جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب .... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل ... برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب .... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

سی و هفتمین دورهٔ المپیاد فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵ - ساعت: ۸:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

تایید کمیته علمی

شماره پرونده: ۰
کد ملی: ۰
نام پدر: ----
نام مدرسه: ----

استان: ----
منطقه: ----
پایه تحصیلی: ----

شماره صندلی
....

حوزه: ----

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

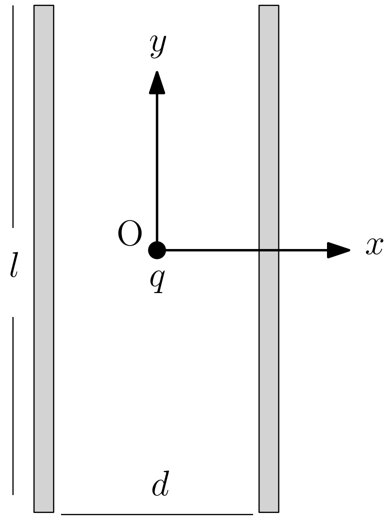
۱. این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.
۲. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
۳. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
۴. با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
۵. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
۶. از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
۷. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۸. آزمون مرحله دوم برای دانش‌آموزان پایه دهم صرفاً جنبه آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه یازدهم انتخاب می شوند.
۹. هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

نکات زیر در برخی از مسائل این آزمون به کار می‌رود.

۱) وقتی می‌نویسیم $x \ll y$ منظور این است که x خیلی از y کوچکتر است.

۲) برای $|\epsilon| \ll 1$ و عدد حقیقی a می‌توان نوشت $(1+\epsilon)^a \approx 1 + a\epsilon$.

۳) ثابت گرانش را در همهٔ مسائل $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ بگیرید.



۱) دو صفحهٔ یک خازن به فاصلهٔ d از یکدیگرند و هر صفحه به شکل مربعی با طول ضلع l است ($l \gg d$). خازن در ابتدا بدون بار الکتریکی است. تا قبل از لحظهٔ $t = 0$ ذره‌ای با جرم m و بار الکتریکی آزمون q در مبدأ مختصات دستگاه $x - y$ ساکن است. صفحه‌های خازن نیز در این دستگاه مختصات در $x = \pm\frac{d}{2}$ و مرکز خازن نیز درست در مبدأ مختصات است. پس از لحظهٔ $t = 0$ اختلاف پتانسیل صفحه‌های خازن (راست منهای چپ) $V(t)$ است و صفحه‌ها از حال سکون با شتاب a در جهت مثبت محور y شروع به حرکت می‌کنند. در کل سوال از گرانش صرف‌نظر کنید. پس از لحظهٔ $t = 0$

آ) معین کنید ذره حداکثر در چه مدت زمانی ممکن است با صفحه‌های خازن برخورد کند؟

ب) شتاب ذره را به دست آورید.

پ) اگر $V(t) = V_0 \sin \omega t$ باشد که در آن V_0 و ω کمیت‌های ثابتی هستند، مکان لحظه‌ای ذره به صورت $x(t) = At + B \sin \omega t$ به دست می‌آید. مقادیر A و B را به دست آورید.

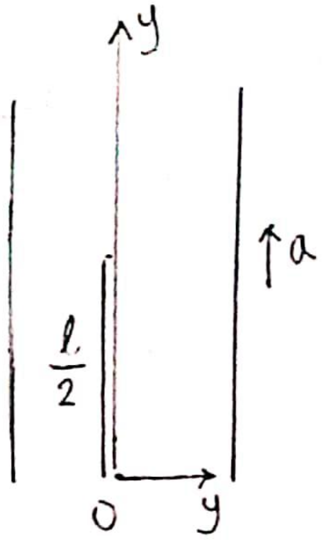
از این به بعد $V(t)$ را به صورت $V(t) = V_0 \sin \omega t$ در نظر بگیرید.

ت) فرض کنید $\sqrt{\frac{a}{l}} \gg \omega$ است. کمترین مقدار بسامد زاویه‌ای، $\omega_{\min}$، چقدر باشد تا ذره به صفحه‌های خازن برخورد نکند؟

ث) فرض کنید $\sqrt{\frac{a}{l}} \ll \omega$ است. بیشترین مقدار بسامد زاویه‌ای، $\omega_{\max}$، چقدر باشد تا ذره به صفحه‌های خازن برخورد نکند؟

توجه: برای $|\epsilon| \ll 1$ می‌توان نوشت $\sin \epsilon \approx \epsilon - \epsilon^3/6$.

مسئله ۱



آ) در مدتی که لبه پایین صفحه‌های خازن از محور x عبور می‌کند حداکثر زمانی است که امکان برخورد ذره با صفحه‌ها وجود دارد. پس

$$\frac{l}{2}=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t_{max}=\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ب) میدان در جهت ‎-x‎ است:

$$ma_x=-qE$$

$$ma_x=-q\frac{V(t)}{d} \Rightarrow a_x=-\frac{qV(t)}{md}$$

پ)

$$v_x(t)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x(t)=A+B\omega\cos\omega t$$

$$a_x(t)=\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x(t)=-B\omega^2\sin\omega t$$

بنابراین

$$-\frac{q}{md}V_0\sin\omega t=-B\omega^2\sin\omega t$$ در نتیجه

$$B=\frac{qV_0}{m\omega^2 d}$$

در لحظه $t=0$ ، $v_x(0)=0$ است. پس

$A+B\omega=0$ و

$$A=\frac{-qV_0}{m\omega d} \Rightarrow x=\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t+\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

ت) برای اینکه ذره به خازن برخورد نکند باید $x(t=t_{max})>-\frac{d}{2}$.

$\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t_{max}+\frac{1}{\omega}\sin\omega t_{max}\right)>-\frac{d}{2}$. از آنجایی که $t_{max}\gg\frac{1}{\omega}$ است

پس باید $\frac{qV_0}{m\omega d}t_{max}<\frac{d}{2}$ و $\frac{2qV_0t_{max}}{md^2}<\omega$

و لذا

$$\omega_{min}=\frac{2qV_0}{md^2}\sqrt{\frac{l}{a}}$$

ث) باید

$$\frac{qV_0}{m\omega d}\left(-t_{max} + \frac{1}{\omega}\sin\omega t_{max}\right) > -\frac{d}{2}$$

این بار $\omega t_{max} \ll 1$ است. در نتیجه

$$\sin\omega t_{max} \approx \omega t_{max} - \frac{1}{6}(\omega t_{max})^3$$

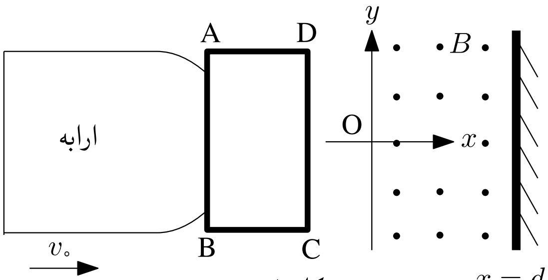
بنابراین

$$\frac{qV_0}{m\omega d}\left(\frac{1}{6}\omega^2 t_{max}^3\right) < \frac{d}{2}$$

$$\omega < \frac{3md^2}{qV_0 t_{max}^3}$$

$$\omega_{max} = \frac{3md^2}{qV_0}\left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

۲) در شکل ۱ تصویر ارابهٔ متحرکی از بالا نشان داده شده است که با سرعت اولیهٔ v_0 به سمت راست در حرکت است. در پیشخوان این ارابه حلقهٔ رسانای مستطیل شکل ABCD به مقاومت الکتریکی R قرار دارد. جرم کل ارابه و حلقه m است. در لحظهٔ $t = 0$ ضلع DC وارد ناحیه‌ای می‌شود که در آن میدان مغناطیسی ثابت B عمود بر صفحهٔ شکل و به سمت بیرون وجود دارد. فرض کنید $\mathrm{AB} = w$ و $\mathrm{AD} = h$.



شکل ۱

در دستگاه مختصات نشان داده شده میدان مغناطیسی در فاصلهٔ $0 < x < d$ برقرار است به طوری که $d > h$. در محل $x = d$ دیوار محکمی قرار دارد. شرایط مسئله طوری است که دستگاه قبل از رسیدن به دیوار متوقف می‌شود. مکان ضلع DC نسبت به مبدأ O، سرعت و شتاب لحظه‌ای دستگاه در لحظهٔ دلخواه $t > 0$ را به ترتیب x، v و a بگیرید.

