جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب ..... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۱۸ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب ..... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

بیستمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۴۰۳/۰۱/۲۹ – ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است

۱. مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۲. پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۳. با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۴. عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۵. از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۶. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

جدول ثوابت

نماد	کمیت	مقدار
G	ثابت جهانی گرانش	$6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg}$
h	ثابت پلانک	$6.63 \times 10^{-34} Js$
c	سرعت نور	$3 \times 10^8 \frac{m}{s}$
σ	ثابت استفان - بولتزمن	$5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$
m_p	جرم پروتون	$1.67 \times 10^{-27} kg$
m_e	جرم الکترون	$9.11 \times 10^{-31} kg$
e	بار الکترون	$1.6 \times 10^{-19} C$
pc	پارسک	$3.09 \times 10^{16} m$
AU	واحد نجومی	$1.5 \times 10^{11} m$
M_{Sun}	جرم خورشید	$1.99 \times 10^{30} kg$
R_{Sun}	شعاع خورشید	$6.96 \times 10^8 m$
L_{Sun}	درخشندگی خورشید	$3.85 \times 10^{26} W$
$T_{eff_{Sun}}$	دمای مؤثر سطح خورشید	$5777 K$
$M_{V_{Sun}}$	قدر مطلق خورشید	4.83
$m_{V_{Sun}}$	قدرظاهری خورشید	-26.7
BC_{Sun}	تصحیح بولومتریک خورشید	-0.14
M_{Earth}	جرم زمین	$5.97 \times 10^{24} kg$

$6371\ km$	شعاع زمین	R_{Earth}
0.3	آلبدو زمین	A_{Earth}
$23.5°$	انحراف دایره‌البروج نسبت به استوا	ε
$6052\ km$	شعاع زهره	R_{Venus}
$0.7\ AU$	شعاع مداری زهره	r_{Venus}
0.7	آلبدو زهره	A_{Venus}
$3390\ km$	شعاع مریخ	R_{Mars}
$1.5\ AU$	شعاع مداری مریخ	r_{Mars}
$10^{-10}m$	آنگستروم	A
$23\ h\ 56\ m$	روز نجومی	

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال اول (۳۵ نمره)

ناظری می‌خواهد به کمک آسمان عرض جغرافیایی محلی که در آن قرار دارد را پیدا کند. او از آسمان فقط دو نقطه و دو صفحه را می‌شناسد؛ سیاره‌ای که روی دایره‌البروج قرار دارد، قطب شمال دایره‌البروج و صفحه افق و صفحه نصف‌النهار. او ارتفاع سیاره را در لحظه عبور بالایی ۱۰ درجه و در همین هنگام، ارتفاع قطب شمال دایره‌البروج را ۷۰ درجه اندازه می‌گیرد. عرض جغرافیایی ناظر را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال دوم (۴۰ نمره)

طوفانی از غبار سطح مریخ را پوشانده است و باعث می‌شود که قدر ظاهری خورشید در سمت الرأس ناظری روی سطح مریخ نسبت به حالتی که غبار نباشد به اندازه‌ی $|\Delta m| = 0.5$ تغییر کند.

الف) با فرض اینکه شعاع ذرات غبار حدودا $r = 0.5\ mm$ و چگالی ماده موجود در هر ذره غبار $\rho = 1.5\ \frac{\text{gr}}{\text{cm3}}$ باشد ، جرم کل لایه غبار را به دست آورید.

ب) فرض کنید جرم لایه غبار همان است که در بخش الف به دست آورده اید، اما شعاع ذرات غبار یک پنجم قبل است (یعنی $r = 0.1\ mm$). در این صورت تغییر قدر ظاهری خورشید در سمت الرأس ناظر روی سطح مریخ چقدر است؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال سوم (۴۰ نمره)

یک ناظر روی زمین داریم که به سیاره زهره نگاه می‌کند و یک ناظر روی سیاره زهره داریم که به زمین نگاه می‌کند. قدر ظاهری که ناظر روی زهره برای زمین ثبت می‌کند را m_E و قدر ظاهری که ناظر روی زمین برای زهره ثبت می‌کند را m_V می‌نامیم.

هنگامی که فاصله زمین و زهره $0.5\ AU$ باشد، $m_E - m_V$ را به دست آورید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۳ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال چهارم (۴۵ نمره)

کیانوش در عرض و طول جغرافیایی ۶۰ درجه شمالی و ۴۰ درجه شرقی و پژمان در عرض و طول جغرافیایی ۳۰ درجه جنوبی و ۱۰ درجه شرقی رو به شرق ایستاده‌اند و تصمیم می‌گیرند تا هر یک در مسیری مستقیم که روبرویشان است شروع به حرکت کنند و این مسیر مستقیم را ادامه بدهند. نسبت سرعت حرکت کیانوش به سرعت حرکت پژمان چقدر باید باشد تا آن‌ها با طی کمترین مسافت در یک نقطه به هم برسند؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۴ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال پنجم (۵۰ نمره)

یک خوشه ستاره‌ای شامل ۱۵۰۰ ستاره با جرم های تقریبا یکسان و هر کدام به جرم خورشید هستند. این خوشه ستاره‌ای به صورت کروی است وستاره‌ها در آن تقریبا یا یک توزیع یکنواخت قرار گرفته‌اند .شعاع خوشه در حدود ۲,۵ پارسک است. خوشه فوق در فاصله ۱۳۰۰ پارسکی از ما قرار گرفته است و ضریب خاموشی فضای بین ستاره‌ای از خوشه تا ما در حدود ۰,۷ قدر بر کیلوپارسک است.

الف) قدر ظاهری هر ستاره را محاسبه کنید.

ب) قدر ظاهری خوشه چقدر است؟

ج) قدر ظاهری سطحی خوشه، به طور متوسط چند قدر بر دقیقه قوسی مربع است؟

د) نسبت کمترین سرعت ستاره‌ای در لبه این خوشه که بتواند از گرانش خوشه فرار کند به میانگین سرعت ستاره‌های خوشه چقدر است؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۵ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال ششم (۵۰ نمره)

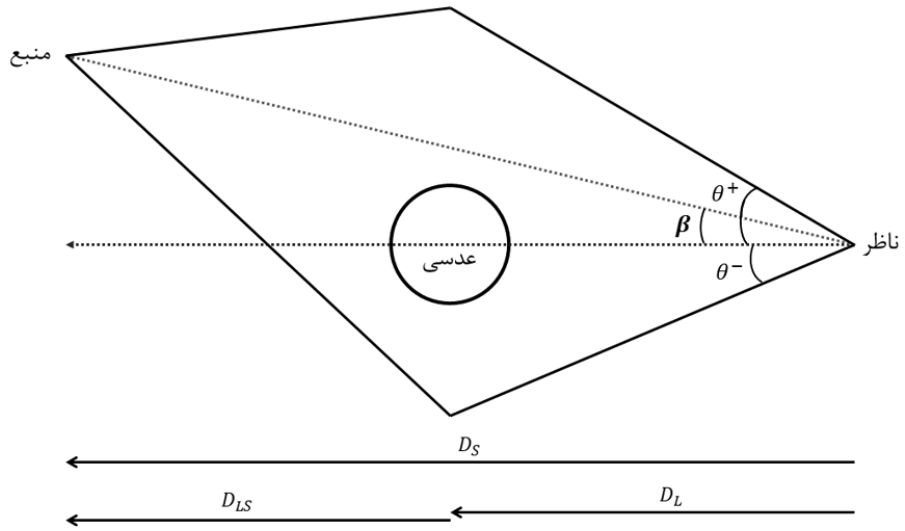
اگر یک سیاه‌چاله پرجرم بین ناظر و منبع نور قرار گیرد، با توجه به معادلات نسبیت عام، توسط ناظر دو تصویر از منبع نور دیده می‌شود. این پدیده مانند این است که سیاه‌چاله مانند یک عدسی عمل می‌کند. منشأ این پدیده، معادلات گرانشی نسبیت عام است که باعث خم شدن مسیر نور در نزدیکی یک جرم می‌شود. لذا به این پدیده، عدسی گرانشی نیز گفته می‌شود. با توجه به شکل زیر اگر جدایی زاویه‌ای بین منبع و سیاه‌چاله β باشد، دو تصویر در زوایای θ^+ و θ^- در دو طرف سیاه‌چاله تشکیل می‌شوند که با رابطه زیر تعیین می‌شوند:

$$\theta^{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

به دست می‌آید که در آن θ_E زاویه اینشتین نام دارد و با رابطه زیر تعریف می‌شود :

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} . \frac{(D_S - D_L)}{D_S D_L}}$$

در رابطه ذکر شده G ثابت جهانی گرانش، M جرم سیاه‌چاله، c سرعت نور، D_S فاصله منبع و ناظر، D_L فاصله سیاه‌چاله (عدسی) تا ناظر است.



الف) اگر منبع و عدسی از دید ناظر دقیقاً در یک راستا باشند انتظار دارید ناظر، چه تصویری از منبع مشاهده کند؟

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

بزرگ‌نمایی هر یک از تصاویر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{\pm} = \frac{\theta^{\pm}}{\beta}\frac{d\theta^{\pm}}{d\beta}$$

این نسبت بزرگ‌نمایی در واقع نسبت مساحت تصویر به مساحت منبع از دید ناظر است. به همین دلیل است که به این پدیده عدسی گرانشی گفته می‌شود زیرا اندازه تصویر را تغییر می‌دهد. مقدار نسبت بزرگ‌نمایی در تصویر را با R نمایش می‌دهیم:

$$R = \frac{|A^{+}|}{|A^{-}|}$$

برای سادگی محاسبات معمولاً پارامتر برخورد y را به صورت $y := \frac{\beta}{\theta_E}$ تعریف می‌کنند.

ب) مقدار R را بر حسب y به دست آورید.

ج) مقدار R را می‌توانیم از تصویرهای ثبت شده برای پدیده عدسی گرانشی به دست آوریم. با فرض پیدا کردن D_S و D_L و β از روش‌های دیگر، رابطه‌ای بنویسید که جرم عدسی را بتوان بر حسب D_S، D_L، R و β به دست آورد. تمام پاسخ‌های ممکن را در نظر بگیرید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۶ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال هفتم (۵۰ نمره)

در یک منظومه ستاره‌ای فرضی، ستاره مرکزی دارای جرمی بسیار بزرگ‌تر از سیارات و اجرام اطرافش است. این ستاره دارای جرمی ۱۰ برابر جرم خورشید و شعاعی ۱۰۰ برابر شعاع خورشید است. یک سیارک با ابعاد ناچیز در مداری دایروی با شعاع ۱٫۲ واحد نجومی به دور این ستاره می‌گردد. یک سیاره با شعاع یک سوم شعاع ستاره نیز در همان صفحه مداری سیارک، در مداری دایروی با شعاع ۱ واحد نجومی به دور ستاره می‌گردد. جهت گردش سیاره و سیارک مانند هم است.

