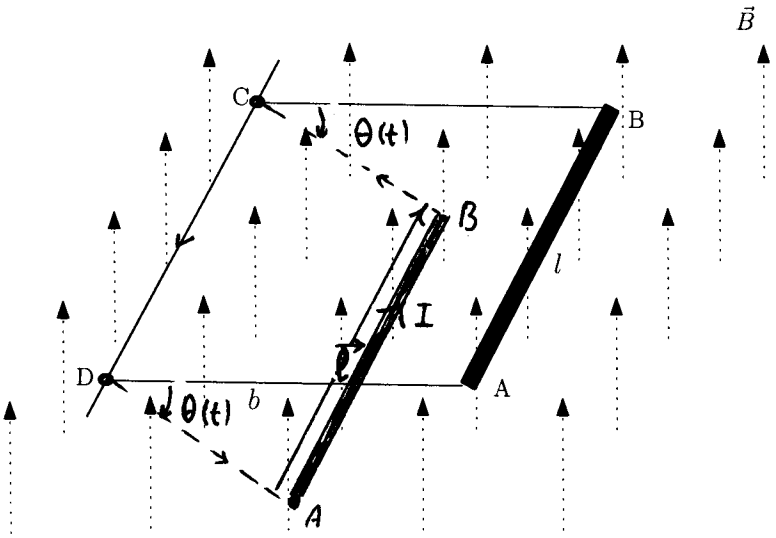
۱.



اگر در لحظه t، زاویه صفحه $ABCD$ با صفحه افقی اولیه $\theta(t)$ باشد شار میدان مغناطیسی گذرنده از حلقه $ABCD$ برابر است با

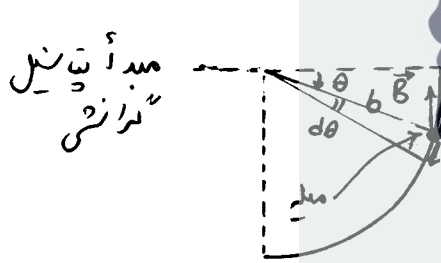
(الف) $\Phi_B = lb\cos\theta(t)\, B$

نیروی محرکه القایی $\mathcal{E} = \left|-\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$ ، $\mathcal{E} = IR$.

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = lbB\underbrace{\frac{d\theta(t)}{dt}}_{\omega}\left(-\sin\theta(t)\right) \Rightarrow I = \frac{\omega bl B\sin\theta}{R}$$

(ب) $\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B}$, $\vec{l}\perp\vec{B} \Rightarrow F = IlB \Rightarrow F = \frac{\omega bl^2B^2\sin\theta}{R}$

(ج) با توجه به شکل، هنگام جابجایی میله AB به اندازه $d\theta$، جابجایی $bd\theta$ و نیرو در خلاف جهت آن $F\sin\theta$ است. بنابراین



$$dW_F = -(F\sin\theta)\, b\, d\theta$$

در نتیجه $\frac{dW_F}{dt} = -Fb\sin\theta\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \Rightarrow \frac{dW_F}{dt} = -\frac{\omega^2b^2l^2B^2\sin^2\theta}{R}$

(د) $\frac{dQ}{dt} = -\frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\omega^2b^2l^2B^2\sin^2\theta}{R}$

(هـ) با توجه به شکل قسمت ج) و نسبت به مبدأ مشخص شده، انرژی پتانسیل گرانشی میله برابر است با U.

$$U = -mgb\sin\theta \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -mgb\cos\theta\,\omega$$

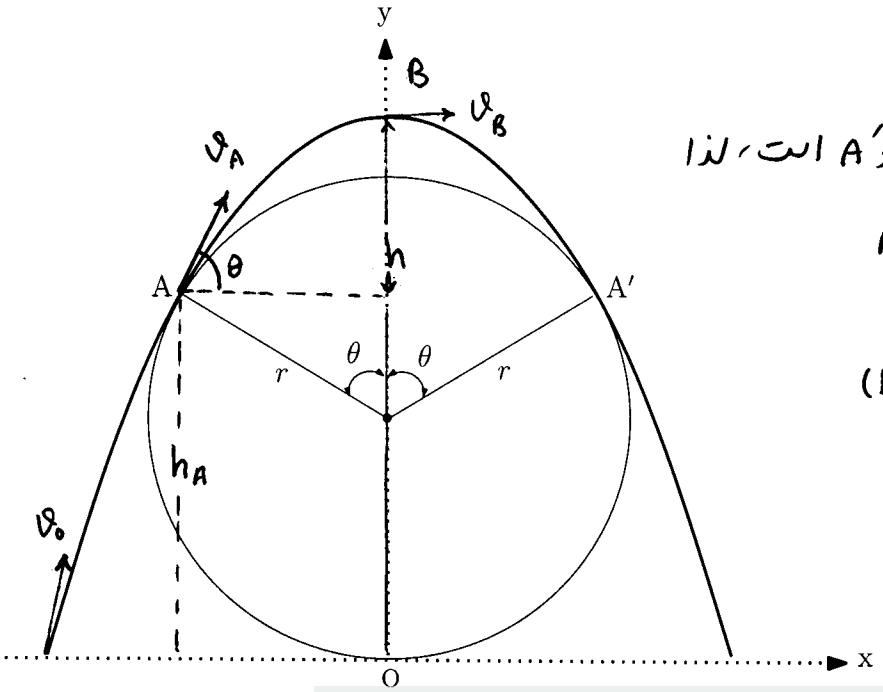
(و) کار کل انجام شده روی میله سبب تغییر انرژی جنبشی میله می‌شود. کار نیروی وزن، کار نیروی F

$$dT = dW_g + dW_F$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW_g}{dt} + \frac{dW_F}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = mgb\omega\cos\theta - \frac{\omega^2b^2l^2B^2\sin^2\theta}{R}$$

ذهن زیبا

۲.