آ) شتاب ارابه را بر حسب x، v و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

ب) برای به دست آوردن جواب معادلهٔ قسمت آ، فرض کنید رابطهٔ سرعت و مکان تابعی به صورت زیر است

$$v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$$

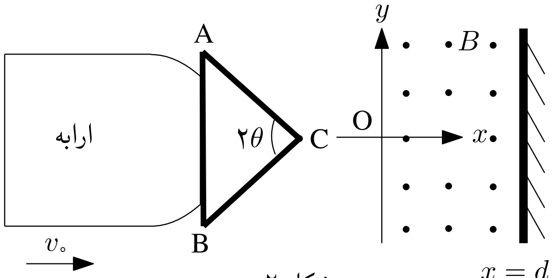
ثابت‌های α، β، γ و λ را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

(**یادآوری تعریف سرعت و شتاب:** سرعت ارابه از رابطهٔ $v = \dfrac{dx}{dt}$ به دست می‌آید که به معنی مشتق مکان x نسبت به زمان t است. همچنین شتاب از رابطهٔ $a = \dfrac{dv}{dt}$ به دست می‌آید که به معنی مشتق سرعت v نسبت به زمان t است.)

(**یادآوری قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای:** اگر f تابعی از متغیر u باشد و u نیز به نوبهٔ خود تابعی از متغیر s باشد، مشتق f نسبت به s از رابطهٔ $\dfrac{df}{ds} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{ds}$ به دست می‌آید.)

پ) به ازای چه مقداری از x سرعت دستگاه نصف می‌شود؟

ت) بیشینهٔ v_0 برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟



شکل ۲

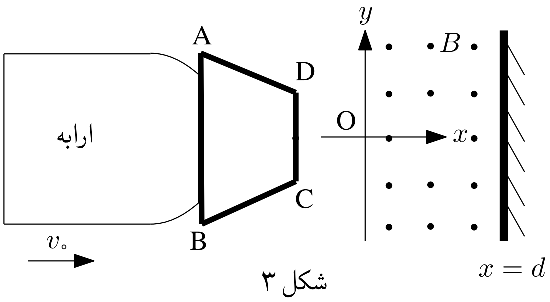
مشابه مسئلهٔ فوق دستگاهی مطابق شکل ۲ که در آن مثلث متساوی‌الساقین ABC به جای مستطیل ABCD شکل ۱ قرار داده شده، در نظر بگیرید. در لحظهٔ $t = 0$ رأس C به نقطهٔ $x = 0$ می‌رسد. زاویهٔ رأس C از مثلث را 2θ بگیرید. ارتفاع مثلث h است که از d کوچکتر است.

ث) برای $t > 0$ شتاب ارابه، a، را بر حسب x مکان نقطهٔ C نسبت به مبدأ O، سرعت لحظه‌ای دستگاه، v، و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

ج) برای $t > 0$ تابع $v(x)$ را همان تابع داده شده در بخش ب بگیرید و ضرایب ثابت α، β، γ و λ را بر حسب داده‌های مسئله تعیین کنید.

چ) به ازای چه مقداری از x سرعت دستگاه نصف می‌شود؟

ح) بیشینهٔ v_0 برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟



شکل ۳

مشابه مسئلهٔ فوق دستگاهی مطابق شکل ۳ که در آن ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD به جای مستطیل ABCD شکل ۱ قرار داده شده، در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathrm{CD} = l$ و ارتفاع ذوزنقه h است که از d کوچکتر است. زاویهٔ ساق‌های ذوزنقه با محور x را θ بگیرید. در لحظهٔ $t = 0$ ضلع CD به نقطهٔ $x = 0$ می‌رسد.

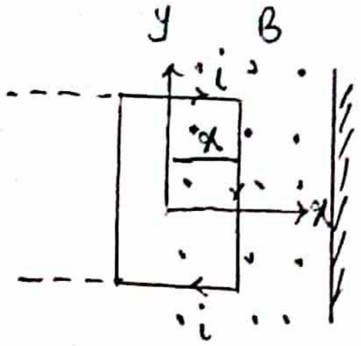
خ) برای $t > 0$ شتاب ارابه، a، را بر حسب x مکان ضلع DC نسبت به مبدأ O، سرعت لحظه‌ای دستگاه، v، و کمیت‌های ثابت داده شده به دست آورید.

د) $v(x)$ را برای $t > 0$ همان تابع داده شده در بخش ب بگیرید و ضرایب ثابت α، β، γ و λ را تعیین کنید.

ذ) بیشینهٔ v_0 برای آن که دستگاه با دیوار برخورد نکند چیست؟

مسئله ۲

(۳



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = xWB$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vWB}{R}$$

$$F = -iWB$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{W^2B^2}{R}v \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -\frac{W^2B^2v}{mR}$$

ب) اما سرعت لحظه‌ای $v(t)$ و مکان لحظه‌ای ضلع CD یعنی $x(t)$ با استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای به هم مربوط‌اند

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

بنابراین

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{W^2B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\frac{dv}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

یعنی باید $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = \frac{-W^2B^2}{mR}$ باشد. پس

$$v(x) = \frac{-W^2B^2}{mR}x + \lambda$$

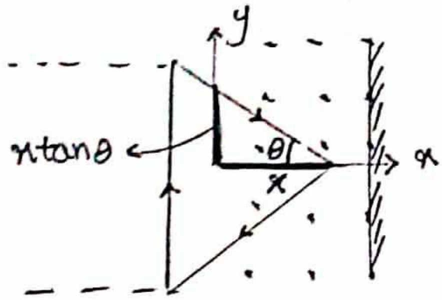
به ازای $x = 0$ باید $v(0) = v_0$ باشد پس $\lambda = v_0$.

$$v(x) = v_0 - \frac{W^2B^2}{mR}x$$

پ) $x = \frac{mRv_0}{2W^2B^2}$

ت) باید به ازای $x = h$ ، $v(h) = 0$ $\Leftarrow$ $v_{0max} = \frac{W^2B^2}{mR}h$

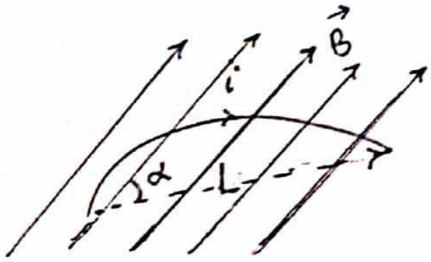
ث)



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(x)(2x\tan\theta)B$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{2xBv\tan\theta}{R}$$



در یک میدان مغناطیسی یکنواخت نیروی وارد بر یک سیم خمیده مطابق شکل، $F = iLB\sin\alpha$ است.

بنابراین برای مثلث فوق $\quad F = -i(2x\tan\theta)B$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2 v}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2 v}{mR}$$

ج) مانند قسمت ت): $\quad$ بنابراین $a = v\dfrac{dv}{dx}$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4x^2\tan^2\theta\, B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\alpha = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR} \;،\; \beta = 0 \;،\; \gamma = 0 \;،\; \lambda = v_0$$

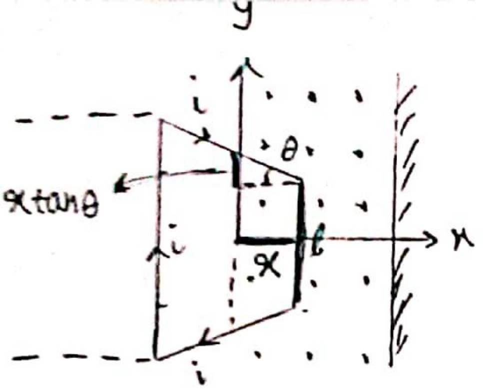
$$v(x) = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}x^3 + v_0$$

چ)

$$x = \left(\frac{3\, mRv_0}{8B^2\tan^2\theta}\right)^{1/3}$$

ح) باید به ازای $x = h$ ، $v(h) = 0$ باشد $\Leftarrow$

$$v_{0\,max} = \frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}h^3$$



خ)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = [\ell + (\ell + 2x\tan\theta)]\frac{x}{2}B$$

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = (\ell + 2x\tan\theta)\frac{vB}{R}$$

$$F = -i\,(\ell + 2x\tan\theta)B$$

$$m\frac{dv}{dt} = -(\ell + 2x\tan\theta)^2\frac{vB^2}{R}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = -\frac{(\ell+2x\tan\theta)^2B^2v}{mR}$$

د)

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{(\ell+2x\tan\theta)^2B^2}{mR}$$