الف) از دید ناظر روی سیارک، هنگامی که سیاره از جلوی ستاره عبور می‌کند، مدت زمانی که سیاره جلوی ستاره است و حداقل بخش کوچکی (غیر صفر) از ستاره را پوشانده است چند روز است؟

ب) ناظر روی سیارک، هنگامی که سیاره از پشت ستاره عبور می‌کند، در چند روز کلاً سیاره را نمی‌تواند ببیند؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۷ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال هشتم (۶۵ نمره)

داده های رصدی ۴ ابرنواختر نوع $SN\ Ia$ در جدول زیر داده شده است. F شار دریافتی است. z قرمزگرایی کهکشان میزبان ابرنواختراست. فرض کنید درخشندگی ابرنواختر نوع $SN\ Ia$ در روشنایی بیشینه برابر است با $5.8 \times 10^9 L_{SUN}$.

الف) مقادیر فاصله ابرنواختر از ما ، d_{SN} (فاصله ویژه ، $proper\ distance$) را بر حسب مگا پارسک و ثابت هابل را بر حسب $\frac{km}{s.Mpc}$ برای هر ابرنواختر به دست آورده و در جدول موجود در پاسخنامه وارد کنید. در جدول، F_{Sun} شار رسیده از خورشید به زمین است.

ب) بر اساس این داده‌های رصدی، تخمینی از سن عالم را برحسب سال، به همراه خطا گزارش کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

توجه: این صفحه جزو پاسخنامه سوال شماره ۸ می باشد و تصحیح خواهد شد.

z	$F(10^{-18}\ F_{Sun})$	$d_{SN}(Mpc)$	$H_0\left(\frac{km}{s.Mpc}\right)$
0.050	3.280		
0.071	1.623		
0.087	1.114		
0.110	0.705		

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۸ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال نهم (۷۰ نمره)

می‌دانیم که خورشید در انتهای عمر خود به یک کوتوله سفید تبدیل می شود که ابعادی در حدود ابعاد زمین خواهد داشت.

الف) نشان دهید که در طول عمر خورشید اندازه حرکت زاویه ای (تکانه زاویه‌ای) آن به دور خودش همواره ثابت است.

ب) خورشید به صورت یک جسم صلب نمی چرخد. دوره تناوب منطقه استوایی و قطبی آن به ترتیب در حدود ۲۴ روز و ۳۰ روز است ولی برای سادگی فرض کنیم که خورشید جسم صلبی است که دوره تناوب آن حدود ۲۷ روز باشد .دوره تناوب خورشید زمانی که به کوتوله سفید تبدیل می شود چند دقیقه خواهد بود؟

ج) یک ناظر بیرونی وقتی خورشید را در اچ-آلفا ($H\alpha$) با طول موج ۶۳۲۸ آنگستروم مشاهده می کند، پهنای طول موجی خط $H\alpha$ ناشی از دوران آن چند آنگستروم خواهد شد؟

امروزه میدان مغناطیسی به طور متوسط روی کل سطح خورشید در حدود ۱۰۰ میکرو تسلا است. مقدار شار مغناطیسی در فرآیند تحول ستاره را ثابت در نظر بگیرید. خط اچ-آلفا ($H\alpha$) به واسطه اثر جداشدگی زیمان می‌تواند به دو خط مجزا تبدیل شود که مقدار فرکانس‌های آن خطوط از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\nu = \nu_0 \pm \frac{\mu_B B}{h}$$

در رابطه بالا B میدان مغناطیسی، h ثابت پلانک و μ_B مگنتون بور نامیده می‌شود که برابر با مقدار زیر است

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

که در آن e بار الکترون، m_e جرم الکترون و h ثابت پلانک است.

د) مقدار جداشدگی $\Delta\nu$ ناشی از اثر زیمان را در زمانی که خورشید به کوتوله سفید تبدیل می شود محاسبه کنید. آن را با قسمت ج مقایسه کرده و بگویید که آیا خط $H\alpha$ به صورت دو خط جداگانه دیده می‌شود یا خیر؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۹ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال دهم (۸۵ نمره)

در منظومه‌ای خیالی، یازده سیاره به جرم‌زمین به دور ستاره‌ای مرکزی با جرم‌زمین می‌گردند. مدار این سیارات یک مدار مشترک دایروی با شعاع یک واحد نجومی است و آن‌ها به صورت منتظم روی دایره توزیع شده‌اند.

الف) انرژی مکانیکی منظومه را بر حسب ژول دست آورید.

ناگهان ستاره مرکزی محو می‌شود. از این پس:

ب) نسبت بیشترین میانگین فاصله ۱۱ جرم باقیمانده از همدیگر به کمترین میانگین فاصله آن‌ها از هم‌دیگر را به دست آورید.

ج) چه مدت زمان طول می‌کشد که میانگین فاصله ۱۱ جرم از کمترین مقدار به بیشترین مقدارش برسد؟ پاسخ خود را بر حسب سال گزارش کنید.

د) حداقل جرم ستاره مرکزی را به نحوی تعیین کنید که پس از محو شدن ستاره، منظومه مقید نماند و متلاشی شود. پاسخ خود را بر حسب جرم زمین بیان کنید.

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱۰ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱۰ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱۰ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال یازدهم (۱۰۰ نمره)

گذر زهره از مقابل خورشید پدیده ای نادر در آسمان می‌باشد که در هر قرن حداکثر ۲ بار روی می‌دهد. اگرچه در قرن بیستم این پدیده رخ نداد اما اوایل قرن بیست و یکم، دو مرتبه گذر زهره در آسمان رویت شد و تا بیش از ۹۰ سال دیگر ما شاهد چنین پدیده ای نخواهیم بود. آخرین گذر زهره در تاریخ ۱۶و ۱۷خرداد ماه ۱۳۹۱ رخ داده که از ساعت ۲۲:۱۰ روز ۱۶ام تا ساعت ۴:۵۰ بامداد روز ۱۷ام به وقت گرینویچ به طول انجامید. رصدگری می‌خواهد از این پدیده عکس بگیرد اما او زمانی متوجه وقوع این پدیده می‌شود که حداقل سه ساعت از شروع این پدیده گذشته است. او تصویری زیبا از این پدیده ثبت کرده است که در زیر آن را مشاهده می‌کنید. در تصویر دوم، مسیر حرکت زهره بر روی قرص خورشید نسبت به راستای قطب شمال سماوی (NCP) و دایرهٔ البروج مشخص شده است. از خروج از مرکز مدار زهره و زمین و حرکت مداری زمین به دور خورشید در مدت گذر صرف‌نظر کنید. تصویر دوم ممکن است نسبت به تصویر اول چرخانده شده باشد.

الف) تصویر در چه ساعتی به وقت گرینویچ ثبت شده است؟

ب) طول و عرض جغرافیایی عکاس را بدست آورید

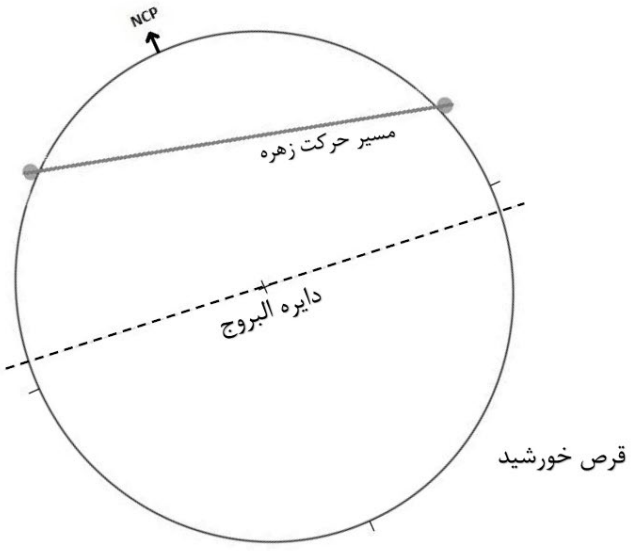
توضیح: تصاویر در صفحه بعد آمده است که جزو پاسخنامه شما می باشد.

در صورت لزوم از این قسمت به
عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ
شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

توجه: این صفحه جزو پاسخنامه سوال شماره ۱۱ می باشد و تصحیح خواهد شد.



www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱۱ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

سوال دوازدهم (۱۲۰ نمره)

آرش کمان‌گیر از اسطوره‌های ایرانی است که برای تعیین مرز ایران و توران ، تیری پرتاب کرد و جان خود را از دست داد. فرض کنید آرش زاویه دست خود را با افق ۶۰ درجه گرفته باشد و این تیر از نقطه‌ای به عرض جغرافیایی $36°30'N$ و طول جغرافیایی $52°42'\ E$ پرتاب شده باشد و هدف آرش این باشد که تیرش به نقطه‌ای با عرض جغرافیایی $37°35'N$ و طول جغرافیایی $61°48'\ E$ اصابت کند. از ارتفاع نقطه پرتاب و نقطه اصابت تیر نسبت به سطح دریا صرف‌نظر کنید. آرش برای این پرتاب سرعت اولیه لازم را به تیر می‌دهد. اما او چرخش زمین را در نظر نگرفته است بنابراین سرعتی به تیر می‌دهد که اگر زمین به دور خود نمی‌چرخید و اصطکاک هوا وجود نداشت، به هدف اصابت می‌کرد.

الف) آرش با چه سرعت اولیه‌ای تیر را پرتاب می‌کند؟

ب) با در نظر گرفتن اثر چرخش زمین به دور خود و صرف‌نظر از اصطکاک هوا، تعیین کنید، محل اصابت تیر آرش چند کیلومتر از روی سطح زمین با هدفی که داشته است، فاصله دارد؟

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس استفاده کنید
مطالب این قسمت تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

پاسخ سوال ۱۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

ادامه پاسخ سوال ۱۲ از نوشتن جواب سوالات دیگر در قسمت تعیین شده برای این سوال خودداری کنید در غیر این صورت، پاسخ داده شده تصحیح نخواهد شد

www.amoozz.ir
https://t.me/Sampaadia

باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی(ره)»

پاسخنامه تشریحی آزمون مرحله دوم

بیستمین دورهٔ المپیاد نجوم واخترفیزیک

کمیته‌ی علمی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

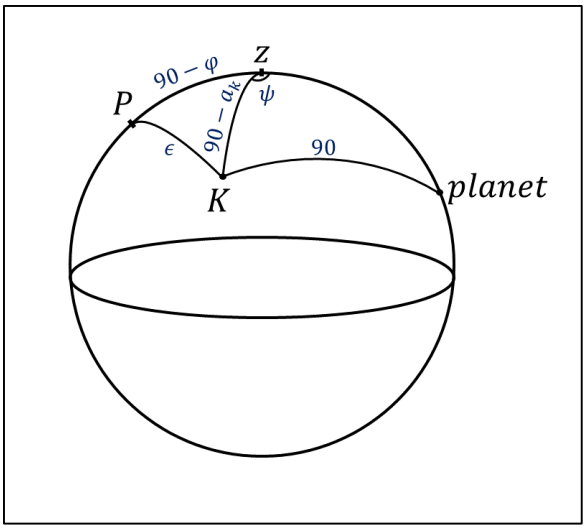
فروردین ماه ۱۴۰۳

از اساتید و دانش‌پژهان گرامی دعوت می‌شود تا نظرات و پیشنهادات خود را به نشانی الکترونیکی کمیته‌ی المپیاد نجوم ایران ارسال نمایند.

