باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم

سی و هشتمین دورهٔ المپیاد فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۴ - ۱۴۰۳

تاریخ: ۱۴۰۴/۱/۲۴ - ساعت: ۸:۰۰ - مدت: ۳۰۰ دقیقه - نوع:تشریحی

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۳- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

٤- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از برش سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید.در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۵- از مخدوش کردن **بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ** جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

٦- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۷- در این آزمون کلیه موارد درخواست شده برای هر سوال در قسمت‌های مستطیلی قرار داده شده است. لطفاًدر برگه های پاسخ ،دقیقاً مشخص کنید که جواب کدام پرسش را می دهید.

۸- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

۹- این دفترچه شامل۷ سوال و با احتساب جلد ۸ برگ است.

کلّیهٔ حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.

آدرس پایگاه اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

سوال ۱) ابر کنار کوه

در شرایط جوی مناسب، هنگام وزش باد مرطوب و برخورد آن به یک کوه، ابر تشکیل می‌شود. شکل ۱ تصویری از این رویداد را نشان می‌دهد. در این فرایند جریان هوا ضمن بالا رفتن از دامنهٔ یک رشته کوه دچار کاهش فشار و دما می‌شود. در این مسئله با تحلیل یک مدل ساده نشان می‌دهیم که چگونه این پدیده به میعان بخار آب و تشکیل ابر منجر می‌شود.

شکل ۱. تصویر ابر تشکیل شده در کنار کوه

در ابتدا توضیح مختصری در مورد هوای اشباع شده و تشکیل ابر می‌دهیم. اگر مقدار بخار آب موجود در هوا از آستانهٔ مشخصی بیشتر شود بخار آب اضافه تبدیل به آب می‌شود. به این پدیده میعان گفته می‌شود. در این فرایند ملکول‌های آب حول ریزذرات معلق در هوا جمع می‌شوند و تبدیل به ریزقطرات آب (یا بلور یخ) می‌شوند، این ریزقطرات به‌صورت ابر دیده می‌شوند.

به وضعیتی که بخار آب موجود در هوا در آستانهٔ میعان است حالت اشباع گفته می‌شود. در یک دما و فشار معین اندازهٔ جرم بخار آب اشباع در $۱/۰\,\mathrm{m}^۳$ هوای اشباع شده مقدار معینی دارد که در جدول ۱ این مقدار بر حسب **گرم** برای چند فشار و دما داده شده است. در طی حل این مسئله می‌توانید از داده‌های جدول استفاده کنید.

دما ($^\circ\mathrm{C}$)	فشار $1/0\,\mathrm{bar}$	فشار $0/8\,\mathrm{bar}$
۱۲	۱۰/۹۹	۱۱/۰۸
۱۷	۱۴/۹۶	۱۵/۰۷
۲۲	۲۰/۱۲	۲۰/۲۲
۲۷	۲۶/۷۷	۲۶/۹۴

جدول ۱. میزان جرم موجود بخار آب در یک **متر مکعب** هوای اشباع بر حسب **گرم**، در دما و فشارهای مختلف هوا

* در کل مسئله هوای اشباع را گاز آرمانی در نظر بگیرید.
* چگالی هوا در دمای $۲۷^\circ\mathrm{C}$ و در فشار $۱/۰\,\mathrm{bar}$ با چشم‌پوشی از جرم بخار آب موجود در آن برابر $۱/۲\,\mathrm{kg/m^۳}$ است. ($۱\,\mathrm{bar} = ۱۰^۵\,\mathrm{Pa}$)
* هوا را می‌توان یک گاز دو اتمی گرفت که انرژی درونی آن از رابطهٔ $U = \frac{۵}{۲}PV$ به دست می‌آید.
* گرمای نهان تبخیر آب در شرایط این مسئله به طور میانگین برابر $۲۴۰۰\,\mathrm{J/g}$ است.
* میزان جرمی از یک شاره با چگالی ρ، که در واحد زمان از یک سطح مقطع فرضی با مساحت A و با سرعت u به صورت عمود از آن می‌گذرد برابر $\rho A u$ است.

آ) اگر $۱۰۰\,\mathrm{m^۳}$ (تقریبا اندازهٔ یک اتاق) هوا با دمای $۲۷^\circ\mathrm{C}$ در فشار $۱/۰\,\mathrm{bar}$ به گونه‌ای سرد شود که دمای آن به $۱۷^\circ\mathrm{C}$ و فشار آن به $۰/۸\,\mathrm{bar}$ برسد، حجم نهایی این گاز چقدر می‌شود؟