اگر $v(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \lambda$ باشد

$$\alpha = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}$$

$$\beta = -2\frac{B^2\ell\tan\theta}{mR}$$

$$\gamma = \frac{-B^2\ell^2}{mR}$$

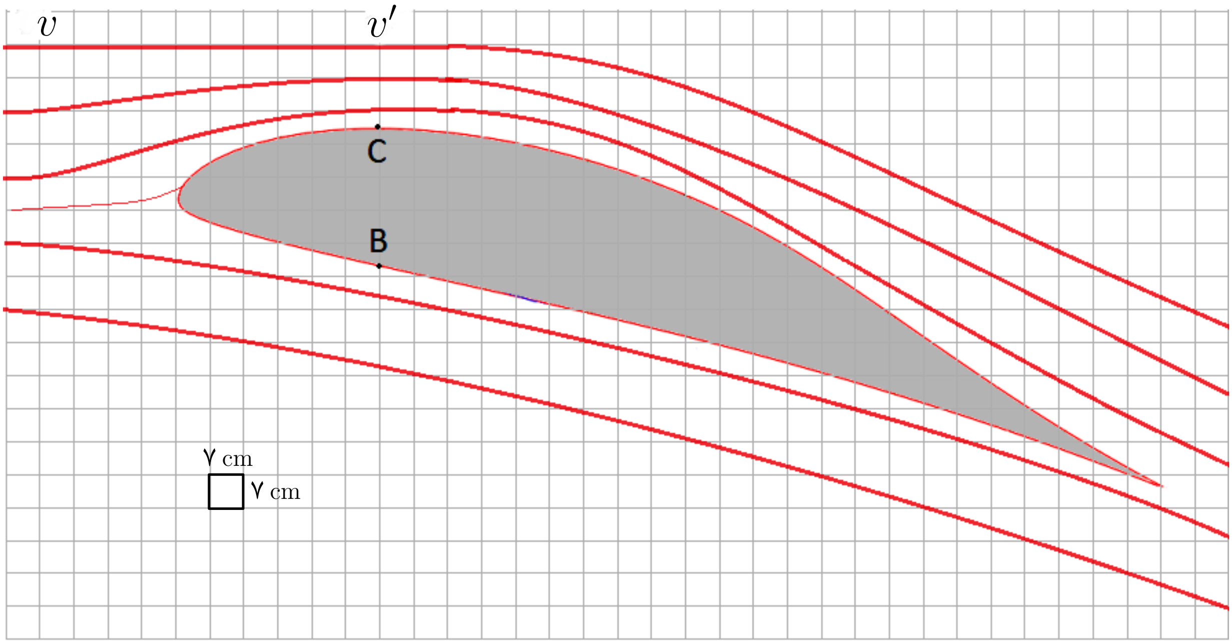
$$\lambda = v_0$$

$$\Rightarrow v(x) = -\frac{4}{3}\frac{B^2\tan^2\theta}{mR}x^3 - 2\frac{B^2\ell\tan\theta}{mR}x^2 + -\frac{B^2\ell^2}{mR}x + v_0$$

ذ) به ازای $x = h$ باید $v(h) = 0$ باشد

$$v_{0\,max} = \frac{B^2}{mR}\left(\frac{4}{3}\tan^2\theta\, h^3 + 2\tan\theta\,\ell h^2 + \ell^2 h\right)$$

۳) هوابُرد (Airfoil) اصطلاحی است که به شکل هندسی سطح مقطع بال هواپیما نسبت می‌دهند. شکل ۱ نشان دهنده نوعی هوابُرد است. با گذر هوا از بالا و پایین بال و تغییر جهت و اندازه سرعت هوای عبوری، نیرویی رو به بالا و عقب، به بال هواپیما وارد می‌شود. در این مسئله قصد داریم با مدل‌سازی گفته شده در صورت سوال، نیروی رو به بالای وارد شده به بال هواپیما را به دست آوریم.



شکل ۱: هوابرد (مقطع بال هواپیما)، در این شکل طول هر ضلع مربع ۷ cm است .

طبق اصل برنولی برای شاره‌ای تراکم‌ناپذیر (با چگالی ثابت) و بدون اصطکاک که به صورت لایه‌ای و پایا حرکت می‌کند، در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد. ارتباط بین فشار هر نقطه، P، و تندی شاره در همان نقطه، v، در مسیر جریان به صورت زیر خواهد بود

$$P + \frac{۱}{۲}\rho v^{۲} + \rho g y = \text{ثابت}$$

که در آن ρ چگالی شاره، y ارتفاع و g شتاب گرانش زمین است. در تمام مسئله هوای پیرامون هوابُرد را شارهٔ تراکم‌ناپذیر فرض کنید.

برای بالابری هواپیما دو نیروی موثر وجود دارد، که یکی نیروی ناشی از اصل برنولی و دیگری نیروی ناشی از تغییر جهت سرعت هوا در ابتدا و انتهای هوابُرد است. از اثرات تلاطمی هوا در انتهای بال‌ها صرف نظر کنید.

طراحی هوابُرد چنان است که تندی هوا روی بال بیشتر شده و فشار آن کاهش یابد، در حالی که زیر بال تندی هوا تغییر چندانی ندارد و در این مسئله قابل چشم‌پوشی است. مسئله را از دید فردی که داخل هواپیما نشسته است در نظر بگیرید.

در پاسخ تمام قسمت‌های مسئله ابتدا رابطهٔ پارامتری مربوطه را به دست آورید و سپس عددگذاری آن را انجام دهید.

آ) با توجه به خطوط جریان رسم شده در شکل ۱ اگر تندی هوا نسبت به هواپیما قبل از رسیدن به هوابُرد، v، باشد، تندی هوا بالای نقطهٔ C که در شکل مشخص شده است، v'، چقدر خواهد بود؟

ب) با توجه به شکل ۱ و مقیاس آن و با فرض آن که چگالی هوا هنگام برخاستن هواپیما $\rho = ۱/۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$ باشد، اندازهٔ اثر $\rho g y$ یعنی مقدار تفاوت آن بین بالاترین و پایین‌ترین نقطهٔ هوابُرد چقدر است؟

با توجه به کوچکی مقدار به دست آمده در قسمت ب در ادامهٔ مسئله از اثر جملهٔ $\rho g y$ چشم‌پوشی می‌کنیم.

پ) اندازهٔ سرعت هوا نسبت به هواپیما هنگام برخاستن $v = ۲۱۶\ \mathrm{km/h}$ است. تفاوت فشار هوا روی بال در نقطهٔ C با فشار زیر بال در نقطهٔ B، $\Delta P_{\mathrm{BC}} = P_{\mathrm{C}} - P_{\mathrm{B}}$ چقدر است؟

در ادامهٔ مسئله فرض کنید اثر نیروی برنولی طوری است که اگر هر یک از دو بال هواپیما را به شکل یک مستطیل افقی به طول $l = ۲۰/۰\ \mathrm{m}$ و عرض $w = ۲/۰\ \mathrm{m}$ بگیریم اختلاف فشار متوسط رو و زیر آن معادل $\frac{۲}{۳}\Delta P_{\mathrm{BC}}$ است .

ت) نیروی برنولی بالابر وارد بر این هواپیما در هنگام برخاستن، $F_۱$، چقدر است؟

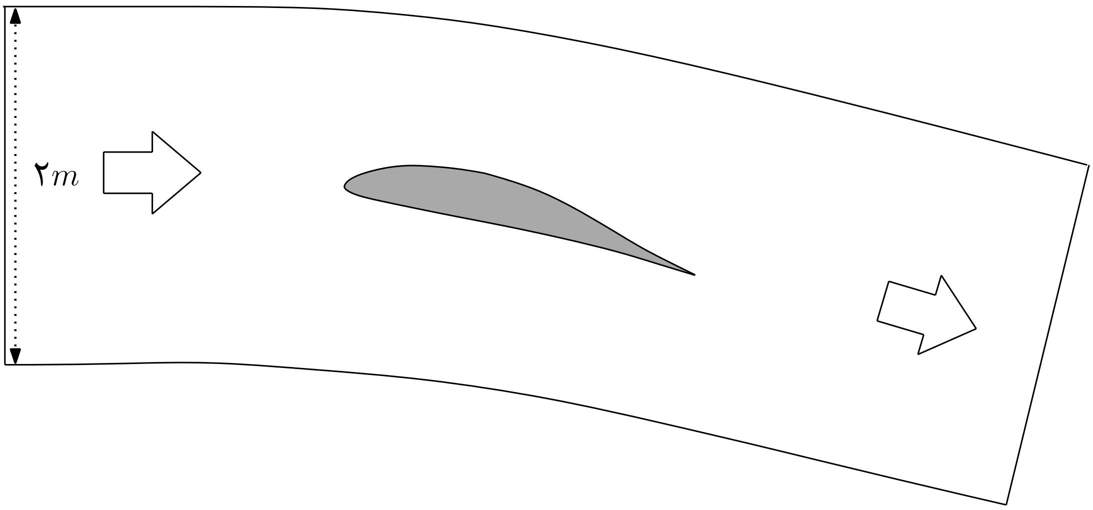
نیروی دیگری هم به دلیل تغییر تکانهٔ هوای عبوری، به بال‌ها وارد می‌شود. این نیرو مانند شکل ۲ معادل تغییر تکانهٔ یک لایه از هوا به ضخامت $h = ۲/۰\ \mathrm{m}$ و طول $۲l = ۴۰/۰\ \mathrm{m}$ است که قبل و بعد از هوابُرد به اندازهٔ $\theta = ۱۴/۵^\circ$ تغییر جهت می‌دهد ولی اندازهٔ سرعت هوا تغییر نمی‌کند. $\sin(۱۴/۵^\circ) = ۰/۲۵۰$.