(الف) AA' برد مسیر بین نقطه‌ی A و A' است، لذا

$$AA' = 2r\sin\theta = \frac{v_A^2 \sin 2\theta}{g}$$

بنابراین

$$(1)\quad \boxed{v_A = \sqrt{\frac{rg}{\cos\theta}}}$$

(ب) درغیاب مقاومت هوا بین نقطه‌ی پرتاب (روی سطح زمین) و نقطه‌ی A قضیه‌ی اندازه‌ی مکانیکی می‌نویسیم

$$h_A = r + r\cos\theta \qquad \text{و} \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

بنابراین

$$(2)\quad \boxed{v_0 = \sqrt{rg\left(\frac{1}{\cos\theta} + 2 + 2\cos\theta\right)}}$$

(ج) مطابق شکل ارتفاع اوج، $OB = H$، برابر است با

$$H = h_A + h$$

که h ارتفاع اوج پرتابه بین A و A' است، یعنی

$$h = \frac{v_A^2 \sin^2\theta}{2g}$$

بنابراین

$$(3)\quad \boxed{H = r\left(1 + \cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}\right)}$$

(د) اگر پرتابه در نقطه‌ی B برای توان مماس شود $\theta = 0$ است و از معادلات (۲) و (۳) داریم

$$H = 2r \quad , \quad \boxed{v_0 = \sqrt{5rg}}$$

(هـ) پرتابه قرار است از نقطه‌ی مناسبی روی سطح زمین با کمینه‌ی سرعتی پرتاب شود که بتواند از روی استوانه بگذرد.

$$\frac{dv_0}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - 2\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta\,(1 - 2\cos^2\theta) = 0$$

$\theta = 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ ریشه‌ی معادله‌اند.

$$v_0(\theta = \tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{(2 + 2\sqrt{2})rg} \quad , \quad v_0(\theta = 0) = \sqrt{5rg} \quad , \quad \sqrt{2+2\sqrt{2}} < \sqrt{5}$$

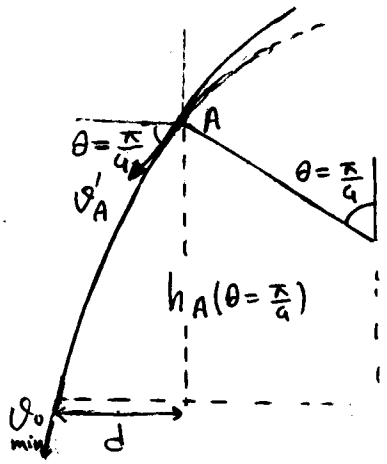
بنابراین به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$، $\boxed{v_{0\min} = \sqrt{(2+2\sqrt{2})rg}}$ و

$$H(\theta = \tfrac{\pi}{4}) = r\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) > 2r$$

(۴)

ذهن زیبا

(۶) با توجه به تقارن مسیر ، فرض می‌کنیم پرتابه از نقطهٔ A با سرعت v'_A و زاویهٔ $\theta=\frac{\pi}{4}$ پرتاب شده و با سرعت $v_{0\min}$ به زمین برسد ، یعنی



$$v_{0\min}^2 = 2gh_A + v_A'^2 \quad (۵)$$

و معادلهٔ مسیر نسبت به مبدأ واقع در A :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_A'^2\cos^2\theta} + x\tan\theta \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \quad (۶)$$

با تکرار روابط (۴) در (۵) و اینکه $h_A = r(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

بدست می‌آوریم :

$$v_A'^2 = \sqrt{2}\,rg$$

مختصات محل برخورد پرتابه به زمین نسبت به A است که در معادلهٔ (۶) $(d\ ,\ -h_A)$

قرار می‌دهیم

$$-\frac{r}{2}(2+\sqrt{2}) = \frac{-gd^2}{2\sqrt{2}rg(\frac{1}{2})} + d(-1)$$

$$\sqrt{2}d^2 + 2rd - r^2(2+\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow d = r\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)$$

پس مکان پرتابه از روی سطح زمین نسبت به مبدأ O

$$R = -d - \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{R = -\frac{\sqrt{6+4\sqrt{2}}}{2}r}$$

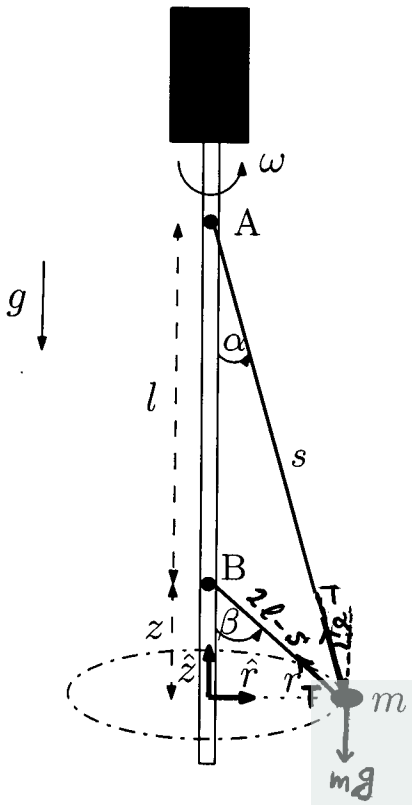
است.

ذهن زیبا

۳. با صرف‌نظر از نیروی اصطکاک بین نخ و میله، نیروی کشش

(الف) در طول نخ T است. به جرم m، نیروی وزن mg

و دو نیروی T از طرف نخ وارد می‌شود.



(الف)

$$\hat{z}: \quad T\cos\alpha + T\cos\beta - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\hat{r}: \quad T\sin\alpha + T\sin\beta = mr\omega^2 \qquad (2)$$

(ب)

$$\sin\alpha = \frac{r}{s}\ ,\ \sin\beta = \frac{r}{2l-s}$$

$$\cos\alpha = \frac{l+z}{s}\ ,\ \cos\beta = \frac{z}{2l-s} \qquad (3)$$

(ج) از تقسیم معادله (۲) به معادله (۱) و استفاده از معادله (۳):

$$\frac{2lr}{(l+z)(2l-s)+sz} = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow z = \frac{s}{2} - l + \frac{g}{\omega^2} \qquad (4)$$

از هندسه شکل:

$$r^2 = s^2 + (l+z)^2 = (2l-s)^2 - z^2$$

$$\Rightarrow z = \frac{-s}{2}l + 2s \qquad (5)$$

از معادله (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$s = l + \frac{2g}{3\omega^2}\ ,\ z = \frac{-l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l + \frac{2g}{3\omega^2}}\ ,\ \cos\beta = \frac{\frac{-l}{2} + \frac{4g}{3\omega^2}}{l - \frac{2g}{3\omega^2}}$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha + \cos\beta} \Rightarrow T = \frac{1 - \frac{4}{9}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)^2}{2\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)}\, mg$$

