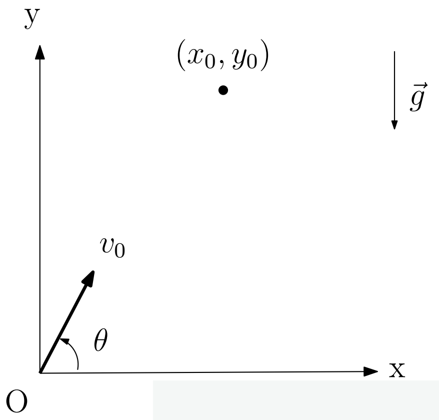


۱) می‌خواهیم پرتابه‌ای را در لحظه‌ی $t = 0$ مطابق شکل از نقطه‌ی O شلیک کنیم تا با هدفی که در لحظه‌ی $t = t_0$ از نقطه‌ی (x_0, y_0) بدون سرعت اولیه رها می‌شود برخورد کند. پرتابه با سرعت اولیه‌ی v_0 در صفحه‌ی قائم تحت زاویه‌ی θ نسبت به سطح افق پرتاب می‌شود. t_0 می‌تواند مثبت یا منفی باشد. فرض کنید از مقاومت هوا صرفنظر می‌شود و $x_0 > 0, y_0 > 0$.

آ) معادلات مکان بر حسب زمان پرتابه، $(x_p(t), y_p(t))$ و هدف، $(x_t(t), y_t(t))$ را بر حسب کمیت‌های معلوم بنویسید.

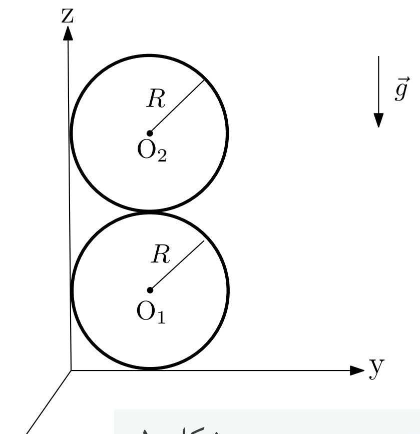
ب) $\tan\theta$ در چه محدوده‌ای باشد تا مسیر پرتابه و مسیر هدف یکدیگر را در بالای سطح افق قطع کنند. برای این که چنین محدوده‌ای وجود داشته باشد چه شرطی روی پارامترهای x_0، v_0، y_0 و g لازم است؟

اکنون فرض کنید $x_0 = 50\,\mathrm{m}$، $y_0 = 100\,\mathrm{m}$، $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}$ و $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

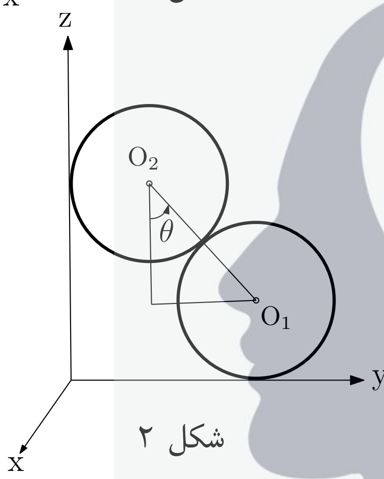
ج) برای این که پرتابه بتواند به هدف اصابت کند t_0 مجاز است در چه بازه‌ای تغییر کند؟

د) به ازای $t_0 = \sqrt{10}\,\mathrm{s}$، زاویه‌ی پرتاب θ را بدست آورید.

۲) دو استوانه‌ی یکسان هر یک به جرم M و به شعاع R مطابق شکل ۱ روی هم قرار گرفته‌اند. استوانه‌ی زیری روی صفحه‌ی x-y قرار گرفته است و هر دو استوانه از یک سمت به دیوار قائمی که صفحه‌ی y-z است تکیه داده‌اند. کلیه‌ی سطوح بدون اصطکاک هستند و هیچ غلتشی صورت نمی‌گیرد. شتاب گرانش در جهت z- است. دستگاه در وضعیت شکل ۱ در تعادل ناپایدار است (سرعت دو استوانه صفر است) ولی با اندک لرزشی از این حالت خارج می‌شود. فرض کنید بعد از خارج شدن از حالت تعادل، انتهای دو استوانه در صفحه‌ی $x = 0$ واقع است و O_1 و O_2 محل محورهای دو استوانه در این صفحه و θ زاویه‌ی خط واصل بین O_1 و O_2 با امتداد قائم در لحظه‌ی دلخواهی باشد. شکل ۲ این وضعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۱



شکل ۲

آ) مختصات نقاط O_1 و O_2 را به ترتیب (y_1, z_1) و (y_2, z_2) می‌نامیم. این مختصات را بر حسب R و θ بنویسید.

ب) نیروی سطح قائم بر استوانه‌ی بالایی را N_2، نیروی بین دو استوانه را N و نیروی سطح افقی بر استوانه‌ی زیری را N_1 بنامید. معادلات حرکت نیوتن را در وضعیت شکل ۲ در راستای y و z برای هر دو استوانه بنویسید. رابطه‌ی بین شتاب افقی استوانه‌ی زیری، a_1، و شتاب عمودی استوانه‌ی بالایی، a_2، را بر حسب g و θ بدست آورید.

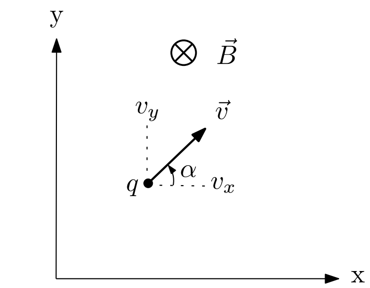
ج) رابطه‌ی پایستگی انرژی مکانیکی را بنویسید و از روی آن $v_1^2 + v_2^2$ را به صورت تابعی از θ و پارامترهای مسئله بدست آورید. v_1 سرعت افقی استوانه‌ی زیری و v_2 سرعت عمودی استوانه‌ی بالایی است.

د) با استفاده از قید در تماس بودن دو استوانه ضمن حرکت، رابطه‌ای بین y_1 و z_2 بدست آورید. با مشتق‌گیری از این رابطه، رابطه‌ی دیگری بین v_1، v_2، y_1 و z_2 بدست آورید. مجدداً از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیرید و با استفاده از نتیجه‌ی قسمت ج) رابطه‌ای بین شتاب‌های a_1 و a_2 بر حسب g و θ بدست آورید. نیروهای $N_1(\theta)$ و $N_2(\theta)$ را در وضعیتی که استوانه‌ها با هم در تماس هستند بدست آورید.

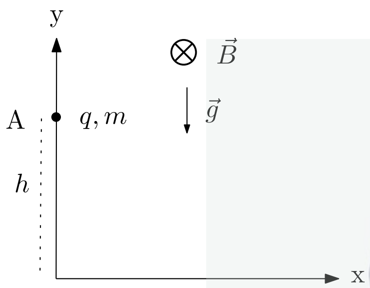
ه) نمودار کمیت‌های $\frac{N_1(\theta)}{Mg}$ و $\frac{N_2(\theta)}{Mg}$ را برای $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ رسم کنید.

و) سرعت نهایی استوانه‌ی زیری و سرعت استوانه‌ی بالایی هنگام رسیدن به صفحه‌ی x-y را حساب کنید.

۳)



آ) ذره‌ای با بار مثبت q در صفحه‌ی x-y با سرعت دلخواه $\vec{v} = (v_x, v_y)$ مطابق شکل حرکت می‌کند که $v_x = v\cos\alpha$ و $v_y = v\sin\alpha$. میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}$ عمود بر صفحه‌ی شکل و رو به داخل است. مؤلفه‌های نیروی وارد بر ذره از طرف میدان مغناطیسی را بر حسب v_x و v_y بدست آورید.



ب) ذره‌ای به جرم m و بار مثبت q مطابق شکل از نقطه‌ی A به مختصات $(0, h)$ در شتاب گرانش g از حال سکون در لحظه $t = 0$ رها می‌شود. میدان مغناطیسی ثابت B عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل صفحه برقرار است. با نوشتن معادلات حرکت، dv_x/dt و dv_y/dt را بر حسب v_x و v_y بدست آورید.

