



باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان

علم برای یک ملت مهم ترین ابزار آبرو، پیشرفت و اقتدار است. «امام خاندای (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله دوم سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

بیست و دومین دوره المپیاد نجوم و اخترفیزیک

نوع آزمون: تشریحی	مدت پاسخگویی: ۲۴۰ دقیقه
تعداد سؤالات: ۸	

استفاده از ماشین حساب مجاز است.

توضیحات مهم

- ۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- ۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- ۳- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچ گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- ۴- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از قطع سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هر گونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- ۵- از مخدوش کردن بارکدها و مربع ها در چهارگوشه صفحه در دفترچه پاسخ برگ جدا خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- ۶- همراه داشتن هر گونه کتاب جزوه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.
- ۷- در این آزمون کلیه موارد درخواست شده برای هر سوال در قسمت های مستطیلی قرار داده شده است. لطفاً در برگه های پاسخ، دقیقاً مشخص کنید که جواب کدام پرسش را می دهید.
- ۸- این دفترچه شامل ۸ سوال و با احتساب جلد ۷ برگ است.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.

آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

<https://t.me/sampaadia>

گروه آموزشی سمپادیا

این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک نویسی در نظر گرفته شده است.



جدول ثوابت فیزیکی و ریاضیاتی

نماد	کمیت	مقدار
k	ثابت بولتزمن	$1.38 \times 10^{-23} J.K^{-1}$
c	سرعت نور	$3 \times 10^8 m.s^{-1}$
m_p	جرم پروتون	$1.67 \times 10^{-27} kg$
m_e	جرم الکترون	$9.11 \times 10^{-31} kg$
$Z_{N\gamma}$	عدد جرمی مولکول نیتروژن	۱۴
$Z_{O\gamma}$	عدد جرمی مولکول اکسیژن	۱۶
eV	الکترون ولت	$1.6 \times 10^{-19} J$
G	ثابت جهانی گرانش	$6.67 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
h	ثابت پلانک	$6.63 \times 10^{-34} Js$
e	عدد نپر (عدد اویلر)	۲.۷۱۸ (یا مقدار ذخیره شده در ماشین حساب‌های مهندسی)

جدول ثوابت نجومی

نماد	کمیت	مقدار
σ	ثابت استفان - بولتزمن	$5.67 \times 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$
W	ثابت وین	$2.898 \times 10^{-3} m.K$
pc	پارسک	$3.09 \times 10^{16} m$
AU	واحد نجومی	$1.5 \times 10^{11} m$
Ly	سال نوری	$9.46 \times 10^{15} m$

جدول ثوابت زمینی

نماد	کمیت	مقدار
M_{Earth}	جرم زمین	$5.97 \times 10^{24} kg$
R_{Earth}	شعاع زمین	$6378 km$
	دوره تناوب وضعی زمین	$86164 s$
ε	انحراف محور چرخش زمین نسبت به خط عمود بر دایره البروج	23.5°
$\phi_{تهران}$	عرض جغرافیایی تهران	35.7°
$\rho_{جو}$	چگالی جو زمین	$1.29 kg.m^{-3}$
$h_{جو}$	ارتفاع جو زمین	$10^5 m$

جدول ثوابت خورشیدی

نماد	کمیت	مقدار
M_{Sun}	جرم خورشید	$۱.۹۹ \times ۱۰^{۳۰} kg$
R_{Sun}	شعاع خورشید	$۶.۹۶ \times ۱۰^۸ m$
L_{Sun}	درخشندگی خورشید	$۳.۸۵ \times ۱۰^{۲۶} W$
b_{Sun}	ثابت خورشیدی (روشنایی خورشید از زمین)	$۱۳۶۱ W.m^{-۲}$
T_{effSun}	دمای مؤثر سطح خورشید	$۵۷۷۹ K$
M_{Sun}	قدر مطلق خورشید	۴.۸۳
m_{Sun}	قدرظاهری خورشید	-۲۶.۷
BC_{Sun}	تصحیح بولومتریکی خورشید	-۰.۱۴

روابط ریاضی مفید:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$$\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱} x^{n+۱} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\frac{d(\sqrt{f(x)})}{dx} = \frac{۱}{۲\sqrt{f(x)}} \frac{d(f(x))}{dx}$$

$$\frac{d\left(\frac{۱}{f(x)}\right)}{dx} = \frac{-۱}{f(x)^۲} \frac{d(f(x))}{dx}$$

۱- (۶۰ نمره) هواپیماهای جنگنده با استفاده از جنگ الکترونیک، رادارها را مختل می‌کنند و از رهگیری شدن جلوگیری می‌کنند. جنس بدنه آنها به گونه‌ای است که سینکال‌ها را جذب کرده و باعث عدم بازتاب سیگنال می‌شود. از آنجا که نمی‌توان از پژواک سیگنال برای ردیابی استفاده کرد می‌خواهیم از طبیعت کمک بگیریم و برخورد ذرات هوا به جنگنده را با مدلی بسیار ساده بررسی کنیم. بازه سرعت جنگنده را از ۱.۵ تا ۲ ماخ در نظر بگیرید. (هر ماخ تقریباً $120 \cdot \frac{km}{h}$ است) همچنین فرض کنید ۸۰ درصد جو را N_2 و ۲۰ درصد آن را O_2 تشکیل می‌دهند.

آ) فرض کنید یک توده هوای ساکن در مسیر حرکت جنگنده قرار دارد. این جنگنده با این ذرات برخورد کشسان می‌کند و باعث انتقال سرعت به آنها می‌شود. با در نظر گرفتن اینکه برخورد یک بعدی بوده است، بازه سرعت ذرات هوا بعد از برخورد با جنگنده را به صورت تقریبی حساب کنید.

ب) ذرات هوا بعد از برخورد با جنگنده دچار افزایش انرژی جنبشی می‌شوند. این انرژی جنبشی کسب شده توسط ذرات ناحیه اطراف را به تعادل گرمایی می‌رساند. بازه دما و طول موج حداکثر تابش ذرات هوا پس از انتقال انرژی را محاسبه کنید. (فرض کنید کل انرژی جنبشی کسب شده در قسمت قبل، صرف حرکت گرمایی ذرات بشود)

پ) فرض کنید جنگنده دشمن دقیقاً از بالای سر پدافند رد شود. ۲۰ ثانیه بعد از عبور جنگنده از بالای سر پدافند، آشکارساز موجود در کنار پدافند انتقال به سرخی به اندازه 10^{-6} از این جنگنده مشاهده می‌کند. اگر فرض کنیم جنگنده مسیری کاملاً موازی با سطح زمین داشته باشد و سرعت آن همواره ثابت باشد، بازه‌ای برای ارتفاع پرواز این جنگنده از سطح زمین بدست بیاورید.

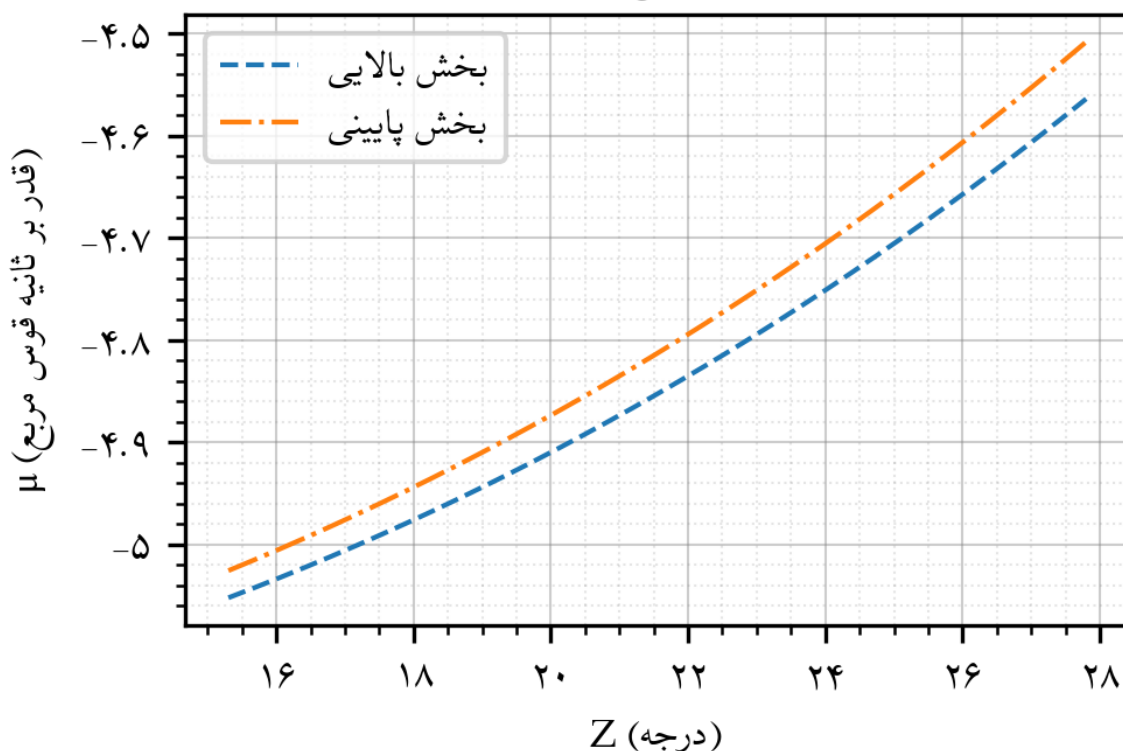
۲- (۷۰ نمره) می‌دانیم که جو زمین همواره میزانی از نور ستارگان و دیگر اجرام آسمانی را جذب می‌کند که باعث تغییر قدر ظاهری آنها می‌شود. اگر جو زمین را یک ناحیه تخت با ارتفاع h در نظر بگیریم و چگالی هوا در همه جای آن یکسان باشد و بدون در نظر گرفتن اثرات شکست در جو زمین، به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) اگر یک ستاره دارای زاویه سمت الراسی Z باشد، قدر ظاهری که از آن ستاره مشاهده می‌کنیم چقدر بیشتر از قدر ظاهری این ستاره خارج از جو است؟

ب) حالا اگر این ستاره کمی حرکت کند به گونه‌ای که زاویه سمت الراسی به اندازه ΔZ زیاد شود، اختلاف قدر ظاهری با حالت قبلی (که در بخش آ گفته شده بود) چقدر خواهد بود؟ فرض کنید ΔZ خیلی کوچک است.

