جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
معاونت دانش‌پژوهان جوان

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

اینجانب ..... (شرکت کننده) این دفترچه را به صورت کامل (۲۴ برگه با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

اینجانب ..... (منشی حوزه) تعداد ..... برگه (با احتساب جلد) دریافت نمودم امضاء

چهاردهمین دوره المپیاد نجوم و اختر فیزیک

تاریخ: ۱۳۹۷/۲/۷ - ساعت: ۱۴:۰۰ مدت: ۲۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

شماره پرونده: **استان:**

کد ملی: **منطقه:**

نام پدر: **پایه تحصیلی:**

نام مدرسه:

حوزه:

شماره صندلی

توضیحات مهم

استفاده از هر نوع ماشین حساب مجاز است

۱- این پاسخ نامه به صورت نیمه کامپیوتری تصحیح می شود، بنابراین از مچاله و کثیف کردن آن جداً خودداری نمایید.

۲- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد، بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۳- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید، به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۴- با توجه به آنکه برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است، امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

۵- عملیات تصحیح توسط مصححین، پس از قطع سربرگ، به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد، خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

۶- از مخدوش کردن دایره ها در چهار گوشه صفحه و بارکدها خودداری کنید، در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۷- همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۸- شرکت کنندگان در دوره تابستان از بین دانش آموزان پایه دهم و یازدهم انتخاب می‌شوند.

۹- علاوه بر نوشتن پاسخ تشریحی در دفترچه آزمون، وارد کردن پاسخ‌های نهایی در پاسخ‌برگ ارائه شده (صفحه ۱ الی ۶) الزامی است. در صورت عدم انتقال پاسخ‌های نهایی به پاسخ‌برگ، برگه شما تصحیح نخواهد شد.

$۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$	$N\,m^{۲}\,kg^{-۲}$	ثابت جهانی گرانش	G
$۵/۶۷\times۱۰^{-۸}$	$W\,m^{-۲}\,K^{-۴}$	ثابت استفان-بولتزمن	σ
$۷/۵۶\times۱۰^{-۱۶}$	$J\,m^{-۳}\,K^{-۴}$	ثابت تابش	$a=۴\sigma/c$
$۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$	$J\,K^{-۱}$	ثابت بولتزمن	k_B
$۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴}$	$J.s$	ثابت پلانک	h
۳۶۵/۲۵	day	سال	$year$
$۹/۱\times۱۰^{-۳۱}$	kg	جرم الکترون	m_e
$۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}$	kg	جرم اتم هیدروژن	m_H
$۳/۰۰\times۱۰^{۸}$	m/s	سرعت نور	c
$۳/۰۹\times۱۰^{۱۶}$	m	پارسک	pc
$۱/۵۰\times۱۰^{۱۱}$	m	واحد نجومی	$r_{earth}=AU$
$۹/۴۶\times۱۰^{۱۵}$	m	سال نوری	Ly
$۶/۹۶\times۱۰^{۸}$	m	شعاع خورشید	R_{sun}
$۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$	kg	جرم خورشید	M_{sun}
$۶/۳۸\times۱۰^{۶}$	m	شعاع زمین	R_{earth}
$۵/۹۷\times۱۰^{۲۴}$	kg	جرم زمین	M_{earth}
۵۰	AU	شعاع منظومه شمسی	$R_{solars\ sys}$
۰/۰۸		ضریب کارایی چشم انسان	ε
۵۰	kpc	فاصله‌ی ابر ماژلانی بزرگ	R_{LMC}
۶۰	kpc	فاصله‌ی ابر ماژلانی کوچک	R_{SMC}
۰,۰۷		ضریب بازتاب سطح ماه	A_{moon}
$۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$	J	الکترون ولت	eV
۴	Gpc	ابعاد کیهان	D_{cosmos}
۱۳/۶	eV	انرژی حالت پایه اتم هیدروژن	$E.$
۶۸	$(km/s)/Mpc$	ثابت هابل	$H.$
$۱/۳۷\times۱۰^{۳}$	$Wm^{-۲}$	ثابت خورشیدی	f_{sun}
$۳/۸۵\times۱۰^{۲۶}$	W	درخشندگی خورشید	L_{sun}
۴/۷۲		قدر مطلق خورشید	M_{sun}
-۲۶/۷		قدر ظاهری خورشید	m_{sum}
۲۳/۴۵	$Degree$	زاویه تمایل محور دوران زمین	
۶/۵		حد قدری چشم انسان	
۶	mm	قطر مردمک چشم انسان	D_{pupil}
۱۵۹	$litr$	حجم یک بشکه	$Barrel$
$۵/۵\times۱۰^{۳}$	$kg/m^{۳}$	چگالی متوسط زمین	ρ_{earth}
$۱/۶۰\times۱۰^{-۱۹}$	C	بار الکترون	e

ذهن زیبا

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

علاوه بر نوشتن پاسخ تشریحی در دفترچه آزمون وارد کردن پاسخ‌های نهایی در پاسخ‌برگ ارائه شده (صفحه ۱ الی ۶) الزامی است. در صورت عدم انتقال پاسخ‌های نهایی به پاسخ‌برگ، برگه شما تصحیح نخواهد شد.

