac{1}{2}$. بر روی نمودارها هر

مشخصه‌ای از قبیل نقاط تقاطع با محورها، محل کمینه‌ها و بیشینه‌ها و مقدار آن‌ها، محل مجانب‌ها، بازه‌های معتبر حرکت و مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه‌های مذکور را مشخص کنید.

چ) با توجه به نمودار $\frac{v}{c}$ بر حسب p معلوم کنید در چه بازه‌ای از θ اندازه سرعت نقطه نورانی روی پرده از c

ذهن زیبا

بیشتر است؟

ح) اگر بازه زمانی بسیار کوتاه بین ارسال دو فوتون متوالی از چشمه T_0 فرض شود، بازه زمانی بین رسیدن دو

فوتون متوالی به پرده، T ، را بر حسب T_0 و θ به دست آورید. معلوم کنید T همواره از T_0 بزرگتر است یا همواره

از آن کوچکتر است و یا گاهی از آن بزرگتر و گاهی کوچکتر است؟

(۳) اگر مطابق شکل، θ را از محور x بشیم، در صورتی امکان پذیر نور بازتابی به پرتو y وجود دارد که $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ باشد.

به ازای $N=3$ ، شروع انعکاس از یک آینه معین در $\theta = -\frac{\pi}{3}$ است. از مقایسه این بازه با بازه $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ که $g = \frac{90^\circ}{120^\circ} = \frac{3}{4}$ به دست می آید. در این حالت ΔL کل محور y را در بر می گیرد و $f \rightarrow \infty$

به ازای $N=4$ بازه ای که نور پس از انعکاس به پرتو y می خورد $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ است پس $g = \frac{90^\circ}{90^\circ} = 1$. در این وضعیت نیز کل محور y به وسیله تقاطع روشن جاوده می شود و $f \rightarrow \infty$.

بدان منظور که سطح مقطع آن N ضلعی منتظم است داریم. $-\frac{\pi}{N} < \theta < \frac{\pi}{N}$. در این وضعیت $g=1$ است. در هر یک از دو حالت $\theta = \pm \frac{\pi}{N}$ زاویه پرتو

بازتاب با محور x است $\pm \frac{2\pi}{N}$ به بیان $\Delta L = 2D \tan \frac{2\pi}{N}$ و $f = 2 \tan \frac{2\pi}{N}$

به ازای $N=6$ ، $g=1$ و $f = 2 \tan \frac{2\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

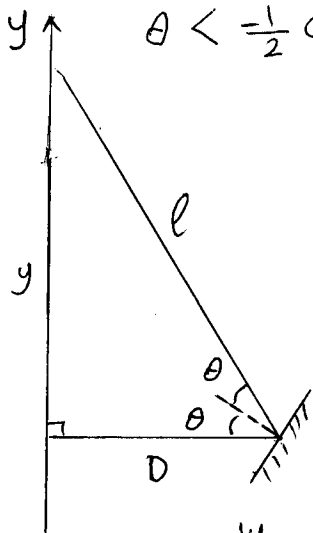
N	۳	۴	$N > 4$	۶
f	∞	∞	$2 \tan \frac{2\pi}{N}$	$2\sqrt{3}$
g	$\frac{3}{4}$	۱	۱	۱

$$y = D \tan 2\theta = D \tan 2\omega t$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\omega D (1 + \tan^2 2\omega t) = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t} = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\theta}$$

$$|\cos 2\theta| < \sqrt{\frac{2\omega D}{v}} \quad \text{به ازاى } v > v$$

$$\theta < \frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{\frac{2\omega D}{v}} \quad \Downarrow \quad \theta > \frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{\frac{2\omega D}{v}}$$



$$t = t_m + \frac{l}{c} \quad , \quad l = \frac{D}{\cos 2\theta}$$

$$t = t_m + \frac{D}{c} \frac{1}{\cos 2\omega t_m}$$

$$y = D \tan 2\theta = D \tan 2\omega t_m$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_m} \left(\frac{dt}{dt_m} \right)^{-1}$$

$$v = 2\omega D \left(\frac{1}{\cos^2 2\omega t_m} \right) \left(1 + \frac{D}{c} \frac{2\omega \sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m} \right)^{-1}$$

$$v = \frac{2\omega D}{\cos^2 2\omega t_m + \frac{2\omega D}{c} \sin 2\omega t_m}$$

$$\cos^2 2\theta = 1 - p^2, \quad \sin 2\theta = p \quad \Leftarrow \quad \theta = \omega t_m \quad \alpha = \frac{\omega D}{c} \quad (c)$$

$$\frac{v}{c} = \frac{2\alpha}{1 - p^2 + 2\alpha p}, \quad \frac{2\omega D}{v} = 1 - p^2 + 2\alpha p$$

$$-1 < p < 1 \quad \Leftarrow \quad -1 < \sin 2\theta < 1 \quad \Leftarrow \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{به ازاى}$$

$$r(p) = 1 - p^2 + 2\alpha p$$

$$\frac{dr}{dp} = 0 \Rightarrow p = \alpha \Rightarrow r(\alpha) = 1 + \alpha^2$$

$$r(p) = 0 \Rightarrow p_0 = \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$r(-1) = -2\alpha$$

$$r(1) = 2\alpha$$

$$r(\alpha) = 1$$

آموزشگاه علمی ذهن زیبا

اگر $r(p)$ و $q(p)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$q(p) = \frac{2\alpha}{1 - p^2 + 2\alpha p}$$