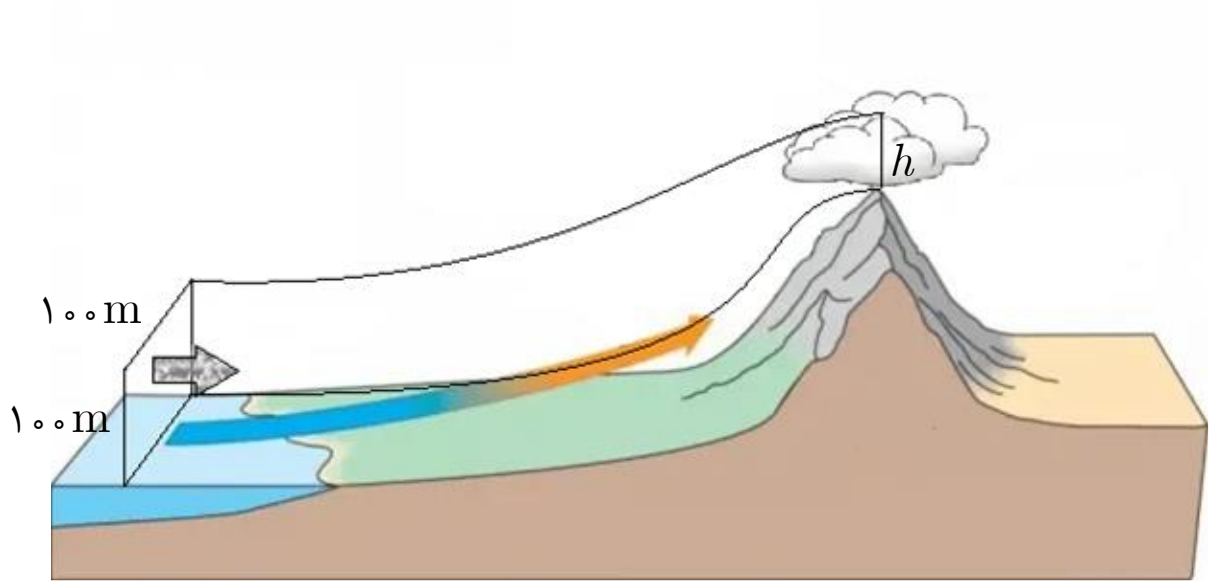
ب) تغییر انرژی درونی گاز در فرایند بخش آ چقدر است؟

پ) فرض کنید در تحول بخش آ، هوای اولیه و نهایی هر دو در حالت اشباع باشند. در این فرایند چه جرمی از بخار آب به مایع تبدیل می‌شود؟

ت) این مقدار بخار آب برای تبدیل شدن به مایع چقدر گرما به محیط داده است؟

حال رشته کوهی را مانند شکل ۲ فرض کنید که در نزدیکی ساحل دریا واقع شده و به موازات آن است. بادی با سرعت $۱۰\,\mathrm{m/s}$ از روی سطح دریا تا ارتفاع ۱۰۰ متری با دمای $۲۷^\circ\mathrm{C}$ و فشار $۱/۰\,\mathrm{bar}$ به سمت رشته کوه می‌وزد که باعث می‌شود هوا از بخار آب اشباع شود. سرعت این باد در بالای کوه و در هنگام عبور از رشته کوه $۳۰\,\mathrm{m/s}$ می‌شود. دما و فشار آن در بالای رشته کوه به ترتیب برابر $۱۷^\circ\mathrm{C}$ و $۰/۸\,\mathrm{bar}$ است. ارتفاع جریان هوا بالای رشته کوه h است.

ث) محاسبه کنید به ازای خط فرضی به طول ۱۰۰ متر موازی دامنه کوه، مانند شکل ۲، چه جرمی از بخار آب در هر ثانیه از بالای این خط فرضی می‌گذرد؟



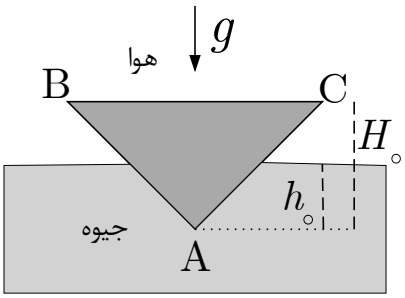
شکل ۲

ج) با توجه به قسمت ث، در هر ثانیه بالای رشته کوه چه جرمی از ابر تشکیل می‌شود؟

چ) با توجه به شکل ۲ و مقادیر به دست آمده در قسمت های قبل، مقدار h چقدر است ؟

ح) با استفاده از پایستگی انرژی، تغییر ارتفاع هوا را در دو حالت ذکر شده حساب کنید.

سوال ۲) دماسنج الکتریکی



شکل ۱

منشوری از جنس یک آلیاژ به خصوص با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین مطابق شکل ۱ در جیوه شناور است. یال‌های منشور افقی و عمود بر صفحهٔ شکل هستند. چگالی جیوه و آلیاژ در دمای معین $T_{\circ}$ به ترتیب ρ_{Hg} و ρ_{A} است. ارتفاع مثلث یاد شده در این دما $H_{\circ}$ و فاصلهٔ رأس A تا سطح آزاد جیوه $h_{\circ}$ است.

آ) $h_{\circ}$ را بر حسب سایر داده‌ها به دست آورید.

می‌خواهیم از دستگاه فوق به عنوان یک دماسنج استفاده کنیم. ضریب انبساط طولی آلیاژ α_{A} و ضریب انبساط حجمی جیوه β_{Hg} است. اگر دما به مقدار ΔT افزایش یابد، فاصلهٔ رأس A از سطح جیوه به اندازهٔ Δh تغییر می‌کند که نسبت به $h_{\circ}$ بسیار کوچک است. فرض کنید ضریب انبساط ظرف جیوه به‌گونه‌ای است که بر اثر تغییر دما ارتفاع سطح جیوه در ظرف تغییر محسوسی ندارد.