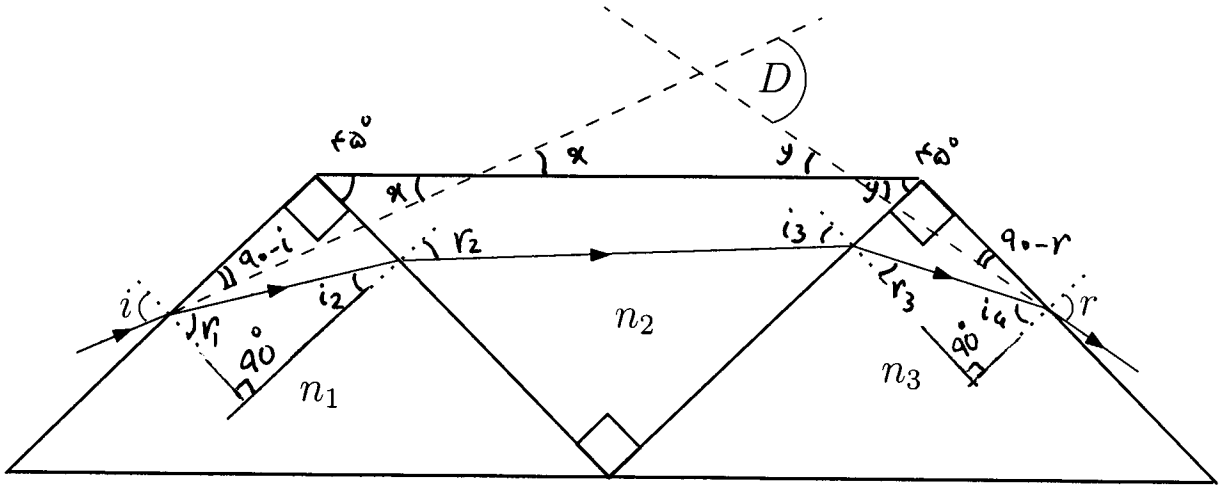
(د) پس از محاسبه $\sin\alpha$ از روی $\cos\alpha$:

$$r = s\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}l^2 - \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4}}$$

$$r > 0 \Rightarrow \frac{3}{4}l^2 > \frac{4}{3}\frac{g^2}{\omega^4} \Rightarrow \omega^2 > \frac{4}{3}\frac{g}{l} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{4g}{3l}}$$

ذهن زیبا

۴.



(الف) قانون اسنل را در مرز هر دو منشور می نویسیم

$$\sin i = n_1 \sin r_1$$

$$n_1 \sin i_2 = n_2 \sin r_2$$

$$n_2 \sin i_3 = n_3 \sin r_3$$

$$n_3 \sin i_4 = \sin r$$

مطابق شکل $r_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$ ، $r_2 + i_3 = \frac{\pi}{2}$ ، $r_3 + i_4 = \frac{\pi}{2}$ بنابراین

$$\sin i = n_1 \cos i_2$$

$$n_2 \cos i_3 = n_1 \sin i_2$$

$$n_2 \sin i_3 = n_3 \cos i_4$$

$$\sin r = n_3 \sin i_4$$

هر معادله را به توان ۲ می رسانیم و سپس با هم جمع می کنیم

$$\Longrightarrow \quad \sin^2 i + n_2^2 + \sin^2 r = n_1^2 + n_3^2$$

$$r = \sin^{-1}\left(\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}\right)$$

ذهن زیبا

(ب) D زاویه خارجی مثلث است که برابر است با مجموع دو زاویه x و y یعنی $D = x + y$

اما با توجه به شکل $90 - i + 135 + x = 180$ و $90 - r + 135 + y = 180$

بنابراین $x = i - 45°$ و $y = r - 45°$ ولذا $D = i + r - 90$

که با قرار دادن r از قسمت الف) در معادله اخیر

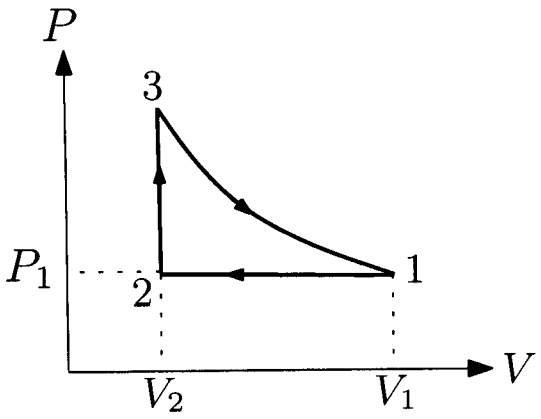
$$D = i + \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i} - \frac{\pi}{2}$$

(ج) $D = 0 \Leftarrow \frac{\pi}{2} - i = \sin^{-1}\sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

از دو طرف sin می گیریم $\cos i = \sqrt{n_1^2 + n_3^2 - n_2^2 - \sin^2 i}$

به توان ۲ می رسانیم، در نتیجه $D = 0$ است اگر: $n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 = 1$

۵.



ابتدا با استفاده از معادله حالت "گاز

$$P(V-nb)=nRT$$

دما را در نقاط ۱ و 2 محاسبه می‌کنیم

$$T_1 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR} \qquad (1)$$

$$T_2 = \frac{P_1(V_2-nb)}{nR} \qquad (2)$$

فرآیند ۱→۳ بی‌دررو است که در آن $T(V-nb)^{R/C_{mV}}$ ثابت است، پس

$$T_3(V_2-nb)^{R/C_{mV}} = T_1(V_1-nb)^{R/C_{mV}} \qquad (3)$$

که با قرار دادن T_1 از معادله (۱) در (۳)

$$T_3 = \frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mV}} \qquad (4)$$

در فرآیند ۳→۱ : $Q_{3\to1}=0$

در فرآیند ۱→2 بدان‌که در فشار ثابت حجم کاهش یابد، باید "گرما از "گاز" گرفته شود.

در فرآیند 2→3 بدان‌که در حجم ثابت فشار افزایش یابد، باید به "گاز" گرما داده شود.

$$Q_{in} = Q_{2\to3} \quad , \quad Q_{out} = |Q_{1\to2}| \quad , \quad W = Q_{in} - Q_{out} \text{ (در یک چرخه)}$$

بازده $e = \frac{W}{Q_{in}} = 1 - \frac{Q_{out}}{Q_{in}}$

ذهن زیبا

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۱ و ۲ می‌نویسیم

$$U_2-U_1 = W_{1\to2} + Q_{1\to2}$$

$$U_2-U_1 = nC_{mV}(T_2-T_1) = \frac{C_{mV}P_1}{R}(V_2-V_1)$$

$$W_{1\to2} = -\int_{V_1}^{V_2} P_1\,dV = -P_1(V_2-V_1)$$

بنابراین

$$Q_{1\to2} = -P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

$$Q_{out} = P_1(V_1-V_2)\left(1+\frac{C_{mV}}{R}\right)$$

قانون اول ترمودینامیک را بین نقطه ۲ و ۳ می‌نویسیم

$$U_3 - U_2 = W_{2\to3} + Q_{2\to3}$$

$$U_3 - U_2 = nC_{mv}(T_3 - T_2) = nC_{mv}\left(\frac{P_1(V_1-nb)}{nR}\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{R/C_{mv}} - \frac{P_1(V_2-nb)}{nR}\right)$$