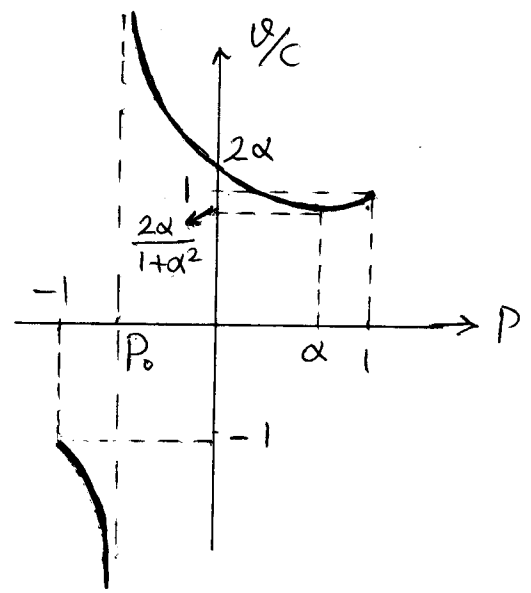
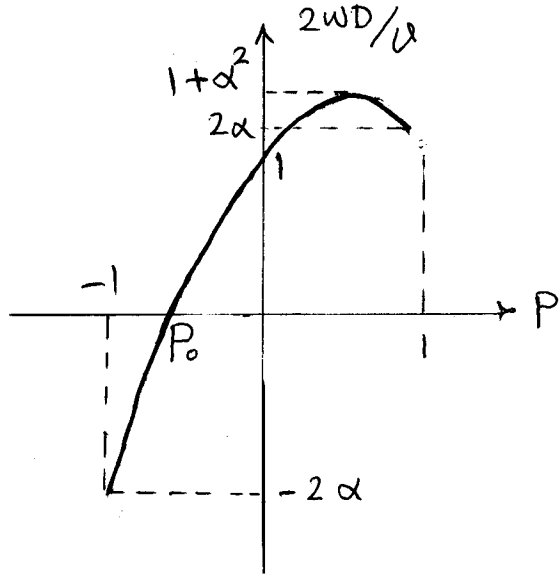
$$\frac{dq}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{4\alpha(p - \alpha)}{(1 - p^2 + 2\alpha p)^2} = 0 \Rightarrow p = \alpha$$

$$q(\alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \quad , \quad q(-1) = -1 \quad , \quad q(1) = 1$$

$$q(0) = 2\alpha$$

$$\frac{v}{c} \rightarrow \pm \infty \Rightarrow p_0 = \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2} \quad \text{جانب}$$

www.Amoozz.ir



(ج) با توجه به نمودار $\frac{V}{c}$ بر حسب P مشخص است که
 برای کلیه P ها مثبتی و $P < P_1$ P ها مثبتی است
 است اندازه سرعت از c بیشتر است نه P_1 برابری است

$$\frac{V}{c} = 1 \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-P_1^2+2\alpha P_1} = 1 \Rightarrow P_1 = \begin{cases} 1 \\ 2\alpha-1 \end{cases}$$

قابل قبول

یعنی P از $2\alpha-1 < P < 1$ (ب) $\frac{V}{c} > 1$ بر حسب θ خواهد شد:

$$-1 < \sin 2\theta < 2\alpha-1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

$$\Downarrow$$

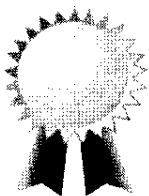
$$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{1}{2} \sin^{-1}(2\alpha-1)$$

$$dt = \left(\frac{dt}{dt_m} \right) dt_m$$

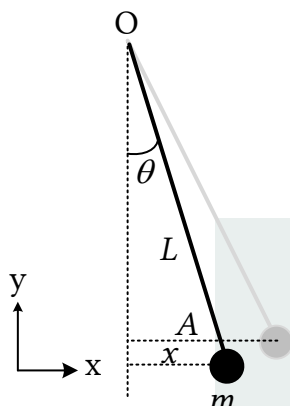
$$T = \left(1 + \frac{2\omega D}{c} \frac{\sin 2\omega t_m}{\cos^2 2\omega t_m} \right) T_0$$

(ج) با توجه به مفهوم مستوی:

همواره $T > T_0$ است.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱

۵) گوی فلزی کوچکی به جرم m در انتهای یک میله فلزی نازک بسیار سبک به طول L قرار دارد. میله مطابق شکل ۱ از نقطه O آویزان است و می تواند حول امتداد قائم نوسان کند. گوی فلزی را از حالت تعادل به اندازه فاصله افقی A منحرف می کنیم و در زمان $t = 0$ آن را رها می کنیم. در تمام این مسئله زاویه انحراف آونگ کوچک است به طوری که انحراف افقی گوی، x ، با زاویه انحراف θ رابطه تقریبی $x \approx L\theta$ دارد. (آ) انرژی پتانسیل گرانشی آونگ، $U(x)$ ، را نسبت به پایین ترین نقطه حرکت آن بر

حساب x به دست آورید. با توجه به این که x از L بسیار کوچکتر است، با استفاده از رابطه

$$1 + \frac{1}{\epsilon} \approx (1 + \epsilon)^{\frac{1}{\epsilon}} \quad \text{که برای } |\epsilon| \text{ خیلی کوچکتر از یک، تقریب خوبی است، تابع انرژی پتانسیل گرانشی را}$$

به صورت $U(x) = \frac{1}{\epsilon} kx^2$ به دست آورید و ضریب k را بر حسب داده های مسئله بنویسید.