پ) فرض کنید در حال رصد خورشید هستیم. قطر زاویه‌ای خورشید را برابر با ۱ درجه در نظر بگیرید. در نمودار زیر قدر سطحی بالایی ترین نقطه و پایینی ترین نقطه خورشید (نقاطی که هر لحظه بیشترین و کمترین ارتفاع را دارند) را برای یک ناحیه ۱ ثانیه قوسی در ۱ ثانیه قوسی بر حسب زاویه سمت الراسی کشیده ایم. با استفاده از این نمودار ضریب جذب جو K را محاسبه کنید.

قدر سطحی خورشید



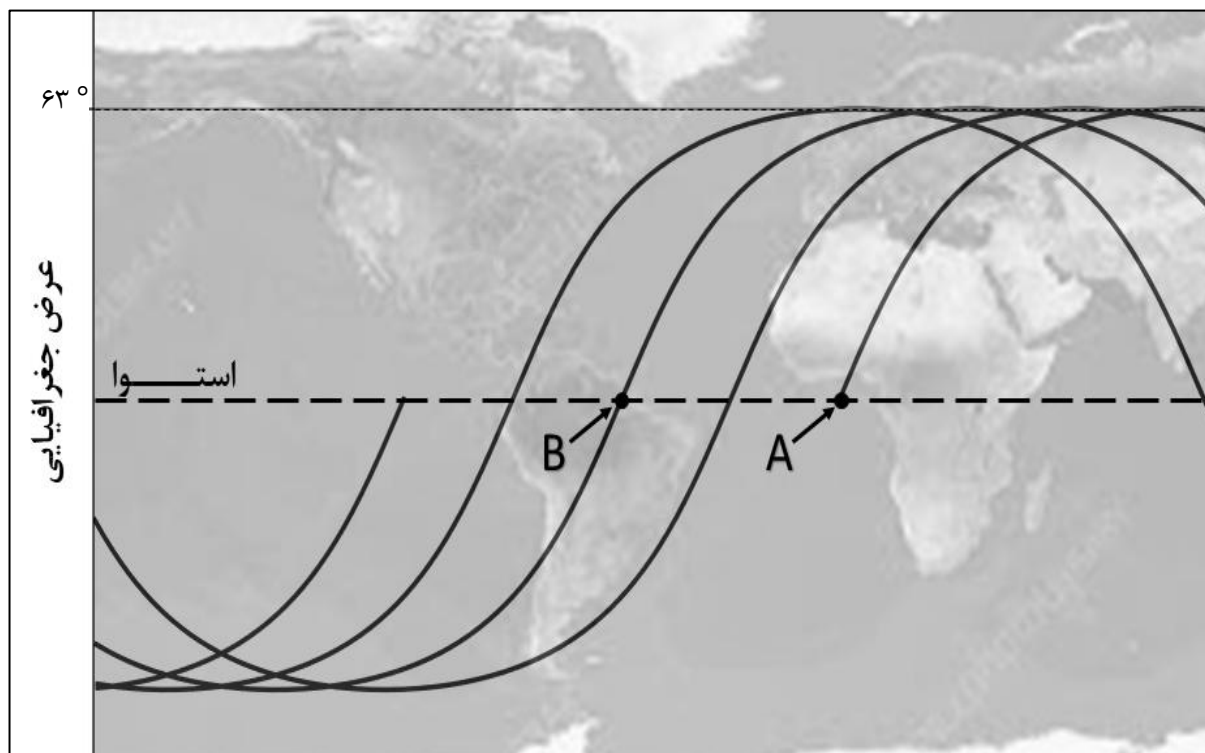
۳- (۸۰ نمره) مسیر حرکت تصویر عمودی یک ماهواره روی سطح زمین Ground track نام دارد. به این معنا که اگر محل برخورد خط واصل مرکز زمین و ماهواره با سطح زمین را در نظر بگیریم، مسیر حاصل از حرکت این نقطه روی زمین همان Ground track خواهد بود. این مسیر نتیجه‌ی حرکت مداری ماهواره به دور زمین و هم‌زمان چرخش زمین به دور محور خودش است. به همین دلیل معمولاً به شکل خطوط موج‌دار و جابه‌جا شونده نسبت به خطوط طول جغرافیایی دیده می‌شود. بررسی Ground track برای تعیین نواحی تحت پوشش ماهواره، زمان عبور از یک منطقه‌ی مشخص و الگوی تکرار مسیر ماهواره اهمیت زیادی دارد. در شکل زیر قسمتی از Ground track را برای ماهواره‌ای می‌بینید. مدار این ماهواره طوری طراحی شده که ماهواره بتواند تمامی نقاط زمین را طی چرخش‌های چندباره‌ی خود به دور زمین رصد کند و در عین حال کمترین دوره تناوب ممکن را داشته باشد.

(آ) دوره‌ی تناوب این ماهواره چند ساعت است؟ (بدلیل اینکه مقیاس عمودی و افقی در نقشه یکسان نیست و همچنین نقشه زمین نیز کامل داده نشده است، استفاده از خط کش برای اندازه‌گیری روی نقشه توصیه نمی‌شود)

(ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا B در شکل، روی سطح زمین چند کیلومتر است؟

(ج) بیشترین ارتفاع ممکن برای این ماهواره از دید ناظران تهران چقدر می‌تواند باشد؟

(د) آیا نقطه‌ای روی زمین وجود دارد که احتمال دیدن عبور این ماهواره از مقابل خورشید از دید آن صفر باشد؟ اگر بله یک عرض جغرافیایی خاص به عنوان مثال بنویسید. اگر خیر توضیحات خود را بنویسید.



۴- (۱۰۰ نمره) رویت هلال ماه یکی از لحظات حساس در فهمیدن شروع و پایان ماه مبارک رمضان است؛ اما رویت هلال ماه در ماه نو اتفاق ساده‌ای نیست. برای رویت هلال همزمان باید آسمان تقریباً تاریک شده و همچنین شرایط آب و هوایی و غبار آسمان مناسب باشد. می‌خواهیم برای عید فطر گذشته رویت هلال را بررسی کنیم. از آنجایی که انتهای ماه رمضان امسال بسیار به سال تحویل نزدیک بود، در روند این مساله خورشید را در اعتدال بهاری در نظر بگیرید.

آ) فاصله زمانی غروب خورشید و اذان مغرب را برای شهر تهران در این روز پیدا کنید. اذان مغرب لحظه‌ای اتفاق می‌فتد که خورشید ۴ درجه زیر افق باشد.

ب) اگر زاویه صفحه مداری ماه با صفحه دایره البروج ۵ درجه باشد، محاسبه کنید که ارتفاع ماه در لحظه غروب خورشید چقدر باشد تا موقع اذان مغرب، ماه غروب کند؟

پ) فرض کنید غباری به ارتفاع ۱۰ درجه روی افق شهر تهران باشد. برای اینکه موقع اذان مغرب ماه قابل رویت باشد، باید فاصله زاویه‌ای ماه و خورشید چند درجه باشد؟

ت) با توجه به داده‌های مساله، حداقل فاز ماه برای رویت هلال آن را بدست بیاورید.

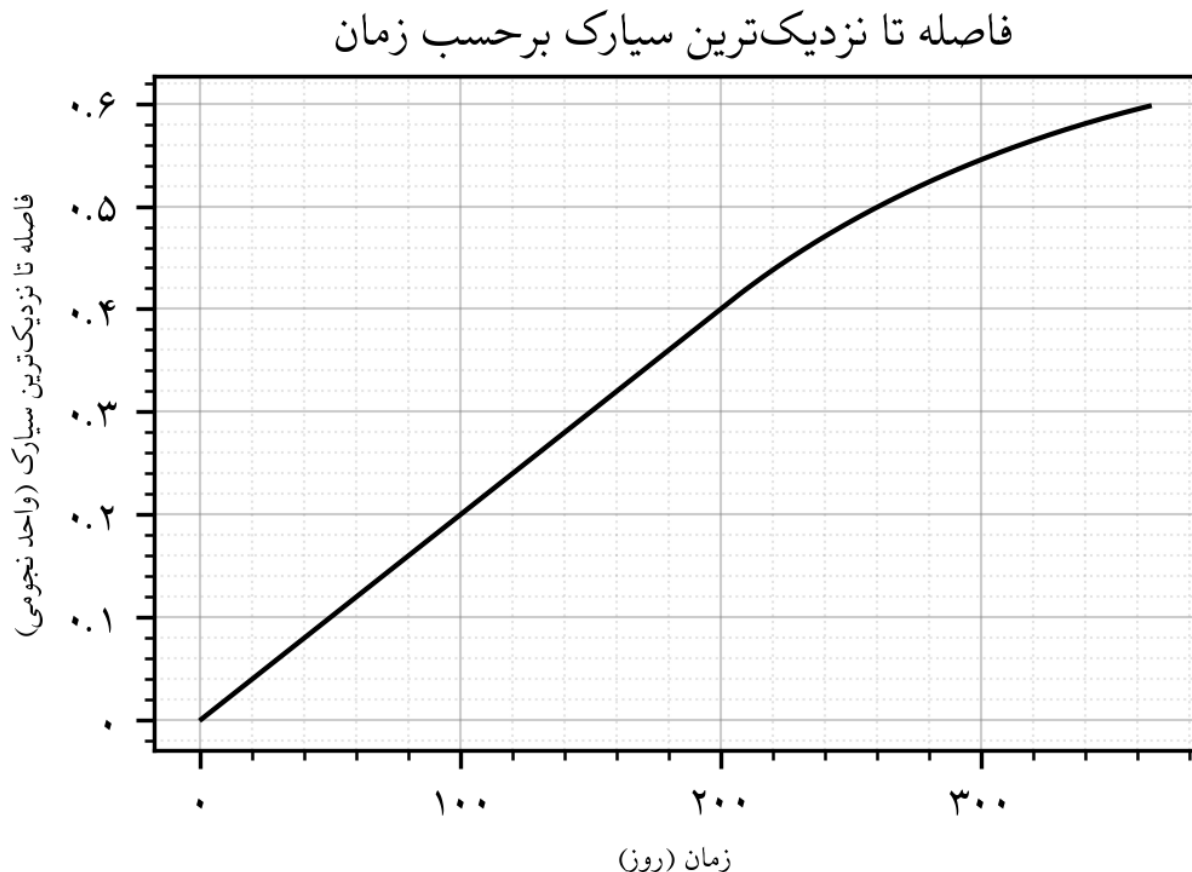
۵- (۱۴۰ نمره) ناظری در حال رصد دو ستاره خاص در طول یک شب رصدی است. در لحظه اول یکی از این ستاره‌ها در حال طلوع است و دیگری در حال غروب. نکته قابل توجه برای رصدگر در لحظه اول این است که سمت این دو ستاره مخالف همدیگر است. (به عنوان مثال، اگر ستاره اول سمت A داشته باشد ستاره دوم سمت $A -$ یا A غربی دارد)

در لحظه‌ای دیگر ناظر دوباره به رصد این دو ستاره می‌پردازد. او می‌بیند که در این لحظه سمت این دو ستاره دقیقاً یکی شده و درست در همان لحظه هم سمتی، ارتفاع این دو ستاره نیز متمم یکدیگر شده است. (به عنوان مثال، اگر ارتفاع یک ستاره a باشد ارتفاع دیگری $a - 90$ شده است)

این ناظر متوجه می‌شود که با توجه به این دو شرایط رصدی که مشاهده کرده است می‌تواند عرض جغرافیایی محل رصد را به صورت یکتا مشخص کند. این عرض جغرافیایی چقدر است؟ روند استدلال و راه حل خود را توضیح دهید.