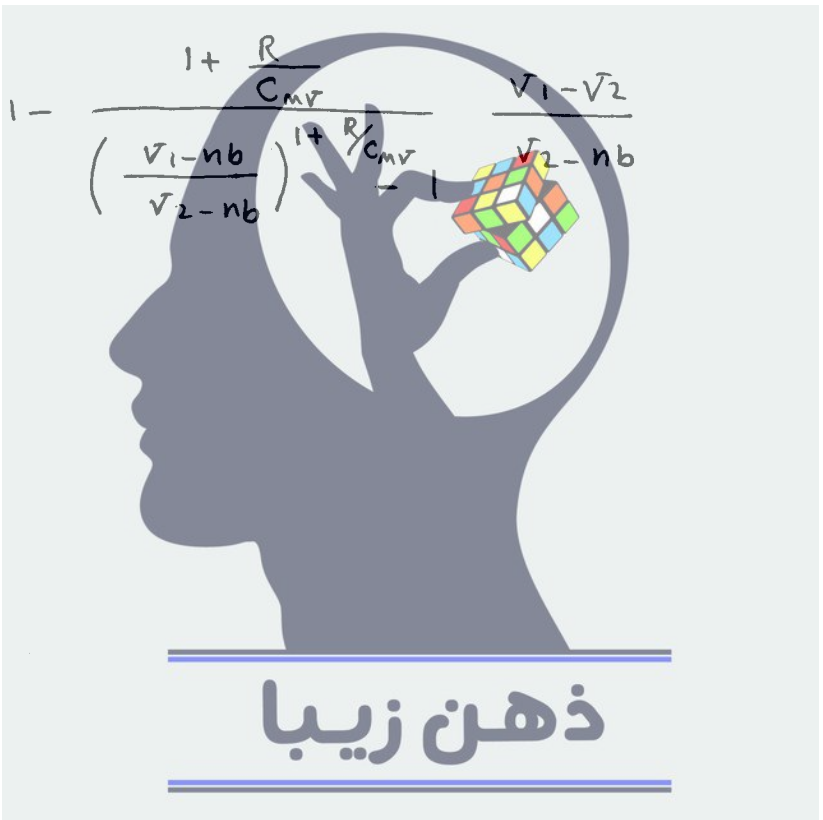
$$= \frac{C_{mv}}{R}P_1(V_2-nb)\left(\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{\frac{R}{C_{mv}}+1} - 1\right)$$

$$W_{2\to3} = 0$$

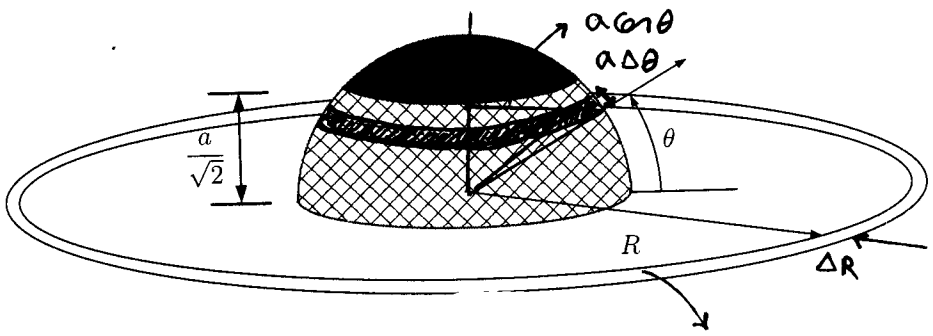
$$Q_{in} = Q_{2\to3} = \frac{C_{mv}}{R}P_1(V_2-nb)\left(\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{\frac{R}{C_{mv}}+1} - 1\right)$$

سرانجام

$$e = 1 - \frac{1+\frac{R}{C_{mv}}}{\left(\frac{V_1-nb}{V_2-nb}\right)^{1+R/C_{mv}} - 1}\cdot\frac{V_1-V_2}{V_2-nb}$$



۶.



(الف) با فرض اینکه قطره از مرکز کره با سرعت v_0 تحت زاویه θ پرتاب می‌شود

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

مساحت این حلقه $2\pi R\,\Delta R$ است.

(ب)

$$\Delta R = R(\theta + \Delta\theta) - R(\theta)$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta\theta} = \frac{R(\theta+\Delta\theta) - R(\theta)}{\Delta\theta}$$

برای $\Delta\theta \to 0$:

$$\Delta R = \frac{dR}{d\theta}\,\Delta\theta$$

$$\Delta R = \frac{2v_0^2 \cos 2\theta}{g}\,\Delta\theta$$

(ج) مقدار آبی که به‌نواری به مساحت $2\pi R\,\Delta R$ روی سطح زمین می‌رسد مربوط به نواری روی سطح نیمکره به پهنای $a\Delta\theta$ و طول $2\pi a\cos\theta$ است، یعنی مساحت $(2\pi a\cos\theta)(a\Delta\theta)$.

اگر تعداد سوراخ‌ها در واحد سطح نیمکره n_0 باشد و از هرکدام در واحد زمان به مقدار Q آب خارج شود، پس از نوار به مساحت $2\pi a^2\cos\theta\,\Delta\theta$ مقدار آب خارج شده برابر است با $(2\pi a^2\cos\theta\,\Delta\theta)(n_0 Q)$.

ذهن زیبا

با یک تناسب مقدار $2\pi a^2\cos\theta\,\Delta\theta\, n_0 Q$ روی سطح $2\pi R\,\Delta R$ توزیع می‌شود ولذا سهم واحد سطح برابر است با

$$\text{آب رسیده به واحد سطح زمین در واحد زمان} = \frac{2\pi a^2 n_0 Q \cos\theta\,\Delta\theta}{2\pi R\,\Delta R}$$