ث) آهنگ شارش جرمی هوای عبوری (جرم هوای عبوری در واحد زمان) را برای این لایه برحسب اندازه سرعت، v، و چگالی هوا، ρ، به دست آورید.

ج) اندازهٔ نیروی ناشی از تغییر تکانهٔ هوا که هنگام برخاستن به هواپیما وارد می‌شود، $F_۲$، را به دست آورید.

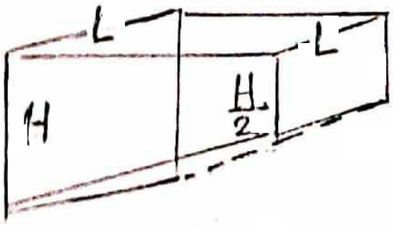
چ) حداکثر جرم این هواپیما چقدر باشد تا با شرایط فوق بتواند از روی زمین بلند شود؟

ح) فرض کنید جرم این هواپیما همان جرم به دست آمده در قسمت چ است و حداکثر سرعت این هواپیما در تمامی ارتفاع‌ها برابر $v_{\mathrm{m}} = ۷۲۰\,\mathrm{km/h}$ است، همچنین شکل و زاویه بال تغییر نمی‌کند. با افزایش ارتفاع چگالی هوا کاهش می‌یابد و این کاهش باعث محدودیت ارتفاع می‌شود. کمترین چگالی هوا که این هواپیما بتواند با فرض‌های فوق و در ارتفاع ثابت حرکت کند را محاسبه کنید.



شکل ۲: تغییر تکانهٔ هوای عبوری

مسئله ۳



$$Av = A'v'$$

الف) چگالی هوا را ثابت فرض کرده‌ایم، بنابراین

$$Av = A'v' \Rightarrow LHv = L\cdot\frac{H}{2}v'$$

بنابراین $v' = 2v$

ب) $\Delta P = \rho g y$

که y فاصله عمودی بین بالا و پایین لایه هوا است. مطابق شکل ۱:

$$y \simeq 10\,(7\,\text{cm}) = 70\,\text{cm} \Rightarrow \Delta P = (1\ \text{kg/m}^3)(10\ \text{m/s}^2)(0.7\ \text{m})$$

$$\Delta P = 7\ \text{Pa}$$

پ) با صرف‌نظر از جمله $\rho g y$،

$$\Delta P_{BC} = \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho v'^2$$

$$= -\frac{3}{2}\rho v^2 = -\frac{3}{2}(1\ \text{kg/m}^3)(60\ \text{m/s})^2$$

$$\Delta P_{BC} = -5400\ \text{Pa}$$

ت) $F_1 = \frac{2}{3}|\Delta P_{BC}|\,(lw)\,2$

$$= \frac{2}{3}(5400\ \text{Pa})(40\ \text{m}^2)\times 2$$

$$F_1 = 288000\ \text{N}$$

ث)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v = \rho(2lh)v = (1\ \text{kg/m}^3)(40\ \text{m})(2\ \text{m})(60\ \text{m/s})$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 4800\ \text{kg/s}$$

ج)

$$F_2 = \frac{\text{تغییر تکانه هوا}}{\Delta t} = \frac{\Delta m\, v \sin\theta}{\Delta t} = (4800\ \text{kg/s})(60\ \text{m/s})(0.25)$$

$$F_2 = 72000\ \text{N}$$

چ) $F_1 + F_2 = mg \Rightarrow m = 36000\ \text{kg}$

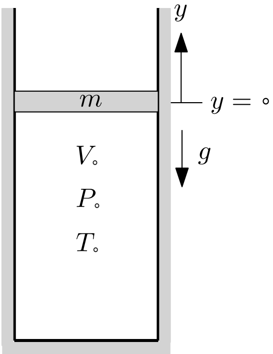
ح)

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\rho' v_m^2\right)(2lw) + \rho' v_m^2 (2lh)\sin\theta = mg$$

$$\rho' = \frac{mg}{v_m^2 (2l)(w + h\sin\theta)} = \frac{360\,000}{(200)^2(40)(2 + 2(0.25))}$$

$$\rho' = 0.09\ \text{kg/m}^3$$

۴) مطابق شکل ۱ پیستونی به جرم m می‌تواند داخل استوانهٔ ته‌بسته‌ای به سطح مقطع A بدون اصطکاک حرکت کند. درون استوانه گازی آرمانی محبوس است که در حالت تعادل پیستون، حجم آن $V_\circ$، فشار آن $P_\circ$ و دمای آن $T_\circ$ است. در این حالت، نقطهٔ وسط پیستون را $y = \circ$ بگیرید. دستگاه با محیط خارج تبادل گرما ندارد. لازم به اطلاع است که در طی تحول بی‌دررو گاز آرمانی کمیت PV^γ ثابت می‌ماند که در آن ثابت γ ضریب اتمیسیتهٔ گاز نامیده می‌شود. پیستون را اندکی از حالت تعادل منحرف و رها می‌کنیم.



شکل ۱

آ) اگر پیستون به اندازهٔ y از حالت تعادل منحرف شود فشار، P، حجم، V، و دمای گاز، T، را بر حسب y، $V_\circ$، $P_\circ$، $T_\circ$ و سایر ثابت‌های داده شده به دست آورید.

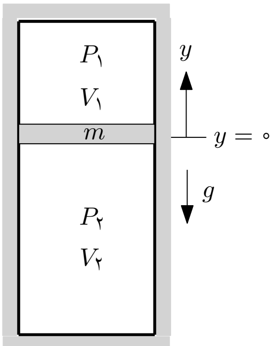
ب) برای y کوچک مقدار تقریبی کمیت $P - P_\circ$ را تا مرتبهٔ اول (توان یک) y به دست آورید.

حال پیستون را از حالت تعادل خود به اندازهٔ کوچک $y_\circ$ منحرف و رها می‌کنیم.

پ) معادلهٔ حرکت پیستون را بنویسید و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ حرکت جرم و فنر، بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب ثابت‌های داده شده به دست آورید.

ت) فرض کنید سرعت پیستون هنگام عبور نقطهٔ وسط آن از نقطهٔ $y = \circ$ برابر با $v_\circ$ باشد. ضریب فنر معادل این دستگاه را بر حسب $y_\circ$، $v_\circ$ و m به دست آورید.

اکنون یک استوانهٔ دو سربسته مطابق شکل ۲ در نظر بگیرید که پیستونی به جرم m می‌تواند بدون اصطکاک داخل آن حرکت کند. در وضعیت تعادل پیستون، $y = \circ$، دمای گاز دو طرف یکسان و حجم و فشار گاز دو طرف به ترتیب $V_۱$، $V_۲$، $P_۱$ و $P_۲$ است. گاز دو طرف پیستون آرمانی و دارای ضریب اتمیسیته γ است. گازها با محیط خارج و با یکدیگر تبادل گرما ندارند. سطح مقطع پیستون را A بگیرید.



شکل ۲

ث) پیستون را از حالت تعادل خود به اندازهٔ کوچک $y_{\circ}$ منحرف و رها می‌کنیم. نیروی وارد بر پیستون وقتی به اندازهٔ y از حالت تعادل منحرف است را بنویسید و با مقایسهٔ آن با معادلهٔ حرکت جرم و فنر، بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ج) با فرض این که وزن پیستون $۲/۸۸\ \mathrm{N}$، فشار گاز در محیط اول $P_۱ = ۷۲/۰\ \mathrm{cmHg}$، سطح مقطع پیستون $۴/۰۰\,\mathrm{cm}^۲$ و رابطهٔ بین تعداد ذرات گاز در دو محیط به صورت $\frac{N_۱}{N_۲} = \frac{۱}{۲}$ باشد حساب کنید پیستون در چه ارتفاعی در حالت تعادل‌اش قرار می‌گیرد؟ از ضخامت پیستون چشم‌پوشی کنید و ارتفاع استوانه را $۲۰۹\ \mathrm{cm}$ در نظر بگیرید. چگالی جیوه $\rho_{\mathrm{Hg}} = ۱۳/۶\,\mathrm{g/cm}^۳$ است.

مسئله ٤

آ)

$$V = V_0 + Ay$$

$$P_0 V_0^{\gamma} = P V^{\gamma} \Rightarrow P = P_0 \left(1 + \frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma}$$

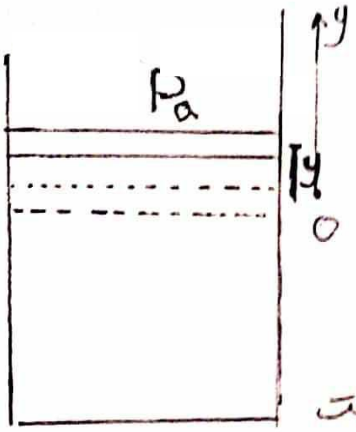
$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad , \quad PV = nRT \Rightarrow T = T_0 \frac{PV}{P_0 V_0}$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{Ay}{V_0}\right)^{1-\gamma}$$

ب) $\left(1+\frac{Ay}{V_0}\right)^{-\gamma} \approx 1 - \frac{\gamma A y}{V_0}$ که برای y ها کوچک درست است. بنابراین

$$P - P_0 \approx -\frac{\gamma A P_0}{V_0} y$$

پ) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالاتر است. نیروی وارد به پیستون $F_y = PA - mg - P_a A$ است که P_a فشار هوای بیرون است.