IRAstronomyCommittee@gmail.com

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۱)



شکل درست ۵ نمره

رابطه‌ی کسینوس ها برای مثلث K – Z – Planet

کسینوسها ۵ نمره

$$\cos 90 = \sin a_{planet} \sin a_k + \cos a_{planet} \cos_k \cos \psi$$

$$\psi = \cos^{-1}(-\tan a_{planet} \tan a_k) \ (I)$$

رابطه‌ی کسینوس‌ها برای مثلث P – Z - K

کسینوسها ۵ نمره

$$\cos \epsilon = \sin \varphi \sin a_k + \cos \varphi \cos a_k \cos(\pi - \psi)$$

$$\cos \epsilon = \sin \varphi \sin a_k - \cos \varphi \cos a_k \cos(\psi)$$

$$\overset{(I)}{\rightarrow} \cos \epsilon = \sin \varphi \sin a_k + \cos \varphi \cos a_k \tan a_{planet} \tan a_k$$

$$\cos \epsilon = \sin a_k \left(\sin \varphi + \cos \varphi \tan a_{planet}\right)$$

رابطه نهایی ۵ نمره

پس از حل معادله‌ی بالا مقادیر برای φ به صورت زیر خواهند بود:

حل رابطه نهایی ۵ نمره

$$\rightarrow \cos \varphi_1 = 0.438935 \ , \ \cos \varphi_2 = -0.105152$$

$$\cos \varphi_1 = 0.438935 \rightarrow \varphi = \pm 63.864°$$

$$\cos \varphi_2 = -0.105152 \rightarrow \varphi = \pm 96.06$$

استدلال رد کردن جواب نامعقول ۵ نمره

مقدار ± 96.09 دربازه‌ی تعریف شده برای عرض جغرافیایی $-90 < \varphi < 90$ نیست پس صحیح نیست.

مقدار -63.86 نیز صحیح نیست زیرا با توجه به میل قطب شمال دایره البروج، در این عرض k نمی تواند بالای افق قرار گیرد.

پس مقدار صحیح برابر است با:

جواب آخر صحیح ۵ نمره

$$\boldsymbol{\varphi = 63.84°}$$

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۲) قسمت الف)

اگر نوری با شدت I_0 از محیط عبور کند به صورت زیر در طول مسیر جذب می‌شود:

نوشتن این رابطه یا اثبات آن ۵ نمره

$$dI = -n\,\sigma\,I\,dx \rightarrow I = I_0 e^{-n\sigma x} \rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-n\sigma x} \quad (I)$$

نوشتن این رابطه یا شبیه آن ۵ نمره

$$m - m_0 = -2.5\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \xrightarrow{(I)} m - m_0 = 2.5\,n\,\sigma\,x\log_{10} e \quad (II)$$

منطقا با کاهش شدت قدر افزایش می‌یابد پس:

$$\Delta m = m - m_0 = 0.5$$

$$\xrightarrow{(II)} n\,\sigma\,h = \frac{\Delta m}{2.5\log_{10} e} \quad (III)$$

نوشتن این رابطه یا رابطه قدر ۵ نمره

استدلال کم بودن ارتفاع جو ۵ نمره

محاسبه‌ی جرم لایه‌ی غبار:

با تقریبِ خیلی کوچک بودن ارتفاع جو در برابر شعاع مریخ

$$M_{\text{کل}} = (4\pi R_{mars}^2 \times h) \times n \times M_{\text{هر غبار}}$$

$$M_{\text{کل}} = (4\pi R_{mars}^2\ nh)\left(\frac{4}{3}\,\pi\,r_{\text{غبار}}^3\,\rho_{\text{غبار}}\right) = \left(\frac{16\pi}{3}\,R_{mars}^2\,r_{\text{غبار}}\,nh\right)(\sigma\rho_{\text{غبار}})$$

$$M_{\text{کل}} = \left(\frac{16\pi}{3}\,R_{mars}^2\,r_{\text{غبار}}\,\rho_{\text{غبار}}\right)(n\sigma h) \xrightarrow{(III)} M_{\text{کل}}$$

$$= \left(\frac{16\pi}{3}\,R_{mars}^2\,r_{\text{غبار}}\,\rho_{\text{غبار}}\right)\left(\frac{\Delta m}{2.5\log_{10} e}\right)$$

رسیدن به این جرم ۵ نمره

پاسخ نهایی: $\boldsymbol{M_{\text{کل}} = 6.651 \times 10^{13} kg}$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

$$\text{جرم لایه‌ی غبار} \propto r_{\text{غبار}}\ \Delta m \rightarrow \Delta m_{\text{ثانویه}} = \Delta m_{\text{اولیه}} \times \left(\frac{r_{\text{اولیه غبار}}}{r_{\text{ثانویه غبار}}}\right) = 0.5 \times 5 = \mathbf{2.5}$$

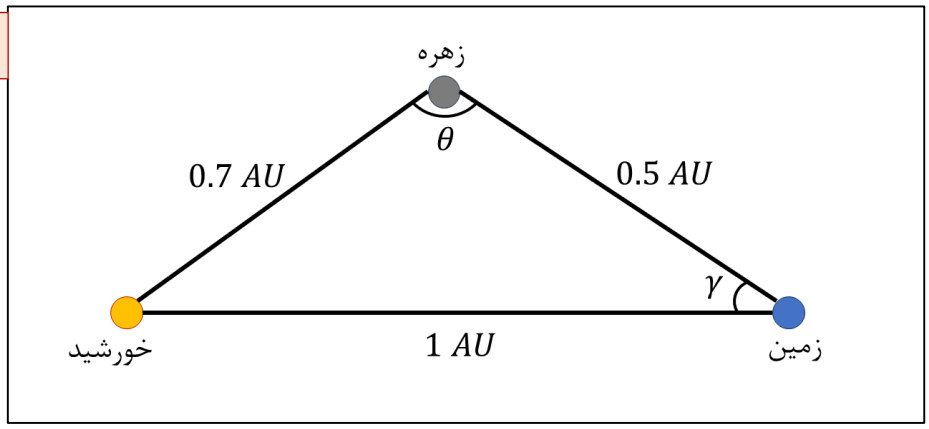
جواب آخر صحیح ۵ نمره

نوشتن این رابطه یا نوشتن دوباره‌ی معادله‌ی جرم لایه‌ی غبار ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۳)

شکل درست ۵ نمره



$$1^2 = 0.7^2 + 0.5^2 - 2 \times 0.5 \times 0.7 \times \cos\theta \rightarrow \theta = 111.804$$

محاسبه‌ی θ ۵ نمره

$$0.7^2 = 1^2 + 0.5^2 - 2 \times 0.5 \times 1 \times \cos\gamma \rightarrow \gamma = 40.536$$

محاسبه‌ی γ ۵ نمره

محاسبه‌ی ضریب هلال یا اشاره به آن:

$$\frac{\text{مساحت ناحیه روشن}}{\text{مساحت کل}} = \frac{\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi R(R\cos\alpha)}{2}}{\pi r^2} = \frac{(1+\cos\alpha)}{2}$$

نوشتن رابطه‌ی فاز ۵ نمره

$$\begin{cases} f_E = \dfrac{L_\odot}{4\pi(1)^2} \times \pi R_\oplus^2 \times \dfrac{1}{2\pi\,(0.5)^2} \times \dfrac{(1+\cos\gamma)}{2} \times A_E \\ f_V = \dfrac{L_\odot}{4\pi(0.7)^2} \times \pi R_V^2 \times \dfrac{1}{2\pi\,(0.5)^2} \times \dfrac{(1+\cos\theta)}{2} \times A_V \end{cases}$$

$$m_E - m_V = -2.5\log\left(\frac{f_E}{f_V}\right)$$

رابطه‌ی قدر ۵ نمره

$$= -2.5\log\left(\frac{\frac{L_\odot}{4\pi(1)^2} \times \pi R_\oplus^2 \times \frac{1}{2\pi\,(0.5)^2} \times \frac{(1+\cos\gamma)}{2} \times A_E}{\frac{L_\odot}{4\pi(0.7)^2} \times \pi R_V^2 \times \frac{1}{2\pi\,(0.5)^2} \times \frac{(1+\cos\theta)}{2} \times A_V}\right)$$

$$m_E - m_V = -2.5\log\left(\left(\frac{0.7}{1}\right)^2 \times \left(\frac{R_\oplus}{R_V}\right)^2 \times \left(\frac{1+\cos\gamma}{1+\cos\theta}\right) \times \frac{A_E}{A_V}\right) \rightarrow m_E - m_V$$

$$= \mathbf{0.326}$$

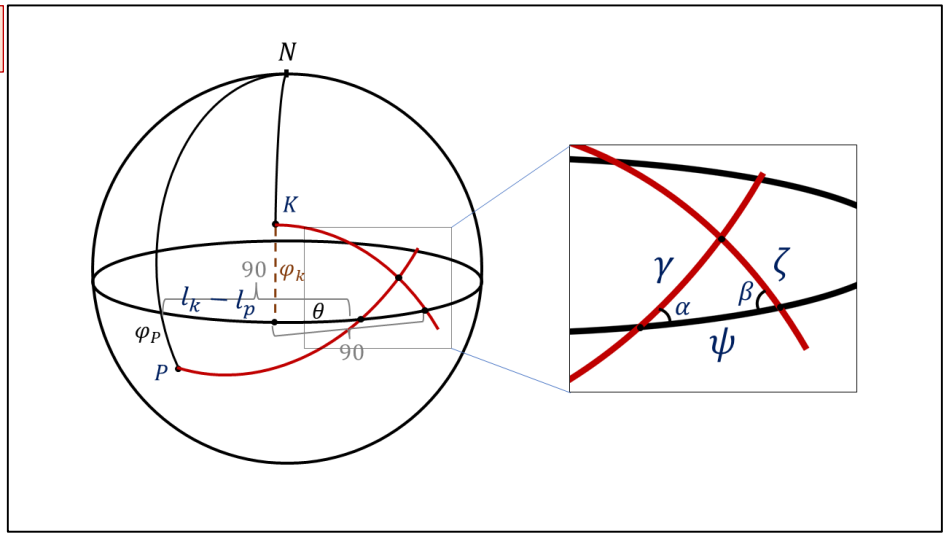
رابطه‌ی نهایی ۱۰ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۴)

شکل درست ۵ نمره



۵ نمره $\beta = \varphi_k \ , \quad \alpha = -\varphi_p$ ۵ نمره

$$\theta = 90 - (l_k - l_p) \rightarrow \psi = 90 - \theta = l_k - l_p$$ ۵ نمره

$$\cos\alpha\cos\psi = \frac{\sin\psi}{\tan\gamma} - \frac{\sin\alpha}{\tan\beta} \rightarrow \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\psi}{\cos\alpha\cos\psi + \frac{\sin\alpha}{\tan\beta}}\right) \rightarrow \gamma = 25.705°$$ ۵ نمره

$$\cos\beta\cos\psi = \frac{\sin\psi}{\tan\zeta} - \frac{\sin\beta}{\tan\alpha} \rightarrow \zeta = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\psi}{\cos\beta\cos\psi + \frac{\sin\beta}{\tan\alpha}}\right) \rightarrow \zeta = 14.502$$ ۵ نمره

استدلال برای زمان‌ها ۵

$$\frac{v_k}{v_p} = \frac{\frac{R(\frac{\pi}{2} - \zeta_{rad})}{t_k}}{\frac{R(\frac{\pi}{2} + \gamma_{rad})}{t_p}} \xrightarrow{t_k = t_p} \frac{v_k}{v_p} = \frac{90 - \zeta}{90 + \gamma} \rightarrow \frac{v_k}{v_p} = 0.615$$ جواب آخر صحیح ۵ نمره

رابطه‌ی نهایی ۵ نمره

* این سوال به وسیله‌ی مثلث‌های دیگری نیز حل می‌شود. حل از راه مثلث‌های دیگر نیز نمره‌ی کامل را کسب خواهد کرد.