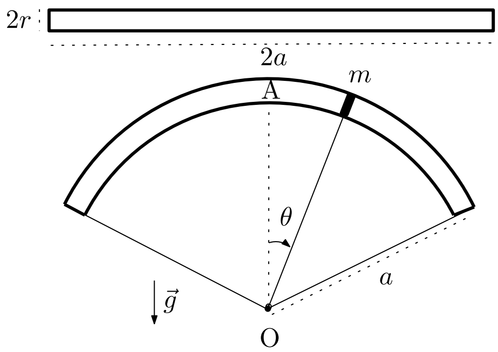
ج) با مشتق‌گیری مجدد از یکی از معادلات و استفاده از معادله‌ی دیگر معادله‌ای مشابه معادله‌ی حرکت نوسانگر هماهنگ برای یکی از مؤلفه‌ها بدست می‌آید. جواب کلی این معادله به صورت $A\sin(\omega t + \phi)$ است. ω را برحسب پارامترهای داده شده‌ی دستگاه بدست آورید. ثابتهای A و ϕ را با توجه به سرعت اولیه‌ی ذره بدست آورید. عبارتهای نهایی $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را بنویسید.

د) مؤلفه‌های مکان ذره، $x(t)$ و $y(t)$ را چنان بدست آورید که مشتق زمانی آن‌ها به ترتیب $v_x(t)$ و $v_y(t)$ باشند و در لحظه‌ی $t = 0$ شرایط اولیه‌ی مسئله را برآورده کنند.

ه) شکل مسیر را در صفحه‌ی x-y رسم کنید و محل ذره را در لحظات $t_n = n\pi/\omega$ مشخص کنید.

و) برای حالتی که ذره در لحظه‌ی $t = 0$ از همان نقطه با سرعت اولیه‌ی افقی v_0 در جهت مثبت محور x، پرتاب شود عبارت‌های نهایی سرعت ذره، یعنی $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را به دست آورید و سپس قسمت‌های «د)» و «ه)» را حل کنید. معین کنید در چه شرایطی در شروع حرکت نیروی مغناطیسی بزرگ‌تر از نیروی گرانش است و در چه شرایطی وضعیت برعکس است. برای هر دو حالت شکل مسیر را رسم کنید و نقاط مربوط به لحظات t_n را مشخص کنید. فرض کنید $v_0 < \frac{2g}{\omega}$.

۴) لوله‌ی توخالی به شعاع r و طول $2a$ از دو انتها بسته است و r خیلی از a کوچکتر است. لوله را مطابق شکل طوری خم می‌کنیم که محور آن کمانی از دایره به شعاع a شود. این لوله توسط پیستونی به جرم m به دو قسمت تقسیم می‌شود. پیستون می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک در طول لوله حرکت کند. زاویه‌ی θ از خط قائم OA سنجیده می‌شود. شتاب گرانش در امتداد OA و رو به پایین است.



وقتی پیستون در $\theta = 0$ است حجم سمت راست و چپ با هم برابر است. n مول گاز در سمت راست لوله و n مول گاز در سمت چپ لوله در دمای T وجود دارد. فرض کنید پیستون به اندازه‌ی زاویه‌ی θ از خط قائم به راست حرکت کند. حجم قسمتی از لوله که مقابل زاویه‌ی θ است تقریباً $\pi r^2 a\theta$ است.

آ) نیروی کل وارد بر پیستون در امتداد عمود بر سطح آن را بر حسب n، θ، m، g (شتاب گرانش)، a، T و R (ثابت گازها) بدست آورید.

ب) در حالت تعادل رابطه‌ای به صورت $\sin\theta = k(\theta)$ بدست آورید.

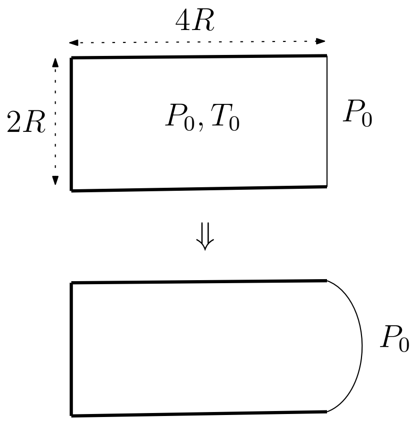
ج) فرض کنید $T_c = \dfrac{mga}{2nR}$. در یک نمودار تابع‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ را در حالت $T > T_c$ رسم کنید.

د) تابع‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ را مجدداً در یک نمودار برای حالت $T < T_c$ رسم کنید.

نقطه‌های تقاطع منحنی‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ زاویه‌هایی که پیستون در تعادل است نشان می‌دهد. اگر نیروی کل وارد بر پیستون در زاویه‌ی θ، $F(\theta)$ و یکی از نقاط تعادل $\theta = \theta_0$ باشد، آنگاه این نقطه تعادل پایدار است اگر $\dfrac{dF}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} < 0$ و تعادل ناپایدار است اگر $\dfrac{dF}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} > 0$.

هـ) در حالت $T > T_c$ منحنی‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ در این نقطه‌ها تعادل پایدار است یا ناپایدار؟

و) در حالت $T < T_c$ منحنی‌های $\sin\theta$ و $k(\theta)$ در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ در این نقطه‌ها تعادل پایدار است یا ناپایدار؟



۵) یک انتهای استوانه‌ی توخالی حاوی هوا به شعاع R و طول $4R$ مسدود و انتهای دیگر آن با لایه‌ی نازکی از یک مایع (مثل حباب صابون) بسته شده است. فشار هوای بیرون P_0 است. در ابتدا که هوای داخل استوانه در تعادل با هوای بیرون است فشار و دمای هوای داخل P_0 و T_0 است و سطح لایه موازی سطح قاعده‌ی استوانه است.

کشش سطحی لایه γ است. در این مسئله تغییرات دما چندان زیاد نیست به طوری که کشش سطحی را ثابت در نظر می‌گیریم. لطفاً به توضیح انتهای مسئله در مورد نیروی کشش سطحی توجه کنید.

به هوای داخل استوانه که آن را گاز ایده‌آل فرض می‌کنیم به آرامی گرما می‌دهیم، در نتیجه فشار هوای داخل بالا می‌رود و لایه منبسط می‌شود. این فرآیند را آنقدر ادامه می‌دهیم تا لایه به شکل نیم‌کره در آید. سپس فرایند را متوقف می‌کنیم. در این حالت به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

آ) با در نظر گرفتن تعادل نیروهای وارد بر لایه، فشار هوای داخل استوانه را حساب کنید.

ب) دمای هوای داخل استوانه چقدر است؟

ج) کار انجام شده توسط هوای داخل استوانه روی لایه (که باعث افزایش انرژی پتانسیل کشش سطحی آن شده است) چقدر است؟

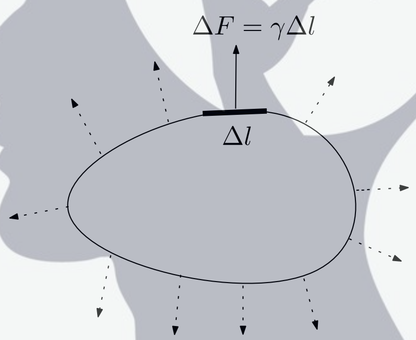
د) کار انجام شده توسط هوای داخل استوانه روی هوای بیرون چقدر است؟

ه) تغییر انرژی داخلی هوای داخل استوانه در این فرآیند چقدر است؟ ظرفیت گرمایی مولی هوا در حجم ثابت $\frac{5}{2}R$ است که R ثابت گازها است.