در حالت تعادل پیستون $P_0 A - mg - P_a A = 0$ است

بنابراین

$$F_y = PA - P_0 A = m a_y$$

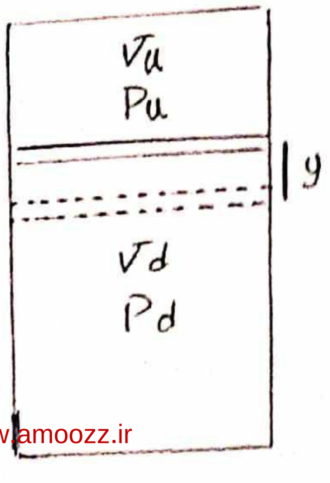
$$m a_y = -\frac{\gamma A^2 P_0}{V_0} y$$

این معادله شبیه معادله حرکت یک جرم و فنر به ثابت $k = \frac{\gamma A^2 P_0}{V_0}$ است. بنابراین

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2 P_0}{m V_0}}$$

ت) $$\frac{1}{2} k y_0^2 + \frac{1}{2} m (0)^2 = \frac{1}{2} k (0)^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow k = \frac{m v_0^2}{y_0^2}$$

ث) فرض کنیم پیستون به اندازه y از حالت تعادل اولیه بالاتر است.



بالای $V_u = V_1 - Ay$

پایینی $V_d = V_2 + Ay$

$$P_u V_u^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma} \quad , \quad P_d V_d^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

$$P_u = P_1\left(1-\frac{Ay}{V_1}\right)^{-\gamma} \approx P_1\left(1+\frac{A\gamma y}{V_1}\right)$$

$$P_d = P_2\left(1+\frac{Ay}{V_2}\right)^{-\gamma} \approx P_2\left(1-\frac{A\gamma y}{V_2}\right)$$

$$F_y = P_d A - P_u A - mg$$

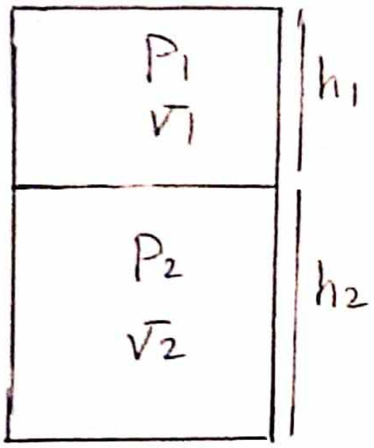
$$ma_y = P_2 A - \frac{P_2\gamma A^2}{V_2}y - P_1 A - \frac{P_1\gamma A^2}{V_1}y - mg$$

در حالت تعادل $P_2A - P_1A - mg = 0$ است ولذا

$$ma_y = -\gamma A^2\left(\frac{P_1}{V_1}+\frac{P_2}{V_2}\right)y$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma A^2}{m}\left(\frac{P_1}{V_1}+\frac{P_2}{V_2}\right)}$$

ج)



$$P_1 = (13600\ \mathrm{Kg/m^3})(10\ \mathrm{m/s^2})(0.72\mathrm{m})$$

$$P_1 = 97920\ \mathrm{Pa}$$

$P_2A - P_1A - mg = 0$ در حالت تعادل پیستون

در نتیجه

$$P_2 = P_1 + \frac{mg}{A}$$

$$= 97920\,\mathrm{Pa} + \frac{2.88}{4\times10^{-4}}\,\mathrm{Pa}$$

$$P_2 = 105120\ \mathrm{Pa}$$

$$P_1V_1 = n_1RT \qquad V_1 = Ah_1 \qquad , \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$$

$$P_2V_2 = n_2RT \qquad V_2 = Ah_2$$

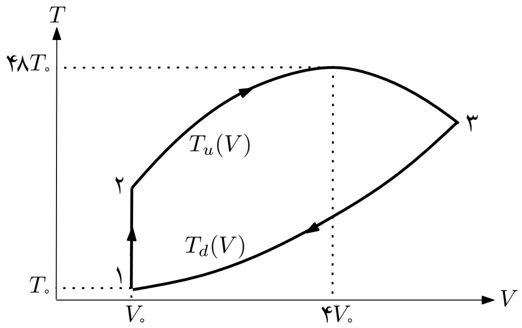
از تقسیم دو معادله حالت :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}\,\frac{P_2}{P_1} = \frac{105120}{2\,(97920)} = \frac{73}{136}$$

از طرفی $h_1+h_2 = 209\mathrm{cm}$ ، بنابراین

$$h_1 = 73\ \mathrm{cm} \qquad \text{و} \qquad h_2 = 136\ \mathrm{cm}$$

۵) n مول گاز آرمانی تک‌اتمی چرخهٔ ایستاوار ۱ → ۳ → ۲ → ۱ شکل مقابل را طی می‌کند که در آن کمیت های V_0 و T_0 معلوم‌اند. فرایند ۲ → ۱ هم حجم است و معادلهٔ فرایندهای ۳ → ۲ و ۱ → ۳ به ترتیب با روابط $T_u(V) = aV + bV^2$ و $T_d(V) = cV^2$ داده شده‌اند. بیشینهٔ دمای چرخه $48T_0$ است. یادآوری می‌شود انرژی داخلی n مول گاز آرمانی تک اتمی با دمای T برابر $\frac{3}{2}nRT$ است که در آن R ثابت گازها است. پاسخ کلیهٔ بخش‌های این مسئله را بر حسب V_0 ، T_0 ، R و n بدهید



آ) با استفاده از نقاط داده شده روی نمودار، ثابت های a، b و c را به دست آورید.

ب) مختصات ترمودینامیکی، (V, P, T)، نقاط ۱ ، ۲ و ۳ نشان داده شده روی نمودار را به دست آورید.

پ) کار محیط روی گاز را در هر یک از فرایندهای ۲ → ۱ ، ۳ → ۲ و ۱ → ۳ به دست آورید.

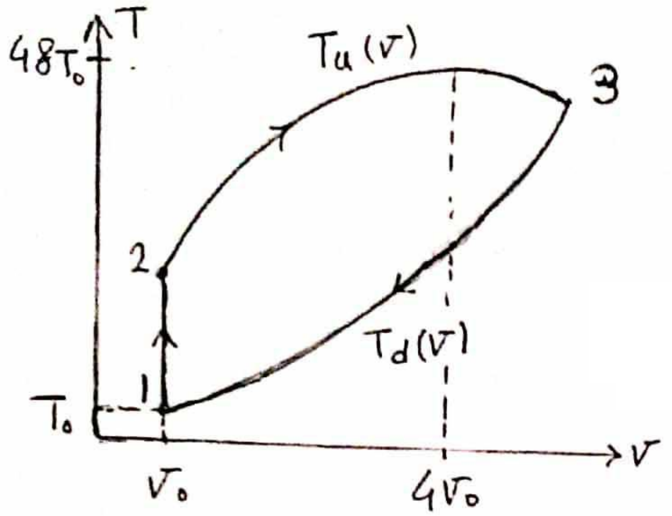
ت) کار محیط روی گاز در کل چرخه را به دست آورید.

ث) گرمای داده شده به گاز منهای اندازهٔ گرمای گرفته شده از گاز را در هر یک از فرایندهای ۲ → ۱ ، ۳ → ۲ و ۱ → ۳ به دست آورید.

ج) در چرخهٔ بالا گرمای (انرژی) داده شده به چرخه (ماشین) را به دست آورید.

چ) بازدهٔ چرخه را محاسبه کنید.