۱- سوال اول:

الف) شکل شماتیک	**ب)** $\Delta g/g=$ **ج)** $\Delta g/g=$ **د)** $\Delta g/g=$

۲- سوال دوم :

(الف L_1, L_2, L_3	
(الف L_4, L_5	
ب) فاصله بر حسب متر:	**ب) نسبت به فاصله زمین تا خورشید:**

ج) L_1:
ج) L_2:
ج) L_3:

ذهن زیبا

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۳- سوال سوم:

الف)
ب) m =
ج) L_{star}/L_{sun}=
د) M_{star}/M_{sun}=

۴- سوال چهارم:

الف) واحد اندازه‌گیری α در دستگاه SI $[\alpha]$=
ب) بیشترین طول موج λ =
ج) شعاع ابر H II $R_{H\,II}$ =

ذهن زیبا

فاصله (pc)	$R_{H\,II}$ (pc)	N (s^{-1})	رده طیفی ستاره مرکزی
ه)	د)	۳×۱۰^{۴۹}	O۵V
		۴×۱۰^{۴۶}	B۰V
		۱×۱۰^{۳۹}	G۲V

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۵- سوال پنجم:

الف) کمترین طول سایه
الف) بیشترین طول سایه

ب) عرض جغرافیایی ناظر $\Phi =$	ج) میل خورشید a =
د)	ه) طول سایه: L =

ذهن زیبا

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۶- سوال ششم:

الف) R_{hm}/ R_{hl} =
ب) رابطه: R_{hm}/ R_{hl} =
ب) مقدار: R_{hm}/ R_{hl} =
ج) توجیه نتایج بالا در ۳ سطر

ذهن زیبا

۷- سوال هفتم:

مقدار	رابطه
r =	r =

نام :

نام خانوادگی :

کد ملی :

۸- سوال هشتم:

الف) E_{tot} =	
ب) $E_۱$ =	$E_۱/E_{tot}(\%)$ =
ج) $E_۲$ =	$E_۲/E_{tot}(\%)$ =
د) $E_۳$ =	$E_۳/E_{tot}(\%)$ =
ه) $N_۷$ =	
و) n =	

ذهن زیبا

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۹- سوال نهم:

الف) r =
ب) (M/L)(r) =
ج) (M/L) =

۱۰-سوال دهم:

الف) $m_۲$ =	
ب) $a_{m۱}$ =	$a_{m۲}$ =
ج) r =	V_{cm} =

ذهن زیبا

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۱- برای حجم یک حوزه نفتی در جنوب کشور ۴۰ میلیون بشکه نفت تخمین زده می‌شود. این حوزه نفتی در عمق یک کیلومتری ($d=1\ km$) از سطح زمین قرار گرفته است.

یکی از روش‌هایی که به اکتشاف منابع نفتی منجر می‌شود اندازه گیری شتاب گرانش است. چگالی نفت خام برای نفت سبک و سنگین به ترتیب ۸۷۰ و ۹۲۰ کیلوگرم بر مترمکعب است.

الف) شکل شماتیکی از مسئله ترسیم کنید. فرض کنید مخزن نفتی به صورت کروی باشد.

ب) تغییرات نسبی شتاب گرانش را برای نقطه نصب دکل نفتی به صورت پارامتری به دست آورید.

ج) مقدار عددی تغییرات نسبی شتاب گرانش را محاسبه کنید.

د) دقت در اندازه گیری شتاب گرانش دست کم چقدر باید باشد تا از اندازه گیری شتاب گرانش بتوانیم به سبک یا سنگین بودن نفت پی ببریم. (۲۰ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۲- پتانسیل گرانشی را در اطراف یک سامانه دوتایی (مثل خورشید(M)–زمین(m)) به فاصله d از یکدیگر را ترسیم می‌کنیم.

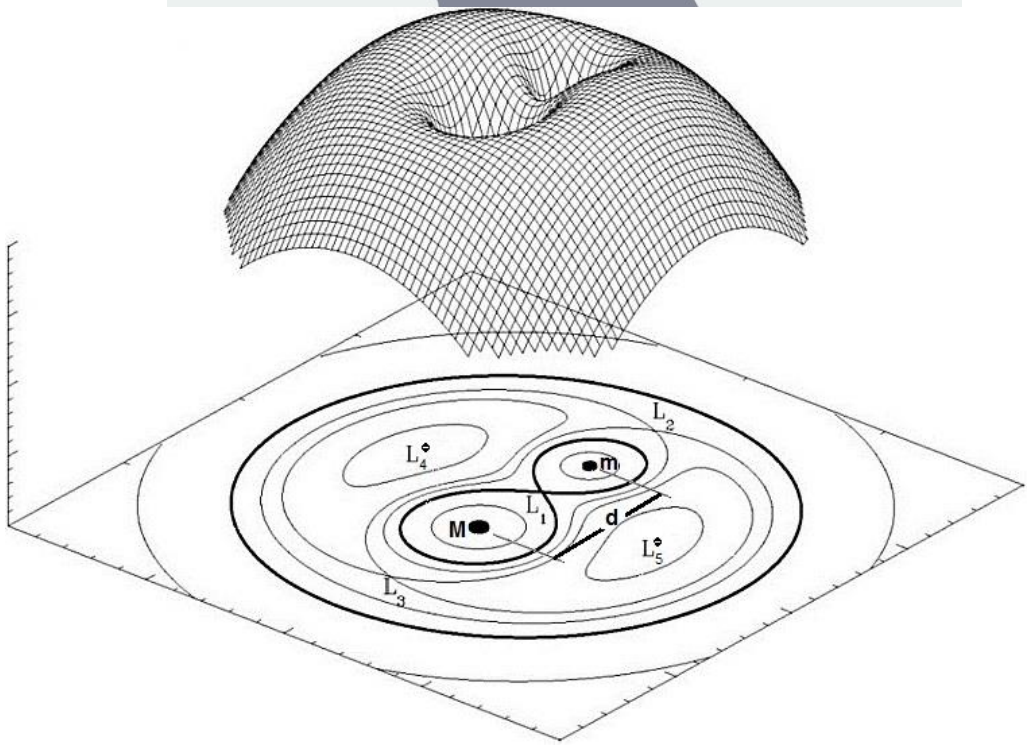
این سامانه با سرعت زاویه‌ای ω حول مرکز خود در حال دوران است. نقاط L_1 تا L_5 به نقاط لاگرانژ موسوم هستند. اگر جسم سومی با جرمی بسیار کوچکتر از این دو جرم [$\mu << m , M$] در نقاط لاگرانژ قرار گیرد، موقعیت آن نسبت به جرم‌های m و M همواره ثابت خواهد ماند.