نکته) بر اثر تغییر کوچک Δx در کمیت x، کمیت وابستهٔ $f(x)$ به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

که در آن $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ است.

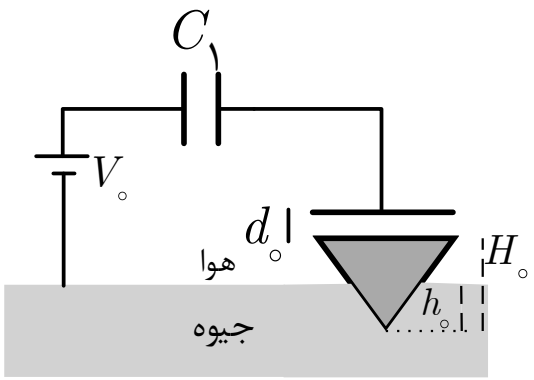
ب) Δh را برحسب داده‌های مسئله به دست آورید.

پ) به ازای مقادیر زیر تغییر ارتفاع Δh را برای افزایش دما به اندازهٔ $\Delta T = ۲۵\,\mathrm{K}$ به دست آورید.

$\rho_{\mathrm{Hg}} = ۱۳/۶\,\mathrm{g/cm^۳}$، $\rho_{\mathrm{A}} = ۳/۴\,\mathrm{g/cm^۳}$، $H_{\circ} = ۲۰\,\mathrm{cm}$، $\beta_{\mathrm{Hg}} = ۱۸\times۱۰^{-۵}\,\mathrm{K^{-۱}}$ و $\alpha_{\mathrm{A}} = ۲/۰\times۱۰^{-۵}\,\mathrm{K^{-۱}}$.

به منظور اندازه‌گیری Δh، از سطح افقی منشور به عنوان صفحهٔ یک خازن متغیر استفاده می‌کنیم، به طوری که جابه‌جایی آن منجر به تغییر ظرفیت خازن شود. سپس این خازن را در یک مدار مطابق شکل ۲ با خازن ثابت دیگری به ظرفیت معلوم $C_{۱}$ سری می‌کنیم.

در دمای $T_{\circ}$ ظرفیت خازن متغیر $C_{\circ}$ و فاصلهٔ بین صفحات آن $d_{\circ}$ است. بین صفحات خازن هوا است. ولتاژ دو سر باتری ثابت و برابر $V_{\circ}$ است. از نیرویی که صفحات خازن به یکدیگر وارد می‌کنند چشم پوشی کنید.



شکل ۲

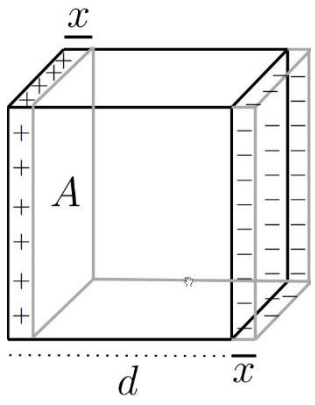
ت) اگر ظرفیت خازن به ازای افزایش دمای ΔT به اندازهٔ کوچک ΔC تغییر کند نسبت $\Delta C / C_{\circ}$ را بر حسب ΔT و سایر داده‌های مسئله به دست آورید. فرض کنید تغییر ظرفیت خازن عمدتاً به واسطهٔ تغییر فاصلهٔ صفحات است و تغییر مساحت صفحات اثر ناچیزی دارد.

ث) اگر $V_{\circ} = ۲/۰\,\mathrm{V}$، $C_1 = C_{\circ}$ و $d_{\circ} = ۱/۰\,\mathrm{mm}$ باشد ولتاژ دو سر خازن متغیر با افزایش دما به اندازهٔ $\Delta T = ۲۵\,\mathrm{K}$ چه مقدار تغییر می‌کند؟

سوال ۳) نوسان پلاسما

پلاسما حالتی از ماده است که در آن مخلوطی گاز مانند از ذرات باردار در جایی تجمع کرده‌اند. در طبیعت چنین وضعیتی در مرکز ستاره‌ها برقرار است. معمولاً بارهای منفی الکترون‌ها هستند که جرم هر یک از آن‌ها m_e و اندازهٔ بار الکتریکی هر یک از آن‌ها e است. بارهای مثبت در پلاسمای بسیار داغ، هسته‌ها و در پلاسمای نه چندان داغ، یون‌ها هستند. در این مسئله فرض می‌کنیم بارهای مثبت، اتم‌های یک بار یونیده‌اند. در حالت تعادل تعداد بارهای مثبت و منفی در یک واحد حجم در همه جا یکسان و برابر n است. با توجه به این که جرم الکترون‌ها بسیار کمتر از جرم یون‌هاست، می‌توان در دماهای نه چندان بزرگ، عملاً یون‌ها را ساکن فرض کرد. در این صورت پلاسما شبیه یک رسانا خواهد بود.

در صورت انحراف از حالت تعادل، دستگاه پلاسما، مشابه یک دستگاه جرم و فنر، نوسان می‌کند. در این مسئله می‌خواهیم با ارائهٔ مدل‌های ساده‌ای نوسان پلاسما را بررسی کنیم. این کار را در سه وضعیت کاملاً مجزا انجام می‌دهیم.