مسئله ۵



آ) $T_d(V) = cV^2$

$\Downarrow$

$T_0 = cV_0^2$ و $\boxed{c = \dfrac{T_0}{V_0^2}}$

نقطه $(4V_0, 48T_0)$ بیشینه منحنی $T_u(V) = aV + bV^2$ است، درنتیجه

$$\left.\frac{dT_u}{dV}\right|_{(4V_0, 48T_0)} = 0 \Rightarrow \quad a + 2b(4V_0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{a = -8bV_0}$$

و نیز $\boxed{48T_0 = a(4V_0) + b(4V_0)^2}$

از دو معادله بالا

$$T_d(V) = T_0 \frac{V^2}{V_0^2} \quad \text{و} \quad T_u(V) = 3T_0\left(\frac{8V}{V_0} - \frac{V^2}{V_0^2}\right)$$

ب) $PV = nRT$

(V, P, T)

$\Downarrow$

نقطه ۱: $\left(V_0, \dfrac{nRT_0}{V_0}, T_0\right)$

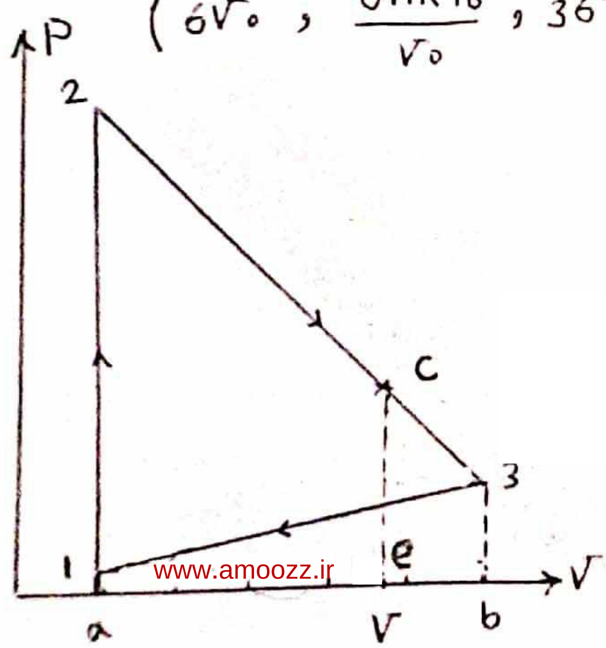
نقطه ۲: $\left(V_0, \dfrac{21nRT_0}{V_0}, 21T_0\right)$

نقطه ۳: $\left(6V_0, \dfrac{6nRT_0}{V_0}, 36T_0\right) \Leftarrow T_u(V) = T_d(V)$

پ) نمودار P-V چرخه

$$P_u V = nRT_u \Rightarrow P_u = \frac{3nRT_0}{V_0}\left(8 - \frac{V}{V_0}\right)$$

$$P_d V = nRT_d \Rightarrow P_d = \frac{nRT_0}{V_0}\frac{V}{V_0}$$



$$W_{1\to 2}=0$$

$W_{2\to 3} = -(a23b$ مساحت ذوزنقه $)$

$$= -(P_2+P_3)\left(\frac{V_b-V_a}{2}\right) = -\frac{27nRT_0}{V_0}\left(\frac{5}{2}V_0\right) = -\frac{135}{2}nRT_0$$

$W_{3\to 1} = (a13b$ مساحت ذوزنقه $)$

$$= (P_1+P_3)\left(\frac{V_b-V_a}{2}\right) = \frac{7nRT_0}{V_0}\left(\frac{5}{2}V_0\right) = \frac{35}{2}nRT_0$$

ت)

$$W_{\text{چرخه}} = W_{1\to 2} + W_{2\to 3} + W_{3\to 1} = -50nRT_0$$

ث) قانون اول ترمودینامیک:

$$Q_{1\to 2} = U(2) - U(1) - W_{1\to 2}$$
$$= \frac{3}{2}nRT_2 - \frac{3}{2}nRT_1 - W_{1\to 2} = 30nRT_0$$

$$Q_{2\to 3} = U(3) - U(2) - W_{2\to 3}$$
$$= \frac{3}{2}nRT_3 - \frac{3}{2}nRT_2 - W_{2\to 3} = 90nRT_0$$

$$Q_{3\to 1} = U(1) - U(3) - W_{3\to 1}$$
$$= \frac{3}{2}nRT_1 - \frac{3}{2}nRT_3 - W_{3\to 1} = -70nRT_0$$

ج) گرمای داده شده به چرخه $120nRT_0$ نیست، بلکه:

برای نقطه دلخواهی مانند c به حجم V، فشار $P_u(V)$ و دمای $T_u(V)$

$Q_{2\to c}$ را به دست می‌آوریم:

$W_{2\to c} = -(a2ce$ مساحت ذوزنقه $)$

$$= -(P_2+P_c)\left(\frac{V_d-V_a}{2}\right)$$
$$= -\left(\frac{21nRT_0}{V_0} + \frac{3nRT_0}{V_0}\left(8-\frac{V}{V_0}\right)\right)\frac{1}{2}(V-V_0)$$

$$U(c) - U(2) = \frac{3}{2}nRT_u(V) - \frac{3}{2}nRT_2$$

$$U(c)-U(2)=\frac{3}{2}nR\,3T_0\left(\frac{8V}{V_0}-\frac{V^2}{V_0^2}\right)-\frac{3}{2}nR\,(21T_0)$$

در نتیجه

$$Q_{2\to c}=U(c)-U(2)-W_{2\to c}$$
$$=-6nRT_0\left(\frac{V^2}{V_0^2}-10\frac{V}{V_0}+9\right)$$

$$\frac{dQ_{2\to c}}{dV}=0 \Rightarrow V=5V_0$$

یعنی در فرآیند $2\to 3$ در بخش $2\to c$ گرما به چرخه داده می‌شود و در بخش $c\to 3$ از آن گرفته می‌شود

$$Q_{2\to c}\Big|_{V=5V_0}=96\,nRT_0$$

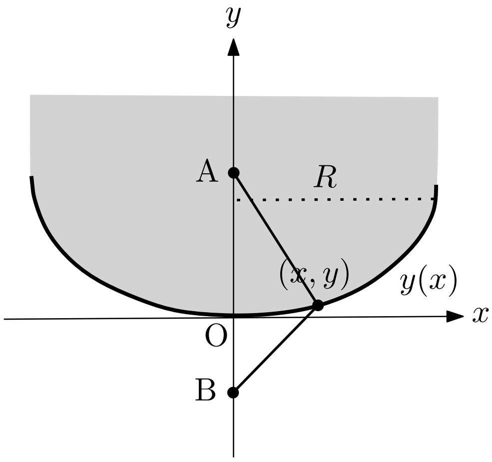
"گرمای داده شده به چرخه $96\,nRT_0+30\,nRT_0$ ، یعنی $126\,nRT_0$ است.

د)

$$\text{بازده چرخه}=\frac{|W_{\text{کل}}|}{\text{گرمای داده شده به چرخه}}$$

$$=\frac{50\,nRT_0}{126\,nRT_0}=\frac{25}{63}$$

۶) شکل مقابل مقطعی از یک استوانهٔ شفاف به ضریب شکست n و شعاع R را نشان می‌دهد. این مقطع از محور استوانه، محور y می‌گذرد. مقطع ناحیهٔ انتهایی استوانه با تابع $y(x)$ داده شده است. بیرون این جسم هوا با ضریب شکست یک است. سرعت نور در خلاء (و تقریبا هوا) برابر c است و در یک مادهٔ شفاف با ضریب شکست n برابر c/n است. در این سوال هر جا از مرز نام می‌بریم، منظور ما ناحیهٔ انتهایی استوانهٔ شفاف یا همان منحنی $y(x)$ است.



آ) نقطهٔ A داخل ماده شفاف و نقطهٔ B در فضای پایین و روی محور y قرار دارند و فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ مختصات O به ترتیب a و b است. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا یک پرتو نور از نقطهٔ A به خط مستقیم به نقطهٔ (x, y) روی مرز رفته و از آنجا به خط مستقیم به نقطهٔ B برود؟

طبق اصل فرما در نورشناخت هندسی، پرتو نوری که از یک نقطهٔ ثابت به نقطهٔ ثابت دیگر می‌رود، مسیری را می‌پیماید که زمان لازم برای پیمودن آن، در مقایسه با مسیرهای نزدیک آن، کمینه است (یا تغییری نمی‌کند). چنانچه برای دو نقطهٔ خاص دسته‌ای از مسیرها همگی دارای کوتاهترین زمان باشند شعاع‌های نور ارسال شده از یکی از این نقاط در نقطهٔ دیگر کانونی می‌شوند (جمع می‌شوند).

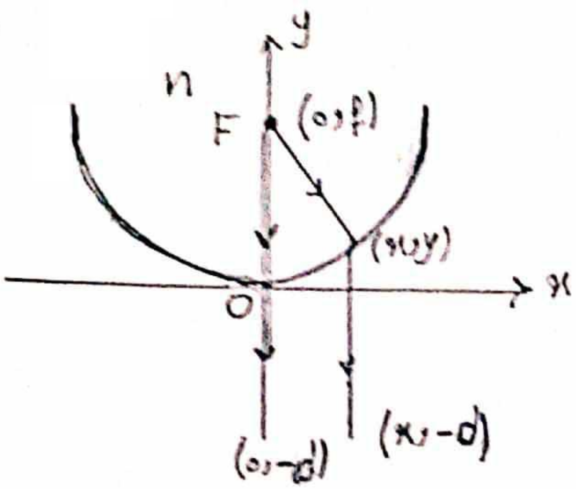
ب) نقطه‌ی F را روی محور y و داخل مادهٔ شفاف به فاصلهٔ f از مبدأ O در نظر بگیرید. تابع $y(x)$ را چنان تعیین کنید که تمام پرتوهای نور تابیده شده از این نقطه به مرز $y(x)$ بعد از خروج از مادهٔ شفاف، موازی محور y باشند.