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۵) قسمت الف)

جرم ستاره ها با جرم خورشید برابر هستند پس با تقرب خوبی می‌توان گفت ستاره‌ها خورشیدگون هستند.

لذا با تقریب معقول برای هر ستاره داریم: استدلال ۵ نمره

$$L_* = L_\odot$$

$$m_* - m_\odot = -2.5 \log\left(\frac{f_*}{f_\odot}\right) + A\,d \xrightarrow{m_\odot = m_{v_\odot} + BC_\odot}$$

$$m_* = m_{v_\odot} + BC_\odot - 2.5 \log\left(\frac{\frac{L_*}{4\pi d^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi (1)^2}}\right) + A\,d \rightarrow m_* = 16.21$$

رابطه‌ی نهایی ۵ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

رابطه ۵ نمره

$$m_c - m_\odot = -2.5 \log\left(\frac{1500\, f_*}{f_\odot}\right) + A\,d \rightarrow m_C = m_* - 2.5 \log 1500 \rightarrow m_c = 8.27$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ج)

باید حساب کنیم یک دقیقه قوسی مربع معادل چه نسبتی از روشنایی کل خوشه می‌شود:

$$\alpha = \frac{(d \times 1_{arcmin})^2}{\pi R^2}$$

$$\mu - m_c = -2.5 \log\left(\frac{\frac{(d \times 1_{arcmin})^2}{\pi R^2} \times 1500\, f_*}{1500\, f_*}\right)$$

رابطه‌ی صحیح ۵ نمره

$$\mu = m_c - 5 \log\left(\frac{1300}{2.5} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{60}{206265}\right) \rightarrow \mu = 13.61\ \frac{mag}{arcmin^2}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت د)

با توجه به اینکه این خوشه عمر قابل ملاحظه‌ای دارد می‌توان در نظر گرفت ستاره‌ها به تعادل ویریالی در خوشه رسیده‌اند، لذا:

$$2\,K \approx -U\,(I)$$

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

انرژی گرانشی یک کره‌ی یکنواخت:

$$-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$\xrightarrow{(I)} NMv_{avg}^2 \approx -(-\frac{3}{5}\frac{G(NM)^2}{R}) \rightarrow v_{avg} \approx \sqrt{\frac{3}{5}\frac{GNM}{R}} \quad (II)$$

سرعت متوسط
۵ نمره

محاسبه‌ی سرعت فرار از لبه‌ی خوشه:

$$E = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G(NM)m}{R} = 0 \rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GNM}{R}} \quad (III)$$

سرعت فرار
۵ نمره

$$\xrightarrow{(II),(III)} \frac{v_{esc}}{v_{avg}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.83$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

چون نسبت فوق بزرگتر از ۱ است، خوشه از هم متلاشی نمی‌شود.

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۶) قسمت الف)

در آن صورت $\beta = 0$ و θ^+ و θ^- هر دو برابر با θ_E می‌شوند لذا شکل از دو طرف تقارن خواهد داشت. هم‌چنین به خاطر اینکه ارجحیتی بین جهات سمتی مختلف وجود ندارد، در همه‌ی سمت‌ها می‌توانیم پرتو داشته باشیم. لذا انتظار داریم تصویر به صورت دایره باشد. استدلال ۱۰ نمره

قسمت ب)

محاسبه‌ی مشتق ۵ نمره

$$\frac{d\theta^+}{d\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}}(2\beta) = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}}{2\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}} = \frac{2\frac{\theta^+}{\theta_E}}{2\sqrt{y^2+4}} = \frac{\frac{\theta^+}{\theta_E}}{\sqrt{y^2+4}}$$

$$\frac{d\theta^-}{d\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}}(2\beta) = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}}{2\sqrt{\beta^2+4\theta_E^2}} = \frac{2\frac{\theta^-}{\theta_E}}{2\sqrt{y^2+4}} = \frac{\frac{\theta^-}{\theta_E}}{\sqrt{y^2+4}}$$

محاسبه‌ی مشتق ۵ نمره

$$A^+ = \frac{\theta^+}{\beta}\frac{d\theta^+}{d\beta} = \left(\frac{\theta^+}{\theta_E}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+4}}\right) \quad (I)$$ ۵ نمره

$$A^+ = \frac{\theta^-}{\beta}\frac{d\theta^-}{d\beta} = -\left(\frac{\theta^-}{\theta_E}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+4}}\right) \quad (II)$$ ۵ نمره

$$\xrightarrow{(I),(II)} R = \frac{|A^+|}{|A^-|} = \left(\frac{\theta^+}{\theta^-}\right)^2 \rightarrow \boldsymbol{R = \left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{y-\sqrt{y^2+4}}\right)^2} \quad (III)$$ جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ج)

با توجه به (III) داخل پرانتز حتما عددی منفی است پس هنگام رادیکال گرفتن باید $-\sqrt{R}$ را لحاظ کنیم و گرنه به تناقض برمی‌خوریم. استدلال ۵ نمره

$$-\sqrt{R} = \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{y-\sqrt{y^2+4}} \rightarrow y\left(\sqrt{R}+1\right) = \left(\sqrt{R}-1\right)\sqrt{y^2+4} \rightarrow$$

$$y^2\left(\sqrt{R}+1\right)^2 = \left(\sqrt{R}-1\right)^2(y^2+4) \rightarrow y = \frac{4\left(\sqrt{R}-1\right)^2}{\left(\sqrt{R}+1\right)^2 - \left(\sqrt{R}-1\right)^2} \rightarrow$$

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

$$y = \frac{4\left(\sqrt{R}-1\right)^2}{2\sqrt{R}} = \frac{\pm\beta}{\theta_E} = \pm\beta\sqrt{\frac{c^2}{4GM}}\sqrt{\frac{D_S\,D_L}{D_S - D_L}}$$

رابطه‌ی نهایی y ۵ نمره

$$M = \frac{c^2\beta^2}{16\,G}\,\frac{D_S\,D_L}{D_S - D_L}\,\frac{R}{\left(\sqrt{R}-1\right)^4}$$

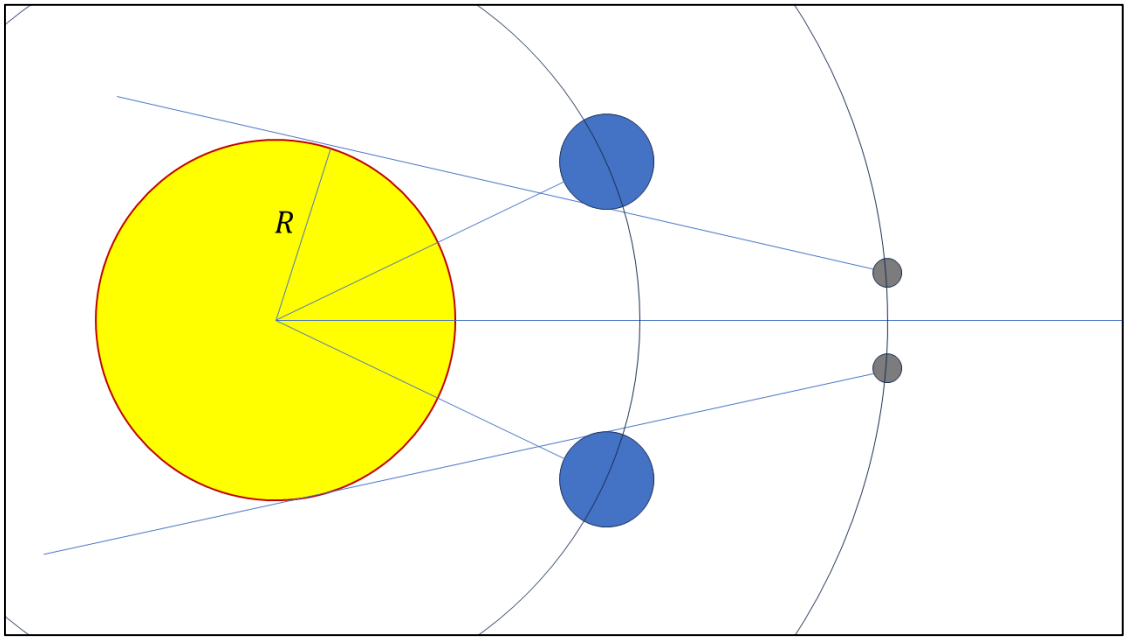
جواب آخر صحیح ۵ نمره

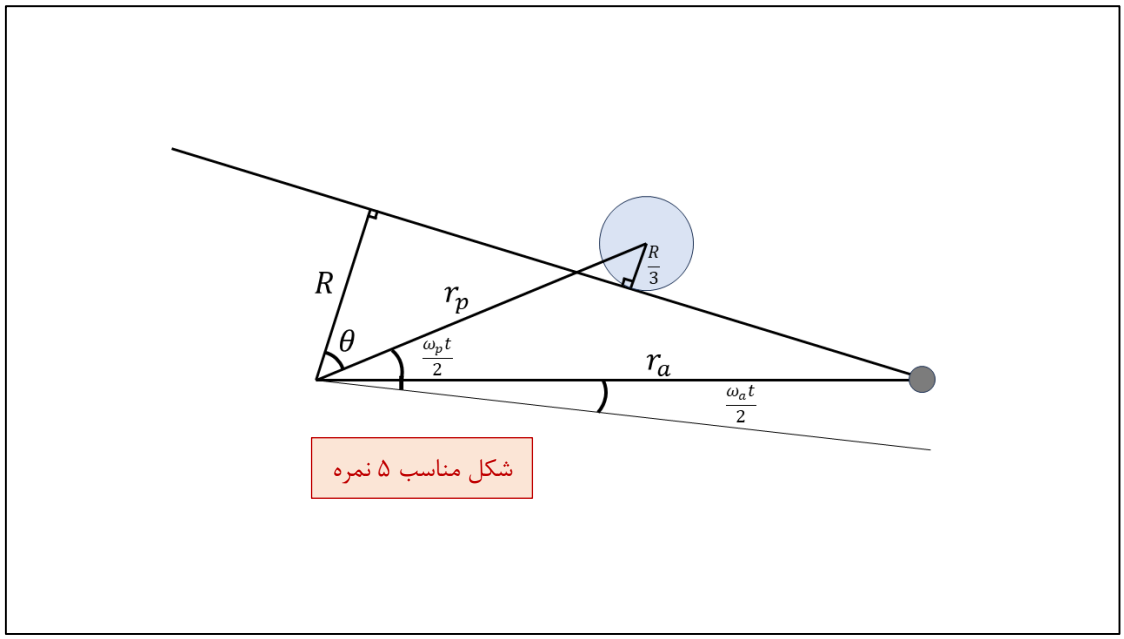
www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۷) قسمت الف)

جرم ستاره‌ی مرکزی بسیار بیشتر از اجرام اطرافش است، لذا توصیف حرکت اجسام اطراف به صورت تک جسم خواهد بود.