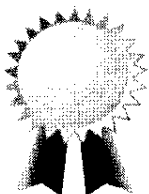
(ب) انرژی کل این دستگاه، $E = K + U$ ، ثابت است و با زمان تغییر نمی کند. مشتق این کمیت نسبت به زمان

را حساب کنید و برابر صفر قرار دهید. از این طریق برای حرکت آونگ نسبت $\frac{a}{x}$ را بر حسب ثابت های مسئله به

دست آورید که a شتاب افقی گوی و x جابه جایی آن از حالت تعادل است. سرعت لحظه ای افقی گوی را v

بگیرید. لازم به ذکر است که در تمام این مسئله مؤلفه قائم سرعت گوی قابل چشم پوشی است.

راهنمایی: برای محاسبه مشتق کمیت های x^2 و v^2 نسبت به زمان از قاعده مشتق زنجیره ای استفاده کنید.



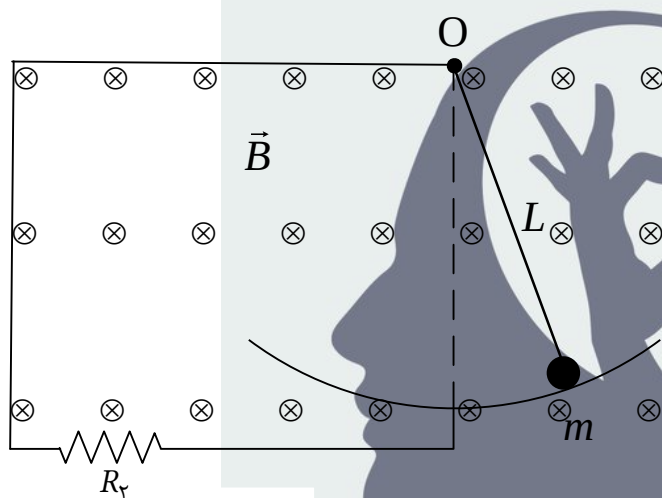
نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



پ) برای حرکت نوسانی با معادله $x = A \cos(\omega t + \beta)$ نسبت $\frac{a}{x}$ را به دست آورید. از مقایسه این نتیجه با

نتیجه بخش ب بسامد زاویه ای ω را برای حرکت آونگ حساب کنید. همچنین با توجه به شرایط اولیه مسئله،

β (فاز اولیه) را نیز تعیین کنید.



شکل ۲

حال دستگاه شکل ۲ را در نظر بگیرید. در این

دستگاه، آونگ شکل ۱ در یک مدار الکتریکی قرار

داده شده است. گوی فلزی مماس بر سطح یک

رسانای بدون مقاومت و بدون اصطکاک با مقطع

دایره ای حرکت می کند و همواره اتصال مدار برقرار

است. مقاومت الکتریکی میله و گوی را R_1 بگیرید و

از مقاومت الکتریکی سیم ها چشم ببوشید. همچنین مدار دارای یک مصرف کننده با مقاومت R_p است. میدان

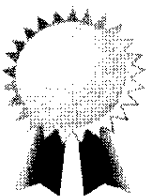
مغناطیسی یکنواخت \vec{B} عمود بر سطح مدار و به سمت داخل شکل برقرار است. لازم به ذکر است که در این حالت،

گوی فلزی حرکت هماهنگ ساده ندارد.

ت) نیروی محرکه الکتریکی القاء شده در مدار را بر حسب سرعت افقی گوی، v ، و سایر داده های مسئله به

دست آورید.

راهنمایی: برای زاویه های کوچک می توان کمان مقابل به زاویه را با وتر متناظر با آن یکی گرفت.



نام : ---
 نام خانوادگی : ---
 کد ملی : ---



ث) انرژی این دستگاه به دلیل اتلاف در مقاومت‌ها ثابت نیست و با زمان کاهش می‌یابد. می‌دانیم اندازه انرژی تلف‌شده در واحد زمان در مقاومت الکتریکی R برابر Ri^2 است که i جریان لحظه‌ای گذرنده از مقاومت است. حال مشتق انرژی دستگاه نسبت به زمان را با منفی اندازه آهنگ اتلاف انرژی در مقاومت‌ها برابر بگیرید، و به معادله‌ای به صورت $ma + bv + kx = 0$ برسید که در آن a شتاب، v سرعت و x جابه‌جایی افقی گوی است. ضرایب b و k را معین کنید.

ج) جواب معادله‌ای که در بخش ث به دست آمد به صورت $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \beta)$ است. در این معادله از تابع نمایی $e^{-\gamma t}$ استفاده شده است که در آن e عدد نپر نام دارد و مقدار آن تا سه رقم معنی‌دار برابر 2.72 است. مشتق این تابع نسبت به زمان به صورت $\frac{d(e^{-\gamma t})}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}$ است. این حل را در معادله به دست آمده در بخش ث قرار دهید و کمیت‌های γ و ω را بر حسب ثابت‌های مسئله به دست آورید.