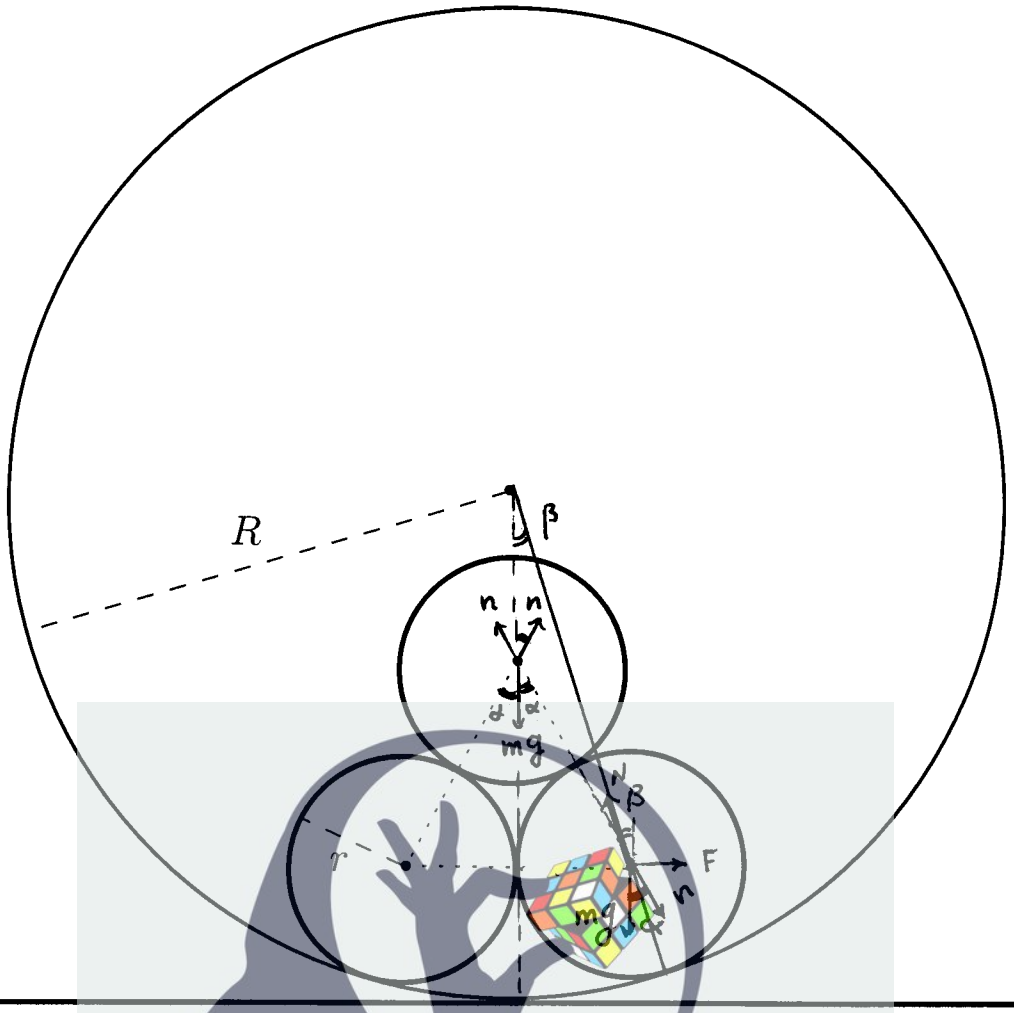
با قرار دادن R و ΔR از قسمت الف) و ب)

$$= n_0 a^2 Q \left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2 \frac{\cos\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}$$

اما در فاصله $R = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v_0^2}{g}$ و با توجه به $R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$ داریم $\theta = 30^\circ$ و بنابراین

$$= n_0 a^2 Q \left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2$$

لازم به ذکر است که اگر عددی چون $\theta > \frac{\pi}{4}$ روی سطح کره مسدود نبود از دو زاویه θ آب به برد R می‌رسیدند.



نیروهای وارد بر استوانه بالایی n ، n از سوی دو استوانه زیری و mg وزن آن است.

نیروهای وارد بر استوانه زیری سمت راستی n از سوی استوانه بالایی، F از سوی استوانه سمت چپی N از سوی استوانه بزرگ و mg وزن آن است.

ذهن زیبا

شرط تعادل استوانه بالایی: $2n\cos\alpha = mg$

شرط تعادل استوانه زیری:

$$F + n\sin\alpha = N\sin\beta$$
$$N\cos\beta = mg + n\cos\alpha$$

در ضمن، مطابق شکل: $\sin\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ ، $\sin\beta = \frac{r}{R-r}$

از سه معادله اول:

$$F = \frac{mg}{2}\left(3\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\right)$$

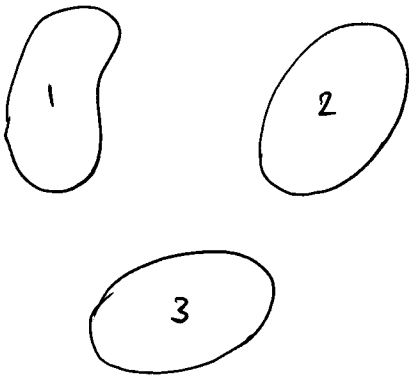
همچنین $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\cos\operatorname{tg}\beta}$ ⇒ $1+\cos\operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta}$ ⇒ $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\sqrt{R^2-2rR}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ⇒ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

بنابراین $F = \frac{mg}{2}\left(\frac{3r}{\sqrt{R^2-2rR}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

به شرطی لوله‌های زیری در کنار هم می‌مانند که $F>0$ باشد یعنی: $\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) - 27 < 0$

پس باید $\frac{R}{r} < 1+2\sqrt{7}$ ، $\left(\frac{R}{r}\right)_{max} = 1+2\sqrt{7}$



$Q_1 = 25\,\mu C$, $Q_2 = 10\,\mu C$, $Q_3 = 15\,\mu C$

$V_1 = 10\ V$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$

$\Downarrow$

$\alpha_1 = 2.5\ \mu C/V$, $\alpha_2 = 1\ \mu C/V$, $\alpha_3 = 1.5\ \mu C/V$

$Q_1 = 35\,\mu C$, $Q_2 = 60\,\mu C$, $Q_3 = 25\,\mu C$

$V_1 = 10\ V$, $V_2 = 10\ V$, $V_3 = 0$

$\Downarrow$

$\beta_1 = 1\ \mu C/V$, $\beta_2 = 5\ \mu C/V$, $\beta_3 = 1\ \mu C/V$

$Q_1 = 50\ \mu C$, $Q_2 = 70\,\mu C$, $Q_3 = 50\ \mu C$

$V_1 = 10\ V$, $V_2 = 10\ V$, $V_3 = 10\ V$

$\Downarrow$

$\gamma_1 = 1.5\ \mu C/V$, $\gamma_2 = 1\ \mu C/V$, $\gamma_3 = 2.5\ \mu C/V$

ذهن زیبا

به ازای $Q_3 = 0$ و بنا به تعریف خازن: $Q_2 = -Q_1 = Q$

$-Q = 2.5V_1 + V_2 + 1.5V_3$

$Q = V_1 + 5V_2 + V_3 \Leftarrow$

$0 = 1.5V_1 + V_2 + 2.5V_3$

با کنار گذاشتن V_3 از معادله سوم در دو معادله اول:

$$\begin{cases} -Q = \frac{8}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 \\ Q = \frac{2}{5}V_1 + \frac{23}{5}V_2 \end{cases} \Rightarrow V_1 = -\frac{25}{36}Q \qquad V_2 = \frac{5}{18}Q$$

که Q برحسب μC و V_1 ، V_2 برحسب ولت اند.

$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad , \quad \Delta V = \frac{Q}{C}$$

$\Downarrow$

$$C = \frac{36}{35}\,\mu F = 1.03\,\mu F$$

باسمه تعالی

وزارت آموزش‌و پرورش

باشگاه دانش‌پژوهان جوان

«مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست.»