برای آنکه از دید سیارک، حداقل بخش کوچکی از ستاره پوشانده شده باشد، لازم است از تماس اول تا تماس چهارم را در نظر بگیریم. مانند شکل زیر:





شکل مناسب ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

$$r_a \cos\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2} + \theta\right) = R$$ معادله‌ی اول ۵ نمره

$$r_p \cos(\theta) = R + \frac{R}{3}$$ معادله‌ی دوم ۵ نمره

در بالا دو معادله و دو مجهول داریم: θ و t . دستگاه بالا را باید حل کنیم تا t را بیابیم:

$$r_a \cos\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right)\cos\theta - r_a \sin\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right)\sin\theta = R \rightarrow$$

$$r_a \cos\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right)\left(\frac{\frac{4}{3}R}{r_p}\right) - r_a \sin\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{4}{3}R}{r_p}\right)^2} = R \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} x := r_a\left(\frac{(\omega_p - \omega_a)t}{2}\right) \rightarrow x\left(\frac{4R}{3r_p}\right) - \sqrt{r_a^2 - x^2}\sqrt{1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2} = R$$

$$(r_a^2 - x^2)\left(1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2\right) = x^2\left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2 + R^2 - 2xR\left(\frac{4R}{3r_p}\right) \rightarrow$$

$$x^2 - 2x\left(\frac{4R^2}{3r_p}\right) + R^2 - r_a^2\left(1 - \left(\frac{4R}{3r_p}\right)^2\right) = 0$$

پس از حل معادله‌ی درجه‌ی دوی فوق داریم:

$$x_1 = -8.73589 \times 10^{10}\ m$$

این پاسخ امکان ندارد اتفاق بیفتد زیرا لازمه‌اش آن است که $(\omega_p - \omega_a)t > \pi$ باشد که از لحاظ هندسی منتفی است. بنابراین عدد صحیح برابر است با:

$$x_2 = 1.73477 \times 10^{11}\ m$$

$$\xrightarrow{\text{حرکت یک جسم}} \omega_p = \sqrt{\frac{GM}{r_p^3}}\ , \omega_a = \sqrt{\frac{GM}{r_a^3}} \rightarrow t$$

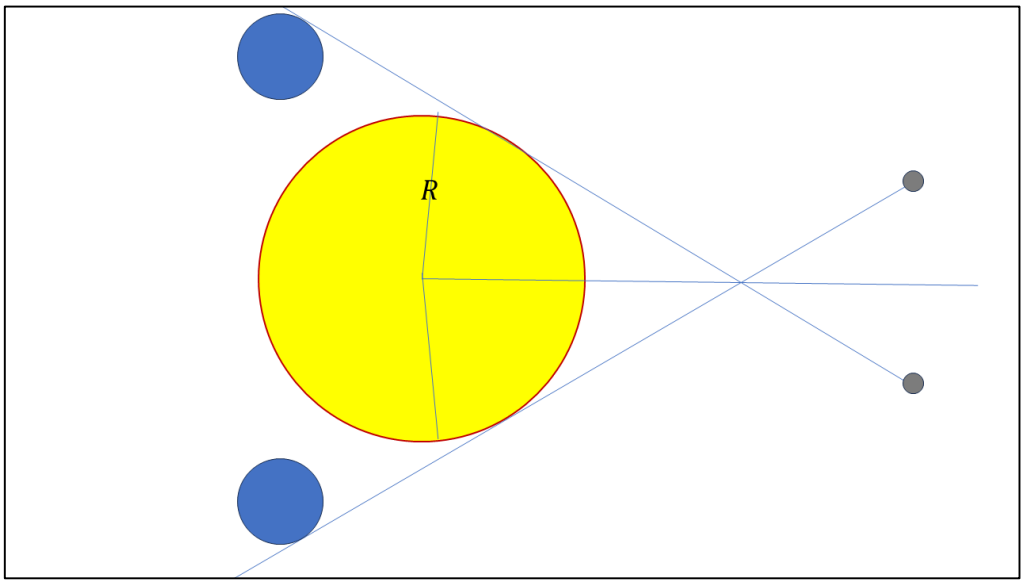
$$= \frac{2}{\sqrt{GM}\left(\frac{1}{\sqrt{r_p^3}} - \frac{1}{\sqrt{r_a^3}}\right)}\cos^{-1}\left(\frac{x}{r_a}\right) \rightarrow$$

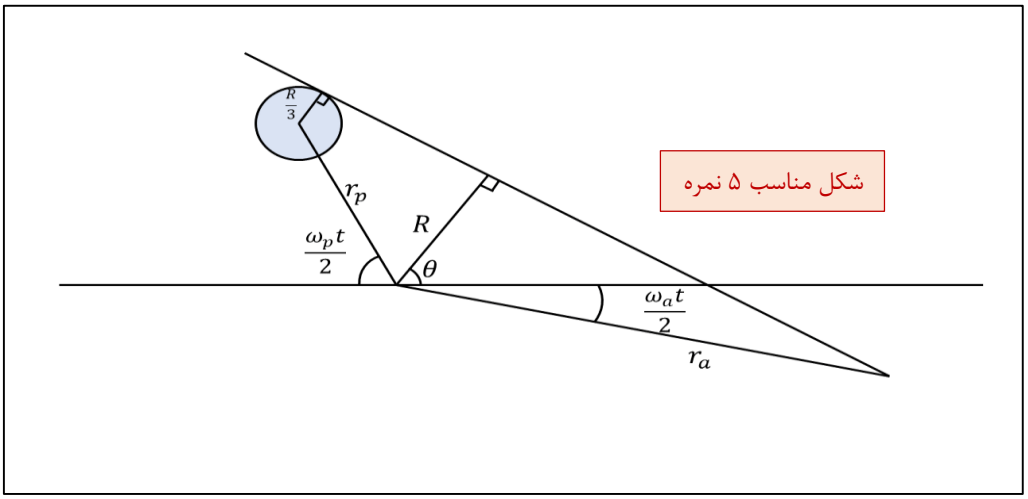
رابطه‌ی نهایی ۵ نمره

$$t = 3.599 \times 10^6\ s \rightarrow \boldsymbol{t = 41.66\ days}$$ جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

شکل این قسمت به صورت زیر می‌باشد:





شکل مناسب ۵ نمره

$$r_a \cos\left(\theta + \frac{\omega_a t}{2}\right) = R \quad (I)$$ معادله‌ی اول ۵ نمره

معادله‌ی دوم ۵ نمره

$$r_p \cos\left(\pi - \theta - \frac{\omega_p t}{2}\right) = R - \frac{R}{3} = \frac{2}{3}R \rightarrow -r_p \cos\left(\theta + \frac{\omega_p t}{2}\right) = \frac{2}{3}\ R \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \left(\theta + \frac{\omega_p t}{2}\right) - \left(\theta + \frac{\omega_a t}{2}\right) - \frac{\left(\omega_p - \omega_a\right) t}{2} = \cos^{-1}\left(-\frac{2R}{3r_p}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{R}{r_a}\right)$$

$$t = 9.483 \times 10^6\ s \rightarrow \boldsymbol{t = 109.76\ days}$$ رابطه‌ی نهایی ۵ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۸) قسمت الف)

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

به خاطر انبساط زمان کیهان‌شناختی و کاهش انرژی فوتون‌های دریافتی داریم:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2(1+z)^2} \quad \chi: \text{طول همراه}$$ ۵ نمره

در جهان تخت طول همراه (χ) با طول ویژه (d_p) برابر است. جهان ما با تقریب خیلی خوب تخت است پس:

$$\chi \approx d_p$$

$$F = \frac{L}{r\pi\, d_p^2\,(1+z)^2} \rightarrow d_p = \frac{1}{1+z}\sqrt{\frac{L}{4\pi\, F}}$$ ۵ نمره

رابطه‌ی داپلر نسبیتی به صورت زیر است:

$$1+z = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \rightarrow \left(1-\frac{v}{c}\right)(1+z)^2 = 1+\frac{v}{c} \rightarrow v = c\left(\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}\right) \quad (I)$$ ۵ نمره

طبق قانون هابل جهان تخت داریم:

$$v = H_0\, d_p \rightarrow H_0 = \frac{v}{d_p} \rightarrow H_0 = v(1+z)\sqrt{\frac{4\pi\, F}{L}}$$ ۵ نمره

$$\overset{(I)}{\rightarrow} H_0 = c\sqrt{\frac{4\pi\, F}{L}}\frac{(1+z)(2+z)(1+z-1)}{(1+z)^2+1} \rightarrow$$

$$H_0 = c\sqrt{\frac{4\pi\, F}{L}}\frac{(1+z)(2+z)(z)}{(1+z)^2+1}$$ رابطه‌ی نهایی ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

به کمک روابط به دست آمده جدول را پر می‌کنیم:

z	$F\ (10^{-18}\ F_{sun})$	$d_{SN}\ (Mpc)$	$H_0\ (\frac{km}{s.Mpc})$
0.050	3.280	*194.41*	*75.23*
0.071	1.623	*270.96*	*75.83*
0.087	1.114	*322.24*	*77.69*
0.110	0.705	*396.6*	*78.64*

۲ نمره ۲ نمره ۲ نمره ۲ نمره ۲ نمره ۲ نمره ۲ نمره ۲ نمره

قسمت ب)