ذهن زیبا

$$U(x) = mg(L - \sqrt{L^2 - x^2})$$

$$\sqrt{L^2 - x^2} = L \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx L \left(1 - \frac{x^2}{2L^2}\right)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{L}\right) x^2 \Rightarrow k = mg/L$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad v \approx v_x \quad , \quad v \approx \quad (1)$$

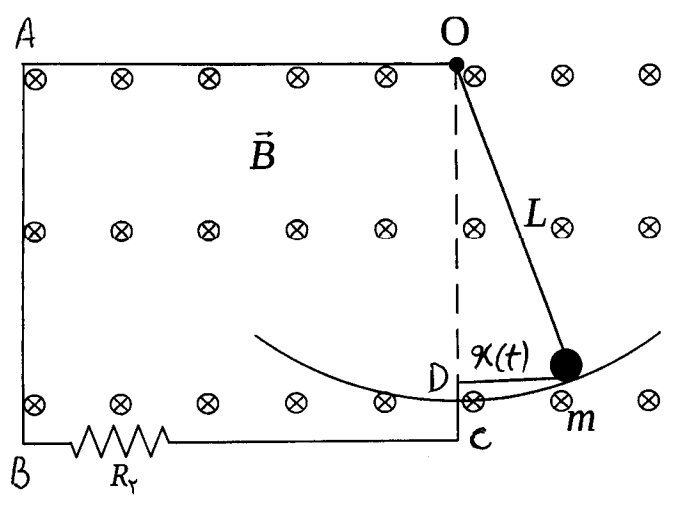
$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m v a + k x v = 0 \Rightarrow \frac{a}{x} = -\frac{k}{m} = -\frac{g}{L}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A \omega \sin(\omega t + \beta) \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A \omega^2 \cos(\omega t + \beta) = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{a}{x} = -\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{از معادله با سمت راست}$$

در $t=0$ در $x=A$ و $v=0$ به بر این
 $0 = -A \omega \sin \beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = A \cos \omega t \quad \underline{x = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)}$



(3) در وضعیت نشخ داده در شکل
 مساحت مثلث برابر است با

$$A = A_0 + a(t)$$

A_0 مساحت مثلث $OABC$ و $a(t)$ مساحت مثلث کوچک ODM

$$a(t) = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - x^2(t)} \quad x(t)$$

$$= \frac{1}{2} L x(t) \left(1 - \left(\frac{x(t)}{L}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2} L x(t)$$

$$\Phi = B A \quad , \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (A_0 + a(t)) B = -B \frac{da(t)}{dt} = -\frac{LB}{2} \dot{x}(t)$$

↑
مساحت کوچک

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2$$

ثابت این بار

$$R = R_1 + R_2, \quad i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}, \quad k = \frac{mg}{L}, \quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$m\ddot{x} + kx = -\frac{\left(-\frac{1}{2}LB\dot{x}\right)^2}{R_1 + R_2}$$

تساوی برابری

$$m\ddot{x} + \frac{L^2 B^2}{4(R_1 + R_2)} \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow b = \frac{L^2 B^2}{4(R_1 + R_2)}$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \beta) \quad (2)$$

$$\dot{x} = -A\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \beta) + A e^{-\gamma t} (-\omega') \sin(\omega' t + \beta)$$

$$a = A(\gamma^2 - \omega'^2) e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \beta) + 2A\omega'\gamma e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \beta)$$

با قرار دادن در معادله $ma + b\dot{x} + kx = 0$ و برابر قرار دادن

ضرایب کسینوس‌های مستقل $A \cos(\omega' t + \beta) e^{-\gamma t}$ و $A \sin(\omega' t + \beta) e^{-\gamma t}$ خواص دالت

$$m(\gamma^2 - \omega'^2) - b\gamma + k = 0, \quad k = \frac{mg}{L}$$

$$2m\gamma\omega' - b\omega' = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{b}{2m}$$

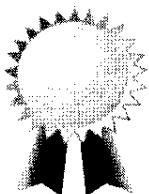
$$\omega'^2 = \frac{g}{L} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$$

با قرار دادن معادله اول

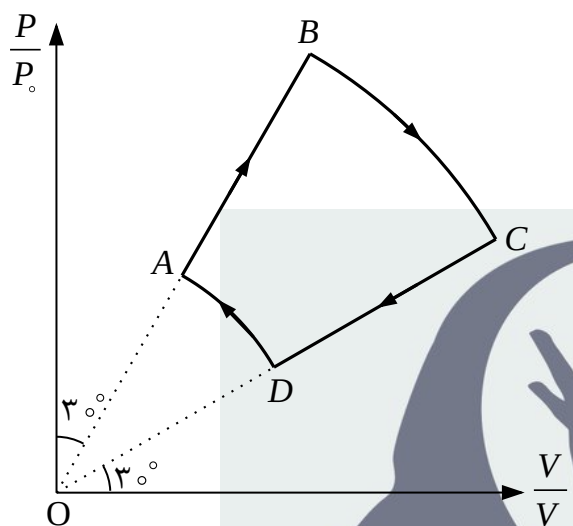
$$\gamma = \frac{LB}{8m(R_1 + R_2)}$$

بر حسب کسینوس‌ها معلوم

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{L^2 B^2}{8m(R_1 + R_2)}\right)^2}$$



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



۶) n مول گاز کامل تک اتمی فرآیند ترمودینامیکی چرخه

شکل مقابل در صفحه نمودار P/P_0 بر حسب V/V_0 را طی

می کند که P_0 فشاری معین و V_0 حجمی معین است.

فرآیندهای $D \rightarrow A$ و $B \rightarrow C$ به ترتیب کمانی از دایره های

به شعاع ۲ و ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در این صفحه اند.