شکل ۱

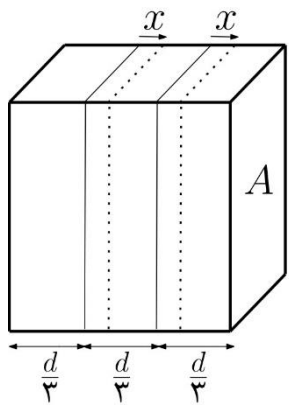
حالت اول – پلاسمای سرد

در این حالت از حرکت کاتوره‌ای (گرمایی) الکترون‌ها چشم می‌پوشیم. فرض کنید در مکعب مستطیلی به سطح مقطع A و طول کوچک d پلاسما وجود دارد. فرض کنید تمام الکترون‌ها، مطابق شکل ۱، به اندازهٔ بسیار کوچک x (در مقایسه با d) به یک سمت (مثلا سمت راست)کشیده شده باشند. در این صورت دستگاه مشابه یک خازن تخت عمل می‌کند. فرض کنید ضریب گذردهی پلاسما، تقریباً همان ضریب گذردهی خلاء، ε_0، است.

آ) نیروی بازگرداننده بر روی کل مجموعهٔ الکترون‌ها را حساب کنید و در مشابهت با دستگاه جرم و فنر بسامد نوسان پلاسمای سرد را به دست آورید.

حالت دوم – گاز الکترونی

در این حالت فرض می‌کنیم الکترون‌ها بار ندارند و مشابه به یک گاز آرمانی در ظرفی به سطح مقطع A و طول d محصور هستند. فرض کنید دمای این گاز آرمانی T، فشار حالت تعادل آن P_0 و چگالی جرمی حالت تعادل آن ρ_0 باشد. نوسانات طولی گاز در این ظرف مشابه یک لولهٔ صوتی است که دو سر آن بسته باشد. در هماهنگ اول در دو سر لوله گره و در طول لوله



شکل ۲

فقط یک شکم در وسط آن وجود دارد. به این ترتیب گاز در کناره‌ها به طور متناوب منقبض و منبسط می‌شود ولی فشار در نقطهٔ وسط همان فشار $P_{\circ}$ است. به منظور ساده کردن ریاضیات مسئله مدل ساده‌ای در نظر می‌گیریم که در آن گاز را مطابق شکل ۲ و در طول لوله به سه بخش به طول $d/۳$ تقسیم کرده‌ایم. گاز در هر کدام از این سه بخش فشار یکسانی دارد و بین بخش‌ها دیواره‌های فرضی وجود دارد که در طی نوسان دستگاه به چپ و راست حرکت می‌کنند. فرض کنیم یک سوم وسطی به اندازهٔ x (که بسیار از d کوچکتر است) از حالت تعادل منحرف شده و فشار گاز سمت راست خود را به مقدار کوچک ΔP افزایش داده است. در سمت چپ نیز فشار گاز به اندازهٔ ΔP کاهش یافته است. برای سهولت فرض می‌کنیم تحول فوق در دمای ثابت اتفاق افتاده است.

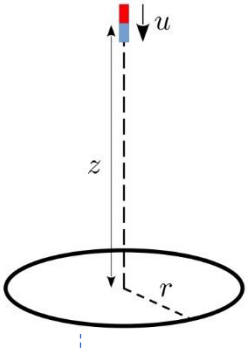
ب) نیروی بازگرداننده بر روی گاز بخش وسط را حساب کنید و در مشابهت با دستگاه جرم و فنر بسامد زاویه‌ای نوسان را بر حسب دمای T، طول موج λ و جرم الکترون، m_e، به دست آورید. لازم به ذکر است که $k_B = R/N_A$ ثابت بولتزمن نام دارد که R ثابت گازها و N_A عدد آووگادرو است.

حالت سوم - پلاسمای داغ

در این حالت پلاسمای داغ را در نظر می‌گیریم که در آن هم بار الکتریکی الکترون‌ها مؤثر است و هم مجموعهٔ آن‌ها مثل یک گاز آرمانی عمل می‌کند. به عبارت دیگر هر دو اثر بازگردانندهٔ حالت‌های قبلی با هم مؤثرند. فرض کنید نیروی بازگرداننده به ازای واحد جرم ناشی از دو حالت قبلی با هم جمع شوند.

پ) بسامد نوسان پلاسمای داغ را بر حسب n، e، m_e، $\varepsilon_{\circ}$، k_B، T و λ به دست آورید.

سوال ۴) سقوط آهنربا در لولهٔ فلزی



شکل ۱

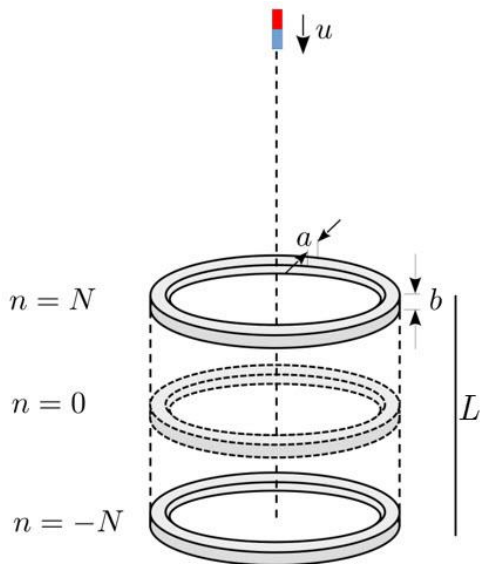
حلقه‌ای رسانا به شعاع r در یک صفحه افقی ثابت است. یک آهن‌ربای کوچک میله‌ای به جرم نامعلوم در حالی که همواره محور آن با محور حلقه یکی است در راستای محور حلقه حرکت می‌کند. سرعت آهن‌ربا متغیر است. در لحظه‌ای که مرکز آهن‌ربا در فاصلهٔ z از مرکز حلقه است سرعت لحظه‌ای آن را u بگیرید. فرض کنید شار مغناطیسی که از سطح حلقه می‌گذرد تابع معلوم $\phi(z)$ باشد.