واحد H_0 از بعد $\frac{1}{\text{زمان}}$ است پس H_0^{-1} بعد زمان دارد. همچنین $\frac{1}{H_0}$ می‌تواند تخمینی از سن عالم باشد زیرا با صادق دانستن تقریبی قانون هابل در زمان‌ها مختلف کیهان برای فاصله‌ی بین دو جسم بعد از گذشتن زمان t از شروع عالم

استدلال ۴ نمره

$$d = vt\ , v = Hd \xrightarrow{t=\frac{1}{H}} v = H(vt) \rightarrow t = \frac{1}{H}$$

۵ نمره

بنابراین $\frac{1}{H_0}$ را به عنوان تخمین مناسب از سن عالم پیشنهاد می‌کنیم. اما چهار داده برای H_0 داریم. بهترین گزارش این خواهد بود که میانگین $\frac{1}{H_0}$ را گزارش کنیم:

استدلال میانگین و خطا ۵ نمره

$$t_0 \approx < \frac{1}{H_0} > \rightarrow t_0 \approx 12.754\ Gyr$$

جواب آخر صحیح میانگین ۵ نمره

برای گزارش خطای $\frac{1}{H_0}$ از انحراف معیار آن‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{H_{0_i}} - avg\left(\frac{1}{H_0}\right)\right)^2}{4}} \rightarrow \sigma = 223\ Myr = 0.22\ Gyr$$

جواب آخر صحیح خطا ۵ نمره

در نهایت:

$$t_0 = 12.75\ \pm 0.22\ \ Gyr$$

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۹) قسمت الف)

لایه‌های درونی خورشید به لایه‌های بیرونی خورشید طبق قانون پوسته‌ی نیوتن به صورت شعاعی نیرو وارد می‌کنند. گشتاور این فرم نیرو صفر است. ۵ نمره

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = (r\hat{r}) \times (F\hat{r}) \rightarrow \tau = 0$$

۵ نمره

می‌دانیم $\tau = \frac{dL}{dt}$ و چون $\tau = 0$ است بنابراین: ثابت $= \frac{dL}{dt}$ یعنی L که تکانه‌ی زاویه‌ای خورشید باشد ثابت است. استدلال ۵ نمره

[توضیح بالا در حد ابتدایی خوب است و اگر دانش‌پژوه آن را نوشته باشد قابل قبول است اما توضیح بالا کاملا علمی نیست. ممکن است سوال شود اصطکاک بین لایه‌های مختلف خورشید را چرا در مدل وارد نکردیم. پاسخ این است که حتی اگر اصطکاک بین لایه‌های خورشید را وارد کنیم با توجه به قانون $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ در دستگاه مرکز جرم، به جهت اینکه تمام ذرات یک سیستم بزرگی مثل خورشید به فرم قانون سوم نیوتن (عمل و عکس‌العمل) به همدیگر نیرو وارد می‌کنند، جمع تمام نیروهای داخلی صفر است و نیروی خارجی نیز به سیستم وارد نمی‌شود. (خورشید با تقریبی خیلی خوب نسبت به سیارات کم جرم اطرافش ایزوله به حساب می‌آید) لذا جمع نیروهای خارجی وارد شده به مرکز جرم صفر است بنابراین: $\bar{\tau} = 0$ استو لذا $\bar{L}$ ثابت است. بنابراین تکانه‌ی زاویه‌ای کل خورشید نسبت به مرکز جرم خورشید (مرکز هندسی آن) ثابت است.]

قسمت ب)

۵ نمره ۵ نمره

$$L = I\omega \quad , \quad I_{\text{کره}} = \frac{2}{5}MR^2 \rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{I_2\omega_2}{I_1\omega_1} = 1 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{M_1 \approx M_2} \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \xrightarrow{\omega \propto \frac{1}{T}} T_2 = T_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \rightarrow \boldsymbol{T_2 = 3.257\ min}$$

جواب آخر صحیح ۵

رابطه نهایی ۵ نمره

قسمت ج)

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} \xrightarrow{\text{در لبه}} \Delta\lambda = 2\frac{\lambda(R_2\omega_2)}{c} \rightarrow \Delta\lambda = 2\frac{\lambda\,(2\pi R_2)}{c\,T_2} \rightarrow \boldsymbol{\Delta\lambda = 8.64\ \text{Å}} \quad (I)$$

جواب آخر صحیح ۵

رابطه نهایی ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

قسمت د)

$$\phi = B\,A \rightarrow \phi = 4\pi r^2\,B$$ ۵ نمره

$$r_2^2 B_2 = r_1^2 B_1 \rightarrow B_2 = B_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$\rightarrow \Delta\nu = 2\left(\frac{eh}{4\pi m_e}\right)\frac{B}{h} \rightarrow \Delta\nu = 2\frac{eB}{4\pi m_e} \rightarrow \Delta\nu_2 = 2\frac{eB_2}{4\pi m_e}$$ رابطه نهایی ۵ نمره

$$\Delta\nu_{2\,\text{زیمان}} = 3.336 \times 10^{10}\ Hz$$ پاسخ نهایی صحیح برای $\Delta\nu$ یا $\Delta\lambda$ ۵ نمره

از طرفی داریم:

۵ نمره

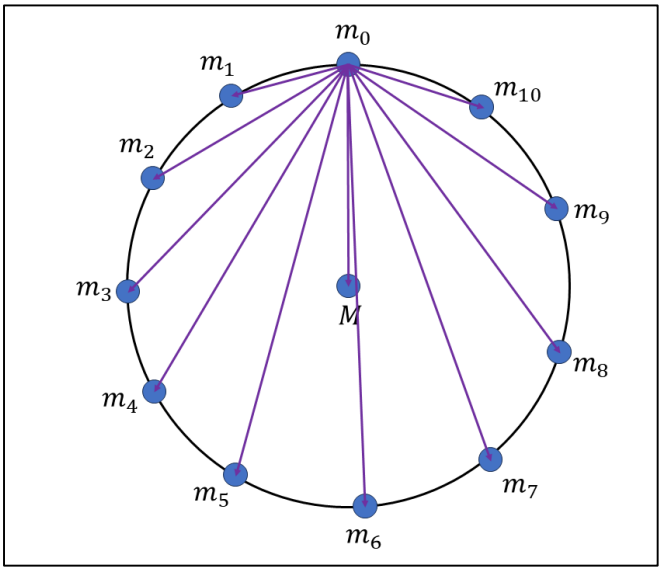
$$\nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow |\Delta\nu| = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda \rightarrow \Delta\lambda_{2\,\text{زیمان}} = \Delta\nu\frac{\lambda_{H\alpha}^2}{c} \rightarrow \Delta\lambda_{2\,\text{زیمان}} = 0.45\ \text{Å} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \Delta\lambda_{\text{زیمان}} < \Delta\lambda_{\text{پهن شدگی}}$$

پس خط $H\alpha$ به صورت دو خط جدا دیده نمی‌شود. نتیجه گیری ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۱۰) قسمت الف)



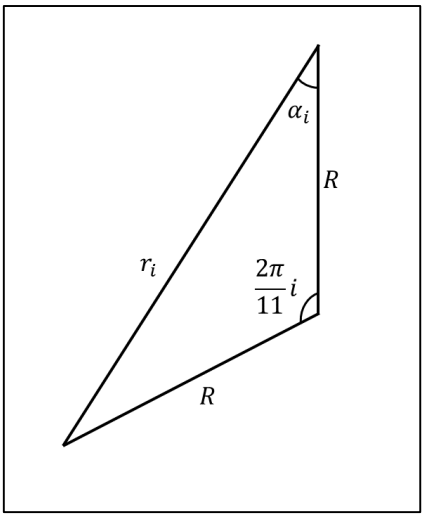
نیروی برآیند وارد بر یکی از این اجرام را به صورت ؟ به دست می‌آوریم.

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2}\,\hat{r} - 2Gm^2\,\hat{r}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^2}\cos\alpha_i$$

۵ نمره

در رابطه‌ی بالا r_i فاصله‌ی جسم m_i تا m_0 است و α_i زاویه‌ی بردار نیرو نسبت به محور عمودی است.

می‌توانیم r_i را بر حسب شعاع دایره (R) به این صورت بنویسیم:



$$r_i = 2R\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{11}i}{2}\right) \rightarrow r_i = 2R\sin(\frac{\pi i}{11})$$

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

$$\alpha_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{2\pi}{11} i}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi i}{11} \rightarrow \cos\alpha_i = \sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)$$

رابطه نهایی ۱۰ نمره

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2}\,\hat{r} - \frac{1}{2}\frac{Gm^2}{R^2}\,\hat{r}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)} = -\frac{GMm}{R^2}\,\hat{r} - \frac{1}{2}\frac{Gm^2}{R^2}\,\hat{r}\,(8.83194)$$

برای اینکه هر کدام از اجرام ۱۱ گانه بتواند روی دایره به حرکت خود ادامه دهند لازم است $F = \frac{mv^2}{R}$ باشد.

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{\frac{G}{R}}\sqrt{M + \frac{8.83194}{2}\,m}$$

$$K = \frac{11}{2}mv^2 = 5.5\frac{Gm}{R}\left(M + \frac{8.83194}{2}\,m\right) \xrightarrow{M=m} K = 29.78784\frac{Gm^2}{R}\;(I)$$

رابطه نهایی K ۵ نمره

هر دو جرم نسبت به هم پتانسیل $-\frac{Gm_im_j}{r_{ij}}$ دارندپس:

رابطه نهایی U ۵ نمره

$$U = -11\frac{GMm}{R} - \frac{11}{2}Gm^2\left(2\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{2R\sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)}\right) = -11\frac{Gm^2}{R}\left(1 + \frac{8.83194}{2}\right)$$

$$= -59.57567\frac{Gm^2}{R}\quad (II)$$

جواب آخر درست ۵ نمره

$$E = K + U \xrightarrow{(I),(II)} E = -29.78783\frac{Gm^2}{R} = -4.721 \times 10^{29}\,J$$

قسمت ب)

پس از اینکه جرم مرکزی حذف می‌شود به خاطر تقارن، دایروی و مشترک بودن مدارها قبل از حذف شدن در هر لحظه از زمان ۱۱ جرم روی یک دایره به صورت منتظم توزیع شده خواهند بود.