۶- (۱۷۰ نمره) در منظومه‌ی MGJH که ستاره‌ی آن خورشیدگون است کمربند سیارکی‌ای وجود دارد که سیارک‌ها همه در مداری یکسان به دور ستاره‌ی مرکزی در حال گردشند و در کل طول مدار یکسان پخش شده‌اند. بر روی یکی از این سیارک‌ها گونه‌ای از آدم فضایی‌ها زندگی می‌کنند و آن‌ها در تلاشند تا با فرستادن یک فضاپیما از باقی سیارک‌ها اطلاعات بگیرند و مدار سیارک‌ها را تشخیص دهند. آن‌ها زمانی که در اوج مداری هستند فضاپیمایی را به سمت ستاره‌ی مرکزی روانه می‌کنند. این فضاپیما به گونه‌ای طراحی شده که در هر لحظه فاصله‌ی نزدیک‌ترین سیارک تا خود را گزارش می‌کند. همین‌طور موتور این فضاپیما به گونه‌ای طراحی شده‌است که با سرعت ثابت و در خط راست حرکت می‌کند.

نمودار زیر حاصل از مقادیر گزارش شده‌ی این فضاپیما در یک دوره‌ی تناوب کامل سیارک‌ها است:



در این نمودار محور افقی زمان (برحسب روز زمینی) و محور عمودی فاصله‌ی نزدیک‌ترین سیارک تا این فضاپیما (برحسب واحد نجومی) است.

(آ) سرعت این فضاپیما را بیابید.

(ب) رابطه‌ای برای فاصله‌ی نزدیک‌ترین سیارک تا فضاپیما برحسب زمان بیابید.

(پ) با توجه به نمودار فوق و اطلاعات مساله مقادیر نیم‌قطر بزرگ مدار و خروج از مرکز آن را بیابید.

۷- (۱۹۰ نمره) اخترشناسان در حال رصد کهکشان‌های پرجرم و دوردست به نام «رستم» هستند. در هاله ماده تاریک رستم، یک کهکشان اقماری کوچک به نام «سهراب»، بر اثر پدیده‌ی اصطکاک دینامیکی، در یک مسیر مارپیچی به سمت مرکز کهکشان در حال سقوط است. هر دو کهکشان رستم و سهراب را می‌توان با مدل «کره همدمای تکین» بررسی کرد. توزیع چگالی جرم یک کره همدمای تکین به صورت زیر داده می‌شود:

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$$

که σ مقداری ثابت برای هر کهکشان است که پراکندگی تندی نام دارد. این مقدار برای کهکشان رستم σ_H و برای کهکشان سهراب σ_S است. r فاصله از مرکز است. کهکشان سهراب نیروی پسار ناشی از اصطکاک دینامیکی را حس می‌کند. نیروی اصطکاک دینامیکی برابر با رابطه زیر است:

$$F_{df} = - \frac{4\pi G^2 m^2 \ln(\Lambda) \rho_H(R)}{v^2} B$$

که در آن m جرم کهکشان اقماری، v سرعت مداری آن، $\rho_H(R)$ چگالی جرمی کهکشان میزبان در شعاع مداری R ، $\ln(\Lambda)$ لگاریتم کولن (آن را ثابت فرض کنید) و B یک ثابت بدون بُعد برای مدار دایروی در یک کره هم‌دما است.

(آ) پس از بدست آوردن جرم داخلی هاله کهکشان رستم تا شعاع R ، سرعت مداری دایروی سهراب، v_c ، را در هاله رستم به دست آورید. نشان دهید که v_c ثابت و مستقل از شعاع R است.

در واقعیت، جرم سهراب ثابت نیست. هرچه سهراب به اعماق رستم نفوذ می‌کند، نیروهای کشندی میزبان، لایه‌های بیرونی سهراب را جدا می‌کنند. شعاع کشندی r_t (بیشترین شعاعی که سهراب می‌تواند ستارگانش را از نظر گرانشی حفظ کند) در پتانسیل یک کره همدمای تکین، دقیقاً توسط رابطه حد روش (Roche limit) توصیف می‌شود:

$$r_t = R \left(\frac{m(r_t)}{2M_H(R)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

که در آن $m(r_t)$ جرم مقید باقیمانده سهراب در داخل r_t و $M_H(R)$ جرم محصور رستم در داخل مدار R است.

(ب) از آنجا که سهراب نیز یک کره همدمای تکین است، جرم مقید آن را به عنوان تابعی از r_t و σ_S بیان کنید.

(پ) عبارات مربوط به جرم سهراب و جرم رستم را در رابطه شعاع کشندی جایگذاری کنید. ثابت کنید که نسبت شعاع کشندی به شعاع مداری، یعنی $\frac{r_t}{R}$ ، همواره یک مقدار ثابت است.

(ت) با اثبات اینکه جرم مقید سهراب، $m(R)$ ، با شعاع مداری آن رابطه $m(R) = kR$ دارد، ثابت تناسب k را تعیین کنید.

(ث) از آنجا که سهراب نیروی پسار مماسی F_{df} را تجربه می‌کند، تکانه زاویه‌ای L خود را از دست می‌دهد. نرخ تغییرات شعاع مداری آن، یعنی $\frac{dR}{dt}$ را بیابید. ماهیت سرعت سقوط مارپیچی را توصیف کنید (آیا سقوط شتاب‌دار است، کندشونده است، یا ثابت؟). در نوشتن معادلات دقت کنید که سهراب خود در حال از دست دادن جرم است.

(ج) این معادله را برای $R(t)$ حل کنید و زمان سقوط T که لازم است تا سهراب از موقعیت R به مرکز برسد را محاسبه کنید.

۸- (۱۹۰ نمره) تپاخترها ستاره های نوترونی بسیار چگالی هستند که به سرعت می چرخند و در حین چرخش از قطب های مشخص، پالس های منظمی بشکل امواج الکترومغناطیسی ساطع میکنند. انرژی ای که ما از تپاخترها دریافت می کنیم ناشی از انرژی همین امواج الکترومغناطیسی تابشی است. بدلیل اینکه فیزیک تپاخترها بسیار پیچیده و نامشخص است، در این مساله قصد داریم با مدل سازی ساده، به اطلاعاتی مفید راجع به این نوع خاص از ستارگان دست پیدا کنیم. از نظریه الکترومغناطیس می دانیم که آهنگ تغییرات انرژی تابشی ناشی از یک دوقطبی مغناطیسی متغیر با زمان، توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2$$

که c سرعت نور و به $\vec{m}$ بردار دوقطبی مغناطیسی می گویند.

(آ) فرض کنید در تپاختر مورد بررسی، بردار $\vec{m}$ با محور چرخش ستاره زاویه α می سازد و توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\vec{m} = \frac{1}{\gamma} BR^2 (\cos \alpha \hat{k} + \sin \alpha \cos \Omega t \hat{j} + \sin \alpha \sin \Omega t \hat{i})$$

که $\hat{k}$ بردار یکه در جهت محور دوران و $\hat{j}$ و $\hat{i}$ دو بردار یکه متعامد نسبت به آن هستند. B اندازه میدان مغناطیسی، R شعاع ستاره و Ω سرعت زاویه دورانی ستاره است. با توجه اطلاعات داده شده، آهنگ تغییرات انرژی تابشی را برای تپاختر بر حسب ثوابت و پارامترهای داده شده بدست آورید. به ازای چه اندازه ای از α این مقدار صفر است؟ باتوجه به مقیاس های زمانی سوال، در این بخش می توانید از تغییرات زمانی پارامترهای ستاره با تقریب خوبی صرف نظر کنید ولی در ادامه به تناسب هر بخش، باید به عدم تغییر یا تغییر زمانی کمیت ها توجه داشته باشید.

(ب) انرژی از دست رفته توسط تابش از ستاره، به شکل کاهش انرژی دورانی خود را نشان می دهد. رابطه ای برای آهنگ تغییرات سرعت دورانی بیابید.