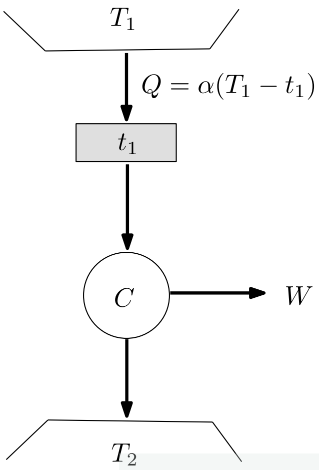
و) فرض کنید در این فرآیند گرمایی از طریق دیواره‌های استوانه و لایه به بیرون هدر نمی‌رود. گرمای داده شده به هوای داخل استوانه در این فرایند چقدر است؟

توضیح:

کشش سطحی مایعات عاملی است که می‌خواهد سطح آزاد مایع را به حداقل برساند. اگر جزء کوچکی از مایع را در نظر بگیرید نیرویی که قسمت‌های مجاور این جزء به آن وارد می‌کنند مماس بر سطح آزاد و عمود بر مرزهای این جزء با قسمت‌های مجاور و به سمت خارج این جزء است. مقدار نیرو، ΔF، متناسب با طول مرز، Δl، است و ضریب تناسب که موسوم به کشش سطحی است با γ نمایش داده می‌شود و یکای آن نیوتن بر متر است. اگر مساحت سطح آزاد مایع به اندازه‌ی ΔA تغییر کند انرژی پتانسیل آن به اندازه‌ی $\gamma\Delta A$ تغییر می‌کند. لایه‌ی نازکی مانند حباب که در واقع دارای دو سطح است وقتی به اندازه‌ی ΔA تغییر می‌کند انرژی پتانسیل آن به اندازه‌ی $2\gamma\Delta A$ تغییر می‌کند. همچنین برای چنین لایه‌ای $\Delta F = 2\gamma\Delta l$. γ از اندازه‌ی سطح لایه مستقل است ولی به دما بستگی دارد.



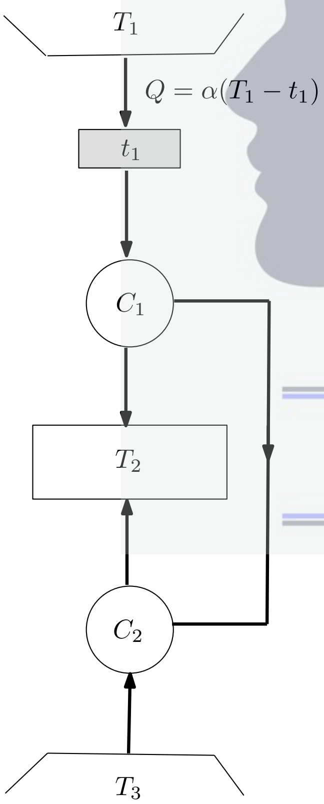
۶) در شکل مقابل گرمای $Q = \alpha(T_1 - t_1)$ از منبع با دمای T_1 به منبع با دمای $t_1 (< T_1)$ منتقل می‌شود که α ثابت و مثبت است. بین منبع t_1 و منبع $T_2 (< t_1)$ یک ماشین کارنو کار می‌کند که در هر چرخه کار W را انجام می‌دهد.



آ) W را حساب کنید.

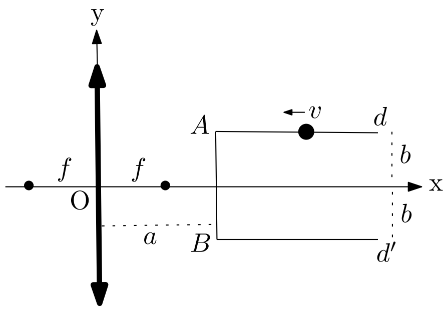
ب) دمای t_1 را چنان بدست آورید که W بیشینه باشد. بیشینه‌ی W را حساب کنید.

دستگاه شکل مقابل را در نظر بگیرید که در آن دمای منبع‌ها در نامساوی $T_3 < T_2 < t_1 < T_1$ صدق می‌کند. در این دستگاه ماشین C_1 و یخچال C_2 با چرخه‌های کارنو کار می‌کنند و مدت زمان طی هر چرخه برای آن‌ها یکسان است. ماشین C_1 گرما را از منبع با دمای t_1 می‌گیرد و بخشی از آن را به منبع T_2 می‌دهد و کار W را تولید می‌کند که آن را به یخچال C_2 می‌دهد. یخچال C_2 نیز مقداری گرما از منبع سرد T_3 می‌گیرد و مقداری گرما نیز به منبع T_2 می‌دهد.



ج) گرمای کلی که به منبع T_2 می‌رسد را حساب کنید.

د) دمای منبع t_1 را چنان تعیین کنید که بیشینه‌ی گرما به منبع T_2 داده شود. این گرمای بیشینه چقدر است؟



۷) ذره‌ای مطابق شکل در مسیر $dABd'$ از فاصله‌ی بسیار دور به یک عدسی همگرا نزدیک می‌شود و مجدداً از آن دور می‌شود. نیم‌خط‌های Ad و Bd' به فاصله‌ی یکسان b از محور عدسی هستند. پاره‌خط AB به فاصله‌ی a از عدسی است که از f، فاصله‌ی کانونی عدسی، بزرگتر است.

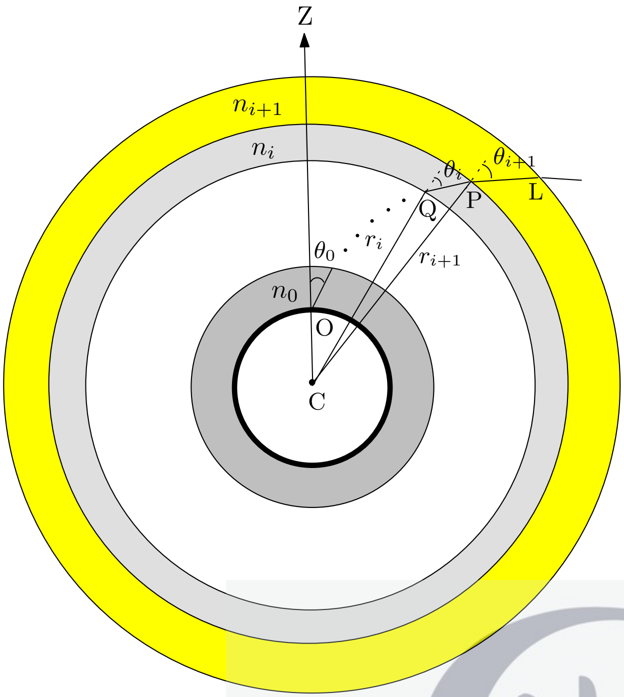
ذره در تمام مسیر با سرعت ثابت حرکت می‌کند که اندازه‌ی آن v است و در لحظه‌ی $t = 0$ در نقطه‌ی A قرار دارد. مبدأ مختصات، O، را رأس عدسی و محور x را محور اصلی عدسی بگیرید.

آ) ذره را یک نقطه نورانی به مختصات x و y بگیرید و x' و y' مختصات تصویر آن را بر حسب x، y و f بدست آورید.

ب) معادلات $x'(t)$ و $y'(t)$ را بر حسب t، a، b و f در قسمت‌های مختلف مسیر بدست آورید.

ج) شکل مسیر تصویر ذره را در پاسخ‌نامه رسم کنید و مختصات نقاط شکستگی مسیر و زمان مربوط به آنها را بدست آورید و در شکل مشخص کنید.

د) مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای تصویر ذره را بر حسب زمان و پارامترهای مسئله بدست آورید.



۸) جو زمین را شامل لایه‌های کروی بگیرید که از سطح زمین به بالا ضریب شکست‌شان کاهش می‌یابد تا این که در نهایت به خلاء می‌رسیم. در شکل، C مرکز زمین و O ناظر روی زمین است و COZ جهت قائم در محل O را نشان می‌دهد. پرتو نوری از بیرون جو وارد جو شده و به ناظر O می‌رسد. فرض کنید دو لایه‌ی نازک مجاور دارای ضریب شکست n_i و n_{i+1} است.

LP قسمتی از این پرتو در محیط n_{i+1} و PQ قسمت دیگری از این پرتو در محیط n_i است. فاصله‌ی Q تا مرکز زمین r_i و فاصله‌ی P تا مرکز زمین r_{i+1} است.

آ) نسبت $\dfrac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i}$ را بر حسب n_i، n_{i+1}، r_i و r_{i+1} بدست آورید.

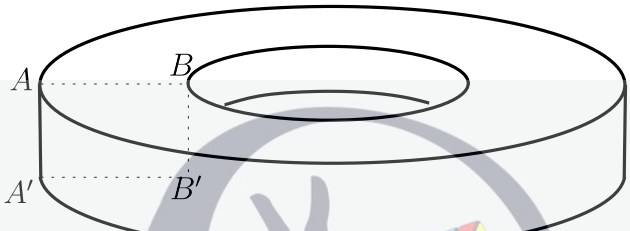
ب) شعاع زمین را R و ارتفاع جو را h بگیرید. فرض کنید ضریب شکست جو در سطح زمین n_0 است. پرتو نور ستاره‌ای در محل ناظر O تحت زاویه‌ی θ_0 دریافت می‌شود. زاویه‌ی ورود آن به جو، θ_∞، چقدر است؟

موضوع آزمایش: مغناطیس

هدف آزمایش: تعیین تعداد قطب‌های یک آهن‌ربای حلقه‌ای و رسم خطوط میدان مغناطیسی در مجاورت سطوح آن

وسایل آزمایش: یک آهن‌ربای کوچک استوانه‌ای شکل با دو قطب مغناطیسی N (سطحی که فرورفتگی دارد) و S و یک آهن‌ربای بزرگ حلقه‌ای با تعداد قطب‌های مغناطیسی بیشتر از ۲.