استدلال ۵ نمره

بنابراین نیروی برآیند وارد شده به هر جرم $-\frac{1}{2}\gamma\frac{Gm^2}{r^2}\,\hat{r}$ خواهد بود که در آن:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi i}{11}\right)} = 8.83194$$

در نتیجه این مسئله را می‌توان به یک مسئله‌ی تک جسم تقلیل داد. در لحظه‌ی محو شدن ستاره‌ی مرکزی سرعت اولیه‌ی هر جسم v_0 بوده است و عمود بر راستای شعاع بوده است و پس از آن هر جسم تحت تاثیر

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

نیروی مرکزی $-\frac{1}{2}\gamma\frac{Gm^2}{r^2}\hat{r}$ قرار می‌گیرد. چون فرم نیرو مثل حالت تک جسم شده است هر نتیجه‌ای که برای مسئله‌ی تک جسم داشته باشیم را می‌توان برای این حالت نیز استفاده کرد. در مسئله‌ی تک جسم داریم.

$$F = -\frac{km}{r^2}\hat{r} \rightarrow \text{مدار مقطع مخروطی}$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{k}{r} > 0 \rightarrow \text{مدار بیضوی است}$$

در این مسئله $k = \frac{1}{2}\gamma Gm$ است پس:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}\gamma Gm}{R} = \frac{Gm}{R}\left(\frac{1+\frac{8.83194}{2}}{2} - \frac{8.83194}{2}\right) = \frac{Gm}{R} \times (-1.70799) < 0$$

پس مدار هر جسم بیضوی هست. از رابطه‌ی سرعت در حضیض داریم:

$$v_p = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\gamma Gm}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

رابطه نهایی v_p ۱۰ نمره

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}\gamma Gm}{R} = -1.70799\frac{Gm}{R} = -\frac{\frac{1}{2}\gamma Gm}{2a}$$

$$a = R\left(\frac{\gamma}{4 \times 1.70799}\right) \rightarrow v_p = v_0 \rightarrow \sqrt{2 \times 1.70799}\sqrt{\frac{Gm}{R}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

رابطه نهایی a ۱۰ نمره

$$= \sqrt{\frac{Gm}{R}}\sqrt{1+\frac{\gamma}{2}} \rightarrow e = \frac{\sqrt{1+\frac{\gamma}{2}} - \sqrt{2 \times 1.70799}}{\sqrt{1+\frac{\gamma}{2}} + \sqrt{2 \times 1.70799}} \approx 0.1147$$

چون همه‌ی ابعاد به صورت متناسب با هم بزرگ و کوچک می‌شوند تغییرات میانگین فاصله‌ی اجرام از همدیگر متناسب با تغییرات فاصله‌ی یک جسم از مرکز است.

استدلال ۵ نمره

$$\frac{\text{بیشترین میانگین فاصله}}{\text{کمترین میانگین فاصله}} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \mathbf{1.259}$$

جواب آخر صحیح ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

قسمت ج)

می‌توانیم مدت زمانی که یک جسم از حضیض خود به اوج می‌رود را حساب کنیم که نصف دوره‌ی تناوبش است.

$$t = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k}} = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\gamma GM}}$$

$$= \sqrt{\frac{R^3}{Gm}} \times \pi \left(\frac{\gamma}{4 \times 1.70799}\right)^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$$

$$\xrightarrow{m=M_\oplus\ ,\ R=1\ AU} \boldsymbol{t = 202.71\ yr}$$

رابطه‌ی نهایی t ۵ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت د)

برای این منظور لازم است مدار هر جسم سهمی یا هذلولی شود:

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{\frac{1}{2}\gamma Gm}{R} \geq 0 \rightarrow \frac{G}{2R}\left(M + \frac{1}{2}\gamma m\right) - \frac{\frac{1}{2}\gamma Gm}{R} \geq 0$$

$$\rightarrow M \geq \gamma m\left(2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\gamma m \rightarrow \text{حداقل جرم ستاره مرکزی} = \frac{1}{2}\gamma M_\oplus = \boldsymbol{4.416\ M_\oplus}$$

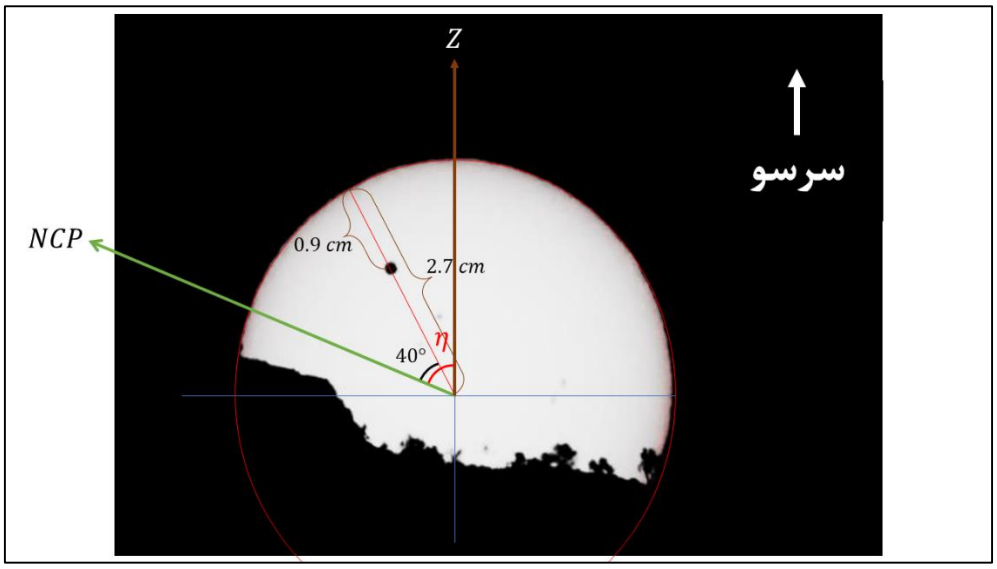
نامساوی نهایی ۵ نمره

جواب آخر صحیح ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۱۱) قسمت الف)

از تصویر دوم باید وضعیت جایی از مسیر که شبیه تصویر اول باشد را به دست آوریم. برای این امر مرکز هر دو دایره را بدست می‌آوریم.

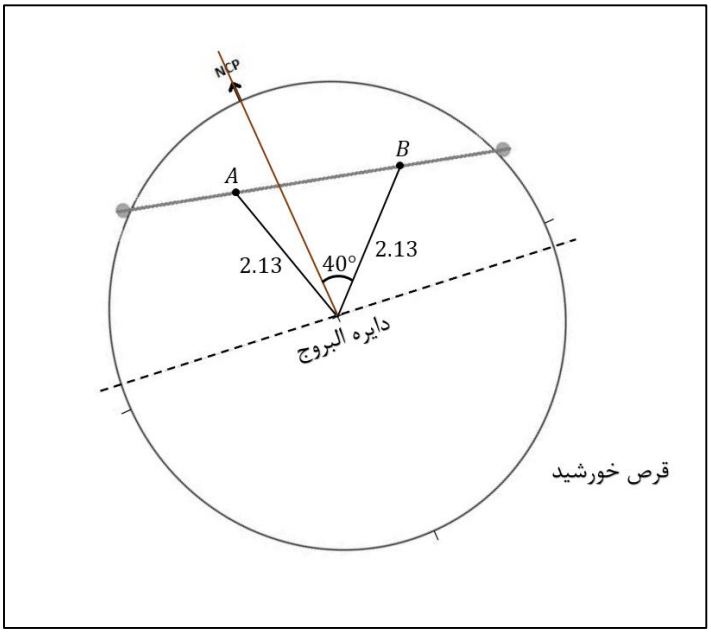


رسم درست روی شکل ۵ نمره

از تصویر اول:

$$\frac{\text{فاصله زهره از مرکز}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{2.7 - 0.9}{2.7} = \frac{2}{3}$$

۵ نمره



رسم درست روی شکل ۵ نمره

از تصویر دوم:

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

جایی از مسیر که نسبت فاصله‌ی آن از مرکز به شعاع دایره برابر $\frac{2}{3}$ را پیدا می‌کنیم.

$$\text{شعاع دایره} = 3.2\ cm \rightarrow \text{فاصله‌ی مطلوب از مرکز} = 3.2 \times \frac{2}{3} = 2.133\ cm$$

۵ نمره

مکان‌های A و B محتمل هستند. کل مدت زمان گرفت طبق اطلاعات سوال $1:50 + 4:50 = 6:40$ است.

از طرفی با توجه به مکان NCP و قطب شمال دایره‌البروج و اینکه جهت گردش زهره و زمین همانند هم و پادساعتگرد است و سرعت زاویه‌ای زهره از زمین بیشتر است به راحتی می‌توان استدلال نمود در مدت گرفت، مسیر حرکت زهره از سمت چپ به راست روی شکل است.

اشاره به جهت حرکت ۵ نمره

اگر A مکان زهره باشد داریم:

$$t_A = \frac{1.75}{5.35}(6^h:40^m) \rightarrow t_A = 2^h:10^m:50.47^s$$

استدلال اینکه چرا A نمی‌تواند درست باشد ۵ نمره

این مدت زمان از شروع گرفت از سه ساعت که در صورت سوال گفته شده است کمتر است پس موقعیت A نمی‌تواند جواب باشد لذا موقعیت B را می‌پذیریم.

$$t_B = \frac{3.65}{5.35}(6^h:40^m) \rightarrow t_B = 4^h:32^m:53.83^s$$

۵ نمره

پاسخ فوق از ۳ ساعت بیشتر است و مشکلی ندارد.

$$\text{زمان تصویر} = 22:10 + (4^h:32^m:53.83^s) = \mathbf{2:42:54}$$ روز 17 ام خرداد به وقت گرینویچ

جواب آخر صحیح ۵ نمره

قسمت ب)

حال که موقعیت B در عکس تایید شد راستای NCP را با حفظ زاویه نسبت به B روی تصویر اصلی مشخص می‌کنیم.

این کار را انجام می‌دهیم و با توجه به اینکه می‌بینیم راستای NCP بالای افق است و به سمت چپ است نتیجه می‌گیریم که عرض جغرافیایی ناظر شمالی است و خورشید در تصویر در حال طلوع است.

نتیجه گیری ۵ نمره

نتیجه گیری ۵ نمره

زاویه‌ی بین راستای سرسو و NCP را در تصویر واقعی اندازه می‌گیریم. این همان زاویه‌ی اختلاف منظر هنگام طلوع است. (زاویه‌ی η)

از روی شکل: $\eta = 64°$ ۵ نمره

در انتهای روز ۱۶ ام که گذره زهره اتفاق افتاده است $16 + 31 + 31$ روز از اعتدال بهاری گذشته است پس طول سماوی خورشید برابر است با:

$$\lambda_{\odot} = \frac{31 + 31 + 16}{365.25} \times 360 = 76.879°$$ ۵ نمره

با صرف نظر کردن از خروج از مرکز مدار زمین و در نظر گرفتن مقدار صفر برای تعدیل زمان در اول بهار بعد خورشید میانگین برابر است با طول سماوی خورشید:

$$RAMS = \lambda_{\odot} \rightarrow RAMS = 76.879$$ ۵ نمره

با استفاده از روابط تبدیل مختصات استوایی به دایره‌البروجی، میل و بعد خورشید را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin \delta_{\odot} = sin\epsilon \; sin\lambda_{\odot} \rightarrow \delta_{\odot} = 22.851°$$ ۵ نمره

$$\tan \alpha_{\odot} = cos\epsilon \; tan\lambda_{\odot} \rightarrow \alpha_{\odot} = 75.739°$$ ۵ نمره

محاسبه‌ی تعدیل زمان در روز ۱۶ خرداد ماه:

$$E = RAMS - \alpha_{\odot} = 1.14°$$ ۵ نمره

حال کره‌ی ناظر را بررسی می‌کنیم.