این نقاط مکان‌های مناسبی برای قرارگیری ماهواره‌های تحقیقاتی هستند. ماهواره تحقیقاتی SOHO در نقطه L_1 قرار گرفته و تلسکوپ فضایی جیمز وب JWST در نقطه L_2 نصب خواهد شد چرا که همواره در سایه زمین نسبت به خورشید قرار خواهد داشت.

الف) با توجه به شکل، مشخصه‌های نقاط لاگرانژ از دید تعادل و پایداری را در دو دسته (L_1,L_2,L_3) و (L_4,L_5) بنویسید.

ب) فاصله خورشید از مرکز جرم مشترک سیستم خورشید زمین را بر حسب متر محاسبه کرده و نسبت آن را به فاصله زمین تا خورشید به دست آورید.

ج) با یک تقریب خوب می‌توانیم فرض کنیم که مرکز جرم زمین–خورشید در مرکز خورشید قرار گرفته باشد. سه معادله برای محاسبه x_1 (فاصله نقطه L_1 از مرکز خورشید)، x_2 (فاصله نقطه L_2 از مرکز خورشید) و x_3 (فاصله نقطه L_3 از مرکز خورشید) بدست آورید که با حل آنها بتوان مقادیر فوق را محاسبه کرد. (۲۰ نمره)



نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۳- یک منجم آماتور می‌خواهد رصدهای خود را با دقت بیشتری ساماندهی کند. به یک سایت رصدی خوب (حد قدری ۶٫۵) می‌رود. ضریب کارایی چشم انسان در حدود ۸٪ است. در همین شرایط از یک تلسکوپ ۸ اینچی (قطر شیئی ۲۰ سانتیمتر) و یک دوربین با ضریب کارایی ۹۰٪ برای تصویر برداری استفاده می‌کند و تصویر دریافتی را روی مونیتور لپ تاپ خود مشاهده می‌کند.

الف) رابطه قدر ظاهری- قدر مطلق را با وجود خاموشی بنویسید.

ب) قدر کم نورترین ستاره‌ای را که روی مونیتور لپ تاپ خود مشاهده می‌کند محاسبه کنید.

ج) یکی از این کم نورترین ستاره‌ها در فاصله ۴ کیلوپارسکی از ما (لبه بالج کهکشان) قرار گرفته است. ضریب خاموشی نیز ۱ قدر بر کیلوپارسک است. درخشندگی ستاره را بر حسب درخشندگی خورشید به دست آورید.

د) اگر از رابطه $L \propto M^{3}$ استفاده کنیم، مقدار جرم ستاره را بر حسب جرم خورشید محاسبه کنید. (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۴- ابرهای گازی یونیزه (H II) شمع‌های استاندارد برای اندازه‌گیری فاصله هستند. چرا که منطقه‌ای را به صورت کروی شکل در داخل یک ابر گازی تک اتمی یونیزه می‌کند. شعاع کره توسط کمیت‌های قابل رصد محاسبه می‌شود و از طرفی قطر زاویه‌ای این کره نیز بر حسب ثانیه قوس قابل اندازه‌گیری است. در ابرهای گازی تک اتمی مثل سحابی سر اسب یا سحابی اتا شاه تخته چنین پدیده‌ای دیده می‌شود. ستاره‌ای پر جرم و آبی رنگ فوتون‌های فرابنفش قابل توجهی تولید می‌کنند که این فوتون‌ها قادر به یونیزاسیون اتم‌های هیدروژن موجود در ابر هستند. بنابراین توسط این فوتون‌های پر انرژی کسری از اتم‌ها یونیزه شده و الکترون‌های آزاد تولید می‌کنند. الکترون‌های آزاد شده برای بازترکیب نیاز به برخورد با هیدروژن‌های یونیزه یا همان پروتون‌ها دارند. آهنگ بازترکیب در واحد حجم با حاصلضرب چگالی الکترونی (n_e) و چگالی پروتونی (n_p) متناسب است ($Rate=\alpha n_e n_p$)؛ α ضریب بازترکیب است. تعداد فوتون‌های تابشی در واحد زمان از ستاره مرکزی که قادر به یونیزاسیون گاز هیدروژن موجود هستند برابر N است (اعداد مورد نیاز در جدول زیر موجود است):

الف) واحد اندازه‌گیری α را در دستگاه SI به دست آورید.

ب) بیشترین طول موج فوتون‌های لازم برای یونیزه کردن یک اتم هیدروژن از حالت پایه را محاسبه کنید.

ج) شعاع ابر H II ایجاد شده را بر حسب n_e، N و α محاسبه کنید.

د) اگر $n_e = ۱۰^{۷}$ و $\alpha=۳\times۱۰^{-۱۹}$ هر دو در دستگاه SI باشند، شعاع ابر H II ($R_{H\,II}$) برای ستاره‌های مرکزی داده شده را محاسبه کنید.

ه) اگر قطر زاویه‌ای این ابرهای گازی در حدود یک ثانیه قوسی باشد فاصله این ابرهای گازی داده شده در قسمت د را محاسبه کنید. (۲۵ نمره)

ذهن زیبا

رده طیفی ستاره مرکزی	N (s^{-1})
O۵V	۳×۱۰^{۴۹}
B۰V	۴×۱۰^{۴۶}
G۲V	۱×۱۰^{۳۹}

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۵- شخصی یک ساعت آفتابی با شاخصی به طول یکصد سانتیمتر می‌سازد. در یک روز مشخص وقتی انتهای سایه را روی سطح زمین علامت می‌زند، این علامت‌ها یک شکل بسته را تشکیل می‌دهد. کوتاهترین طول سایه ۱۷۳ سانتیمتر و بلندترین طول سایه ۵۶۷ سانتیمتر است. (۲۵ نمره)

الف) ترکیب قرارگیری خورشید، زمین و شاخص را برای بیشترین و کمترین طول سایه ترسیم کنید.

ب) عرض جغرافیایی ناظر را به دست آورید.