(پ) اگر لحظه تولد تپاختر را در $t = 0$ بگیریم و عمر فعلی آن را با t_0 نشان دهیم، مقیاس زمانی مربوطه را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$T \equiv - \left(\frac{\Omega}{\dot{\Omega}} \right) \Big|_{t=t_0}$$

رابطه ای برای عمر فعلی تپاختر بر حسب T و $\Omega_{t=t_0}$ و $\Omega_{t=0}$ بدست آورید. در حد $\Omega_{t=t_0} \ll \Omega_{t=0}$ رابطه بدست آمده چه می شود؟

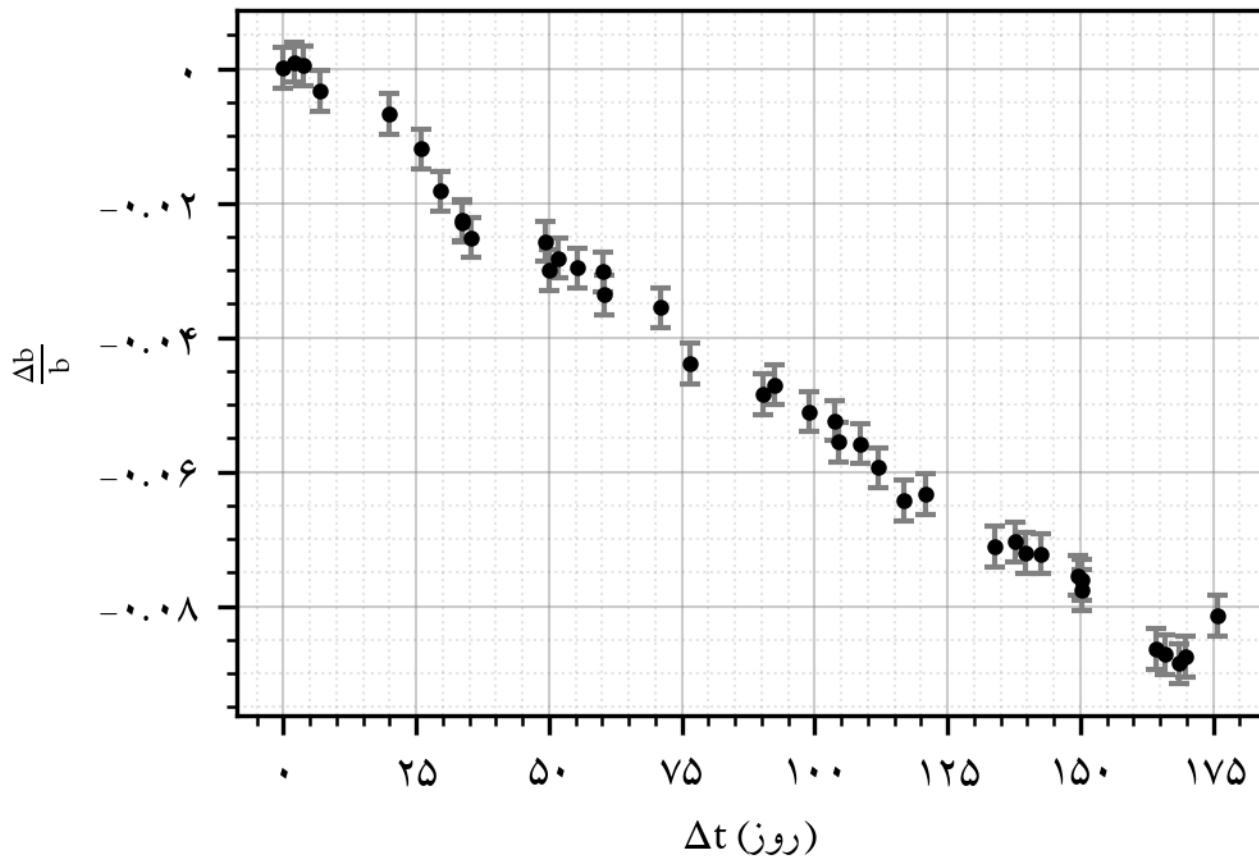
(ت) با مشاهدات دقیق تر، می توانیم فرض کنیم رابطه سرعت دورانی تپاختر بر حسب زمان، به شکل کلی تر زیر باشد:

$$\Omega(t) = \Omega_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-\alpha}; \quad \alpha = \frac{1}{n-1}$$

در این صورت میدان مغناطیسی با زمان می تواند متغیر باشد. با فرض اینکه هنوز رابطه قسمت ب برای آهنگ تغییرات سرعت زاویه ای برقرار بماند، رابطه ای برای میدان مغناطیسی بر حسب زمان پیدا کنید. اگر درخشندگی رادیویی (مقدار تابش در باند رادیویی) این تپاختر کسر f از کل انرژی از دست رفته توسط تابش دوقطبی مغناطیسی باشد، رابطه ای برای درخشندگی رادیویی بر حسب زمان برای این تپاختر پیدا کنید.

ث) در نمودار زیر نسبت تغییرات روشنایی به روشنایی اولیه (لحظه شروع رصد) برحسب زمان گذشته از شروع رصد، برای این تپ اختر رسم شده است. این نمودار کمی بعد از تولد تپ اختر کشیده شده به صورتی که $t \ll \tau$ است (t زمان شروع به رصد است). با برازش خطی مناسب بر این نمودار و فرض های مناسب، مقدار n را از این داده های رصدی بدست بیاورید و با مقداری که از روابط تئوری در قسمت ب با فرض ثابت بودن میدان مغناطیسی بدست آمده بود، مقایسه کنید. دقت کنید برای برازش خط نیاز به استفاده از روابط تحلیل داده و عدد دقیق داده ها نیست و کفایت به صورت کیفی و با رسم یک خط برازش انجام دهید. مقدار عددی τ را تقریباً ۱۰ سال در نظر بگیرید.

تغییرات نسبی روشنایی تپ اختر برحسب زمان





مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

مرحله دوم المپیاد نجوم و اخترفیزیک

پاسخ‌نامه تشریحی

نام و نام خانوادگی	کد ملی	استان	حوزه	شماره صندلی	تاریخ آزمون
					۱۴۰۵/۰۴/۰۱

توضیحات مهم

- این پاسخ‌نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می‌شود، بنابراین از مجاله و کثیف کردن آن جدا خودداری فرمایید.
- مشخصات خود را با اطلاعات بالای صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یک برگه از پاسخ‌برگ‌ها با اطلاعات شما همخوانی ندارد، حتماً به مراقبین اطلاع دهید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ دیگری بنویسید، نمره‌ای به شما تعلق نمی‌گیرد.
- باتوجه به اینکه برگه‌های پاسخ‌نامه به نام شما صادر شده است، امکان هیچ‌گونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا پیشنهاد می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک‌نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخ‌برگ پاک‌نویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله‌ای باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن مربع‌ها در چهارگوشه صفحه و بارکد خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت و دست‌بند هوشمند، لپ‌تاپ و تبلت ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
- شرکت‌کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش‌آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.
- استفاده از ماشین حساب مجاز است.

اینجانب به کد ملی دفترچه پاسخ‌برگ تشریحی آزمون مرحله دوم المپیاد نجوم و اخترفیزیک را به طور کامل دریافت نموده‌ام.

محل امضا و اثر انگشت:

مهر حوزه

پیش از کلاس



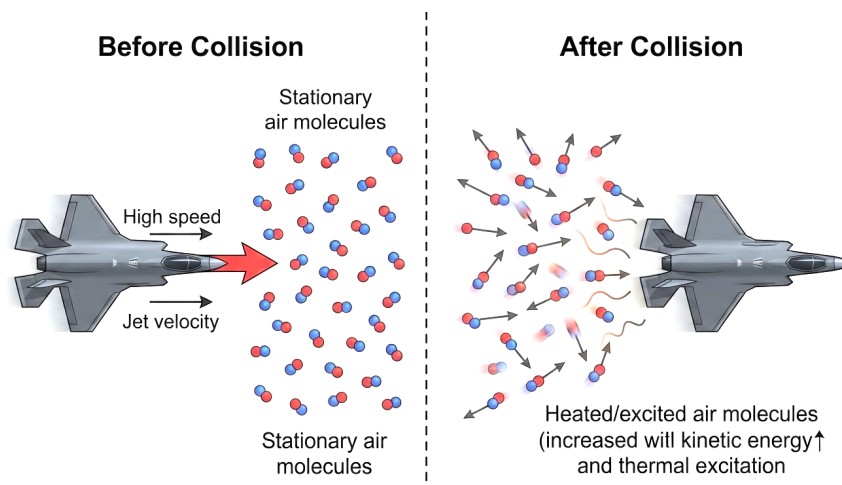
استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۱، صفحه ۱ از ۲) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) طبق گفته سوال با مدل سازی ساده، می توانیم با نوشتن پایستگی تکانه و انرژی برای قبل و بعد برخورد جنگنده با ذرات هوا تخمینی از سرعت ذرات هوا بعد از برخورد با جنگنده بدست بیاوریم. بخاطر سرعت و رفتار یکسانی که برای ذرات (ذره هایی با جرم میانگین) بلافاصله بعد از برخورد در نظر می گیریم، می توانیم بشکل تقریبی روابط پایستگی زیر را بین جنگنده و توده هوا بنویسیم. البته طبیعتا در واقعیت نه توده هوا ساکن و نه برخورد ایده آل یک بُعدی داریم منتهی طبق تصریح سوال می خواهیم یک مدل و تخمین ساده از مساله بدست بیاوریم.



تکانه:

$$M_{\text{جنگنده}} v_1 + m_{\text{هوا}} v_2 = M_{\text{جنگنده}} v'_1 + m_{\text{هوا}} v'_2 \Rightarrow M_{\text{جنگنده}} (v_1 - v'_1) = m_{\text{هوا}} v'_2$$

انرژی:

$$\frac{1}{2} M_{\text{جنگنده}} v_1^2 + \frac{1}{2} m_{\text{هوا}} v_2^2 = \frac{1}{2} M_{\text{جنگنده}} v'^2_1 + \frac{1}{2} m_{\text{هوا}} v'^2_2 \Rightarrow M_{\text{جنگنده}} (v_1^2 - v'^2_1) = m_{\text{هوا}} v'^2_2$$

$$\Rightarrow M_{\text{جنگنده}} (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_{\text{هوا}} v'^2_2 \Rightarrow v_1 + v'_1 = v'^2_2$$

از آنجایی که سرعت جنگنده تقریباً تغییری ندارد پس می توانیم $v_1 + v'_1$ را با $2v_1$ تقریب بزنیم و با توجه به بازه ی سرعت داده شده برای جنگنده، سرعت هوا به شکل زیر تقریب زده می شود:

$$1/5 \text{ ماخ} < v_1 < 2 \text{ ماخ} \Rightarrow 3 \text{ ماخ} < v'_1 < 4 \text{ ماخ} \Rightarrow 3600 \frac{km}{h} < v'_1 < 4800 \frac{km}{h}$$

$$\Rightarrow 1000 \frac{m}{s} < v'_1 < 1333 \frac{m}{s}$$

ب)

$$K = \frac{1}{2} m_{\text{هوا}} v'^2_2 = \frac{5}{2} N k_B T \Rightarrow v'^2_2 = \frac{5 N k_B T}{m_{\text{هوا}}}$$