تذکر: **مراقب باشید آهن‌ربای حلقه‌ای در اثر ضربه یا افتادن روی زمین نشکند زیرا آهن‌ربای دیگری به شما داده نمی‌شود.**

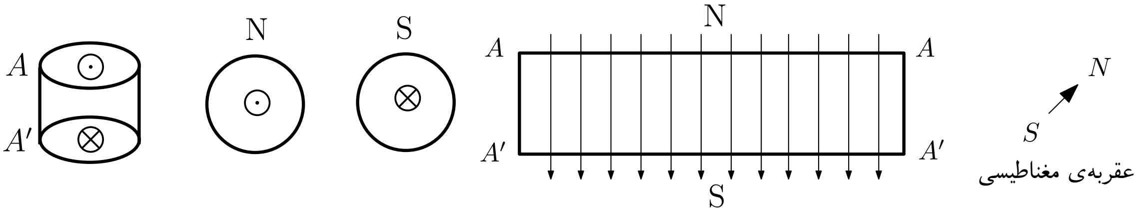


آهن‌ربای حلقه‌ای

آزمایش:

آ) با استفاده از آهن‌ربای کوچک استوانه‌ای تعداد قطب‌های آهن‌ربای حلقه‌ای را تعیین کنید و در پاسخ‌نامه بنویسید.

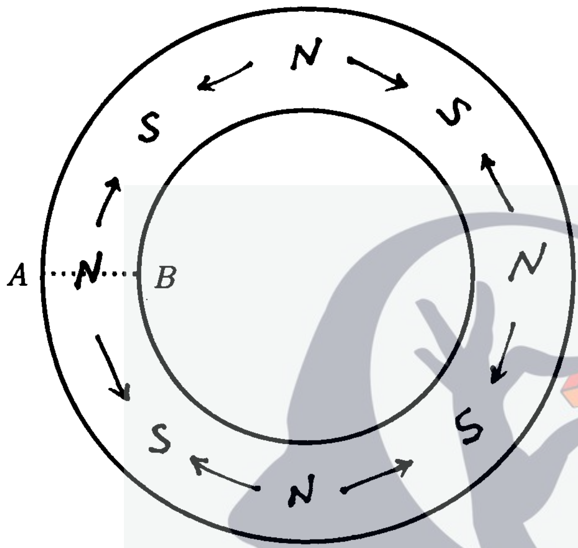
ب) سطح قاعده‌ی بالایی و پایینی آهن‌ربای حلقه‌ای و نیز سطح جانبی داخلی و خارجی آهن‌ربای حلقه‌ای که از یال BB' و AA' بریده شده به صورت مستطیل های $BBB'B'$ و $AAA'A'$ در پاسخ‌نامه رسم شده است. اگر یک عقربه‌ی مغناطیسی را در نقاط متفاوتی از سطح‌های رسم شده در پاسخ‌نامه قرار دهیم، در چه جهتی قرار می‌گیرد؟ روی شکل‌ها نشان دهید. روی شکل‌های مذکور محل قطب‌های دستگاه (N و S) را مشخص کنید. فرض کنید در شکل مربوط به قاعده‌ی بالایی (که اختیاری است) یک قطب N بالای خط AB قرار دارد. همچنین تصویر خطوط میدان (از N به S) در صفحه‌ی هر یک از شکل‌ها را با پیکان مشخص کنید و برای خطوط میدان عمود بر هر شکل با توجه به سوی آن‌ها (داخل یا خارج صفحه) از علامت ضربدر، $\otimes$ یا نقطه، $\odot$ استفاده کنید. به عنوان مثال برای آهنربای کوچک استوانه‌ای که سطح جانبی آن از یال AA' بریده شده و به صورت مستطیل $AAA'A'$ رسم شده نمایش قطب‌ها و خطوط میدان به صورت زیر است.



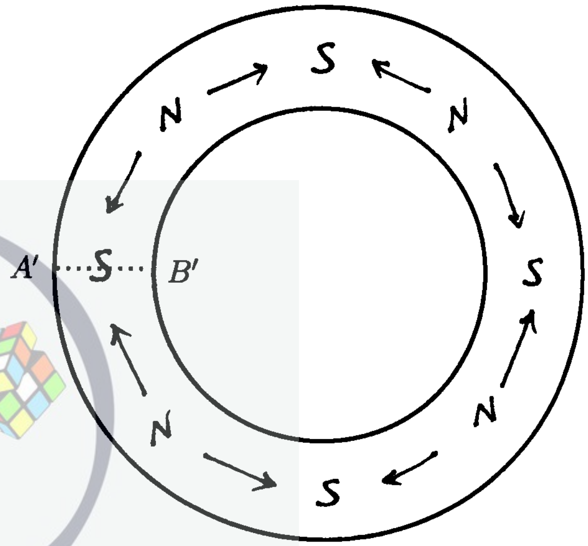
پاسخ‌نامه

تعداد قطب‌های آهنربای حلقه‌ای = ۱۶

قاعده‌ی بالایی آهن‌ربای حلقه‌ای

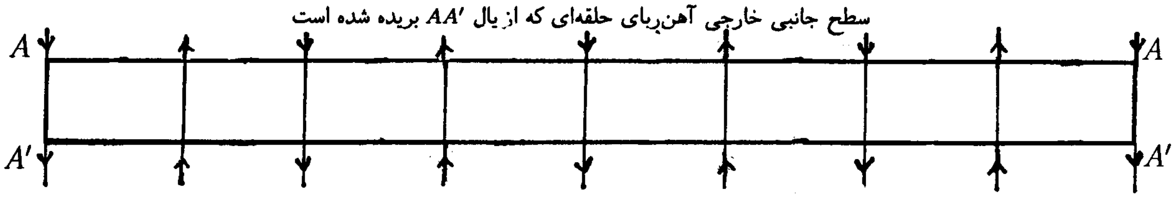


قاعده‌ی پایینی آهن‌ربای حلقه‌ای



سطح جانبی داخلی آهن‌ربای حلقه‌ای که از یال BB' بریده شده است

سطح جانبی خارجی آهن‌ربای حلقه‌ای که از یال AA' بریده شده است



۱)

۲)

$$x_p(t) = v_0 \cos\theta \, t \quad , \quad y_p(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta \, t$$

$$x_t(t) = x_0 \quad , \quad y_t(t) = y_0 - \frac{1}{2} g (t-t_0)^2$$

ب) در لحظه‌ی برخورد $x_t(t_1) = x_p(t_1)$ ، در نتیجه $t_1 = \dfrac{x_0}{v_0 \cos\theta}$.

شرط این که برخورد تیر به هدف بالای سطح افق باشد این است که $0 \leqslant y_p(t_1) \leqslant y_0$.

$$y_p(t_1) \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g \left(\frac{x_0}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x_0}{v_0 \cos\theta} \geqslant 0$$

$$(1) \qquad tg^2\theta - 2\frac{v_0^2}{g x_0} tg\theta + 1 \leqslant 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $tg\theta_1$ و $tg\theta_2$ بنامیم

$$tg\theta_1 = \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1} \quad , \quad tg\theta_2 = \frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1}$$

جواب نامعادله (1) $tg\theta_1 < tg\theta < tg\theta_2$ است.

$$y_p(t_1) \leqslant y_0 \Rightarrow$$

$$(2) \qquad tg^2\theta - 2\frac{v_0^2}{g x_0} tg\theta + 1 + \frac{2 v_0^2 y_0}{g x_0^2} \geqslant 0$$

اگر ریشه‌های این معادله را $tg\theta_3$ و $tg\theta_4$ بنامیم

$$tg\theta_3 = \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1} \quad , \quad tg\theta_4 = \frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1}$$

جواب نامعادله (2) $tg\theta < tg\theta_3$ و $tg\theta > tg\theta_4$ است.