امام خمینی (ره)

بیست‌و چهارمین المپیاد فیزیک کشور

مرحلهٔ دوم

آزمون نظری: سه شنبه ۹۰/۲/۶

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت — شروع: ۹:۱۵ الی ۱۲:۴۵

تذکرات:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به نکات زیر دقیقاً توجه فرمایید:

۱) این قسمت از آزمون شامل ۸ سؤال و وقت پاسخگویی به آن ۳/۵ ساعت است.

۲) همهٔ سؤال‌ها نمرهٔ مساوی دارد.

۳) هنگام آزمون همراه داشتن ماشین حساب و تلفن همراه (خاموش یا روشن)تخلف محسوب می‌شود. لذا تلفن همراه و ماشین حساب خود را قبل از شروع آزمون به مسئول حوزه تحویل دهید.

٤) دانش‌آموزان کلاس دوم به دورهٔ تابستان راه پیدا نمی‌کنند و این آزمون برای آن ها تنها جنبهٔ تشویقی و آمادگی برای سال آینده دارد.

۵) نتایج این آزمون در اواخر خرداد ماه اعلام خواهد شد.

ذهن زیبا

۱. میله‌ی رسانای AB به طول ℓ و جرم m و مقاومت الکتریکی R توسط میله‌های سبک و با مقاومت ناچیز AD و BC به طول b به میله‌ی ثابت و با مقاومت ناچیز DC وصل شده است. دستگاه می‌تواند حول میله‌ی DC بچرخد. میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ به طرف بالا و شتاب گرانش به طرف پایین است. در ابتدا مستطیل ABCD افقی است و از این وضعیت رها می‌شود. لحظه‌ای را در نظر بگیرید که دستگاه به اندازه‌ی زاویه‌ی θ نسبت به حالت افقی چرخیده و سرعت زاویه‌ای آن $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ است. در این لحظه

(الف) شدت جریان را در مدار حساب کنید.

(ب) نیروی F وارد شده از طرف میدان مغناطیسی به میله‌ی AB را حساب کنید.

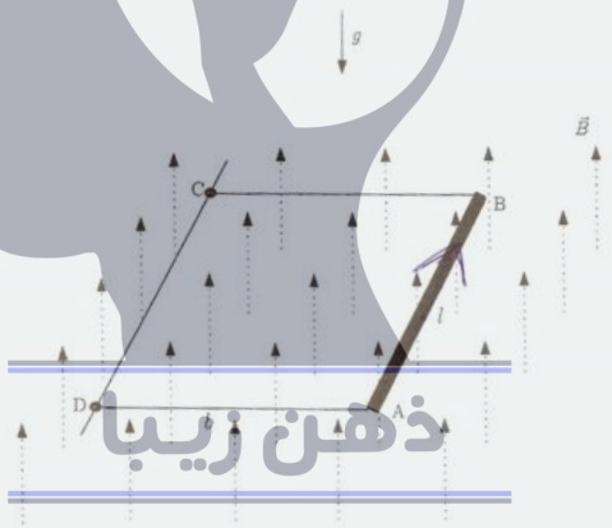
(ج) آهنگ انجام کار توسط نیروی F، $\frac{dW}{dt}$، را حساب کنید.

(د) آهنگ تولید گرما در مقاومت را حساب کنید.

(ه) آهنگ تغییر انرژی پتانسیل گرانشی میله‌ی AB را حساب کنید.

(و) آهنگ تغییرات انرژی جنبشی دستگاه را حساب کنید.

توجه: کلیه‌ی پاسخها را بر حسب داده‌های مسئله بنویسید.



ذهن زیبا

۲. لوله‌ای استوانه‌ای به شعاع مقطع r بر روی سطح افقی زمین ثابت است. گلوله‌ی کوچکی از سطح زمین پرتاب می‌شود و از روی لوله می‌گذرد. صفحه‌ی حرکت گلوله (صفحه‌ی xy) بر محور استوانه عمود است. مسیر گلوله در نقاط A و A' که در شکل با زاویه‌ی θ مشخص شده اند بر لوله مماس است. مقاومت هوا و اتلاف انرژی گلوله در لحظه‌ی تماس با لوله ناچیز و شتاب گرانش در محل g است.

(الف) سرعت گلوله در نقطه‌ی A را بر حسب r و θ و g پیدا کنید.

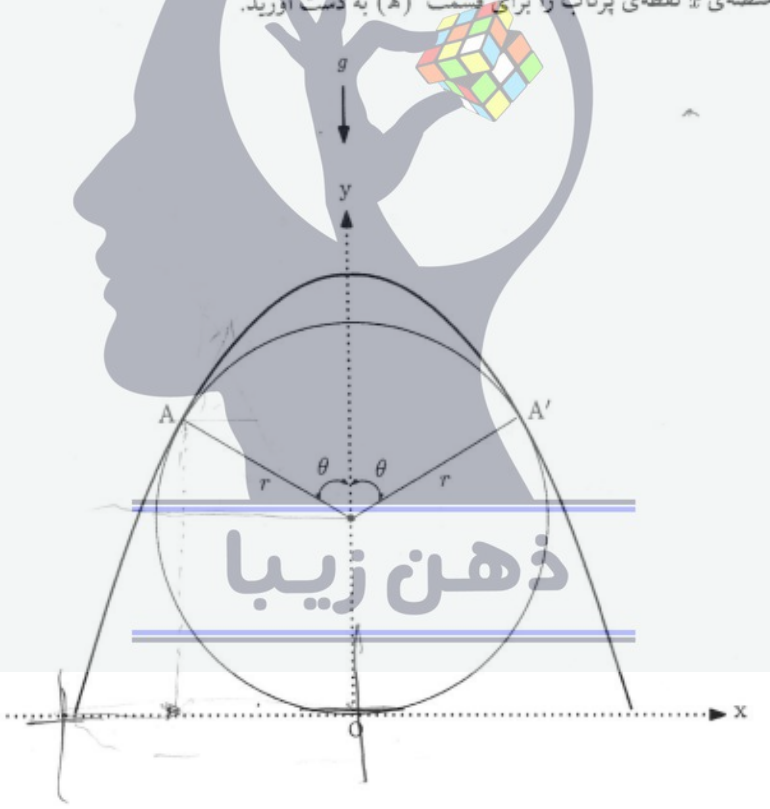
(ب) سرعت پرتاب گلوله از سطح زمین را بر حسب r و θ و g به دست آورید.

(ج) ارتفاع نقطه‌ی اوج گلوله از سطح زمین را بر حسب r و θ و g پیدا کنید.