توجه کنید که به علت دواتمی بودن مولکول ها باید به درجات آزادی دقت کنیم و انرژی میانگین هر ذره $\frac{5}{2} k_B T$ می شود.

$$m_{\text{هوا}} = N \cdot \bar{m} \Rightarrow v'^2_2 = \frac{5 k_B T}{\bar{m}} \Rightarrow T = \frac{\bar{m} \cdot v'^2_2}{5 k_B}$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۱، صفحه ۲ از ۲) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

$$\bar{m} = (0.8 \times 14 \times 2 + 0.2 \times 16 \times 2)m_p = 2.8m_p$$

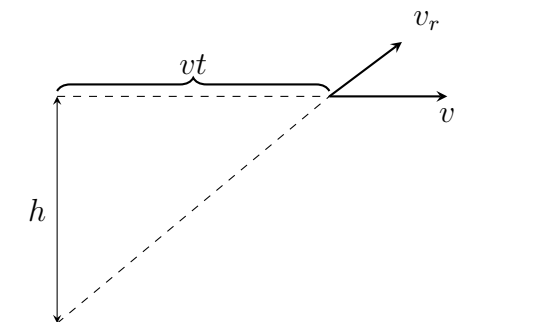
با توجه به ابهام در جدول ثوابت برای عدد جرمی (یا اتمی) مولکول نیتروژن و اکسیژن، هر دو حالت ۱۴ و ۱۶ یا ۲۸ و ۳۲ برای محاسبه جرم میانگین، به عنوان پاسخ صحیح لحاظ خواهد شد.

$$\Rightarrow T = 2.8m_p \frac{v_r'^2}{5k_B} \rightarrow 697.8 \text{ K} < T < 1240.5 \text{ K}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{T} \rightarrow 2.34 \mu\text{m} < \lambda_{\max} < 4.15 \mu\text{m}$$

در واقع کار فلر این است که با ایجاد یک حرارت مصنوعی با دمای مناسب که در واقع در بازه همین دمایی باید باشد که ذرات هوای اطراف جنگنده پیدا می‌کنند، پدافندی که به روش حرارتی کار می‌کند را در تشخیص مکان واقعی جنگنده به اشتباه بیاندازد.

(پ)



$$z = \frac{v_r}{c} \Rightarrow v_r = 10^{-6} \times 3 \times 10^8 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{v_r}{v} = \cos \theta, \quad \frac{h}{vt} = \tan \theta \Rightarrow \frac{h}{vt} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{v}\right)^2}}{\frac{v_r}{v}} \Rightarrow h = \frac{v^2 t}{v_r} \sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{v}\right)^2}$$

$$\rightarrow 13.3 \text{ km} < h < 26.5 \text{ km}$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۲، صفحه ۱ از ۲) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) اگر ضریب جذب و چگالی ثابت باشند رابطه زیر را برای تغییر شدت داریم که l مسافتی است که نور در این محیط طی می‌کند.

$$I = I_0 e^{-\kappa \rho l}$$

$$h = l \cdot \cos z \Rightarrow l = h \sec z$$

$$\rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-\kappa \rho h \sec z} \Rightarrow m(z) - m_{\text{بیرون}} = 2/5 \log e \times \kappa \rho h \sec z$$

ب)

$$m(z + \Delta z) - m_{\text{بیرون}} = 2/5 \kappa \rho h \log e \sec(z + \Delta z)$$

$$\Delta z \rightarrow \sec(z + \Delta z) \approx \sec z + \Delta z \times \frac{d(\sec z)}{dz} = \sec z + \tan z \sec z \Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta m = 2/5 \log e \times \kappa \rho h \sec z \tan z \Delta z$$

پ) اگر اختلاف دو قدر را در یک ارتفاع مشخص بخوانیم با جایگذاری رو رابطه بخش قبل به مقدار κ می‌رسیم. به عنوان مثال در ارتفاع ۲۶ درجه، یک قدر با هم تفاوت دارند.

$$0.051 = 2/5 \log e \times \kappa \times 1/3 \frac{kg}{m^3} \times 100000 m \times \sec 26 \tan 26 \times \frac{\pi}{180} rad$$

$$\Rightarrow \kappa = 3/8 \times 10^{-5} \frac{m^2}{kg}$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۲، صفحه ۲ از ۲) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



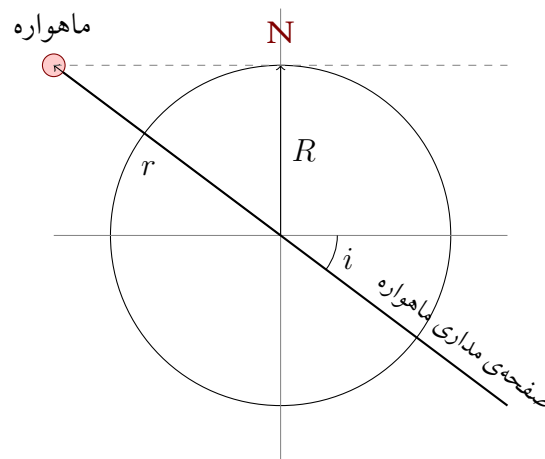
(سوال ۳، صفحه ۱ از ۲) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) دو شرط گفته شده در سوال را در نظر می‌گیریم:

۱. بتواند تمام نقاط سطح زمین را رصد کند.

۲. کمترین دوره تناوب را داشته باشد.

علاوه بر این دو شرط از روی مسیر Ground Track ماهواره می‌توان دریافت که میل مداری آن ۶۳ درجه است. بنابراین وقتی در بیشترین فاصله از صفحه‌ی استوا قرار دارد آخرین نقطه‌ای که می‌تواند رصد کند قطب شمال است. اگر شعاع مداری ماهواره از این میزان کمتر باشد نمی‌تواند قطب شمال را رصد کند و اگر شعاع مداری ماهواره از این مقدار بیشتر باشد شرط کمینه بودن دوره تناوب نقض می‌شود. با توجه به شکل شعاع مداری ماهواره را می‌توان حساب کرد.



$$\sin i = \frac{R_E}{r} \rightarrow r = \frac{R_E}{\sin i} \rightarrow r = 7158 \text{ km}$$

سپس دوره تناوب مداری ماهواره را حساب می‌کنیم.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_E} r^3 \rightarrow T = 6030 \text{ s} = 1.67 \text{ h}$$



استان:

کد ملی:

نام و نام خانوادگی:

جنسیت:



(سوال ۳، صفحه ۲ از ۲) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

ب) ماهواره برای رسیدن از موقعیت A تا موقعیت B ۲ دور کامل به دور زمین چرخیده است بنابراین مدت زمان $2T$ طول کشیده است.

$$t = 2T \rightarrow t = 3/35 \text{ h}$$

چرخش زمین علت به وجود آمدن فاصله‌ی طولی نقاط A و B است. حال باید ببینیم زمین در این مدت چند درجه چرخیده است. مقدار طول طی شده در این مدت زمان، روی استوای زمین فاصله‌ی A تا B خواهد بود.

$$\Delta\theta = \omega_E \Delta t \quad , \quad l_{AB} = R_E \Delta\theta$$

$$l_{AB} = R_E \omega_E \Delta t \rightarrow l_{AB} = R_E \frac{2\pi}{T_E} \Delta t \rightarrow l_{AB} = 5594 \text{ km}$$

ج) این ماهواره به دلیل داشتن میل مداری ۶۰ درجه می‌تواند از سرسوی تهران عبور کند بنابراین بیشترین ارتفاع ممکن ۹۰ درجه است.

$$a_{max} = 90^\circ$$

د) خیر چنین نقطه‌ای وجود ندارد. زیرا اگر از دید ناظری میل ماهواره برابر عددی بین $23/5^\circ$ و $23/5^\circ$ باشد آنگاه احتمال عبور از مقابل خورشید وجود خواهد داشت. برای هر عرض جغرافیایی از زمین می‌توان حالتی را متصور شد که میل ماهواره در بازه‌ی گفته شده باشد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۴، صفحه ۱ از ۳) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) برای زاویه ساعتی غروب:

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta = 0 \Rightarrow H = 6^h$$

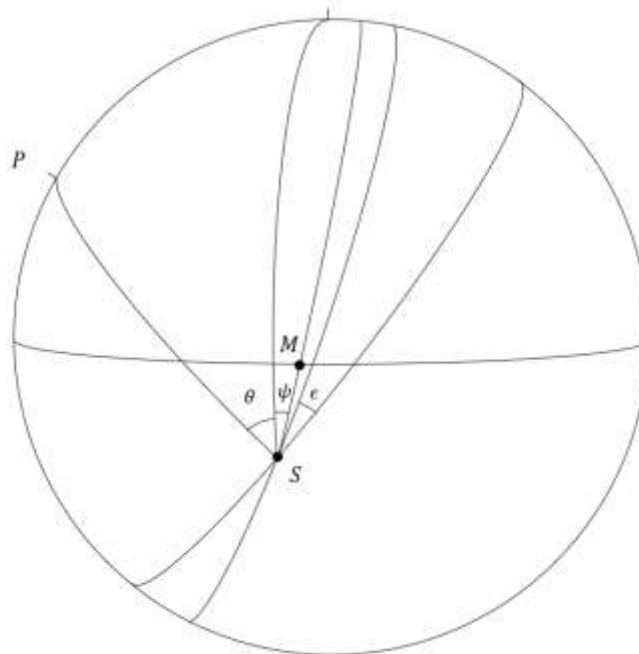
برای زاویه ساعتی اذان مغرب:

$$\cos(90 + 4^\circ) = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \Rightarrow \cos H = \frac{\cos 94}{\cos \phi} \Rightarrow H = 94/92^\circ = 6^h 20^m$$

$$\rightarrow H_{\text{اذان}} - H_{\text{غروب}} = 20^m$$

ب)

به دلیل آن که در متن سوال اطلاعاتی راجع به نقطه گره صعودی مدار ماه گفته نشده است، به ازای هر حالت خاصی از حل مساله که مربوط به گره صعودی مشخص شده‌ای باشد به دانش‌پژوه نمره داده می‌شود. دقت کنید که این حالت خاص مطرح شده باید در شرط این که موقع اذان مغرب، ماه در موقعیت گفته شده قرار گرفته باشد صدق کند. در صورتی که حالت خاصی بررسی نشده باشد اما حالت کلی مساله به صورت کامل توضیح داده شده باشد و با استدلال درست روند حل تحلیلی آن طی شده باشد نیز نمره تعلق می‌گیرد. در راه حل زیر ساده‌ترین حالت، که مربوط به واقع بودن گره صعودی در نقطه اعتدال بهاری است، آمده است.