جواب‌ها به ترتیب بزرگی به این صورت‌اند

$$tg\theta_1 \quad tg\theta_3 \quad tg\theta_4 \quad tg\theta_2 \longrightarrow$$

اشتراک این جواب‌ها، یعنی جواب قسمت ب، عبارت‌اند از

$$\frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1} < tg\theta < \frac{v_0^2}{g x_0} - \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0}\frac{y_0}{x_0} - 1}$$

$$\frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - \frac{2 v_0^2}{g x_0 x_0}y_0 - 1} < tg\theta < \frac{v_0^2}{g x_0} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_0}\right)^2 - 1}$$

شرط وجود این محدوده ها مادامی که زیر رادیکال شامل y_0 منفی نشود این است که

$\frac{v_0^2}{gx_0}\geq 1$. وقتی زیر رادیکال شامل y_0 منفی شود یعنی $\left(\frac{v_0}{gx_0}\right)^2 - \frac{2v_0}{gx_0}\frac{y_0}{x_0} - 1 < 0$

تا معادله (۲) برقرار است ($y_p(t_1)\leq y_0$ حتماً برقرار است). در این

وضعیت فقط باید $y_p(t_1)\geq 0$ یعنی

$$\frac{v_0^2}{gx_0}-\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2-1}\leq \tan\theta \leq \frac{v_0^2}{gx_0}+\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gx_0}\right)^2-1}$$

که بازهم باید $\frac{v_0^2}{gx_0}\geq 1$.

به ازای $x_0=50m$ ، $y_0=100m$ ، $v_0=50m/s$ و $g=10m/s^2$:

$\tan\theta_1=5-2\sqrt{6}$, $\tan\theta_2=5+2\sqrt{6}$, $\tan\theta_3=3$, $\tan\theta_4=7$

ج) در هنگام برخورد $y_p(t_1)=y_t(t_1)$ که $t_1=\frac{x_0}{v_0\cos\theta}$. در نتیجه

$$\sin\theta=\left(\frac{y_0}{x_0}-\frac{1}{2}\frac{gt_0^2}{x_0}\right)\cos\theta+\frac{gt_0}{v_0}$$

که به ازای پارامترهای داده شده ، خواهد شد

$$\sin\theta=(2-0.1t_0^2)\cos\theta+0.2t_0 \Rightarrow t_0^2-\frac{2}{\cos\theta}t_0+10(\tan\theta-2)=0$$

از آنجا که باید $t_1>t_0$ باشد جواب قابل قبول $t_0=\frac{1}{\cos\theta}-\sqrt{(\tan\theta-3)(\tan\theta-7)}$ است.

بنابراین

$t_0|_{\theta_3}=\sqrt{10}\,s$, $t_0|_{\theta_4}=\sqrt{50}\,s$

$t_0|_{\theta_1}=-(\sqrt{80}-\sqrt{30})s$, $t_0|_{\theta_2}=\sqrt{30}\,s$.

در نتیجه $-(\sqrt{80}-\sqrt{30})s\leq t_0\leq\sqrt{10}\,s$ برای $5-2\sqrt{6}\leq\tan\theta\leq 3$

و $\sqrt{30}\,s\leq t_0\leq\sqrt{50}\,s$ برای $7\leq\tan\theta\leq 5+2\sqrt{6}$

د) به ازای $t_0=\sqrt{10}\,s$ از

$$\sqrt{10}=\frac{1}{\cos\theta}-\sqrt{(\tan\theta-3)(\tan\theta-7)}$$

$$\sqrt{10}=\sqrt{1+\tan^2\theta}-\sqrt{(\tan\theta-3)(\tan\theta-7)} \Rightarrow \tan\theta=3 \Rightarrow \theta=\mathrm{Arctan}\,3$$

یا $\theta=\frac{\pi}{4}+\mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}$

۲) آ)

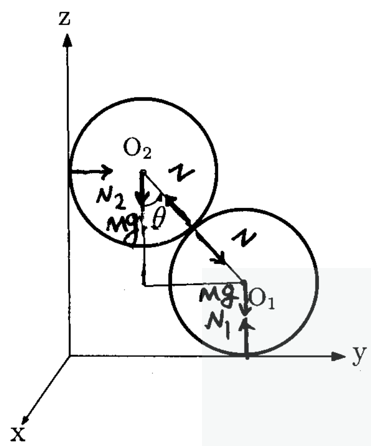
(1) $y_1 = R + 2R\sin\theta \,,\ z_1 = R$ $\qquad$ $y_2 = R,\ z_2 = R + 2R\cos\theta$

ب)

$$\begin{cases} N\sin\theta = Ma_1 \\ N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -Mg + N\cos\theta = Ma_2 \\ N_2 - N\sin\theta = 0 \end{cases}$$

از دو معادله‌ی شامل a_1 و a_2 :

(2) $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_1}{a_2+g}$$



ج) اگر مبدأ پتانسیل گرانش را صفحه‌ی x-y بگیریم

$$0 + MgR + Mg(3R) = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 + MgR + Mg(R+2R\cos\theta)$$

$$\Downarrow$$

(3) $$v_1^2 + v_2^2 = 4gR(1-\cos\theta)$$

د) $$(y_1-R)^2 + (z_2-R)^2 = 4R^2$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان : $v_1(y_1-R) + v_2(z_2-R) = 0$

با مشتق‌گیری مجدد نسبت به زمان : (4) $v_1^2 + v_2^2 + a_1(y_1-R) + a_2(z_2-R) = 0$

از قرار دادن معادلات (1) و (3) در معادله‌ی (4) : (5) $a_1\sin\theta + a_2\cos\theta + 2g(1-\cos\theta) = 0$

از معادله‌ی (2) و (5) :

$$a_1 = (3\cos\theta - 2)\, g\sin\theta \,,\quad a_2 = (3\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\, g$$

از قسمت ب) :

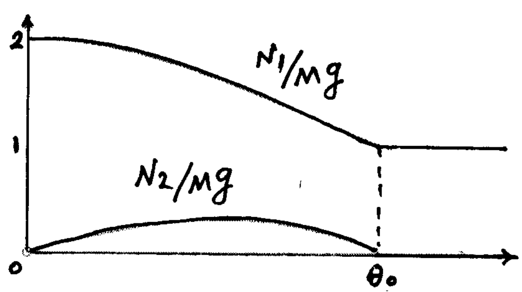
$$N_2 = Ma_1 \Rightarrow N_2(\theta) = Mg\sin\theta(3\cos\theta - 2)$$

$$N_1 = Ma_2 + 2Mg \Rightarrow N_1(\theta) = Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)$$

ه) $N = Ma_1/\sin\theta$ ، $N = Mg(3\cos\theta - 2)$. به ازای $\cos\theta_0 = \frac{2}{3}$ تماس دو استوانه قطع می‌شود.

$$N_1 = \begin{cases} Mg(3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) & \theta < \theta_0 \\ Mg & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} Mg\sin\theta(3\cos\theta - 2) & \theta < \theta_0 \\ 0 & \theta > \theta_0 \end{cases}$$



۹) ابتدا سرعت ها ی v_1 , v_2 را به ازای $\theta=\theta_0$ بدست می آوریم

$$v_1^2\Big|_{\theta=\theta_0} = 4gR(1-\cos\theta_0)\cos^2\theta_0 \Rightarrow v_1(\theta_0) = \sqrt{\frac{16}{27}gR}$$

$$v_2 = -v_1 \operatorname{tg}\theta \Rightarrow v_2(\theta_0) = -v_1(\theta_0)\operatorname{tg}\theta_0 = -\sqrt{\frac{20}{27}gR}$$

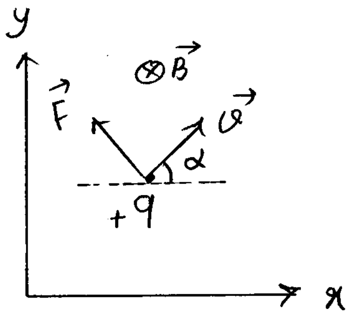
اگر v_{2f} سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه $x-y$ باشد

$$v_{2f}^2 - v_2^2(\theta_0) = -2g\left(R - z_2(\theta_0)\right)$$

$$v_{2f}^2 = v_2^2(\theta_0) + 2g\left(2R\cos\theta_0\right) \Rightarrow v_{2f} = -\sqrt{\frac{92}{27}gR}$$

پس سرعت نهایی استوانه زیری $\sqrt{\frac{16}{27}gR}$ و سرعت استوانه بالایی هنگام رسیدن به صفحه $x-y$ ، $-\sqrt{\frac{92}{27}gR}$ است.