(د) سرعت پرتاب گلوله چقدر باشد تا مسیر گلوله در بالاترین نقطه بر لوله مماس باشد؟ یعنی نقطه‌ی تماس نقطه‌ی $\theta = 0$ باشد.

(ه) کمترین مقدار سرعت پرتاب گلوله چقدر باشد تا گلوله از روی استوانه رد شود؟ وضعیت‌هایی که گلوله در بخشی از مسیرش روی استوانه لیز می‌خورد را در نظر نگیرید.

(و) مختصه‌ی x نقطه‌ی پرتاب را برای قسمت (ه) به دست آورید.



ذهن زیبا

۳. نخ سبکی به طول 2ℓ از داخل مهره‌ای به جرم m عبور کرده و به دو نقطه‌ی ثابت A و B از یک میله‌ی قائم، به فاصله‌ی ℓ از یکدیگر، بسته شده است. این مجموعه با سرعت زاویه‌ای ω حول محور قائم می‌چرخد، طوری که مهره در یک صفحه‌ی ثابت افقی حرکت می‌کند. از اصطکاک بین نخ و مهره صرف نظر کنید.

(الف) قانون دوم نیوتن را در دو راستای $\hat{r}$ و $\hat{z}$ بنویسید. از متغیرهای کمکی α، β، و r که روی شکل مشخص شده اند استفاده کنید.

(ب) $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ را بر حسب r و s و ℓ؛ و $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ را بر حسب z و s و ℓ بنویسید. z فاصله‌ی نقطه‌ی B از صفحه‌ی حرکت مهره، و s فاصله‌ی نقطه‌ی A از مهره است.

(ج) z، s، $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و نیروی کشش در طول نخ را بر حسب m، ℓ، ω، و g به دست آورید.

(د) کمترین مقدار سرعت زاویه‌ای ω چقدر باشد که مهره بر روی دایره‌ای به شعاع $r \neq 0$ حول میله بچرخد؟

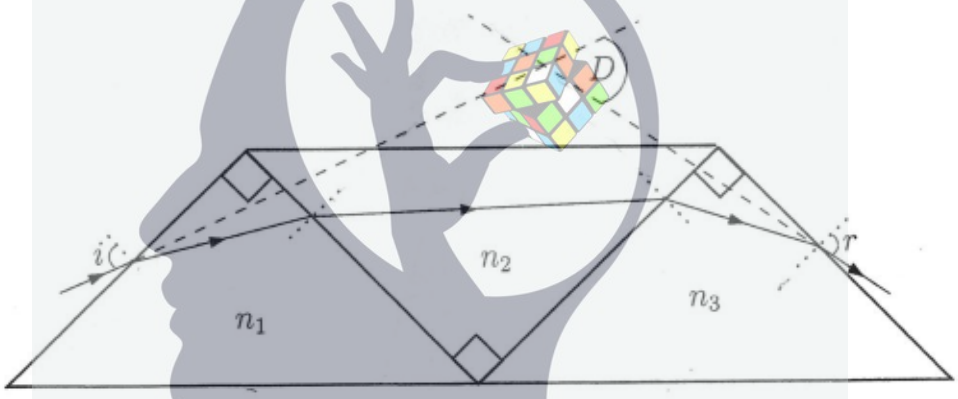
ذهن زیبا

۴. سه منشور که قاعده‌ی هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است مطابق شکل به هم چسبیده اند. ضریب شکست منشورها n_1 و n_2 و n_3 است. یک پرتوی نور از هوا به منشوری که در سمت چپ است می‌تابد و از منشوری که در سمت راست است وارد هوا می‌شود. زاویه‌ی تابش پرتوی فرودی به منشور چپ را i و زاویه‌ی شکست پرتوی خروجی از منشور راست را r بنامید. فرض کنید مسیر پرتوها چنان است که در هیچ کدام از سطوح جدایی بازتاب کلی رخ نمی‌دهد.

(الف) r را بر حسب i، n_1، n_2، و n_3 به دست آورید.

(ب) زاویه‌ی انحراف (زاویه‌ی بین راستای پرتوی تابیده به منشور چپ و راستای پرتوی خروجی از منشور راست)، D، را بر حسب i، n_1، n_2، و n_3 به دست آورید.

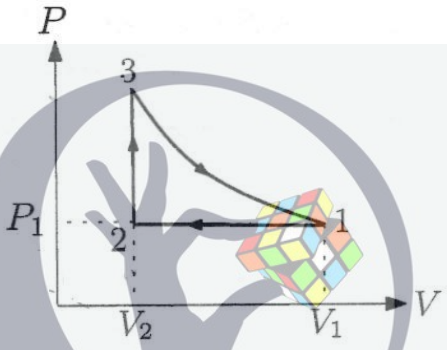
(ج) چه رابطه‌ای بین n_1، n_2، و n_3 وجود داشته باشد تا زاویه‌ی انحراف صفر شود؟



ذهن زیبا

۵. معادله‌ی حالت یك گاز غیر ایده‌آل $P\,(V-nb)=n\,RT$ و انرژی داخلی آن $U=nC_{MV}\,T$ است. P فشار، V حجم، n تعداد مول، T دما ی مطلق، C_{MV} ظرفیت گرمایی م لی در حجم ثابت، R ثابت جهانی گازها و b ثابتی است که به جنس گاز بستگی دارد. C_{MV} را ثابت بگیرید.

چرخه‌ی کار یک ماشین گرمایی که با این گاز کار می‌کند به صورت زیر است. در این چرخه فرآیند $1 \to 3$ بي‌دررو است، که در آن کمیت $T(V-nb)^{R/C_{MV}}$ ثابت است. بازده این ماشین گرمایی را بر حسب V_1، V_2، P_1، C_{MV}، R، n، و b بنویسید.



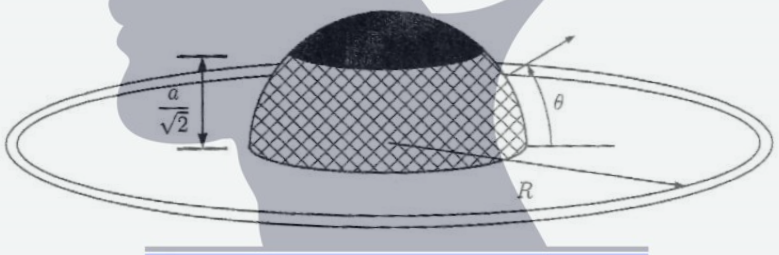
ذهن زیبا

۶. فواره‌ای مطابق شکل از نیم‌کره‌ای به شعاع a تشکیل شده که بخشی از سطح آن به طور یکنواخت سوراخ شده و آب از این سوراخها با سرعت یکسان v_0 خارج می‌شود. تعداد سوراخها در واحد سطح نیم‌کره n_0 است. مقدار آبی که در واحد زمان از هر سوراخ خارج می‌شود را Q بگیرید.