پ) فرض کنید خاصیت ذکر شده در قسمت ب برای $0 < x < R$ برقرار است. R را بر حسب n و f به دست آورید.

ت) شکل تقریبی تابع $y(x)$ را برای x های کوچک به دست آورید. به این تقریب، تقریب پیرامحوری می‌گویند.

ث) بر روی محور y نقطهٔ A را داخل ماده شفاف و نقطهٔ B را بیرون مادهٔ شفاف در نظر بگیرید که فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ O به ترتیب a و b باشد. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا پرتوهای نور تابیده شده از نقطهٔ A به نقاط پیرامون محور با شرط $x \ll R$، همگی در نقطهٔ B کانونی شوند؟

مسئله ۶



آ)
$$\Delta t=\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\frac{1}{c}\sqrt{x^2+(y+b)^2}$$

ب) برای این که پرتوها هنگام خروج از مرز موازی باشند باید همزمان به صفحه‌ی دلخواهی مانند $y=-d$ برسند، یعنی مثلاً

$$\Delta t_{(0,f)\to(x,y)\to(x,-d)}=\Delta t_{(0,f)\to(0,0)\to(0,-d)}$$

$$\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(f-y)^2}+\frac{1}{c}(y+d)=\frac{n}{c}f+\frac{1}{c}d$$

$$\Downarrow$$

$$n^2\left(x^2+(f-y)^2\right)=(nf-y)^2$$

$$(n^2-1)y^2-2nf(n-1)y+n^2x^2=0$$

$$y=\frac{n}{n^2-1}\left(f(n-1)\pm\sqrt{(n-1)^2f^2-(n^2-1)x^2}\right)$$

علامت − قابل قبول است چون منحنی باید از $(0,0)$ بگذرد. پس

$$y=\frac{nf}{n+1}\left(1-\sqrt{1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}}\right)$$

پ) باید زیر رادیکال همواره بزرگتر یا مساوی صفر باشد، یعنی

$$1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x^2\leq\frac{n-1}{n+1}f^2$$

$$x\leq\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,f\ \Rightarrow\ x_{max}=R\equiv\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\,f$$

ت) برای $\frac{x}{f} \ll 1$

$$\sqrt{1-\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}$$

در نتیجه

$$y \approx \frac{nf}{n+1}\left(1-1+\frac{1}{2}\frac{n+1}{n-1}\frac{x^2}{f^2}\right)$$

$$y \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n-1}\,\frac{x^2}{f}$$

ث) می‌خواهیم

$$\Delta t_{(0,a)\to(x,y)\to(0,-b)} = \Delta t_{(0,a)\to(0,0)\to(0,-b)}$$

$$\frac{n}{c}\sqrt{x^2+(a-y)^2}+\frac{1}{c}\sqrt{x^2+(y+b)^2} = \frac{n}{c}a+\frac{1}{c}b$$

$$n\sqrt{x^2+y^2+a^2-2ay}+\sqrt{x^2+y^2+b^2+2by} = na+b$$

داریم $y \approx \frac{1}{2}\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{f}$ که $\frac{x}{f} \ll 1$

$$n\sqrt{x^2+a^2-\frac{n}{n-1}\frac{x^2 a}{f}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{x^4}{f^2}} +$$

$$\sqrt{x^2+b^2+\frac{n}{n-1}\frac{x^2 b}{f}+\frac{1}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\frac{x^4}{f^2}} = na+b$$

از جمله $\frac{x^4}{f^4}$ در مقابل $\frac{x^2}{f^2}$ صرف‌نظر می‌کنیم و در نتیجه

$$na\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}-\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{af}}+b\sqrt{1+\frac{x^2}{b^2}+\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{bf}} \approx na+b$$

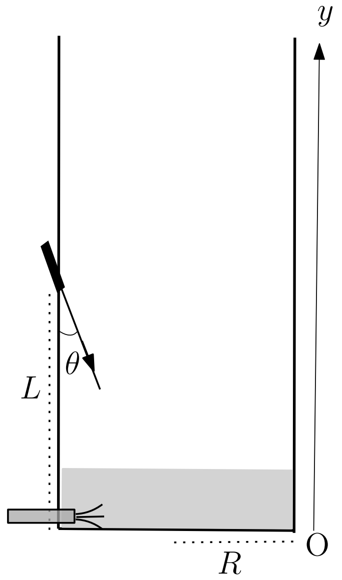
اما $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1+\frac{\epsilon}{2}$ اگر $|\epsilon| \ll 1$. بنابراین

$$na\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{af}\right)\right)+b\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{n}{n-1}\frac{x^2}{bf}\right)\right) \approx na+b$$

$$\Downarrow$$

پس از ساده کردن:

$$\frac{n}{a}+\frac{1}{b} = \frac{n}{f}$$



۷) یک مخزن استوانه‌ای خالی به شعاع قاعدهٔ R مطابق شکل در نظر بگیرید. کف استوانه آینه و دیواره‌های آن کدر است. آب از لحظهٔ $t = ۰$ به آرامی از طریق لوله‌ای واقع در کف مخزن وارد آن می‌شود. سطح آب همواره افقی است و با سرعت ثابت $v_۰$ در راستای قائم بالا می‌آید. ضریب شکست آب n و ضریب شکست هوا یک است. در ارتفاع L روی سطح جانبی مخزن یک چشمهٔ نور قرار داده شده که می‌تواند باریکه‌ای از نور را تحت زاویه θ با امتداد قائم به سمت کف مخزن گسیل کند به طوری که $\tan\theta < R/L$ و $\sin\theta < ۱/n$. پرتو نور گسیل شده وارد آب می‌شود و پس از انعکاس از آینهٔ واقع در کف مخزن از آب خارج می‌شود. سپس به نقطه‌ای واقع بر سطح جانبی مخزن می‌تابد و نقطه‌ای روشن ایجاد می‌کند. کلیهٔ پرتوها را در صفحهٔ شکل در نظر بگیرید. در این مسئله بازتاب داخلی کلی نداریم و از بازتاب نور از سطح آب صرف‌نظر می‌کنیم.

آ) در بازهٔ زمانی $۰ < t < L/v_۰$ مکان لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $y(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ب) در بازهٔ زمانی $۰ < t < L/v_۰$ سرعت لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $v(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

پ) در بازهٔ زمانی $t > L/v_۰$ مکان لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $y(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ت) در بازهٔ زمانی $t > L/v_۰$ سرعت لحظه‌ای نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه، $v(t)$، را بر حسب زمان t و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ث) به ازای مقادیر عددی $L = R = ۲۴/۰\ \text{cm}$، $\theta = ۳۰^\circ$، $n = ۱/۳۰$، و $v_۰ = ۰/۱۲۰\ \text{cm/s}$ در بازهٔ زمانی $۰ < t < ۶۰۰\ \text{s}$ کمیت‌های $y(t)$ و $v(t)$ را بر حسب t به دست آورید. بیشینهٔ کمیت‌های $y(t)$ و $v(t)$ یعنی $y_{\max}$ و $v_{\max}$ چقدر است؟ $\sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$

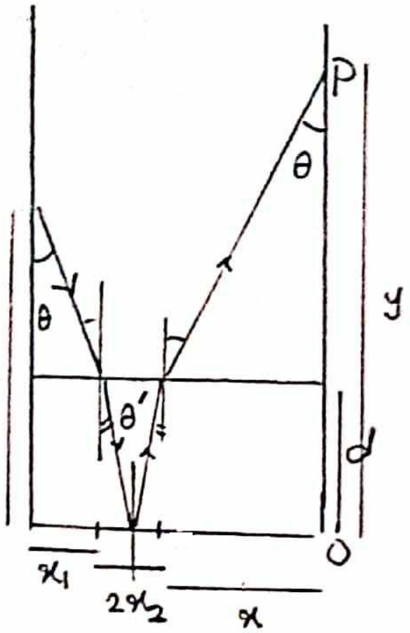
ج) نمودار مکان، $(y/y_{\max})$، و سرعت لحظه‌ای، $(v/v_{\max})$، نقطهٔ روشن روی سطح جانبی استوانه بر حسب زمان را در کاغذ مدرج موجود در پاسخ‌نامه رسم کنید.