۳)



آ) $F = qvB$ و

$$F_x = -F\sin\alpha = -qBv\sin\alpha = -qBv_y$$

$$F_y = F\cos\alpha = qBv\cos\alpha = qBv_x$$

ب)

$$F_x = m\frac{dv_x}{dt} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB}{m}v_y$$

$$F_y = m\frac{dv_y}{dt} \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m}v_x - g$$

ج)

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_x}{dt} - 0$$

با قرار دادن معادله اول قسمت ب) در معادله اخیر

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

اگر ω را به صورت $\omega = \frac{qB}{m}$ تعریف کنیم

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = 0 \Rightarrow v_y = A\sin(\omega t + \phi)$$

$[\omega] = \frac{[qB]}{m}$ بُعد ω عکس زمان است،
اما $F = qvB$
$[qB] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$
$[\omega] = \frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$

از معادله دوم قسمت ب)

$$v_x = g/\omega + A\cos(\omega t + \phi)$$

در $t=0$ سرعت اولیه ذره صفر است یعنی

$v_x(t=0) = 0$: $A\cos\phi + g/\omega = 0$ $\Rightarrow \phi = 0$ و $A = -g/\omega$

$v_y(t=0) = 0 \Rightarrow A\sin\phi = 0$

بنابراین

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega}(1 - \cos\omega t) \quad \text{و} \quad v_y(t) = -\frac{g}{\omega}\sin\omega t$$

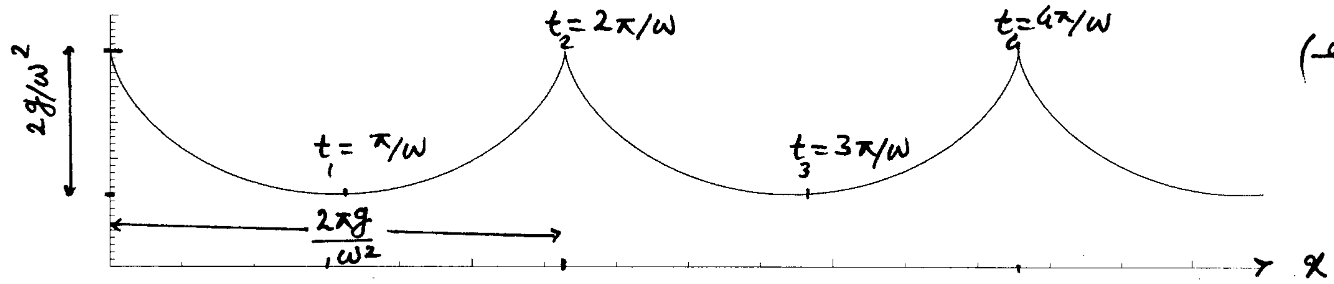
د)

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + x_0 \quad \text{و} \quad y(t) = \frac{g}{\omega^2}\cos\omega t + y_0$$

در $t=0$: $x(0)=0$ و $y(0)=h$ ، بنابراین $x_0 = 0$ و $y_0 = h - g/\omega^2$

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t - \frac{g}{\omega^2}\sin\omega t \quad \text{و} \quad y(t) = h - \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

ه)



و) داریم $\begin{cases} v_x = \frac{g}{\omega} + A\cos(\omega t + \phi) \\ v_y = A\sin(\omega t+\phi) \end{cases}$ و در $t=0$ $\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$ بنابراین $\begin{cases} \phi = 0 \\ A = v_0 - g/\omega \end{cases}$

$$v_x(t) = \frac{g}{\omega} + \left(v_0 - \frac{g}{\omega}\right)\cos\omega t \;,\; v_y(t) = \left(v_0 - \frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t$$

داریم:

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)\sin\omega t + x_0$$

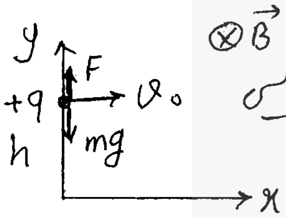
$$y(t) = -\left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)\cos\omega t + y_0$$

و در $t=0$: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = h \end{cases}$ و در نتیجه $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right) \end{cases}$

سرانجام

$$x(t) = \frac{g}{\omega}t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)\sin\omega t$$

$$y(t) = h + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2}\right)(1 - \cos\omega t)$$

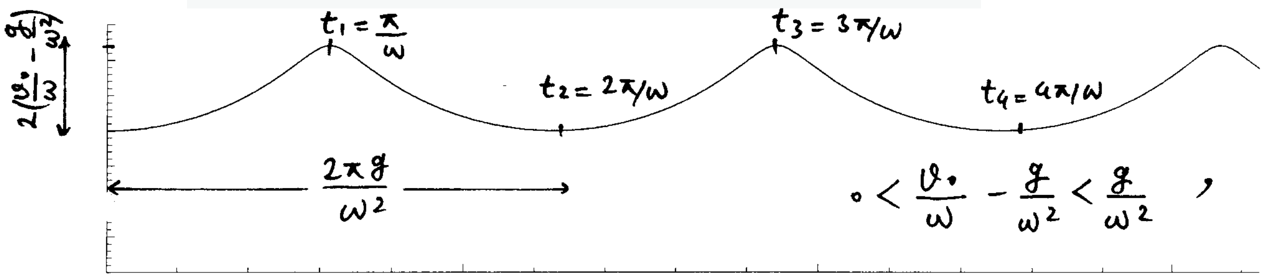


$\otimes \vec{B}$

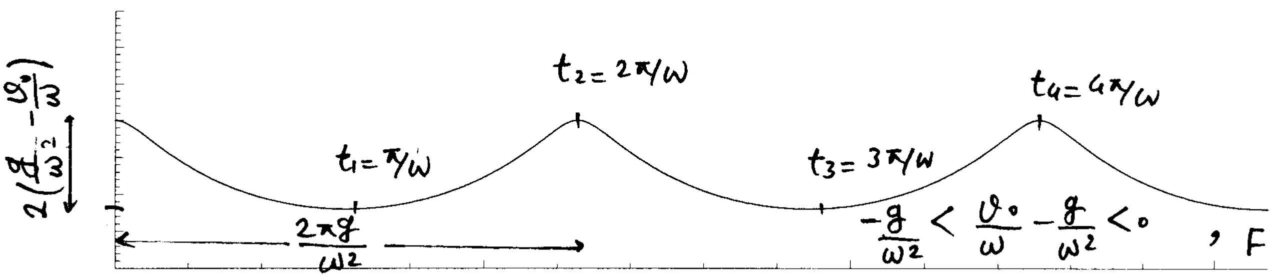
نیروی مغناطیسی $F = q v_0 B$

$F > mg$ و $v_0 <$ … $\Leftarrow \frac{g}{\omega} < v_0 < \frac{2g}{\omega}$

$F < mg \Leftarrow 0 < v_0 < \frac{g}{\omega}$



$0 < \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2} < \frac{g}{\omega^2} \;,\; F > mg$



$-\frac{g}{\omega^2} < \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{\omega^2} < 0 \;,\; F < mg$

۱۴ ۳) اگر در وضعیت θ فشار گاز سمت راست و چپ به ترتیب P_1 و P_2 باشد

و در وضعیت $\theta=0$ فشار گاز در ظرف P_0 باشد، در دمای ثابت

$$P_0(\pi r^2)(1)a = P_2(\pi r^2)(1+\theta)a$$ قانون بویل برای گاز سمت چپ:

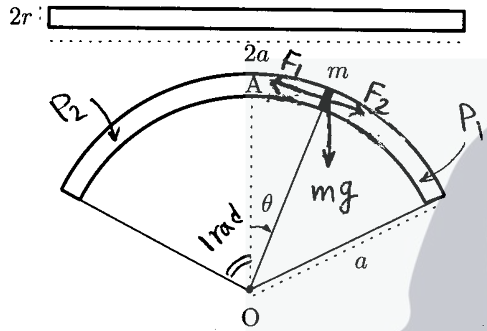
$$P_0(\pi r^2)(1)a = P_1(\pi r^2)(1-\theta)a$$ " " " راست:

$$P_0(\pi r^2)(1)a = nRT$$

که

بنابراین

$$P_1 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1-\theta)} , \quad P_2 = \frac{nRT}{\pi r^2 a(1+\theta)}$$



$$F_1 = \pi r^2 P_1 = \frac{nRT}{a(1-\theta)}$$

$$F_2 = \pi r^2 P_2 = \frac{nRT}{a(1+\theta)}$$

نیروی کل عمود بر سطح استوانه

$$F = -\frac{2nRT}{a}\frac{\theta}{1-\theta^2} + mg\sin\theta$$

است.