ج) میل خورشید را به دست آورید.

د) این پدیده در چه تاریخی یا تاریخ‌هایی رخ می‌دهد؟

ه) ۶ ساعت پس از کوتاهترین سایه، طول سایه چند سانتیمتر خواهد بود؟

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۶- در یک خوشه ستاره‌ای فرض کنید دو نوع ستاره با جرم‌های $m_1=1M_{sun}$ و $m_2=10M_{sun}$ وجود دارد و چگالی عددی آنها به این صورت با شعاع تغییر می‌کند $n_1(r)=n_{.1}/r^2$ و $n_2(r)=n_{.2}/r^2$. از رابطه $L \propto M^3$ استفاده کنید. شعاع‌های نیمه جرم (R_{hm}) و نیمه درخشندگی (R_{hl}) به شعاع‌هایی گفته میشود که به ترتیب نیمی از جرم خوشه و نیمی از درخشندگی خوشه در آن وجود داشته باشد.

الف) فرض کنید هر دو نوع ستاره تا شعاع $R_{.}$ توزیع شده باشند. نسبت شعاع نیمه جرم به شعاع نیمه درخشندگی را به دست آورید.

ب) می‌دانیم در اثر تحول دینامیکی به مرور زمان ستاره‌های سنگین‌تر به نواحی درونی‌تر خوشه هدایت می‌شوند و تجمع آنها در نواحی مرکزی‌تر خوشه بیشتر می‌شود. به این پدیده جداسازی جرمی (mass segregation) گفته می‌شود.

پس از جداسازی جرمی، ستاره‌های m_2 تا شعاع $R_{.}/2$ توزیع شده و ستاره‌های m_1 در همان وضعیت قبلی باقی می‌مانند. رابطه‌ی نسبت شعاع نیمه جرم و شعاع نیمه روشنایی را برای این حالت به دست آورده و مقدار عددی این نسبت را به ازای $n_{.1} = 10n_{.2}$ محاسبه کنید.

ج) با مقایسه حالت‌های الف و ب در حداکثر ۳ خط، نتایج بالا را توجیه کنید. (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۷- سیارکی در صفحه دایره‌البروج در مداری دایروی به دور خورشید در حرکت است. سفینه‌ای بر روی این سیارک فرود می‌آید و با مرکز فرماندهی بر روی زمین با ارسال یک سیگنال رادیویی تماس می‌گیرد. سفینه هرگاه که سیگنالی از زمین دریافت می‌کند، فورا به آن پاسخ می‌دهد. می‌دانیم که وقتی سیارک در وضعیت تربیع قرار می‌گیرد، فاصله زمانی بین ارسال سیگنال و دریافت مجدد آن توسط مرکز فرماندهی در مرکز زمین به مقدار $\Delta t=۷۷۵,۶s$ طولانی‌تر از حالتی است که سیارک در وضعیت مقابله قرار گرفته باشد. فرض کنید مدار زمین به دور خورشید دایره‌ای به شعاع a_E است. شعاع مداری سیارک، a، را بر حسب a_E، c (سرعت نور) و Δt به دست آورده و مقدار عددی آن را محاسبه کنید. (۲۰نمره)

در صورت لزوم از این قسمت
به عنوان چرک نویس
استفاده کنید
مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی
تصحیح نخواهد شد

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۸- رمبش شدید گرانشی ستاره‌ای به جرم $M=۱۰M_{sun}$ در مراحل پایانی عمر خود، منجر به یک انفجار شدید ابرنواختری می‌شود؛ به گونه‌ای که هسته ستاره که کوتوله‌ای سفیدی بوده، تبدیل به یک ستاره نوترونی می‌شود و مابقی ستاره به صورت یک پوش به بیرون پرتاب می‌شود. جرم کوتوله سفید تقریبا $M_C=۱,۴M_{sun}$، شعاع آن به اندازه شعاع زمین و شعاع ستاره نوترونی تقریبا $۲۰\,km$ است.

الف) مقدار کل انرژی آزاد شده در فرایند رمبش گرانشی چند ژول است؟

انرژی آزاد شده به سه قسمت تبدیل می‌شود: انرژی جنبشی پوش $(E_۱)$، انرژی تابشی $(E_۲)$ و انرژی نوترینوهای آزاد شده $(E_۳)$.

ب) در اثر انرژی آزادشده‌ی پوش، لایه اطراف هسته رمبنده با سرعتی زیاد به بیرون پرتاب می‌شود. پهن شدگی خطوط جذبی در طیف مشاهده شده ابرنواختر، برابر $\Delta\lambda/\lambda=۰,۰۳۳۳$ است. انرژی جنبشی آزاد شده در ابرنواختر را بر حسب ژول به دست آورید. این انرژی چند درصد از انرژی کل آزاد شده در قسمت الف است؟

ج) در طول انفجار ابرنواختری که به مدت ۲ ماه به طول می‌انجامد، ابر نواختر با قدر مطلق متوسط $M_V = -۱$ می‌درخشد. این مقدار انرژی را بر حسب ژول به دست آورید. چند درصد از انرژی آزاد شده ابرنواختر به شکل انرژی تابشی فوتون‌ها است؟

د) مقدار انرژی آزاد شده توسط نوترینوها را بر حسب ژول به دست آورید. این انرژی تقریبا چند درصد از کل انرژی آزاد شده است؟

ه) اگر انرژی متوسط نوترینوهای آزاد شده برابر $E_V=۵MeV$ باشد، تعداد نوترینوهای آزاد شده را به دست آورید.