زاویه راستای $Z - S$ (سرسو-خورشید) با استوای سماوی در لحظه اذان مغرب:

$$\frac{\sin(90 - \theta)}{\sin(90 - \phi)} = \frac{\sin H_{\text{اذان}}}{\sin(90 + 4)} \Rightarrow \theta = 35/8^\circ$$

$$\rightarrow \psi = \theta - \epsilon - 5 = 7/3^\circ$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۴، صفحه ۲ از ۳) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

سپس در مثلث ZMS یک چهارجزئی حل می‌کنیم:

$$\cos \psi \cos 4 = \sin 4 \cot x - \sin \psi \cot 90 \Rightarrow \tan x = \frac{\tan 4}{\cos \psi} \Rightarrow x = 4.03^\circ$$

و در نهایت برای لحظه غروب داریم:

$$\frac{\sin a}{\sin(90 - \phi + \epsilon + 5)} = \frac{\sin x}{\sin 90} \Rightarrow a = 4.00^\circ$$

پ) خورشید در اذان مغرب و ارتفاع ماه ۱۰ درجه است. با نوشتن یک رابطه کسینوس‌ها در مثلث سرسو-ماه-خورشید داریم.

$$\cos 80 = \cos 94 \cos \chi + \sin 94 \sin \chi \cos \psi$$

با روش حل عددی یا روش تحلیلی مقدار χ را می‌توان بدست آورد که برابر می‌شود با $14/11^\circ$.
(ت)

$$\frac{1 - \cos \chi}{2} = 1/51\%$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۴، صفحه ۳ از ۳) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:

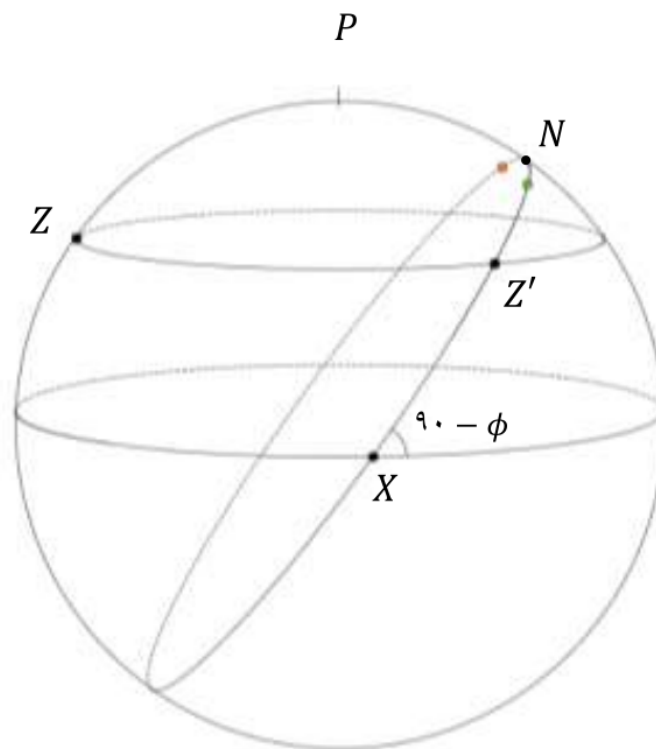


(سوال ۵، صفحه ۱ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

در این مساله دو شرایط رصدی بیان شده بود که به ترتیب آنها را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: در این حالت وقتی هر دو ستاره روی افق هستند فاصله آنها تا سرسو ۹۰ درجه است پس در می‌یابیم که سرسوی ناظر در این لحظه، قطب دایره عظیمه گذرنده از این دو ستاره است. اگر در دستگاه مختصات سماوی (Z چرخان) به این مساله نگاه کنیم متوجه می‌شویم که مسیر حرکت سرسو که با قطب شمال سماوی زاویه $\phi - ۹۰$ دارد از قطب دایره عظیمه گذرنده از دو ستاره رد می‌شود. پس زاویه دایره عظیمه مورد نظر با استوای سماوی برابر با $\phi - ۹۰$ خواهد بود. از آنجایی که در این حالت سمت دو ستاره نیز قرینه است پس می‌فهمیم که نقطه شمال در این لحظه فاصله برابری از هر دو ستاره دارد.

حالت دوم: وقتی دو ستاره هم سمت می‌شوند یعنی نقطه سرسو در این لحظه روی دایره عظیمه گذرنده از دو ستاره قرار گرفته است. چون ارتفاع دو ستاره متمم یکدیگر است پس فاصله سرسو تا نقطه فرضی که دقیقاً در وسط دو ستاره قرار دارد ۴۵ درجه است. اگر اطلاعاتی که از حالت قبلی دریافتیم را بررسی کنیم می‌فهمیم که این نقطه فرضی در واقع همان نقطه شمال در حالت اول است. از آنجایی که نقطه شمال در حالت اول بیشترین میل را در دایره عظیمه افق داشته است، پس اگر فاصله این سرسو تا نقطه ذکر شده ۴۵ درجه باشد، فاصله سرسو تا محل برخورد دایره عظیمه و استوای سماوی نیز ۴۵ درجه است.



در شکل بالا Z نقطه سرسوی اولیه، Z' سرسوی ثانویه، N نقطه شمال اولیه و X محل برخورد دایره عظیمه گذرنده از دو ستاره با استوای سماوی است. همچنین هر دو ستاره را می‌توانید در شکل با رنگ سبز و نارنجی مشاهده کنید. حال با توجه به اطلاعاتی که از مساله کسب کردیم ($\hat{X} = ۹۰ - \phi$ ، $Z'X = ۴۵^\circ$) کافی است مثلث PXZ' را حل کنیم.

$$\cos Z'P = \cos Z'X \cos XP + \sin Z'X \sin XP \cos(90 - \hat{X})$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۵، صفحه ۲ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

$$\Rightarrow \cos(90^\circ - \phi) = \cos 45^\circ \cos 90^\circ + \sin 45^\circ \sin 90^\circ \cos \phi$$

$$\Rightarrow \sin \phi = \sin 45^\circ \cos \phi \Rightarrow \tan \phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\phi = 35/26^\circ}$$

در این سوال عرض جغرافیایی منفی (ناظر جنوبی) نیز قابل قبول است.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۵، صفحه ۳ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۵، صفحه ۴ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



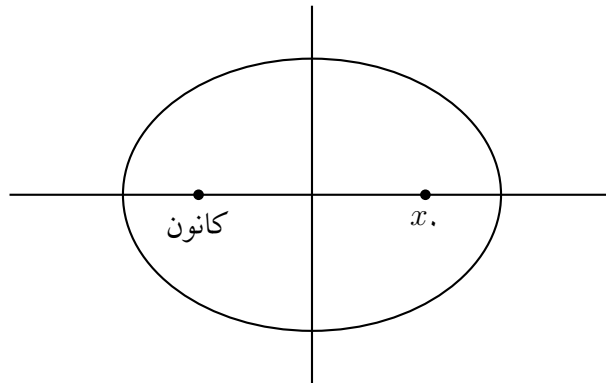
استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۶، صفحه ۱ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) فرض کنید فضاپیما در مختصات x قرار دارد.



به ازای مقادیر x نزدیک به a (نقطه اوج)، مشخصاً نزدیک‌ترین نقطه همان نقطه اوج است. پس انتظار می‌رود نمودار x برحسب کمترین فاصله، خطی باشد

$$d = a - x.$$

$$a - x = vt$$

پس شیب نمودار نزدیک مبدا همان سرعت فضاپیما است:

$$v = \frac{0.1 \text{ AU}}{50 \text{ day}} = 3470 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب)

برای رابطه کمترین فاصله از نقطه روی بیضی و معادله بنیادی بیضی داریم

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$$

با ترکیب دو رابطه بالا به رابطه زیر می‌رسیم

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x^2)}$$

حال باید پیدا بکنیم که رابطه بالا به ازای چه مقداری از x کمینه است. برای این کار از مشتق‌گیری کمک می‌گیریم

$$\left. \frac{d\rho}{dx} \right|_{\rho_{\min}} = 0 \rightarrow 2(x - x_0) + (1 - e^2)(-2x) = 0 \rightarrow x(1 - (1 - e^2)) = x_0.$$

$$x_{\rho=\rho_{\min}} = \frac{x_0}{e^2}$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۶، صفحه ۲ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

پس نقطه‌ای از بیضی که فاصله آن تا نقطه $(x_0, 0)$ کمینه است مقدار x ای برابر با $\frac{x_0}{e^2}$ دارد. پس به ازای مقدار بین ae^2 و a کمترین فاصله همان نقطه اوج است.

$$\rho = \begin{cases} \sqrt{x_0^2 \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^2 + (1 - e^2) \left(a^2 - \frac{x_0^2}{e^2}\right)} & |x_0| \leq ae^2 \\ a - |x_0| & a \geq |x_0| > ae^2 \end{cases}$$

می‌توانیم رابطه فوق را ساده‌سازی کنیم

$$\rho = \begin{cases} \sqrt{1 - e^2} \sqrt{a^2 - \frac{x_0^2}{e^2}} & |x_0| \leq ae^2 \\ a - |x_0| & a \geq |x_0| > ae^2 \end{cases}$$

(پ)

پس از روی نمودار، نقطه انحنای تابع را می‌یابیم. این نقطه در $t = 200 \text{ day}$ و در مقدار 0.4 AU است. بنابراین

$$0.4 \text{ AU} = a - ae^2 = a(1 - e^2)$$

باتوجه به صورت سوال زمان نمودار دوره تناوب کامل سیارک‌ها است که برابر با ۳۶۵ روز است. چون ستاره مرکزی خورشیدگون است بنابراین $a = 1 \text{ AU}$ خواهد بود و از رابطه بالا خواهیم داشت

$$0.4 \text{ AU} = 1 - e^2 \rightarrow e \approx 0.77$$

توجه کنید که در نمره‌دهی راه‌حل‌های درست برای این بخش نمره‌دهی در نظر گرفته خواهد شد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۶، صفحه ۳ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۶، صفحه ۴ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۷، صفحه ۱ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) برای بدست آوردن جرم باید روی المان‌های پوسته‌ای انتگرال بگیریم.