(الف) قطره آبی که زاویه‌ی پرتابش از فواره θ است در چه فاصله‌ای از مرکز نیم‌کره، R، به زمین می‌رسد؟ برای سهولت فرض کنید a کوچک است، به طوری که قطره از مرکز نیم‌کره باسرعت v_0 پرتاب می‌شود.

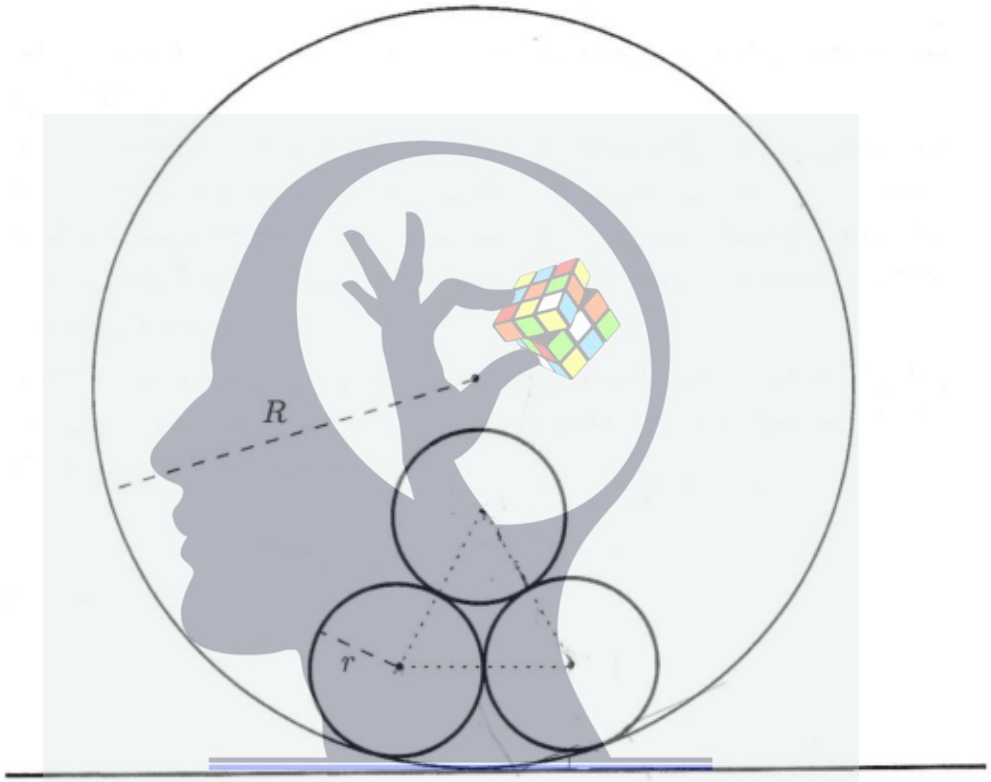
(ب) قطره‌هایی که زاویه‌ی پرتابشان بین θ و $\theta + \Delta\theta$ است در فاصله‌ی بین R و $R + \Delta R$ از مرکز نیم‌کره به زمین می‌رسند. ΔR چه‌قدر است؟ $\Delta\theta$ را خیلی کوچک بگیرید. از توانهای دوم و بالاتر $\Delta\theta$ چشم‌پوشی کنید، و ΔR را به صورت ضریبی از $\Delta\theta$ به دست آورید.

(ج) مقدار آبی که در واحد زمان به واحد سطح زمین در فاصله‌ی $R = \frac{\sqrt{3}\, v_0^2}{2g}$ از مرکز نیم‌کره می‌رسد، بر حسب n_0، Q، a، v_0، و g چقدر است؟



ذهن زیبا

۷. سه لوله‌ی استوانه‌ای که طول، جرم، و جنس آنها یکسان و شعاع مقطع آنها r است؛ مطابق شکل درون لوله‌ی استوانه‌ای بزرگتری به شعاع R در حال تعادل و ساکن اند و در این حالت هر سه لوله‌ی درونی بر هم مماس اند. لوله‌ی بزرگتر به سطح افقی زمین چسبیده است. اصطکاک بین لوله‌ها ناچیز است. اگر $\frac{R}{r}$ از حد معینی بزرگتر باشد لوله‌ای که بالاتر قرار گرفته جای خود را بین دو لوله باز می‌کند. نسبت $\frac{R}{r}$ حداکثر چقدر باشد تا لوله‌های درونی به هم مماس بمانند؟



ذهن زیبا

۸. اگر سه رسانای مجزای 1 و 2 و 3 را به پتانسیل‌های V_1 و V_2 و V_3 نسبت به زمین ببندیم؛ بار روی آنها به ترتیب Q_1 و Q_2 و Q_3 می‌شود، به طوری که

$$Q_1 = \alpha_1 V_1 + \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3$$

$$Q_2 = \alpha_2 V_1 + \beta_2 V_2 + \gamma_2 V_3$$

$$Q_3 = \alpha_3 V_1 + \beta_3 V_2 + \gamma_3 V_3$$

ضرایب ثابت α_1، β_1، γ_1، α_2، β_2، γ_2، α_3، β_3، و γ_3 در رابطه فوق به شکل رساناها و موقعیت فضایی آنها نسبت به هم بستگی دارند.

در حالی که رساناهای 2 و 3 به زمین متصلند رسانای 1 را به پتانسیل 10 ولت وصل می‌کنیم. در این حال بارها به ترتیب $Q_1 = 25\,\mu\text{C}$، $Q_2 = 10\,\mu\text{C}$ و $Q_3 = 15\,\mu\text{C}$ می‌شوند. اگر علاوه بر رسانای 1، رسانای 2 را هم به پتانسیل 10 ولت وصل کنیم و رسانای 3 همچنان به زمین وصل باشد، بارها چنین خواهد بود: $Q_1 = 35\,\mu\text{C}$، $Q_2 = 60\,\mu\text{C}$ و $Q_3 = 25\,\mu\text{C}$. حال اگر هر سه رسانا را به پتانسیل 10 ولت وصل کنیم بارها به صورت زیر خواهند بود: $Q_1 = 50\,\mu\text{C}$، $Q_2 = 70\,\mu\text{C}$ و $Q_3 = 50\,\mu\text{C}$.

در حالی که رساناها با حفظ آرایش فضایی‌شان بدون بارند و به هیچ جا اتصال ندارند یک باتری به ولتاژ V را بین رساناهای 1 و 2 می‌بندیم. رسانای 3 در همان محل قبلی بدون بار و اتصال حضور دارد. ظرفیت خازنی که به این ترتیب بین رساناهای 1 و 2 تشکیل می‌شود چقدر است؟

ذهن زیبا