ب) در حالت تعادل $F=0$ است و:

$$\sin\theta = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

که

$$K(\theta) = \frac{2nRT}{mga}\frac{\theta}{1-\theta^2}$$

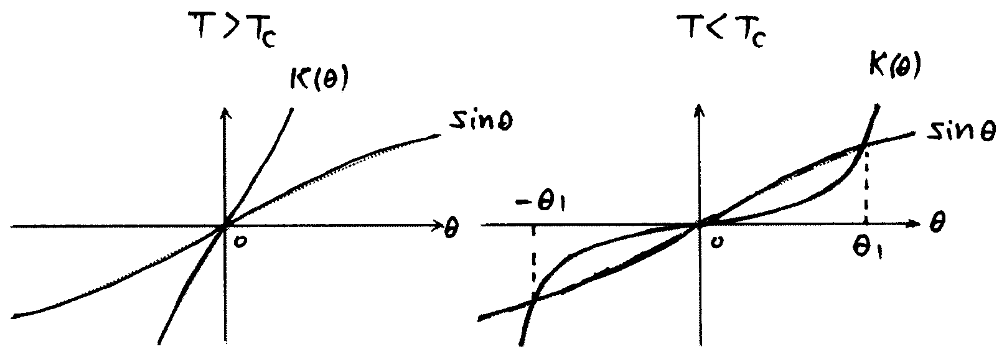
ج) $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$ که $T>T_c$

د) $\sin\theta = \frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}$ که $T<T_c$

$$\frac{dk(\theta)}{d\theta} = \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2} > 0 , \quad \left.\frac{dk(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{T}{T_c} , \quad \left.\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 1$$

در حالت ج) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ بیشتر است و

در حالت د) شیب $K(\theta)$ در $\theta=0$ از شیب $\sin\theta$ در $\theta=0$ کمتر است.



ه) در یک نقطه قطع می‌کند . $\theta_0=0$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\cos\theta - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta^2}{(1-\theta^2)^2}\Bigg|_{\theta_0=0} = mg - \frac{2nRT}{a} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

از آنجا که $T>T_c$ است پس $\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0}<0$ و $\theta_0=0$ تعادل پایدار است .

و) در سه نقطه قطع می‌کند $\theta_0=0$ و $\theta_0=\pm\theta_1$

$$F=0 \Rightarrow -mg\frac{T}{T_c}\frac{\theta}{1-\theta^2}+mg\sin\theta=0 \Rightarrow \frac{T}{T_c}=\sin\theta_0\frac{1-\theta_0^2}{\theta_0}$$

که $T<T_c$ است .

به ازای $\theta_0=0$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=0} = mg\left(1-\frac{T}{T_c}\right)>0$$

به ازای $\theta_0=\theta_1$

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1} = mg\cos\theta_1 - \frac{2nRT}{a}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}$$

$$= mg\left(\cos\theta_1 - \frac{T}{T_c}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

$$= mg\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\frac{1-\theta_1^2}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{(1-\theta_1^2)^2}\right)$$

$$= mg\cos\theta_1\left(1-\frac{\tan\theta_1}{\theta_1}\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}\right)$$

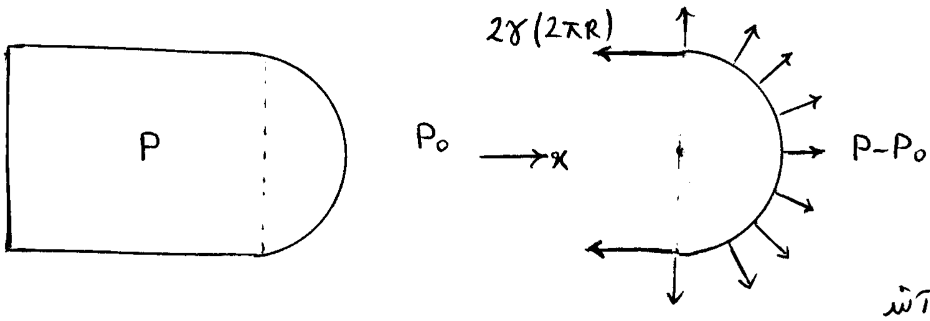
اما $-1\,\text{rad}<\theta_1<1\,\text{rad}$ بنابراین $\frac{1+\theta_1^2}{1-\theta_1^2}>1$ و $\frac{\tan\theta_1}{\theta_1}>1$ پس

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_{\theta_0=\theta_1}<0$$

پس به ازای $T<T_c$ ، $\theta_0=0$ نقطه تعادل ناپایدار و

$\theta_0=\pm\theta_1$ نقطه تعادل پایدار است .

۵) ۲) نیروی ناشی از فشار بر پوسته‌ی نیمکره‌ای شکل در هر نقطه عمود بر سطح نیمکره است. برآیند



این نیروهای جزئی برابر است با برآیند تصویر این نیروی جزئی در جهت x، یعنی $(P-P_0)\pi R^2$.

در حالت تعادل: $(P-P_0)\pi R^2 = 2\gamma(2\pi R)$ ولذا $P = P_0 + \frac{4\gamma}{R}$

ب)

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$$

$$T = T_0\,\frac{(P_0 + \frac{4\gamma}{R})(\pi R^2\times 4R + \frac{2}{3}\pi R^3)}{P_0\,(\pi R^2\times 4R)}$$

$$T = \frac{7}{6}\left(1 + \frac{4\gamma}{P_0R}\right)T_0$$

ج)

$$2\gamma\,\Delta A = 2\gamma(2\pi R^2 - \pi R^2) = 2\gamma\pi R^2$$

د)

$$P_0\,\Delta V = P_0\,\frac{2}{3}\pi R^3$$

هـ)

$$\Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{P_0V_0}{T_0}\right)(T - T_0)$$

$$\Delta U = 10\pi R^3P_0\left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0R}\right)$$

و)

$$\Delta U = Q + W \implies Q = \Delta U - W$$

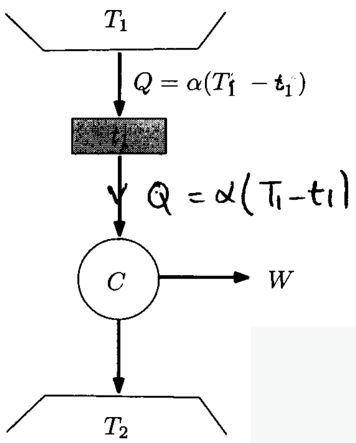
$$Q = 10\pi R^3P_0\left(\frac{1}{6} + \frac{14\gamma}{3P_0R}\right) + 2\gamma\pi R^2 + \frac{2}{3}P_0\pi R^3$$

$$Q = \frac{7}{3}\pi R^3P_0 + \frac{146}{3}\pi R^2\gamma$$

۴) آ) برای چرخه کارنو بازده $\eta = 1 - \frac{T_2}{t_1}$

است، بنابراین $1 - \frac{T_2}{t_1} = \frac{W}{Q}$

$$(1) \quad W = \frac{t_1 - T_2}{t_1}\,\alpha(T_1 - t_1)$$



ب) $\frac{dW}{dt_1} = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{t_1^2}(T_1T_2 - t_1^2) = 0$

$t_1 = \sqrt{T_1T_2}$ و $W_{max} = W\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1T_2}} \Rightarrow W_{max} = \alpha(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$