$$M(R) = \int \rho dV = \int_0^R \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\sigma^2}{G} \int_0^R dr = \frac{2\sigma^2 R}{G}$$

$$\frac{v_c^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \Rightarrow v_c^2 = 2\sigma^2 \Rightarrow v_c = \sqrt{2}\sigma$$

ب) طبیعتاً رابطه جرم، همانند قسمت قبل است فقط باید پارامترهای سهراب را جایگذاری کنیم. بنابراین جرم محصور سهراب در شعاع کشندی اش (r_t) بشکل زیر می‌شود:

$$m(r_t) = \frac{2\sigma_s^2 r_t}{G}$$

پ) کافی است روابط قسمت (الف) و (ب) را در رابطه داده شده برای حد روش جایگذاری کنیم.

$$r_t = R \left(\frac{m(r_t)}{2M_H(R)} \right)^{\frac{1}{2}} = R \left(\frac{\frac{2\sigma_s^2 r_t}{G}}{2 \frac{2\sigma_H^2 R}{G}} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \left(\frac{r_t}{R} \right)^2 = \frac{\sigma_s^2}{2\sigma_H^2} \left(\frac{r_t}{R} \right)$$

که نهایتاً نتیجه می‌دهد:

$$\frac{r_t}{R} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}\sigma_H}$$

ت) رابطه قسمت قبل را در رابطه جرم سهراب جایگذاری می‌کنیم و به رابطه مدنظر می‌رسیم

$$m(R) = \frac{2\sigma_s^2 r_t(R)}{G} = \frac{2\sigma_s^2}{G} \cdot \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}\sigma_H} \cdot R$$

$$m(R) = \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_s^3}{G\sigma_H} \right) R$$

بنابراین رابطه مدنظر اثبات شد و $k = \frac{\sqrt{2}\sigma_s^3}{G\sigma_H}$

ث) برای اینکه دقیق باشیم و از ابهامات ناشی از تغییر جرم سهراب در نوشتن روابط جلوگیری کنیم، بشکل دقیق عبارت تغییرات دیفرانسیلی تکانه زاویه‌ای را برای لحظه t و $t + dt$ می‌نویسیم.

$$L(t) = mvR$$

$$L(t + dt) = (m - dm)v(R + dR) + dm v R$$

دقت کنید که با توجه به محاسبات بخش (الف)، سرعت وابسته به شعاع نیست و ثابت است. همچنین طبق قراردادی که کرده‌ایم dR را منفی گرفته‌ایم.

$$dL = L(t + dt) - L(t) = (m - dm)v(R + dR) + dm v R - mvR$$



استان:

کد ملی:

نام و نام خانوادگی:

جنسیت:



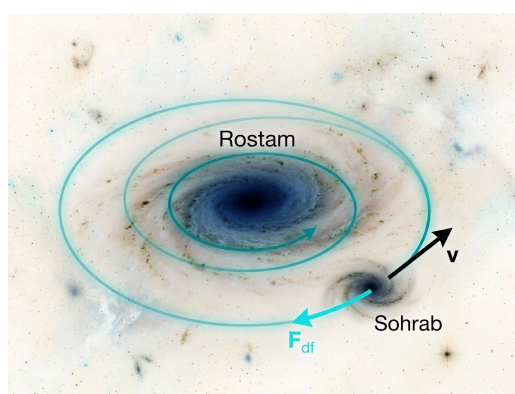
(سوال ۷، صفحه ۲ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

$$= (m - dm)v(R + dR) + dm v R - m v R$$

چون نهایتاً $dt \rightarrow 0$ جملات دیفرانسیلی مرتبه ۲ و بالاتر صفر خواهند شد و تاثیری در معادلات نخواهند داشت.

$$\Rightarrow dL = m v R - d m v R + m v d R + d m v R - m v R = m v d R$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = m v \frac{dR}{dt}$$



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{R} \times \vec{F} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = R f_{df} = - \frac{\Psi \pi G^{\Psi} m^{\Psi} \ln(\Lambda) \rho_H(R)}{v^{\Psi}} B R \\ \Rightarrow \frac{dR}{dt} &= - \frac{\Psi \pi G^{\Psi} m \ln(\Lambda) \rho_H(R)}{v^{\Psi}} B R = - \frac{\Psi \pi G^{\Psi} m \ln(\Lambda) B}{v^{\Psi}} \cdot \frac{\sigma^{\Psi}}{\Psi \pi G R} \\ \boxed{\frac{dR}{dt} = - \frac{m G B \ln(\Lambda)}{v R}} \end{aligned}$$

در پاسخنامه برای دقت بیشتر، به روشی روشن اختلاف تکانه زاویه‌ای را نوشتیم و دیدیم که در آهنگ تغییرات تکانه زاویه‌ای جمله‌ای شامل آهنگ تغییرات جرم ظاهر نمی‌شود. کسانی که مستقیم رابطه آخر برای آهنگ تغییرات تکانه زاویه‌ای را نوشته‌اند و گام‌های بالا را طی نکرده‌اند، باید استدلال کیفی مبنی بر این‌که چون جرم از دست رفته از سهراب با همان سرعت سابق در مدار شروع به گردش می‌کند بنابراین در سهم نهایی، جمله مربوط به آهنگ تغییرات جرم ظاهر نمی‌شود تا نمره کامل را از این قسمت بگیرند.

ج) سرعت سقوط در واقع همان $\frac{dR}{dt}$ است. اگر $m(R) = kR$ را در رابطه بالا جایگزین کنیم می‌بینیم که این سرعت مستقل از شعاع می‌شود و در نتیجه یک سقوط با سرعت ثابت و بدون شتاب را خواهد داشت.

$$\begin{aligned} R dR &= - \frac{k R G B \ln(\Lambda)}{v} dt \Rightarrow \int_{R_0}^R dR = \int_0^t - \frac{k G B \ln(\Lambda)}{v} dt \\ \Rightarrow R(t) - R_0 &= - \frac{k G B \ln(\Lambda)}{v} (t - 0) \Rightarrow \boxed{R(t) = - \frac{k G B \ln(\Lambda)}{v} t + R_0} \end{aligned}$$

چ) وقتی سقوط کامل می‌شود که $R(t) = 0$ شود. پس با جایگذاری این مقدار به زمان سقوط می‌رسیم.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۷، صفحه ۳ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

$$T_s = \frac{v R_s}{k G B \ln(\Lambda)} = \frac{\sqrt{v} \sigma_H R_s}{\frac{\sqrt{v} \sigma_s^*}{G \sigma_H} G B \ln(\Lambda)} = \frac{\sigma_H^* R_s}{\sigma_s^* B \ln(\Lambda)}$$



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۷، صفحه ۴ از ۴) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



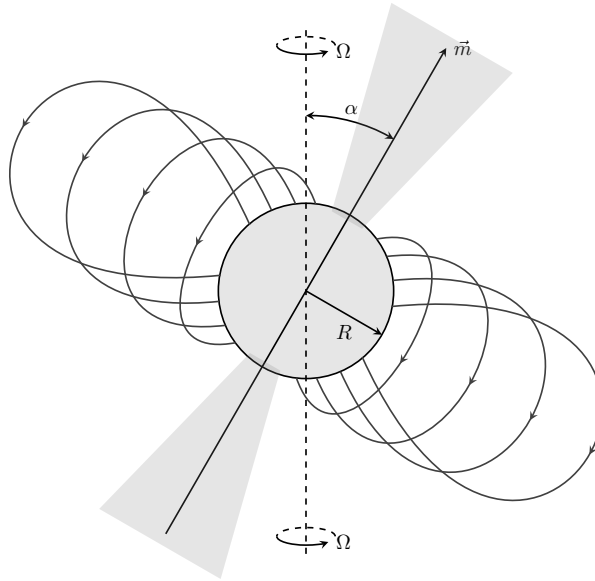
استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۸، صفحه ۱ از ۵) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

الف) طبق رابطه داده شده در صورت سوال، برای محاسبه انرژی از دست رفته ابتدا باید مشتق دوم بردار دوقطبی مغناطیسی را محاسبه کنیم و سپس در رابطه داده شده جایگذاری کنیم.



$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{4}BR^3(\cos\alpha\hat{k} + \sin\alpha\cos(\Omega t)\hat{j} + \sin\alpha\sin(\Omega t)\hat{i}) \\ \dot{\vec{m}} &= \frac{1}{4}BR^3\Omega(-\sin\alpha\sin(\Omega t)\hat{j} + \sin\alpha\cos(\Omega t)\hat{i}) \\ \ddot{\vec{m}} &= -\frac{1}{4}BR^3\Omega^2(\sin\alpha\cos(\Omega t)\hat{j} + \sin\alpha\sin(\Omega t)\hat{i})\end{aligned}$$

حال اندازه مجذور این بردار را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}|\ddot{\vec{m}}|^2 &= \ddot{\vec{m}} \cdot \ddot{\vec{m}} = \frac{1}{16}B^2R^6\Omega^4(\sin^2\alpha\cos^2(\Omega t) + \sin^2\alpha\sin^2(\Omega t)) \\ &= \frac{1}{16}B^2R^6\Omega^4\sin^2\alpha\end{aligned}$$

با جایگذاری این رابطه در آهنگ اتلاف انرژی الکترومغناطیسی خواهیم داشت:

$$\frac{dE_{\text{الکترومغناطیسی}}}{dt} = -\frac{2}{3c^3}|\ddot{\vec{m}}|^2 = -\frac{B^2R^6\Omega^4\sin^2\alpha}{6c^3}$$

که همان خواسته سوال است.

همچنین به ازای $\alpha = 0, \pi$ مقدار این کسر صفر می‌شود.