و) اگر این ستاره در ابر ماژلانی بزرگ واقع شده باشد، تعداد نوترینوهای عبوری از سطح مقطع بدن هر یک از انسان‌ها (تقریبا ۰,۵ متر مربع) ناشی از این انفجار ابرنواختری چقدر خواهد بود؟ (۳۰نمره)

ذهن زیبا

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس
استفاده کنید مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :
نام خانوادگی :
کد ملی :

۹- یکی از روش‌های فاصله یابی کهکشان‌ها استفاده از تابع توزیع درخشندگی خوشه‌های ستاره‌ای درون آنهاست. تابع توزیع تعداد خوشه‌ها برحسب درخشندگی، یک تابع تپه‌ای شکل بوده، که بیشینه آن در قدرمطلق ۷٫۷- = M_v است (یعنی بیشترین فراوانی خوشه‌ها مربوط به خوشه‌های کروی با قدر مطلق ۷٫۷- می‌باشد). این موضوع برای همه کهکشان‌ها تقریبا یکسان است. اخیرا گروهی به رهبری پیتر وان داکوم در تاریخ ۱۶ فروردین ۱۳۹۷ مقاله‌ای در مجله نیچر به چاپ رسانده‌اند که در آن خوشه‌های ستاره‌ای موجود در کهکشان کوتوله NGC۱۰۵۲-DF۲ را مورد بررسی قرار داده‌اند. فاصله این کهکشان کوتوله از روش دیگری (روش نوسانات روشنایی سطحی) اندازه‌گیری شده و مقدار آن D=۲۰Mpc به دست آمده است. نکته عجیبی که گزارش شده این است که محل بیشینه تابع توزیع درخشندگی خوشه‌های کروی در این کهکشان بر خلاف همه کهکشان‌های دیگر در قدر مطلق ۹٫۱- = M_v است.

الف) با توجه به مقدار قدر مطلق خوشه‌های کروی با بیشترین فراوانی (۹٫۱- = M_v) فاصله کهکشان کوتوله NGC۱۰۵۲-DF۲ را به دست آورید.

وان داکوم و همکاران، مقدار جرم این کهکشان کوتوله را از روی سرعت خوشه‌های ستاره‌ای که درون کهکشان در حال چرخش هستند به دست آوردند. مقدار سرعت چرخشی در این کهکشان تقریبا σ=۳٫۲km/s و مقدار جرم لازم برای ایجاد چنین سرعت‌هایی برابر ۲×۱۰^{۸} M_{sun} محاسبه می‌شود. همچنین با توجه به درخشندگی اندازه گیری شده که برابر است با L=۱×۱۰^{۸} L_{sun} نسبت جرم به درخشندگی این کهکشان برابر ۲ ($M/L = ۲M_{sun}/L_{sun}$) محاسبه شده است؛ و از آن نتیجه گرفته‌اند که این کهکشان فاقد ماده تاریک است.

ب) با توجه به این که جرم کهکشان بر اساس شعاع کهکشان و نیز سرعت حرکت ستاره‌ها و خوشه‌های ستاره‌ای در آن تعیین می‌شود، مقدار M/L را بر حسب فاصله ناظر از کهکشان D به دست آورید.

ج) اگر قبول کنیم که آنها در تخمین فاصله ذکر شده در قسمت الف مرتکب اشتباه شده باشند، مقدار M/L واقعی کهکشان را بر حسب M_{sun}/L_{sun} به دست آورید. (۲۵ نمره)

در صورت لزوم از این قسمت به عنوان چرک نویس
استفاده کنید مطالب این قسمت
تحت هیچ شرایطی تصحیح نخواهد شد

نام :

نام خانوادگی :

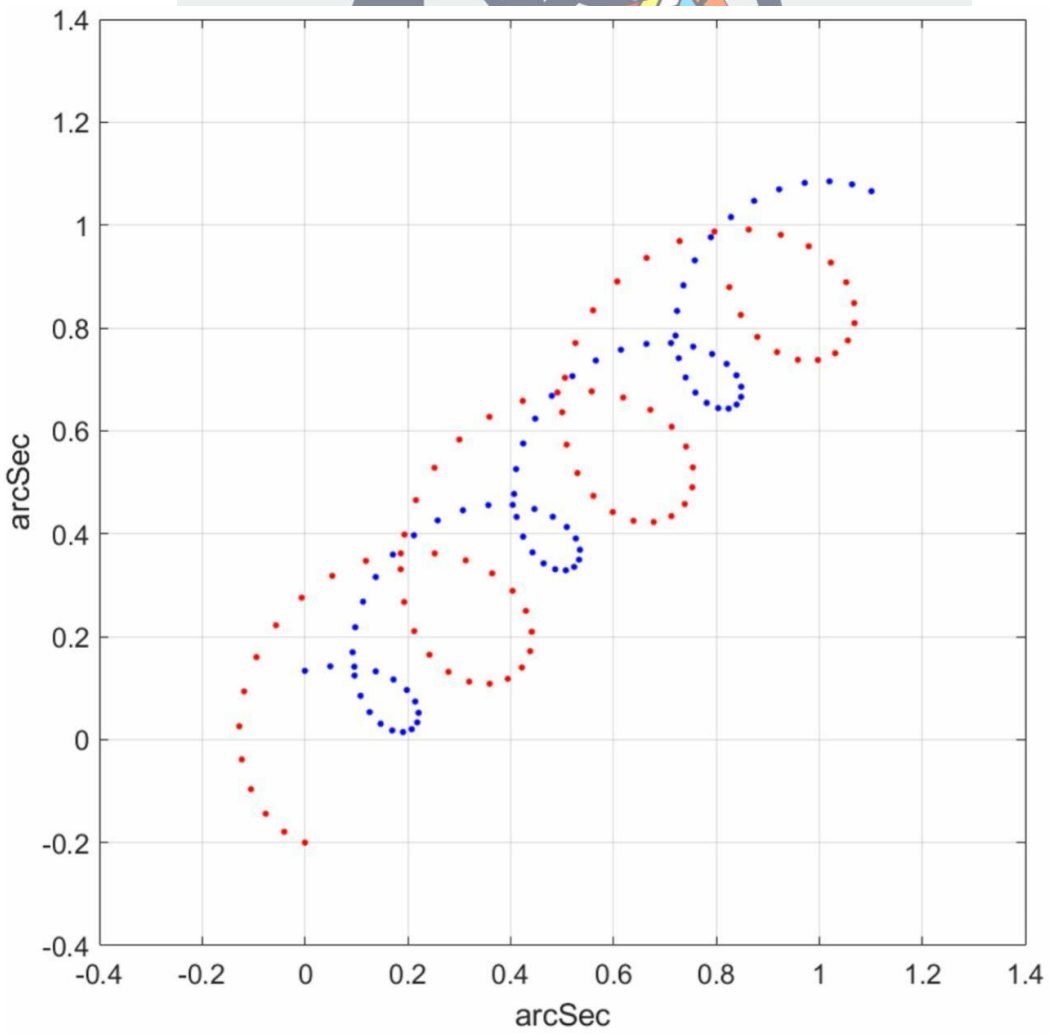
کد ملی :