روشن است که با داشتن تابع $\phi(z)$ مشتق آن، $\phi'(z) = \dfrac{d\phi}{dz}$، نیز معلوم خواهد بود. در تمام بخش‌های این مسئله به جز بخش ت میدان گرانش در کار نیست.

یادآوری قاعدهٔ مشتق زنجیره‌ای: اگر ϕ تابعی از متغیر z باشد و z نیز به نوبهٔ خود تابعی از متغیر t باشد، مشتق ϕ نسبت به t از رابطهٔ $\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{d\phi}{dz}\dfrac{dz}{dt}$ به دست می‌آید.

آ) انرژی که در هر ثانیه آهن‌ربا از دست می‌دهد، توان تلف شده نام دارد که مقدار آن در هر لحظه برابر با حاصل‌ضرب اندازهٔ نیرو در اندازهٔ سرعت است. این کمیت را با انرژی گرمایی تولید شده در حلقه برابر قرار دهید و از این طریق نیروی وارد شده از طرف حلقه به آهن‌ربا را بر حسب مقاومت حلقه، R، و دیگر داده‌های مسئله به دست آورید.

حال پوسته‌ای استوانه‌ای به طول L در نظر بگیرید که از رسانایی با مقاومت ویژهٔ ρ ساخته شده است. ضخامت پوسته را a بگیرید که از شعاع آن، r، بسیار کوچک‌تر است. این دستگاه را در یک مدل می‌توان با برش‌های فرضی افقی به صورت $2N+1$ حلقه با طول کوچک $b = L/(2N+1)$ فرض کرد که b از L و r بسیار کوچکتر است، به گونه‌ای که حلقهٔ میانی با شماره $n=0$، آخرین حلقه پایینی با شماره $n=-N$ و آخرین حلقه‌ی بالایی با شماره $n=N$ نام‌گذاری شده باشند. در این حالت z را فاصلهٔ لحظه‌ای مرکز آهن‌ربا و مرکز حلقهٔ میانی بگیرید.



شکل ۲

کماکان فرض کنید محور آهن‌ربا بر محور استوانه منطبق است و با سرعت لحظه‌ای u در راستای آن حرکت می‌کند. در تمام این مسئله از شار میدان مغناطیسی حلقه‌ها در حلقه‌های دیگر صرف نظر کنید و فقط شار میدان مغناطیسی آهن‌ربا را در نظر بگیرید.

ب) با همان رویکرد ذکر شده در بخش آ، نیروی وارد شده از طرف استوانه به آهن‌ربا را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

پ) در حالتی که آهن‌ربا در داخل یک استوانهٔ بسیار طویل با سرعت ثابت در راستای محور در حال حرکت باشد و فاصلهٔ آن از دو انتها زیاد باشد، نیروی وارد شده از استوانه به آهن‌ربا ثابت است. آن را به دست آورید.

حال فرض کنید شتاب گرانش در راستای محور استوانه برقرار است و اندازهٔ آن g است. اگر آهن‌ربا را در شرایط ذکر شده در بخش پ رها کرده باشیم، بعد از مدتی سرعت آن به سرعت ثابتی موسوم به سرعت حد می‌رسد.

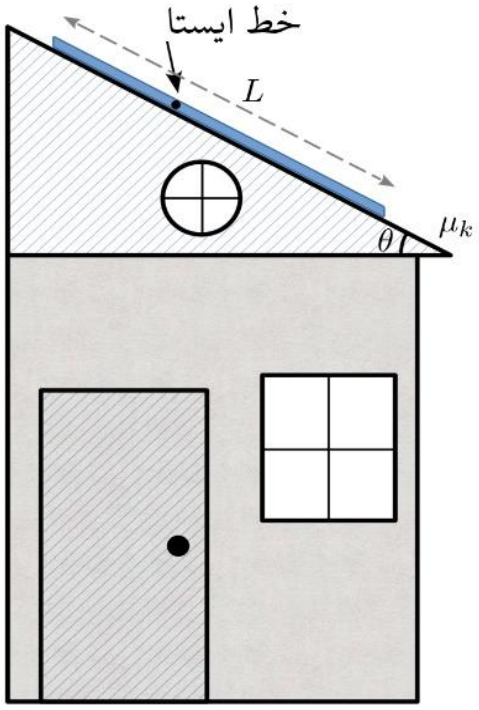
ت) اگر u_{Cu} و u_{Al} به ترتیب سرعت حدی سقوط آهن‌ربا در استوانه‌های مشابه مسی و آلومینیومی باشد، نسبت $u_{\mathrm{Cu}} \,/\, u_{\mathrm{Al}}$ را به دست آورید.