مطابق شکل امتداد OC با محور افقی و امتداد OB با محور

عمودی زاویه 3° می سازند. کمیت های خواسته شده را بر

حسب n ، R ، V_0 ، P_0 و $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$ بنویسید و پاسخ های خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید. در ارائه

جواب های عددی، محاسبه جذر اعداد ضروری نیست. لازم به ذکر است که انرژی داخلی n مول گاز کامل تک

اتمی در دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که R ثابت جهانی گازها است.

آ) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T) ، هر یک از نقاط A ، B ، C و D را به دست آورید.

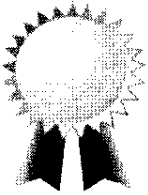
ب) کار محیط روی گاز در هر یک از فرآیندهای $A \rightarrow B$ ، $B \rightarrow C$ ، $C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه و همراه

با علامت آن بنویسید.

پ) کار محیط روی گاز در کل این چرخه چه قدر است؟

ت) گرمای خالص داده شده به گاز (گرمای داده شده به گاز منهای گرمای گرفته شده از گاز) در هر یک از

فرآیندهای $A \rightarrow B$ ، $B \rightarrow C$ ، $C \rightarrow D$ و $D \rightarrow A$ را محاسبه کنید و همراه با علامت آن بنویسید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



ث) نقطه‌ای روی فرآیند $B \rightarrow C$ و نقطه مشابهی روی فرآیند $D \rightarrow A$ وجود دارد که گرمای مبادله شده با محیط قبل و بعد آن تغییر علامت می‌دهد. مختصات ترمودینامیکی این نقاط را به دست آورید.

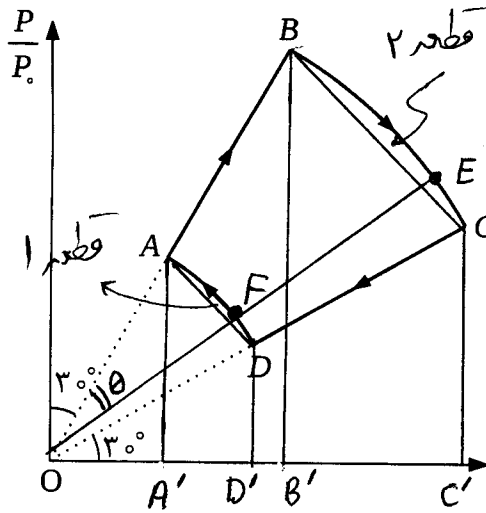
راهنمایی: به عنوان مثال در فرآیند $B \rightarrow C$ اگر گرمای داده شده به گاز از نقطه B تا نقطه دلخواهی روی

کمان BC را $Q(V)$ بگیریم، نقطه مورد نظر جایی است که مشتق Q نسبت به V تغییر علامت دهد.

ج) گرمای داده شده به گاز از طرف محیط در این چرخه و گرمای گرفته شده از گاز در این چرخه را به دست آورید. در ارائه جواب می‌توانید از توابع معکوس مثلثاتی استفاده کنید. به عنوان مثال اگر $\tan \theta = c$ باشد می‌توان نوشت $\theta = \tan^{-1} c$ که θ بر حسب رادیان است.



ذهن زیبا



(1) $\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1$

: معادله دایره AD

(2) $\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 4$

: معادله دایره BC

(3) $\frac{P}{P_0} = \left(\tan \frac{\pi}{6}\right) \frac{V}{V_0}$

: معادله خط DC

(4) $\frac{P}{P_0} = \left(\tan \frac{\pi}{3}\right) \frac{V}{V_0}$

: معادله خط AB

$V_A = \frac{V_0}{2}$, $P_A = \frac{\sqrt{3}}{2} P_0$

از معادلات (1) و (4)

$T_A = \frac{\sqrt{3}}{4} T_0$, $T_0 = \frac{P_0 V_0}{nR}$

از معادله PV = nRT

از معادلات (2) و (4) ، معادله حالت گد ؛ کامل

$V_B = V_0$, $P_B = \sqrt{3} P_0$, $T_B = \sqrt{3} T_0$

$V_C = \sqrt{3} V_0$, $P_C = P_0$, $T_C = \sqrt{3} T_0$

به طوریکه

$V_D = \frac{\sqrt{3}}{2} V_0$, $P_D = \frac{1}{2} P_0$, $T_D = \frac{\sqrt{3}}{4} T_0$

$W_{A \rightarrow B} = -(\text{مساحت ذوزنقه } ABB'A')$

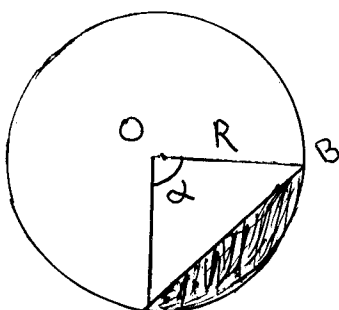
(ب)

$= - (P_A + P_B) \frac{1}{2} (V_B - V_A) = - \frac{3\sqrt{3}}{8} P_0 V_0$

$W_{C \rightarrow D} = +(\text{مساحت ذوزنقه } CDD'C')$

به طوریکه

$= \frac{3\sqrt{3}}{8} P_0 V_0$



بدار ادامه می‌باشد ابتدا مساحت یک قطعه از دایره (ناقص بین کمان دایره و وتر) را به دست می‌آوریم