رابطه‌ی کسینوس‌ها در مثلث PZX برای محاسبه‌ی عرض جغرافیایی عکاس:

$$\sin \varphi = \cos(90) \sin \delta_{\odot} + \sin(90) \cos \delta_{\odot} \cos \eta$$ ۵ نمره

$$\varphi = \sin^{-1}(\cos \delta_{\odot} \cos \eta) \rightarrow \varphi = 23.826°$$ جواب آخر صحیح ۵ نمره

محاسبه‌ی زاویه ساعتی طلوع خورشید:

$$\cos H_{\odot} = -\tan \varphi \tan \delta_{\odot} \rightarrow H_{\odot} = -100.725°$$

$$HAMS = H_{\odot} - E \rightarrow HAMS = 258.135° \rightarrow HAMS = 17^h : 12^m : 32.38^s$$

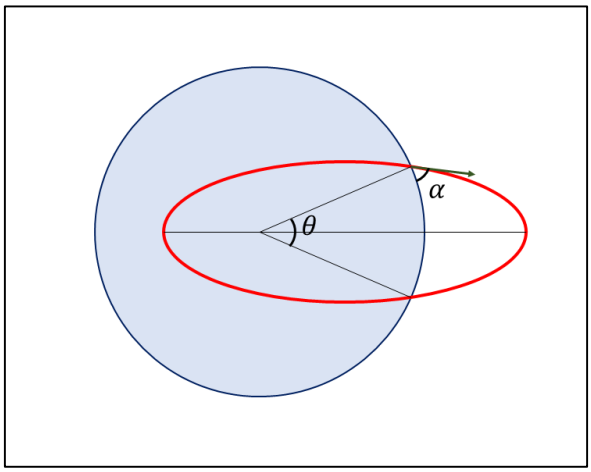
طول جغرافیایی عکاس برابر است با: رابطه‌ی طول جغرافیایی ۵ نمره

$$l = HAMS - GMT \rightarrow l = [(17^h : 12^m : 32.38^s) - (12^h + 2^h : 42^m : 54^s)]] \times 15$$

$$l = 37.4° \; E$$ جواب آخر صحیح ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

سوال ۱۲) قسمت الف)



با توجه به معادله‌ی قطبی بیضی داریم:

$$R_\oplus = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\pi-\frac{\theta}{2})} \rightarrow R_\oplus = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos(\frac{\theta}{2})} \quad (I)$$

۵ نمره

با توجه به رابطه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم در مدار بیضوی داریم:

$$h = R_\oplus v \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = R_\oplus v\cos(\alpha) = \sqrt{GM_\oplus a(1-e^2)} \rightarrow R_\oplus^2 v^2\cos^2\alpha$$
$$= GM_\oplus a(1-e^2) \quad (II)$$

۵ نمره

با توجه به پایستگی انرژی در مدار بیضی داریم:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus}{2a} \quad (III)$$

۵ نمره

$$\xrightarrow{(I),(II)} R_\oplus^2 v^2\cos^2\alpha = GM_\oplus R_\oplus\left(1-e\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{(III)} R_\oplus\left(\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}-\frac{GM_\oplus}{a}\right)\cos^2\alpha = GM_\oplus\left(1-e\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{R_\oplus}{2-\frac{1-e\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\alpha}} = \frac{R_\oplus\cos^2\alpha}{e\cos\frac{\theta}{2}-1+2\cos^2\alpha}$$

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

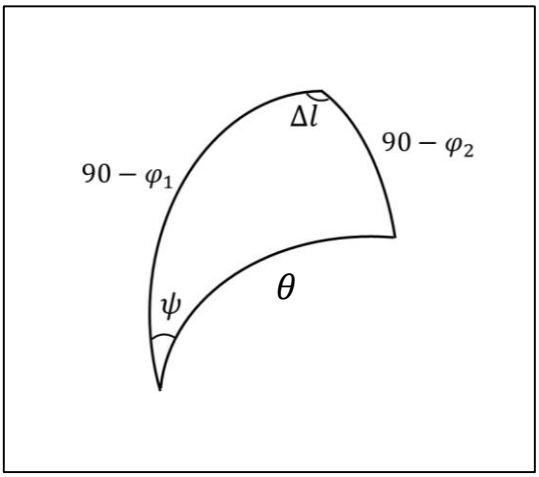
فرآیند حل دستگاه سه معادله ۱۵ نمره

$$R_\oplus - R_\oplus e\cos\frac{\theta}{2} = \frac{R_\oplus \cos^2\alpha}{e\cos\frac{\theta}{2} - 1 + 2\cos^2\alpha}(1-e^2)$$

$$-1 - e^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2e\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\alpha - 2e\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - e^2\cos^2\alpha$$

$$\rightarrow e^2\left(\cos^2\alpha - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2e\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad (IV)$$

مقدار θ را از رابطه‌ی کسینوس‌ها به دست می‌آوریم:



$$\cos\theta = \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta l \rightarrow \theta = 7.341^\circ$$ ۵ نمره

$$\alpha = 60 \xrightarrow{(IV)} e = 0.96627\,, e = 1.04060$$

با توجه به انرژی منفی مدار و مقید بودن آن مقدار بیشتر از یک برای خروج از قابل قبول نیست.

$$e = 0.96627$$ ۵ نمره

$$a = \frac{R_\oplus \cos^2\alpha}{e\cos\frac{\theta}{2} - 1 + 2\cos^2\alpha} \rightarrow a = 3.43\times10^6\ m$$ ۵ نمره

$$v = \sqrt{GM_\oplus\left(\frac{2}{R_\oplus} - \frac{1}{a}\right)} \rightarrow v = 2988.021\frac{m}{s}$$ ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

قسمت ب)

رابطه‌ی چهارجزئی:

$$\sin\varphi_1\cos(l_2-l_1)=\cos\varphi_1\tan\varphi_2-\frac{\sin(l_2-l_1)}{\tan\psi}\rightarrow\psi=78.79°$$ ۵ نمره

در محل پرتاب زمین با سرعت $R_\oplus\omega_\oplus\cos\varphi_1$ در حال چرخیدن به سمت شرق است پس:

$$v'_{\text{افقی}}=\sqrt{v^2\cos^2\alpha+{R_\oplus}^2{\omega_\oplus}^2\cos^2\varphi_1+2v\cos\alpha\,R_\oplus\omega_\oplus\cos\varphi_1\sin(\psi)}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{23^h:56^m}\rightarrow\ v'_{\text{افقی}}=\ 1861.776\frac{m}{s}$$

$$v_{\text{عمودی}}=v\sin\alpha\rightarrow\alpha'=\tan^{-1}\left(\frac{v_{\text{عمودی}}}{v'_{\text{افقی}}}\right)\rightarrow\ \alpha'=54.266°$$ ۵ نمره

$$v'=\sqrt{v'^2_{\text{افقی}}+v^2_{\text{عمودی}}}\rightarrow v'=3187.854\frac{m}{s}$$ ۵ نمره

از معادله‌ی پایستگی انرژی در مدار جدید داریم:

$$\frac{v'^2}{2}-\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}=\ -\frac{GM_\oplus}{a'}\rightarrow a'=\frac{GM_\oplus}{2\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}-v'^2}\rightarrow\ \ a'=3.46739\times10^6\,m$$ ۵ نمره

$$R_\oplus^2v'^2\cos^2\alpha'=\ GM_\oplus a'\left(1-e'^2\right)\rightarrow e'=\sqrt{1-\frac{R_\oplus^2v'^2\cos^2\alpha'}{GM_\oplus a'}}\rightarrow e'$$

$$=0.94768$$ ۵ نمره

از معادله‌ی قطبی بیضی برای مدار جدید داریم:

$$R_\oplus=\frac{a\left(1-e'^2\right)}{1+e'\cos\left(\pi-\frac{\theta'}{2}\right)}\rightarrow\ R_\oplus=\frac{a\left(1-e'^2\right)}{1-e'\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}\rightarrow$$

$$\theta'=2\cos^{-1}(\frac{1}{e'}\left(1-\frac{a'(1-e'^2)}{R_\oplus}\right))\rightarrow\theta'=9.331°$$ ۵ نمره

برای محاسبه‌ی عرض جغرافیایی محل برخورد از رابطه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia

$$\sin\varphi_2' = \sin\varphi_1\cos\theta' + \cos\varphi_1\sin\theta'\cos\psi \rightarrow \quad \varphi_2' = 37.75524°$$ ۵ نمره

از رابطه‌ی چهارجزئی برای محاسبه‌ی طول جغرافیایی محل برخورد استفاده می‌کنیم:

$$\sin\varphi_1\cos\psi = \frac{\cos\varphi_1}{\tan\theta'} - \sin\frac{\psi}{\tan(l_2' - l_1)} \rightarrow l_2' = 64.0305660$$ ۵ نمره

اما l_2' طول جغرافیایی مکان جدید اصابت نیست زیرا زمین نیز در این مدت چرخیده است. برای محاسبه‌ی میزان چرخش زمین نیاز است مدت زمان پرواز را بیابیم:

$$\tan\left(\frac{E'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e'}{1-e'}}\tan\left(\frac{\pi - \frac{\theta'}{2}}{2}\right) \rightarrow E' = 179.23495°$$

از معادله‌ی کپلر داریم: نوشتن معادله ۵ نمره

$$\frac{2\pi}{T}\left(\frac{T}{2} - \frac{t_{\text{پرواز}}}{2}\right) = E' - e'\sin E' \rightarrow t_{\text{پرواز}} = T\left(1 - \frac{E' - e'\sin E'}{\pi}\right) \quad (V)$$

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_\oplus}} \xrightarrow{(V)} t_{\text{پرواز}} = 16.8291\ s$$ ۱۰ نمره

$$l'_{2\,\text{واقعی}} = l_2' - \left(\frac{2\pi}{23^h:56^m}\right)t_{\text{پرواز}} \rightarrow l'_{2\,\text{واقعی}} = 64.23428$$ ۵ نمره

قرار بود تیر به نقطه‌ی $\begin{cases}\varphi_2 = 37°35' \\ l_2 = 61°48'\end{cases}$ اصابت کند اما به نقطه‌ی $\begin{cases}\varphi'_2 = 37.755\ ° \\ l'_2 = 64.23428°\end{cases}$ اصابت کرده است. حال فاصله‌ی این دو نقطه را محاسبه می‌کنیم:

از رابطه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$\xi = \cos^{-1}(\sin\varphi_2'\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2'\cos\varphi_2\cos(l_2' - l_2)) \rightarrow \xi = 1.93445$$ ۵ نمره

اختلاف مسافت روی زمین برابر است با:

$$d = R_\oplus\,\xi_{rad} \rightarrow d = 215.1\ km$$ ۵ نمره

www.amoozz.ir https://t.me/Sampaadia