مجدداً فرض کنید گرانش در کار نیست. در یک مدل دیگر می‌توان استوانه را به صورت یک مارپیچ فرضی گرفت که حلقه‌های آن تنگ در کنار یکدیگر قرار دارند و ابتدا و انتهای مارپیچ با یک سیم بدون مقاومت به هم وصل شده‌اند. حلقه‌ها را مثل حالت قبل شماره‌گذاری می‌کنیم، فقط در نظر داشته باشید که انتهای هر حلقه به ابتدای حلقه‌ی بعدی متصل شده است.

ث) نیروی وارد شده از طرف این مارپیچ فرضی به آهن‌ربا را بر حسب کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ج) در حالتی که آهن‌ربا در داخل مارپیچ بسیار طویل با سرعت ثابت در راستای محور در حال حرکت باشد و فاصلهٔ آن از دو انتها زیاد باشد، نیروی وارد شده از استوانه به آهن‌ربا ثابت است. آن را به دست آورید. می‌توانید از این حقیقت استفاده کنید که تابع ϕ تابع زوجی از z، $\phi(z) = \phi(-z)$، است.

سوال ۵) کِرم ابریشم فلزی



شکل ۱

مطابق شکل ۱، سقف یک خانهٔ ویلایی به صورت شیروانی است که با افق زاویهٔ θ می‌سازد. بر روی سقف، صفحه‌ای فلزی به ابعاد b و L و ضخامت یکنواخت قرار گرفته است. ضلع L در امتدا شیب و ضلع b افقی است. نیروی عمودی سطح که سقف به صفحه وارد می‌کند به طور یکنواخت توزیع شده است، به طوری که نیروی عمودی وارد شده به واحد سطح صفحه در همه جای آن یکسان است. ضریب اصطکاک جنبشی بین صفحه و سقف μ_k است و $\mu_k < \tan\theta$، در نتیجه در حالت عادی صفحه روی سقف سُر نمی‌خورد.

در طی شبانه‌روز دمای محیط بین دمای سرد T_c، قبل از سپیده‌دم و دمای گرم T_h، در بعد از ظهر تغییر می‌کند و سقف و صفحه در همان دمای محیط هستند. ضریب انبساط حرارتی طولی سقف ناچیز و ضریب انبساط حرارتی طولی صفحه α است. صفحه و سقف به یکدیگر گیر نیستند به طوری که در ضمن انبساط و انقباض صفحه اندکی نسبت به سقف حرکت می‌کند. این حرکت بسیار آرام و بدون شتاب است و در هر لحظه می‌توان دستگاه را در حالت تعادل گرفت.

در حین انبساط بخش‌های پایینی صفحه به طرف پایین و بخش‌های بالایی آن به طرف بالا حرکت می‌کنند. در این فرایند نقاطی از صفحه در طول خطی به موازات ضلع b که به فاصلهٔ x_1 از لبهٔ پایینی است ساکن می‌مانند. به این نقاط خط ایستا می‌گوییم (که اگر سقف شیب نداشت خط ایستا وسط صفحه قرار می‌گرفت). در حین انقباض جای خط ایستا عوض می‌شود و در فاصلهٔ x_2 از لبهٔ پایینی قرار می‌گیرد.

آ) دستگاه صفحه را مشابه دو جرم مجزا که بر روی سطح شیب‌دار در تماس با هم هستند در نظر بگیرید و با فرض حرکت بدون شتاب، برای هر یک از آن‌ها معادلات حرکت را در دو حالت انبساط و انقباض بنویسید.

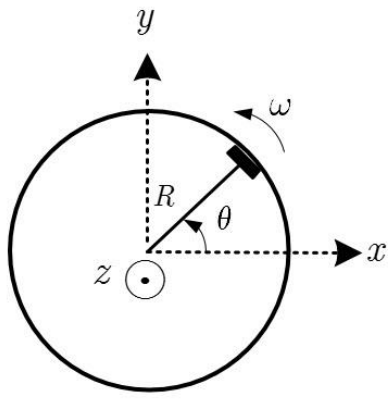
ب) با حل معادلات بخش آ در حالت انبساط، فاصلهٔ لبهٔ پایینی صفحه از خط ایستا (یعنی طول x_1) را بر حسب L_c (طول صفحه در دمای T_c)، $\tan\theta$ و μ_k به دست آورید.

پ) با حل معادلات بخش آ در حالت انقباض، فاصلهٔ لبهٔ پایینی صفحه از خط ایستا (یعنی طول $x_۲$) را بر حسب L_c (طول صفحه در دمای T_c)، μ_k و $\tan\theta$ به دست آورید.

چنان که ملاحظه می‌کنید تفاوت محل خط ایستا در ضمن انبساط و انقباض صفحه باعث حرکت آن مشابه کرم ابریشم بر روی سقف می‌شود.

ت) جابجایی لبهٔ پایینی صفحه نسبت به سقف را پس از یک فرایند انبساط و انقباض به دست آورید. پاسخ خود را بر حسب L_c، μ_k، T_h، T_c، α و $\tan\theta$ به دست آورید. پاسخ نهایی خود را با چشم‌پوشی از جملاتی که به صورت حاصل‌ضرب مقادیر بسیار کوچک هستند، ساده کنید.