مساحت قطعه $S = S_{\text{کمان } OAB} - S_{\text{مثلث } OAB} = \frac{R^2}{2} \alpha - \frac{1}{2} (R \sin \frac{\alpha}{2}) (2R \sin \frac{\alpha}{2})$

مساحت قطعه $S = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$

$$\begin{aligned}
 W_{B \rightarrow C} &= -(\text{مساحت مقطع ۲} + \text{مساحت ذوزنقه } BCC'B') \\
 &= -\left[(P_B + P_C) \frac{1}{2} (V_C - V_B) + \frac{2}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right) P_0 V_0 \right] \\
 &= -\left[P_0 V_0 + \left(\frac{\pi}{3} - 1 \right) P_0 V_0 \right] = -\frac{\pi}{3} P_0 V_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{D \rightarrow A} &= [\text{مساحت ذوزنقه } ADD'A' + \text{مساحت مقطع ۱}] \\
 &= \left[\frac{1}{4} P_0 V_0 + \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \right) P_0 V_0 \right] = \frac{\pi}{12} P_0 V_0
 \end{aligned}$$

$$W_{\text{مجموع}} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} \quad (ج)$$

$$W_{\text{مجموع}} = -\frac{\pi}{4} P_0 V_0$$

$$\Delta U = Q + W \quad (د)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{A \rightarrow B} &= U_B - U_A - W_{A \rightarrow B} \\
 &= \left(\frac{3}{2} nR T_B - \frac{3}{2} nR T_A \right) - W_{A \rightarrow B} = \left[\frac{9\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right] P_0 V_0
 \end{aligned}$$

$$Q_{A \rightarrow B} = \frac{3\sqrt{3}}{2} P_0 V_0$$

$$Q_{B \rightarrow C} = \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3} P_0 V_0 \right) \right] = \frac{\pi}{3} P_0 V_0 \quad \text{به صورت مثبت به}$$

$$Q_{C \rightarrow D} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} P_0 V_0$$

$$Q_{D \rightarrow A} = -\frac{\pi}{12} P_0 V_0$$

$$dU = dW + dQ$$

(ث) از قانون اول ترمودینامیک:

$$d\left(\frac{3}{2} nRT\right) = -PdV + dQ$$

$$\frac{3}{2} d(PV) = -PdV + dQ$$

$$dQ = \frac{5}{2} PdV + \frac{3}{2} VdP$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 4 \quad : \text{ در کنترل BC}$$

$$P = P_0 \sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2} \Rightarrow dP = -P_0 \frac{\frac{V}{V_0^2}}{\sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2}} dV$$

$$dQ = dV \left(\frac{5}{2} P_0 \sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2} - \frac{3}{2} P_0 \frac{V^2/V_0^2}{\sqrt{4 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2}} \right)$$

$$\left. \frac{dQ}{dV} \right|_{V=V_E} = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_E}{V_0}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow V_E = \sqrt{\frac{5}{2}} V_0, P_E = \sqrt{\frac{3}{2}} P_0$$

$$T_E = \sqrt{\frac{15}{4}} T_0$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = 1 \quad : \text{ در کنترل DA}$$

$$\left. \frac{dQ}{dV} \right|_{V=V_F} = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_F}{V_0}\right)^2 = \frac{5}{8} \Rightarrow V_F = \sqrt{\frac{5}{8}} V_0, P_F = \sqrt{\frac{3}{8}} P_0$$

$$T_F = \sqrt{\frac{15}{64}} T_0$$

ج) با برعکس شدن: $Q_{E \rightarrow C} < 0$, $Q_{B \rightarrow E} > 0$

$Q_{F \rightarrow A} < 0$, $Q_{D \rightarrow F} > 0$

$$Q_+ = Q_{A \rightarrow B} + Q_{B \rightarrow E} + Q_{D \rightarrow F}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \quad : \text{ مطابق شکل}$$

$$W_{F \rightarrow A} = (\text{مساحت قطعه AF} + \text{مساحت ذوزنقه AFF'A'})$$

$$= (P_F + P_A) \frac{1}{2} (V_F - V_A) + \frac{1}{2} (\theta - \sin \theta) P_0 V_0$$

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} (\sqrt{5} - 1) \quad : \text{ و ۱}$$

$$W_{F \rightarrow A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

$$Q_{F \rightarrow A} = U_A - U_F - W_{A \rightarrow F} = \frac{3}{2} nR (T_A - T_F) - W_{A \rightarrow F}$$