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۸، صفحه ۲ از ۵) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

ب) از روابط پایه در مکانیک کلاسیک می‌دانیم انرژی دورانی یک جسم صلب با گشتاور لختی I توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2} I \Omega^2$$

با استفاده نکته‌ای که در صورت سوال گفته شده خواهیم داشت:

$$\frac{dE_{\text{الکترومغناطیسی}}}{dt} = \frac{dE_{\text{دورانی}}}{dt}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{dE_{\text{دورانی}}}{dt} = I \Omega \dot{\Omega} = - \frac{B^2 R^2 \Omega^2 \sin^2 \alpha}{\epsilon c^3}$$

که نهایتاً به رابطه زیر می‌رسیم

$$\dot{\Omega} = - \frac{B^2 R^2 \Omega^2 \sin^2 \alpha}{\epsilon I c^3}$$

پ) رابطه بالا را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{d\Omega}{\Omega^2} = - \frac{B^2 R^2 \sin^2 \alpha}{\epsilon I c^3} dt$$

بشکل زیر از رابطه بالا انتگرال معین می‌گیریم

$$\int_{\Omega_{t=0}}^{\Omega_{t=t}} \frac{d\Omega}{\Omega^2} = - \frac{B^2 R^2 \sin^2 \alpha}{\epsilon I c^3} \int_0^t dt$$

که حاصل انتگرال بالا بشکل زیر است

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega_{t=t}^2} - \frac{1}{\Omega_{t=0}^2} \right) = - \frac{B^2 R^2 \sin^2 \alpha}{\epsilon I c^3} t.$$

همچنین با جایگذاری روابط بدست آمده برای مقیاس زمانی رابطه زیر را داریم:

$$T \equiv - \left(\frac{\Omega}{\dot{\Omega}} \right) \bigg|_{t=t} = \frac{\epsilon I c^3}{B^2 R^2 \Omega_{t=t}^2 \sin^2 \alpha}$$

حال این رابطه مقیاس زمانی را با رابطه بدست آمده از انتگرال‌گیری ترکیب می‌کنیم

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega_{t=t}^2} - \frac{1}{\Omega_{t=0}^2} \right) = - \frac{1}{T \Omega_{t=t}^2} t. \rightarrow t_* = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{\Omega_{t_*}^2}{\Omega_0^2} \right)$$

که همان رابطه عمر فعلی تپ‌اختر برحسب کمیت‌های خواسته شده است. در حد خواسته شده در سوال نیز خواهیم داشت:



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۸، صفحه ۳ از ۵) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

$$\Omega_{t.} \ll \Omega. \rightarrow t. \approx \frac{T}{2}$$

که برای سادگی اندیس‌های زیرین را خلاصه‌تر نوشتیم.

(ت) ابتدا مشتق سرعت زاویه‌ای را به شکل زیر حساب می‌کنیم

$$\dot{\Omega} = -\frac{\alpha}{\tau} \Omega. \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha \Omega}{\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1}$$

با جایگذاری در رابطه قسمت (ب) خواهیم داشت

$$I \Omega. - \frac{\alpha \Omega}{\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1} = -\frac{B^{\gamma} R^{\epsilon} \Omega^{\gamma} \sin^{\gamma} \alpha}{\epsilon c^{\gamma}}$$

با ساده کردن توان‌های Ω از دو طرف و بردن B^{γ} به یک طرف معادله خواهیم داشت

$$B^{\gamma} = \frac{\epsilon c^{\gamma}}{R^{\epsilon} \sin^{\gamma} \alpha} \cdot \frac{\alpha I}{\tau \Omega.} \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{\gamma \alpha} \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-1}$$

با گرفتن جذر از دو طرف رابطه داریم

$$B = B. \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha - \frac{1}{\gamma}}$$

که تعریف کردیم

$$B_{t=0} = B. \equiv \left(\frac{\epsilon c^{\gamma}}{R^{\epsilon} \sin^{\gamma} \alpha} \cdot \frac{\alpha I}{\tau \Omega.} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

برای درخشندگی خواهیم داشت:

$$L_{\text{رادیویی}} = f |\dot{E}| = f I \Omega |\dot{\Omega}| = f I \Omega. \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\tau} \Omega. \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha-1}$$

$$L_{\text{رادیویی}}(t) = L. \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-(\gamma \alpha + 1)}$$

که تعریف کردیم

$$L. = \frac{f I \Omega.^{\gamma} \alpha}{\tau}$$

(ث) روشنایی رادیویی طبق تعریف رابطه‌ای به شکل زیر دارد



استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۸، صفحه ۴ از ۵) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.

$$b_{\text{رادیویی}}(t') = \frac{L_{\text{رادیویی}}(t')}{\Omega d^2}$$

که در اینجا منظور از Ω زاویه فضایی است. با تقریب خوبی طبیعتاً Ω و d وابستگی زمانی ندارند. در بالا برای تاکید روی t اندیس گذاشته شده که به تفاوت آن با t تعریف شده در این بخش سوال، تصریح شود. در واقع t در بخش های قبل، همان t' این بخش است. رابطه آنها بشکل زیر است:

$$t' = t + \Delta t$$

که t زمان شروع رصد و Δt مدت زمان گذشته از آن است که محور افقی نمودار برحسب Δt عملاً کشیده شده است. حال رابطه روشنایی نسبی را ساده سازی می کنیم:

$$\frac{\Delta b}{b}(\Delta t) = \frac{b(t + \Delta t) - b(t)}{b(t)} = \frac{b(t + \Delta t)}{b(t)} - 1$$

چون Δt عملاً کوچک است و خطی بودن نمودار هم موید این است، باید رابطه بالا را تا تقریب مرتبه اول نسبت به Δt بدست بیاوریم و از روی آن رابطه شیب خط با کمیت خواسته شده را بدست آوریم. عبارت بالا را ساده تر می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta b}{b}(\Delta t) &= \frac{\frac{L \cdot \left(1 + \frac{t + \Delta t}{\tau}\right)^{-(2\alpha+1)}}{\Omega d^2}}{\frac{L \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-(2\alpha+1)}}{\Omega d^2}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{t + \Delta t}{\tau}\right)^{-(2\alpha+1)}}{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-(2\alpha+1)}} - 1 \\ &= \left(\frac{\tau + t + \Delta t}{\tau + t}\right)^{-(2\alpha+1)} - 1 = \left(1 + \frac{\Delta t}{t + \tau}\right)^{-(2\alpha+1)} - 1 \\ &\cong 1 - (2\alpha + 1) \frac{\Delta t}{t + \tau} - 1 \end{aligned}$$

که در مساوی آخر از تقریب مرتبه اول خطی استفاده کردیم. نهایتاً با ساده کردن رابطه بالا به رابطه زیر می رسیم:

$$\frac{\Delta b}{b}(\Delta t) = \frac{-(2\alpha + 1)}{t + \tau} \Delta t$$

طبق تصریح سوال $t \ll \tau$ بنابراین:

$$\frac{\Delta b}{b}(\Delta t) = \frac{-(2\alpha + 1)}{\tau} \Delta t = m \cdot \Delta t$$

که m شیب خط نمودار $\frac{\Delta b}{b}$ برحسب Δt است. از نمودار می توانیم مقدار شیب را بخوانیم.

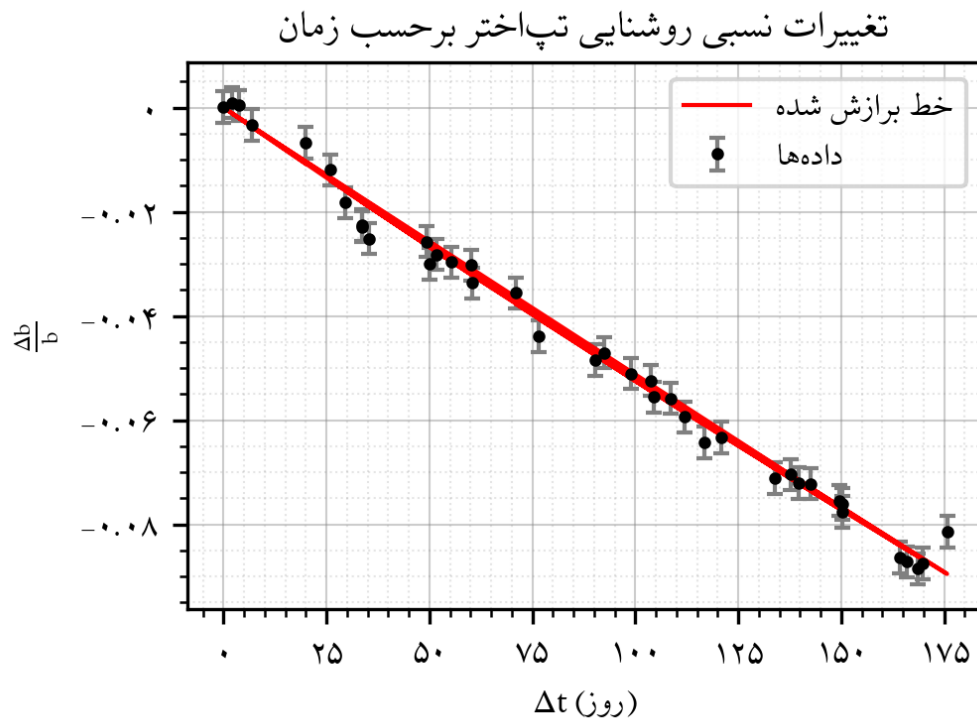


استان:
کد ملی:

نام و نام خانوادگی:
جنسیت:



(سوال ۸، صفحه ۵ از ۵) جواب را فقط در کادر پایین بنویسید و از نوشتن در کادر بالا و حاشیه خودداری کنید، در غیر اینصورت برگه تصحیح نخواهد شد.



$$m = -5/18 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{روز}}$$

از روی این می‌توانیم α را بدست بیاوریم:

$$m = \frac{-(2\alpha + 1)}{\tau} \rightarrow \alpha = \frac{-m\tau - 1}{2} \approx 4/46 \times 10^{-1}$$

که نهایتاً از تعریف α بسادگی n بدست می‌آید:

$$\alpha = \frac{-1}{n-1} \rightarrow n = \frac{-1}{\alpha} + 1$$

$$\rightarrow n \approx 3/24$$

اگر به رابطه قسمت (ب) دقت کنید متوجه می‌شوید که از روابط صرفاً تئوری و با فرض میدان مغناطیسی ثابت $n = 3$ بدست آمده بود، اما با مدل دقیق‌تر و تطبیق با مشاهدات رصدی $n \approx 3/24$ آمد که نشان می‌دهد مدل‌سازی اولیه نسبتاً خوبی داشتیم. به امید آنکه در آینده فیزیک ناشناخته تپاخترها، رمزگشایی بیشتری شود!