ج) $Q_2 = Q - W$

و از قسمت آ) $W = Q\,\frac{(t_1 - T_2)}{t_1}$

$\Downarrow$

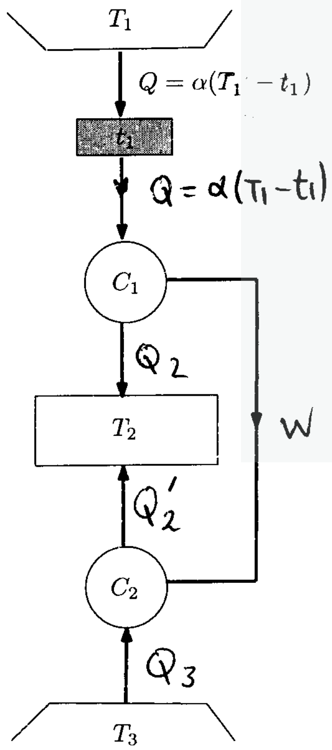
$$(2) \quad Q_2 = \frac{T_2}{t_1}Q \Rightarrow Q_2 = \frac{\alpha T_2(T_1 - t_1)}{t_1}$$

برای یخچال کارنو

$$(3) \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{Q_3}{Q'_2}$$

همچنین

$$(4) \quad Q'_2 = Q_3 + W$$



از معادله (1)، (3) و (4):

$$Q'_2 = \frac{\alpha T_2(t_1 - T_2)(T_1 - t_1)}{t_1(T_2 - T_3)}$$

$$Q_2 + Q'_2 = \frac{\alpha T_2(T_1 - t_1)(t_1 - T_3)}{t_1(T_2 - T_3)}$$

د) $\frac{d(Q_2 + Q'_2)}{dt_1} = 0$

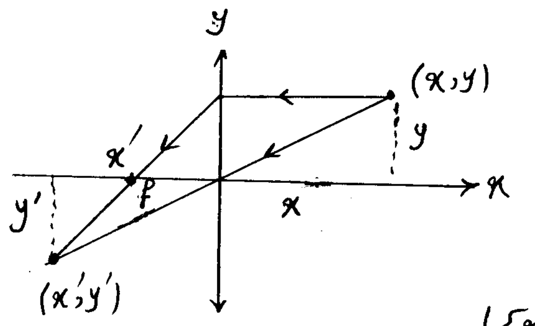
$$\frac{\alpha T_2(T_1T_3 - t_1^2)}{t_1^2(T_2 - T_3)} = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{T_1T_3}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = (Q_2 + Q'_2)\Big|_{t_1 = \sqrt{T_1T_3}}$$

$$(Q_2 + Q'_2)_{max} = \frac{\alpha T_2}{T_2 - T_3}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2$$

۷)

الف)



$$\frac{1}{x}+\frac{1}{-x'}=\frac{1}{f}$$

$$\Downarrow$$

$$(1)\qquad x'=-\frac{xf}{x-f}$$

از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه (یا نسبت طول جسم به طول تصویر)

$$\frac{-y'}{y}=\frac{-x'}{x}\ \Rightarrow\ y'=\frac{y}{x}x'$$

با جایگذاری x' در آن

$$(2)\qquad y'=-\frac{yf}{x-f}$$

ب) به ازای $t<0$ ذره در مسیر Ad به سمت A نزدیک می‌شود

$$Ad:\quad \begin{cases} x=-vt+a \\ y=b \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x'=-\frac{(a-vt)f}{a-vt-f}\quad ,\quad y'=-\frac{bf}{a-vt-f}$$

به ازای $0<t<\frac{2b}{v}$ ذره در مسیر A B به سمت B می‌رود

$$AB:\quad \begin{cases} x=a \\ y=b-vt \end{cases}$$

با جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x'=\frac{-af}{a-f}\quad ,\quad y'=-\frac{(b-vt)f}{a-f}$$

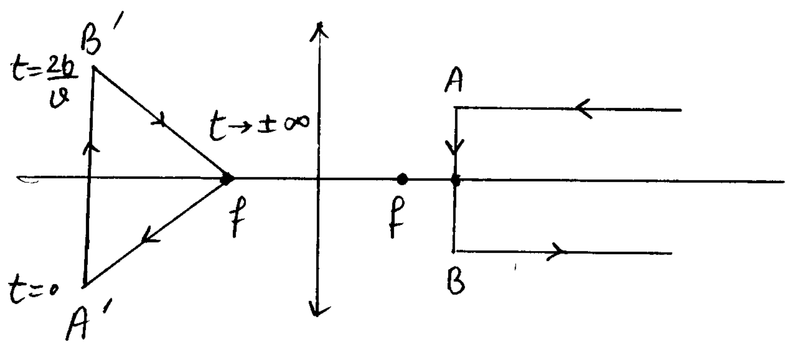
به ازای $t>\frac{2b}{v}$ در مسیر Bd از B دور می‌شود

$$Bd:\quad \begin{cases} x=a+v\left(t-\frac{2b}{v}\right)=a-2b+vt \\ y=-b \end{cases}$$

پس از جایگذاری در (۱) و (۲)

$$x'=-\frac{(a-2b+vt)f}{a-2b+vt-f}\quad ,\quad y'=\frac{bf}{a-2b+vt-f}$$

ج)



$A' \left(x_{A'} = \dfrac{-af}{a-f} \; , \; y_{A'} = \dfrac{-bf}{a-f} \right)$ به ازای $t=0$

$B' \left(x_{B'} = \dfrac{-af}{a-f} \; , \; y_{B'} = \dfrac{bf}{a-f} \right)$ به ازای $t = \dfrac{2b}{v}$

$f \left(x_f = -f \; , \; y_f = 0 \right)$ به ازای $t \to \pm\infty$

د) از معادلات (۱) و (۲) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$v'_x = \frac{v_x f^2}{(x-f)^2} \quad , \quad v'_y = \frac{(v_x y - v_y x) f + v_y f^2}{(x-f)^2}$$

به ازای $t<0$

$$v'_x = -\frac{v f^2}{(a-f-vt)^2} \quad , \quad v'_y = -\frac{bvf}{(a-f-vt)^2}$$

به ازای $0 < t < \dfrac{2b}{v}$

$$v'_x = 0 \quad , \quad v'_y = \frac{vf}{a-f}$$

به ازای $t > \dfrac{2b}{v}$

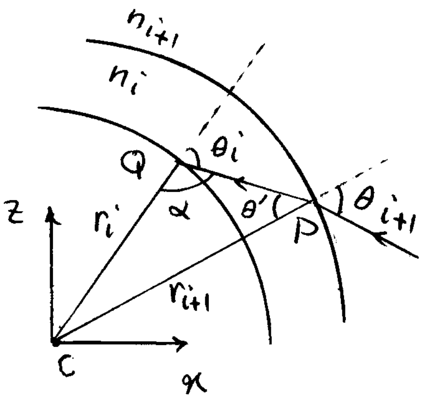
$$v'_x = \frac{v f^2}{(a-2b+vt-f)^2} \quad , \quad v'_y = -\frac{bvf}{(a-2b+vt-f)^2}$$

$t' \to \pm\infty$

$$v'_x = 0 \quad , \quad v'_y = 0$$

۸)

آ) مبدأ مختصات را مرکز زمین می‌گیریم.



طبق قانون اسنل

(۱) $n_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i \sin\theta'$

از طرفی در مثلث QCP از قانون سینوس داریم:

$$\frac{\sin\theta'}{r_i} = \frac{\sin\alpha}{r_{i+1}}$$

اما $\theta_i+\alpha=\pi$ ، بنابراین $\sin\alpha=\sin\theta_i$ و

(۲) $\frac{\sin\theta'}{r_i}=\frac{\sin\theta_i}{r_{i+1}}$

از معادله (۱) و (۲):

$$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}}\frac{r_i}{r_{i+1}}$$

ب) از قسمت قبل پیداست که $n_{i+1} r_{i+1}\sin\theta_{i+1} = n_i r_i \sin\theta_i$

با تکرار این رابطه برای هر دو لایه‌ی مجاور یا این که $n_i r_i \sin\theta_i=$ ثابت است

شعاع را بین بیرونی‌ترین لایه‌ی جو که برای آن $n_\infty=1$ و زاویه‌ی ورود پرتو θ_∞ است و لایه‌ی مجاور سطح زمین که برای آن $n=n_0$ و زاویه‌ی پرتو با خط عمود (محور z) θ_0 است می‌نویسیم:

$$n_0 R\sin\theta_0 = n_\infty (h+R)\sin\theta_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\theta_\infty = n_0\frac{R}{R+h}\sin\theta_0$$