۱۰- یک منظومه دوتایی رصد شده و میل مداری آن دقیقا صفر است یعنی صفحه‌ی مدارشان عمود بر راستای دید ناظر است. همچنین مدار دو ستاره دایروی است. ستاره کم جرم تر (m_1) این منظومه یک ستاره خورشیدگون است. تلسکوپ در مدت زمان ۲ سال تصویر زیر را از رد دو ستاره در آسمان ثبت کرده است. داده برداری از دو ستاره هر ۱۰ روز یکبار انجام شده است.(محورهای تصویر، بر حسب ثانیه قوسی است) موقعیت دو ستاره در لحظه‌ی اول نیز نشان داده شده است. (۲۵ نمره)

الف) جرم ستاره بزرگترچقدر است؟

ب) شعاع مداری هر کدام از ستارگان چند است؟

ج) فاصله‌ی منظومه از ما و سرعت مرکز جرم سیستم چقدر است؟

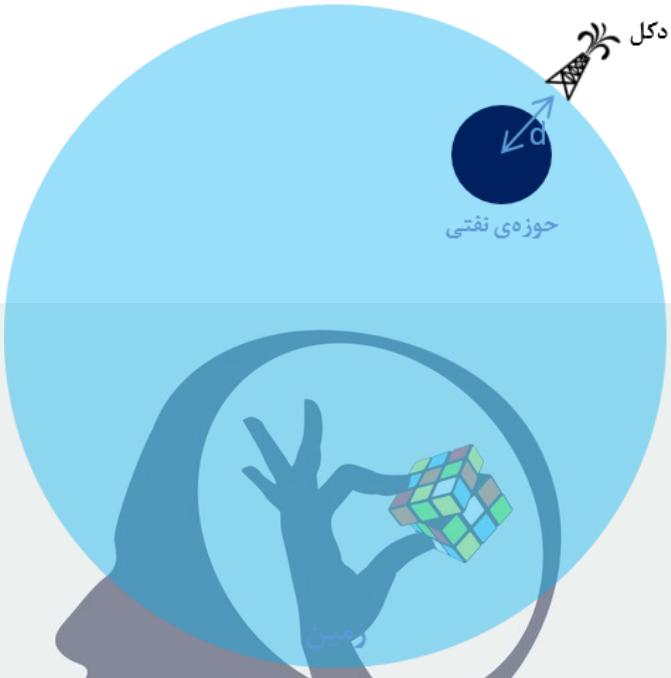


«باسمه تعالی»

پاسخ‌نامه‌ی آزمون مرحله ۲ سال ۹۷

سؤال ۱

الف) شکل مسئله به صورت زیر است:



ب) تغییر شتاب گرانشی به خاطر این است که چگالی حوزه‌ی نفتی با چگالی زمین متفاوت است.

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} + \frac{G(\rho_o - \rho_\oplus)V}{d^2} \quad , \quad V = Nv$$

N تعداد بشکه‌های نفت و v حجم یک بشکه نفت است. در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{\frac{G(\rho_o - \rho_\oplus)Nv}{d^2}}{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{(\rho_o - \rho_\oplus)Nv}{M_\oplus}\left(\frac{R_\oplus}{d}\right)^2}$$

ج)

$$\boxed{\left.\frac{\Delta g}{g_0}\right|_{\text{سنگین}} = -1.99 \times 10^{7}} \quad , \quad \boxed{\left.\frac{\Delta g}{g_0}\right|_{\text{سبک}} = -2.01 \times 10^{-7}}$$

د) دقت اندازه‌گیری (δg) باید برابر با اختلاف شتاب گرانش نفت سبک و نفت سنگین باشد:

$$\delta g = \left|\Delta g_{\text{سبک}} - \Delta g_{\text{سنگین}}\right| \Rightarrow \boxed{\delta g = 2.12 \times 10^{-8}\ \text{m s}^{-2}} \ll 1$$

سؤال ۲

الف)