$$Q_{F \rightarrow A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

$$Q_{B \rightarrow E} = U_E - U_B - W_{B \rightarrow E}$$

نکته: در اینجا

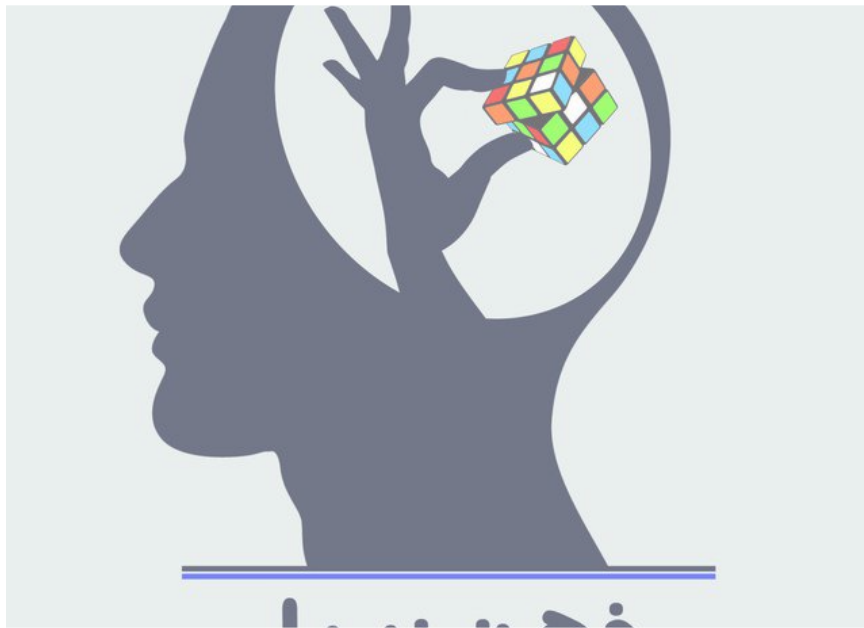
$$= \frac{3}{2} nR (T_E - T_B) + \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

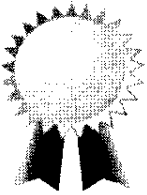
$$Q_{B \rightarrow E} = \left(\sqrt{15} - 2\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$

پایان

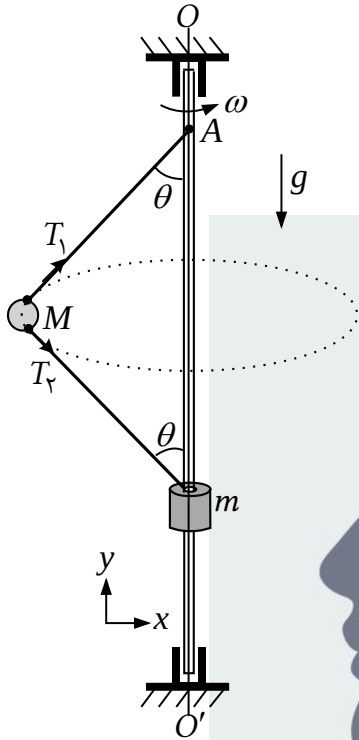
$$Q_+ = Q_{A \rightarrow B} + Q_{B \rightarrow E} + (-Q_{D \rightarrow A} - Q_{F \rightarrow A})$$

$$Q_+ = \left(\frac{5\sqrt{15}}{4} + \frac{3\pi}{4} - \sqrt{3} - \frac{5}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} \right) P_0 V_0$$





نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۱

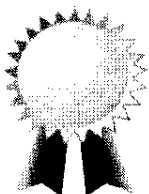
(۷) مطابق شکل ۱ به مهره‌ای با جرم M دو ریسمان (نخ) یکسان هر یک به طول $\frac{l}{2}$ متصل شده است. انتهای یکی از ریسمان‌ها به نقطه ثابت A از میله‌ای قائم و انتهای ریسمان دیگر به جرم m که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد، وصل شده‌اند. میله قائم به موتوری وصل است که آن را حول راستای OO' می‌چرخاند. از جرم ریسمان‌ها و شعاع میله صرف‌نظر کنید. شتاب گرانش g است.

(آ) در وضعیتی که مهره و ریسمان‌ها در صفحه شکل هستند قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه θ ، نیروهای کشش ریسمان‌ها (T_1 و T_2)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

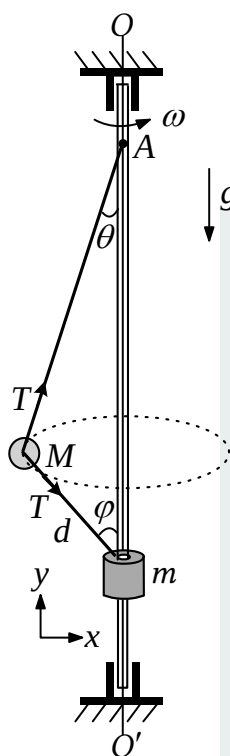
(ب) یک جواب بدیهی برای این دستگاه $\theta = 0^\circ$ است. اگر ω از مقدار کمینه ω_m بزرگ‌تر باشد جواب دیگری نیز برای زاویه θ به دست می‌آید. ω_m را بر حسب M ، m ، l و g تعیین کنید.

(پ) به ازای $\omega = 2\omega_m$ کشش ریسمان‌ها، $\cos \theta$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم M را به دست آورید.

اکنون مطابق شکل ۲، ریسمانی به طول l در نظر بگیرید که یک سر آن به نقطه ثابت A روی میله قائم بسته شده و انتهای آن به وزنه‌ای به جرم m متصل است که می‌تواند بدون اصطکاک روی میله بلغزد. ریسمان از داخل مهره‌ای به جرم M عبور داده شده و مهره نیز می‌تواند بدون اصطکاک در طول ریسمان حرکت کند. در این حالت نیز میله



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



شکل ۲

قائم به موتوری وصل است که میله را حول راستای OO' می چرخاند. موتور با چنان سرعت زاویه‌ای ω می چرخد که در نتیجه آن مهره بر روی یک مسیر دایره‌ای حول راستای قائم می چرخد. مطابق شکل ۲ زاویه ریسمان‌ها با راستای قائم θ و φ و طول ریسمان واقع بین دو جرم d است. از جرم ریسمان و شعاع میله صرف‌نظر کنید. حرکت بدون اصطکاک مهره در طول ریسمان باعث می‌شود کشش در طول ریسمان یکسان باشد.