مسئله ۷

در بازه زمانی $0 < t < L/v_0$

۱) در لحظه t، $d = v_0 t$ است

مطابق شکل: $OP = y$ و $y = d + x\cot\theta$



که

$$x_1 + 2x_2 + x = 2R$$

و

$$x_1 = (L-d)\tan\theta$$

$$x_2 = d\tan\theta'$$

و طبق قانون اسنل $\sin\theta = n\sin\theta'$

$$1+\cot^2\theta' = \frac{1}{\sin^2\theta'} \Rightarrow \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$$y = d + \left(2R - (L-d)\tan\theta - 2d\frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)\cot\theta$$

$$y = 2d - L + 2R\cot\theta - 2d\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

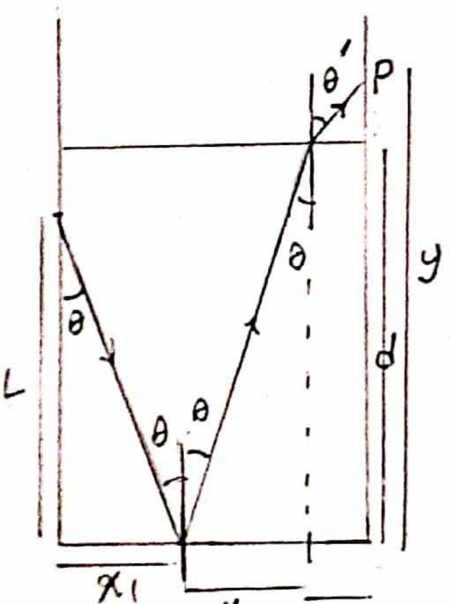
$$y(t) = 2R\cot\theta - L + 2v_0 t\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$

ب)

$$v(t) = 2v_0\left(1-\frac{\cos\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right)$$

پ) در لحظه t که $d = v_0 t$، $\frac{L}{v_0} < t < t_0$

است و $y = d + x\cot\theta'$



که

$$x_1 + x_2 + x = 2R$$

$$x_1 = L\tan\theta$$

$$x_2 = d\tan\theta$$

و طبق قانون اسنل $n\sin\theta = \sin\theta'$

t_0 زمانی است که $x=0$ می‌شود.

$$1+\cot^2\theta' = \frac{1}{\sin^2\theta'} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta' = \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta}$$

$$y = d + (2R - L\tan\theta - d\tan\theta)\cot\theta'$$

$$y = (2R - L\tan\theta)\cot\theta' + d\,(1-\tan\theta\cot\theta')$$

$$y(t) = (2R - L\tan\theta)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta} + v_0 t\left(1 - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

این جواب برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$ درست است که $x(t)\Big|_{t=t_0} = 0$

$$2R - L\tan\theta - v_0 t_0 \tan\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{v_0}(2R\cot\theta - L)$$

برای $t > t_0$ نقطه P روی دیواره استوانه جابجا نمی‌شود و

$$y(t) = (2R - L\tan\theta)\frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\sin\theta} + v_0 t_0\left(1 - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

$$y(t) = 2R\cot\theta - L$$

پ) برای $\frac{L}{v_0} < t < t_0$

$$v(t) = v_0\left(1 - \frac{\sqrt{1-n^2\sin^2\theta}}{n\cos\theta}\right)$$

و برای $t > t_0$: $v(t) = 0$

ت) برای $0 < t < 200s$

برحسب cm: $y(t) = (2(1.73)-1)24.0 + 2(0.120)t\left(1 - \frac{1.73}{2(1.20)}\right)$

$$y(t) = (59.0 + 0.067\,t)\ \text{cm}$$

برحسب $\frac{cm}{s}$: $v(t) = 2(0.120)\left(1 - \frac{1.73}{2(1.20)}\right) = 0.067\ m/s$

$$t_0 = \frac{1}{0.12}\left(2(1.73)-1\right) 24.0 = 492\,s$$

برای $200s < t < 492s$

$$y(t) = \left(2 - \frac{1.73}{3}\right) 24.0 \frac{\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(0.5)} + 0.120\,t\left(1 - \frac{2\sqrt{1-0.4225}}{(1.3)(1.73)}\right)$$

به ازای $|\epsilon| < 1$ $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$ بنابراین $\sqrt{1-0.4225} \approx 0.789$

$$y(t) \approx 41.5 + 0.036t$$

بین 38 تا 42 قبول است

بین 0.033 تا 0.039 قبول است.

برای $492s < t < 600s$

$$y(t) = \left(2(1.73)-1\right) 24.0 = 59.0\ cm$$

$$v(t) = 0$$

ج)

$y_{max} = 59.0 + 0.067(200) = 72.4\ cm$ ، $v_{max} = 0.067\ cm/s$

بنابراین:

برای $0 < t < 200s$: $59.0_{cm} < y < 72.4cm$ و $0.8 < \frac{y}{y_{max}} < 1$

برای $200s < t < 492s$: $48.7cm < y < 59.0\ cm$ و $0.7 < \frac{y}{y_{max}} < 0.8$

بین 44 تا 50 قبول است

بین 54 تا 61 قبول است.

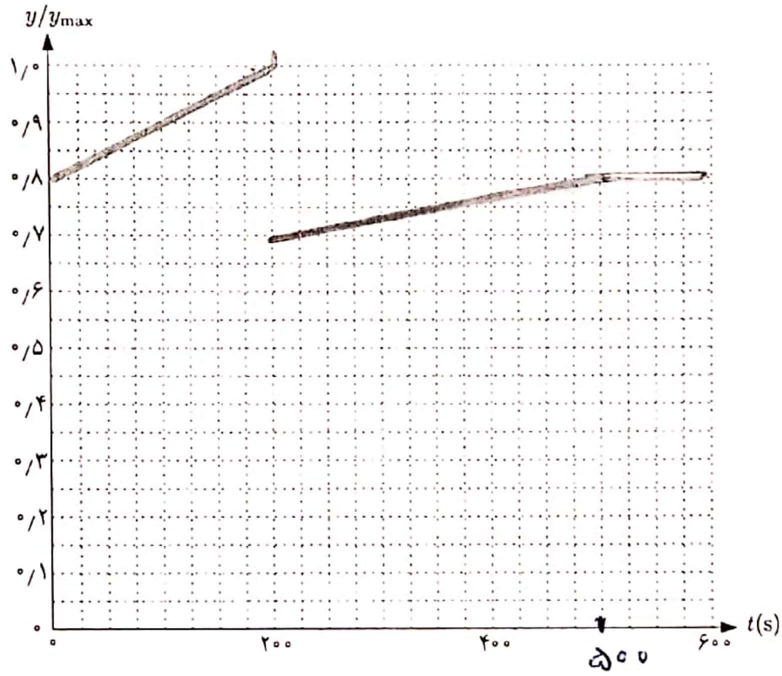
بین 0.60 تا 0.70 قبول است

بین 0.75 تا 0.85 قبول است

برای $0 < t < 200$ $\frac{v}{v_{max}} = 1$

برای $200s < t < 492s$ $\frac{v}{v_{max}} \approx 0.54$

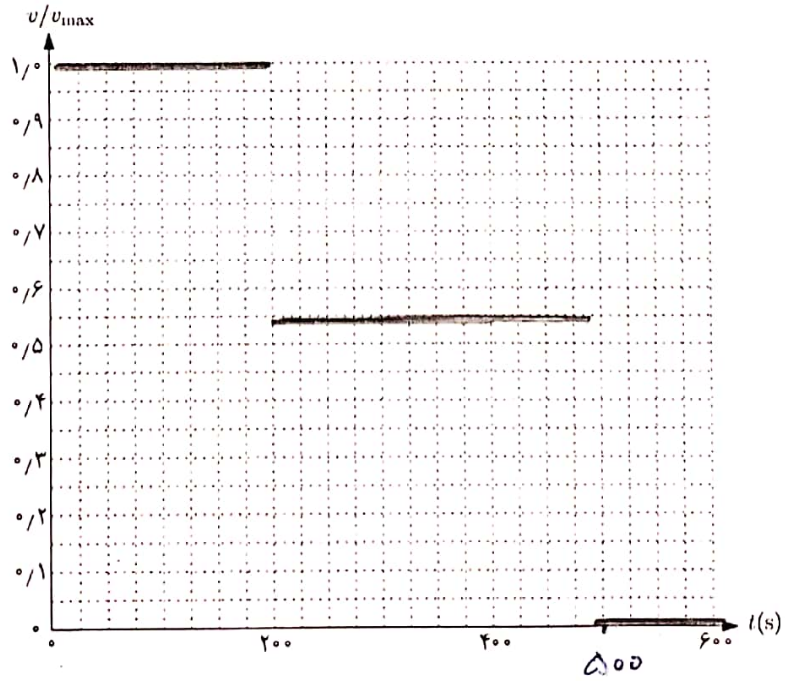
بین 0.5 تا 0.6 قبول است



$$\begin{cases} 0 < t < 200\,s \\ 0.8 < \dfrac{y}{y_{max}} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200\,s < t < 492\,s \\ 0.7 < \dfrac{y}{y_{max}} < 0.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 492\,s \\ \dfrac{y}{y_{max}} = 0.8 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 < t < 200\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 200\,s < t < 492\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} \approx 0.54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t > 492\,s \\ \dfrac{v}{v_{max}} = 0 \end{cases}$$