سوال ٦) استوانهٔ چرخان



شکل ۱

استوانه‌ای به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دور محور خود می‌چرخد. بلوک کوچکی به جرم m بر سطح داخلی استوانه تکیه دارد و می‌تواند همراه آن بچرخد. ضریب اصطکاک ایستایی بلوک با سطح استوانه μ_s است. از اندازهٔ بلوک نسبت به شعاع استوانه چشم‌پوشی کنید. شکل ۱ مقطع استوانه را نشان می‌دهد که در آن محور استوانه محور z است و محورهای x و y دو محور عمود بر هم در مقطع استوانه هستند. شعاع واصل از محور z به بلوک با محور x زاویهٔ θ می‌سازد. شتاب گرانش g است.
مسئله را در سه حالت متفاوت زیر دنبال می‌کنیم:

حالت اول: محور z قائم باشد.

با فرض اینکه شتاب گرانش در جهت $-z$ باشد.

آ) اندازهٔ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک ایستایی را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

ب) کمینهٔ ω را بر حسب داده‌های مسئله چنان تعیین کنید که بلوک سُر نخورد.

حالت دوم: محور y قائم باشد.

با فرض اینکه محورهای x و z افقی هستند و شتاب گرانش در جهت $-y$ باشد.

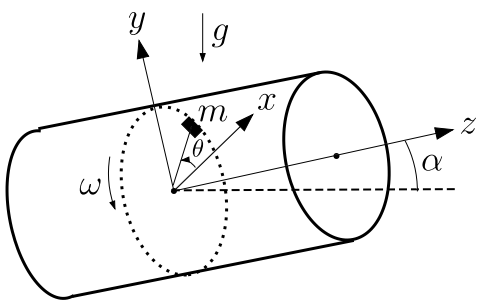
پ) اندازهٔ نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک ایستایی را بر حسب زاویهٔ θ و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

ت) در یک زاویهٔ معین، برای آن که بلوک سُر نخورد باید $\omega^2 \geq F(\theta)$ باشد. تابع $F(\theta)$ را بر حسب θ و سایر داده‌های مسئله تعیین و نمودار آن را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

ث) $\omega_{\min}$ را بر حسب R، μ_s و g چنان تعیین کنید که برای $\omega > \omega_{\min}$، بلوک در تمام زاویه‌ها سُر نخورد.

حالت سوم: محور z مایل باشد.

با فرض اینکه مطابق شکل ۲، محور z با افق زاویه α بسازد و شتاب گرانش در صفحهٔ $y-z$ باشد.



شکل ۲

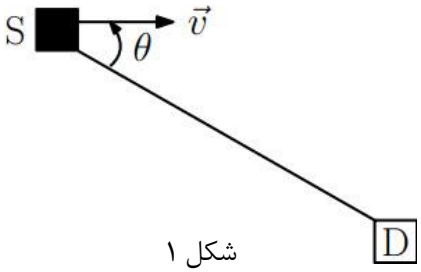
ج) نیروی وزن را در راستای محور z و عمود بر آن تجزیه کنید و سپس اندازهٔ نیروی عمودی سطح و مؤلفه‌های نیروی اصطکاک ایستایی را در راستاهای محور z و مماس بر دایره مسیر بر حسب θ و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

چ) در یک زاویهٔ معین، برای آن که بلوک سُر نخورد باید $\omega^2 \geq G(\theta)$ باشد. تابع $G(\theta)$ را بر حسب θ و سایر داده‌های مسئله تعیین و نمودار آن را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید. با توجه به مقادیر پارامترها ممکن است نمودار شکل‌های متفاوتی داشته باشد.

راهنمایی: برای رسم تابع، توصیه می‌شود مقدار تابع $G(\theta)$ و مشتق آن را در زوایای $\theta = 0, \pi, 2\pi$ حساب کنید و با توجه به علامت آن‌ها و ریشه‌های مشتق تابع، رفتار کلی آن را حدس بزنید. توجه کنید که با توجه به مقدار پارامترها ممکن است تابع شکل‌های متفاوتی داشته باشد.

ح) $\omega_{\min}$ را بر حسب R، μ_s، g و α چنان تعیین کنید که برای $\omega > \omega_{\min}$، بلوک در تمام زاویه‌ها سُر نخورد. ممکن است مسئله بیش از یک حالت داشته باشد.