ت) قانون دوم نیوتن را برای هر یک از جرم‌ها در راستای x و y بر حسب زاویه‌های θ و φ ، نیروی کشش ریسمان (T)، سرعت زاویه‌ای (ω) و سایر پارامترهای داده شده بنویسید.

در قسمت‌های بعدی مسئله فرض کنید $M = 2m$.

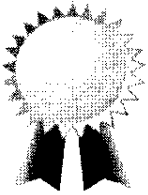
ث) کمیت $\cos^2 \theta$ را بر حسب متغیر $u = \frac{d}{l}$ به دست آورید. (فرض کنید جواب در محدوده قابل قبول است.)

ذهن زیبا

قابل قبول است.)

ج) کمیت ω^2 را بر حسب u ، l و g به دست آورید.

چ) به ازای $u = \frac{1}{4}$ ، سرعت زاویه‌ای، کشش ریسمان، $\cos \theta$ ، $\cos \varphi$ و شعاع دایره مسیر حرکت جرم $2m$ را به دست آورید.



نام : ---
نام خانوادگی : ---
کد ملی : ---



ح) به ازای مقدار خاصی از u کمیت $\frac{l\omega^2}{g}$ کمینه می‌شود. این مقدار خاص u ریشه حقیقی و مجاز یک معادله

درجه چهار به صورت $u^4 + c_3u^3 + c_2u^2 + c_1u + c_0 = 0$ است. مقدار عددی ضرایب c_0, c_1, c_2, c_3 را به

دست آورید. (حل این معادله لازم نیست.)



(T) V

$$T_1 \cos \theta - T_2 \cos \theta = mg$$

$$T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta = M \frac{l}{2} \sin \theta \omega^2$$

$$T_2 \cos \theta = mg$$

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{M}{m} T_2 & \Rightarrow T_2 &= \frac{m \frac{l}{2} \omega^2}{2 + \frac{M}{m}} \quad \text{به اذن (4)} \\ T_1 + T_2 &= M \frac{l}{2} \omega^2 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{mg}{T_2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2g}{l\omega^2} \left(\frac{2m}{m} + 1 \right)$$

$$\cos \theta < 1 \Rightarrow \frac{2g}{l\omega^2} \left(\frac{2m}{m} + 1 \right) < 1 \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{2g}{l} \left(\frac{2m}{m} + 1 \right)}$$

(پ) به اذن $\omega = 2\omega_m$ از معادلات قسمت (ب):

$$\cos \theta = \frac{1}{4}, \quad T_2 = 4mg, \quad T_1 = 4(m+m)g, \quad \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8} l$$

$$(1) \quad T \cos \theta - T \cos \varphi = mg \quad (5)$$

$$(2) \quad T \sin \theta + T \sin \varphi = M(l-d) \sin \theta \omega^2$$

$$(3) \quad T \cos \varphi = mg$$

$$(4) \quad (l-d) \sin \theta = d \sin \varphi \quad \text{از هندسه مثلث ۲ شعاع را بر سه سر (نک)}$$

به اذن $M=2m$: از تقسیم معادله (1) به معادله (3):

$$(5) \quad \cos \theta = 3 \cos \varphi$$

با تکرار دادن (4) و (5): $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

$$(4) \quad \cos^2 \theta = \frac{2u-1}{u^2/g - (1-u)^2}$$

ج. با قرار دادن $\sin \varphi$ از معادله (۴) در معادله (۲) :

$$T \frac{l}{d} = 2m(l-d)\omega^2$$

با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۱)

$$T \cos \theta = (m+2m)g$$

از حذف T بین دو معادله فوق

$$(v) \frac{l\omega^2}{g} = \frac{3}{2u(1-u)\cos \theta}$$

با قرار دادن $\cos \theta$ از معادله (۴) در معادله (۷) :

$$\frac{l\omega^2}{g} = \frac{\sqrt{9(1-u)^2 - u^2}}{2u(1-u)\sqrt{1-2u}}$$

یعنی $u = \frac{1}{4}$

$$\omega^2 = \frac{8\sqrt{10}}{3} \frac{g}{l}, \quad \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad T = \sqrt{10} mg$$

تغییرات $d \sin \varphi = \frac{3}{4\sqrt{10}} l$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{l\omega^2}{g} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{du} \sqrt{9(1-u)^2 - u^2} \right) u(1-u)\sqrt{1-2u} - \frac{d}{du} (u(1-u)\sqrt{1-2u}) \sqrt{9(1-u)^2 - u^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{8u-9}{\sqrt{9(1-u)^2 - u^2}} u(1-u)\sqrt{1-2u} = \frac{5u^2 - 5u + 1}{\sqrt{1-2u}} \sqrt{9(1-u)^2 - u^2}$$

$$(8u-9) u(1-u)(1-2u) = (5u^2 - 5u + 1) (9(1-u)^2 - u^2)$$

$$u^4 - \frac{11}{3}u^3 + \frac{9}{2}u^2 - \frac{9}{4}u + \frac{3}{8} = 0$$

$$c_0 = \frac{3}{8}, \quad c_1 = -\frac{9}{4}, \quad c_2 = \frac{9}{2}, \quad c_3 = -\frac{11}{3}$$