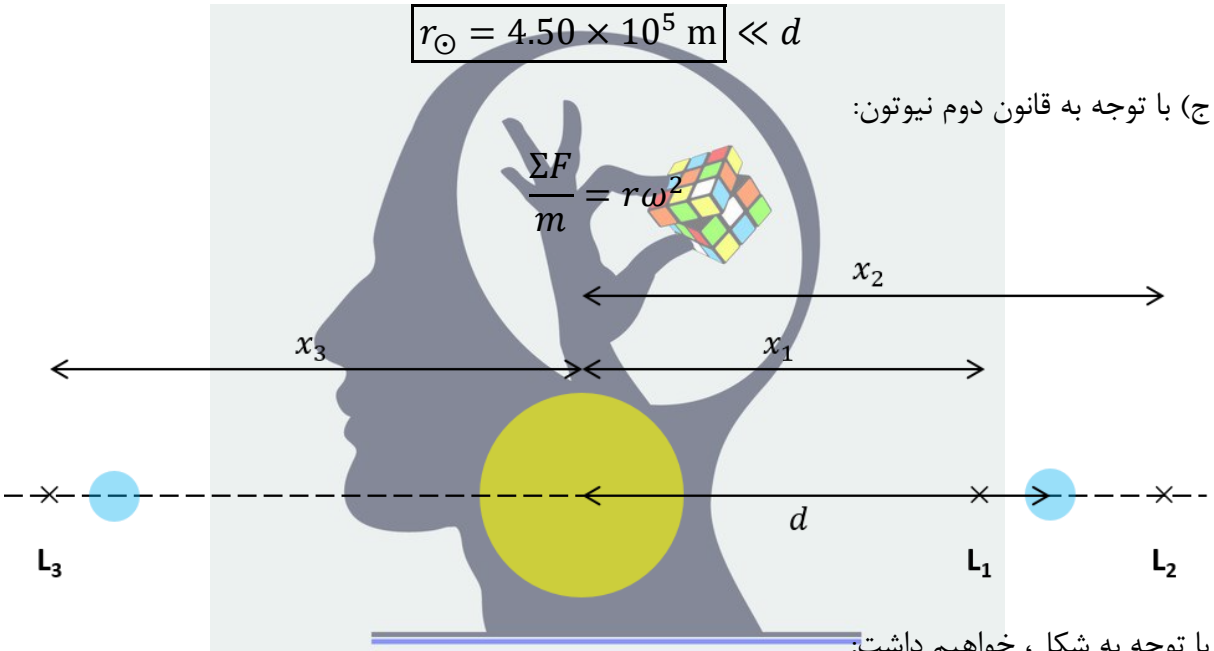
نام نقاط	L_1, L_2, L_3	L_4, L_5
وضعیت تعادل	متعادل	متعادل
وضعیت پایداری	ناپایدار	پایدار [مشروط]

ب) طبق رابطه‌ی مرکز جرم:

$$M_\odot r_\odot = M_\oplus r_\oplus \Rightarrow \frac{r_\odot}{d} = \frac{M_\oplus}{M_\odot + M_\oplus} \Rightarrow \boxed{\frac{r_\odot}{d} = 3 \times 10^{-6}} \ll 1$$

$$\boxed{r_\odot = 4.50 \times 10^5 \text{ m}} \ll d$$

ج) با توجه به قانون دوم نیوتون:



با توجه به شکل، خواهیم داشت:

نقطه‌ی L_1 :
$$\boxed{-\frac{GM_\odot}{x_1^2} + \frac{GM_\oplus}{(d - x_1)^2} = -x_1\omega^2}$$

نقطه‌ی L_2 :
$$\boxed{-\frac{GM_\odot}{x_2^2} - \frac{GM_\oplus}{(x_2 - d)^2} = -x_2\omega^2}$$

نقطه‌ی L_3 :
$$\boxed{-\frac{GM_\odot}{x_3^2} - \frac{GM_\oplus}{(x_3 + d)^2} = -x_3\omega^2}$$

سؤال ۳

الف)

$$\boxed{m - M = 5\log d - 5 + A} \quad \text{یا} \quad \boxed{m - M = 5\log d - 5 + ad}$$

ب) برای دیده شدن جسم باید توان دریافتی آن با توان حدی چشم برابر باشد

$$P = P_e \Rightarrow \alpha \frac{\pi D^2}{4} F = \alpha_e \frac{\pi D_e^2}{4} F_e \Rightarrow \frac{F}{F_e} = \frac{\alpha_e}{\alpha}\left(\frac{D_e}{D}\right)^2$$

α ضریب کارایی و D قطر است.

$$m - m_e = -2.5\log\left(\frac{F}{F_e}\right) = -2.5\log\left[\frac{\alpha_e}{\alpha}\left(\frac{D_e}{D}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 16.7}$$

ج) طبق رابطه‌ی قسمت الف:

$$M = m - 5\log d + 5 - ad \quad , \quad \alpha = 1\ \text{kpc}^{-1} \quad d = 4\ \text{kpc}$$

$$\Rightarrow M = -0.27$$

$$M - M_{sun} = -2.5\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \Rightarrow \boxed{L = 100\ L_\odot}$$

د)

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \Rightarrow \boxed{M = 4.6\ M_\odot}$$

ذهن زیبا

سؤال ۴

الف) آهنگ $\alpha n_e n_p$ در واحد حجم است:

$$[\alpha n_e n_p] = \mathrm{m^{-3}\ s^{-1}} \Rightarrow [\alpha] = [n_e]^{-1}[n_p]^{-1}\mathrm{m^{-3}\ s^{-1}} \Rightarrow \boxed{[\alpha] = \mathrm{m^3\ s^{-1}}}$$

ب)

$$\frac{hc}{\lambda} = 13.6\ \mathrm{eV} \Rightarrow \boxed{\lambda = 91.4\ \mathrm{nm}}$$

ج) چون ابر خنثی است $n_e = n_p$ و چون در تعادل است آهنگ یونش و بازترکیب برابر است:

$$N = \alpha n_e^2 \times \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{3N}{4\pi\alpha n_e^2}\right)^{1/3}}$$

د) با جایگذاری داده‌ها در رابطه‌ی بالا، شعاع ابر به دست می‌آید.