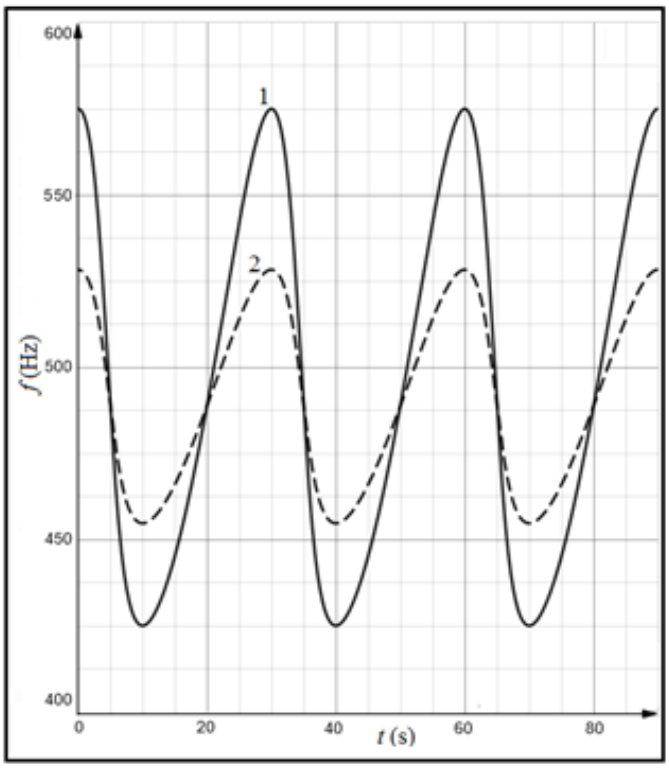
سوال ۷) چشمهٔ صوتی چرخان



شکل ۱

یک چشمهٔ صوتی، S، در حالت ساکن امواج صوتی با بسامد $f_\circ$ تولید می‌کند که با سرعت c منتشر می‌شوند. اگر این چشمه با سرعت $\vec{v}$ حرکت کند، و گیرنده، D، ساکن باشد بسامدی که گیرنده ثبت می‌کند به صورت $f = \dfrac{f_\circ}{1-(v/c)\cos\theta}$ است، که در آن مطابق شکل ۱، θ زاویهٔ بین خط واصل از مکان لحظه‌ای چشمه به گیرنده با امتداد سرعت $\vec{v}$ و c سرعت صوت است.

حال فرض کنید یک چشمه صوتی روی دایره‌ای به شعاع R با سرعت یکنواخت v می‌چرخد. دو گیرندهٔ ۱ و ۲ در صفحهٔ دایره‌ای که چشمه روی آن می‌چرخد قرار دارند. بسامد f دریافت شده توسط دو گیرنده به صورت تابعی از زمان t مطابق شکل ۲ است.



شکل ۲

آ) فرض کنید گیرندهٔ D بیرون دایره و به فاصلهٔ d از نقطهٔ O، مرکز دایره، باشد $(d > R)$.

آ۱- با رسم شکل نشان دهید بیشینه و کمینهٔ بسامد دریافت شده توسط گیرنده متناظر با چه موقعیتی از چشمهٔ صوتی روی دایره است؟

آ۲- بسامد بیشینه، $f_{\max}$ ، و بسامد کمینه، $f_{\min}$ ، دریافت شده توسط گیرنده را بر حسب $f_{\circ}$ ، v و c به دست آورید.

آ۳- با اشاره به ویژگی مشخصی از نمودارهای شکل۲ معین کنید که آیا ممکن است هر دو گیرندهٔ ۱ و ۲ خارج از دایره باشند؟

ب) فرض کنید گیرندهٔ D داخل دایره و به فاصلهٔ d از نقطهٔ O ، مرکز دایره، باشد $(d < R)$.

ب۱- در مثلث OSD زاویهٔ $\angle\mathrm{ODS}$ را γ بنامید و بسامد f را بر حسب γ ، $f_{\circ}$ ، v/c ، d و R به دست آورید.

ب۲- با رسم شکل نشان دهید بیشینه و کمینهٔ بسامد دریافت شده توسط گیرنده متناظر با چه موقعیتی از چشمهٔ S روی دایره است؟

ب۳- بسامد بیشینه، $f_{\max}$ و بسامد کمینه، $f_{\min}$ را بر حسب $f_{\circ}$ ، v/c ، d و R به دست آورید.

ب۴- با اشاره به ویژگی مشخصی از نمودارهای شکل ۲ معین کنید که آیا ممکن است هر دو گیرندهٔ ۱ و ۲ داخل دایره باشند؟

پ) با اشاره به ویژگی‌های مشخصی از نمودارهای شکل ۲ و نتایج بخش‌های آ و ب معلوم کنید کدام گیرنده خارج و کدام گیرنده داخل دایره است؟

ت) با توجه به مقادیر عددی نمودارهای شکل ۲ و اندازهٔ سرعت صوت، $c = ۳۳۰\,\mathrm{m/s}$ ، مقدار عددی کمیت‌های زیر را به دست آورید.

ت۱- بسامد، $f_{\circ}$

ت۲- سرعت چشمه صوتی، v

ت۳- شعاع دایره، R

ت٤- زاویهٔ α بین خط واصل مرکز دایره به گیرندهٔ ۱ و شعاع‌های واصل از مرکز دایره به چشمهٔ صوتی در موقعیت‌های $f_{\max}$ و $f_{\min}$ مربوطه.

ت۵- زاویهٔ β بین خط واصل مرکز دایره به گیرندهٔ ۲ و شعاع‌های واصل از مرکز دایره به چشمهٔ صوتی در موقعیت‌های $f_{\max}$ و $f_{\min}$ مربوطه.

ت٦- فاصلهٔ گیرندهٔ ۱ از مرکز دایره، $d_۱$

ت۷- فاصلهٔ گیرندهٔ ۲ از مرکز دایره، $d_۲$

ت۸- فاصلهٔ دو گیرنده از یکدیگر، L **(فقط نوشتن روابطی که بتوان از آن‌ها L را به دست آورد کافی است.)**