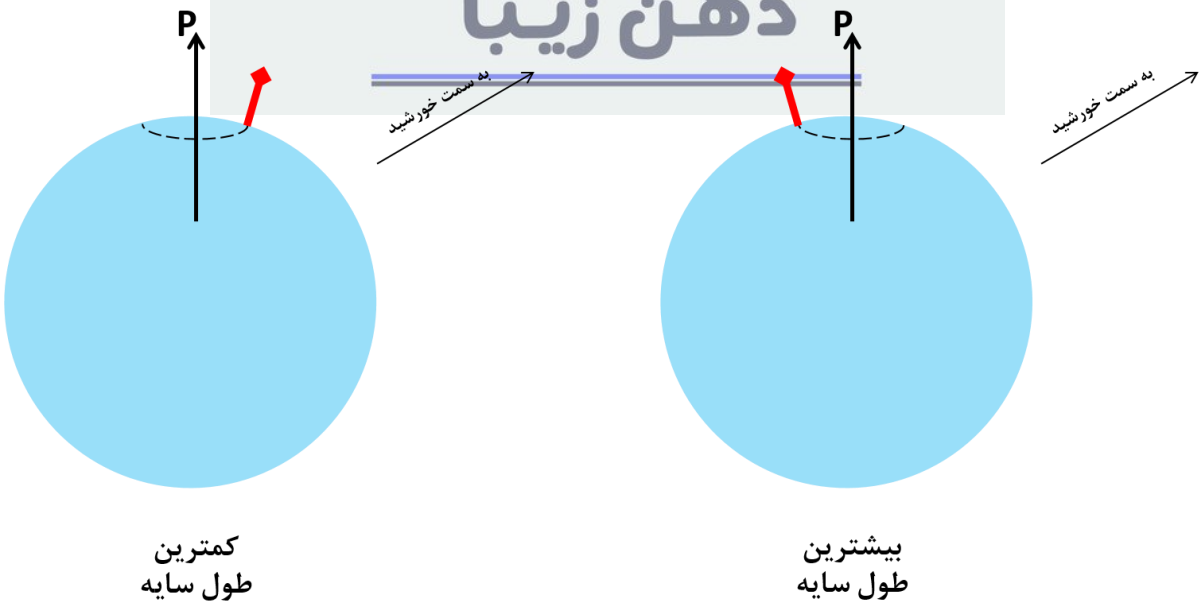
هـ) شعاع زاویه‌ای ابر (θ) نیم ثانیه‌ی قوسی است. از رابطه‌ی $d = R/\theta$ استفاده می‌کنیم.

ستاره‌ی مرکزی	$R_{\mathrm{H\,II}}$ (pc)	d (pc)
O5V	2.01×10^{1}	8.28×10^{6}
B0V	2.21×10^{0}	9.12×10^{5}
G2V	6.46×10^{-3}	2.67×10^{3}

ذهن زیبا

سؤال ۵

الف) شکل مسئله به صورت زیر است:

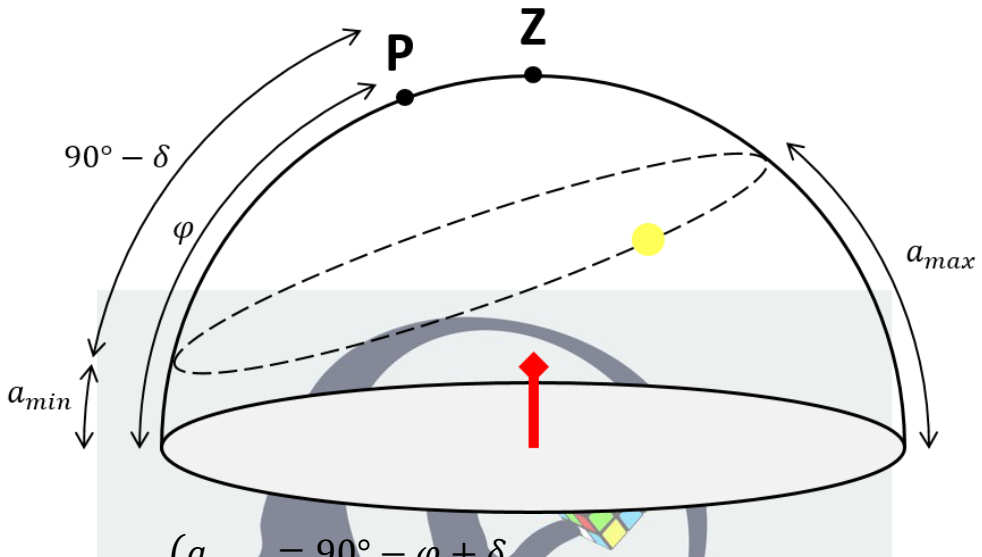


هنگامی که سایه کمترین طول را دارد، ارتفاع خورشید بیشینه و جهت سایه رو به شمال است.

ب و ج) ابتدا ارتفاع خورشید هنگام بیشترین طول و کمترین طول سایه را محاسبه می‌کنیم

$$\tan a = \frac{h}{l} \quad (h = 100\ \text{cm}) \quad \Rightarrow \quad a_{max} = 30° \quad a_{min} = 10°$$

مطابق شکل زیر:



$$\begin{cases} a_{max} = 90° - \varphi + \delta \\ a_{min} = \varphi - 90° + \delta \end{cases} \Rightarrow \varphi = \ ° \quad , \quad \delta = \ °$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 80°} \quad , \quad \boxed{\delta = 20°}$$

می‌توان با فرض جنوبی بودن عرض جغرافیایی هم مسئله را حل کرد.

د) میل خورشید از رابطه‌ی $\sin\delta = \sin\omega t \sin\varepsilon$ به دست می‌آید که در آن ω سرعت زاویه‌ای مداری زمین، t زمان سپری شده از اعتدال بهاری و ε تمایل محوری زمین است. با توجّه به مقدار میل قسمت ج:

$$t = 60 \text{ روز} \quad \text{و} \quad 123 \text{ روز}$$

ذهن زیبا

تاریخ‌های متناظر **۲۹ اردیبهشت** و **۳۰ تیر** هستند.

هـ) ۶ ساعت پس از کوتاه‌ترین سایه، زاویه ساعتی خورشید ۶ ساعت (۹۰ درجه) است. ارتفاع خورشید برابر است با:

$$\sin a = \sin\delta \sin\varphi \Rightarrow a = 19.7°$$

$$\tan a = \frac{h}{l} \Rightarrow \boxed{l = 280\ \text{cm}}$$

سؤال ۶

الف)

$$n_1(r) = \frac{n_{01}}{r^2} \quad r < R_0 \qquad , \qquad n_2(r) = \frac{n_{02}}{r^2} \quad r < R_0$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه جرم:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad \rho(r) = n_1(r)\, m_1 + n_2(r)\, m_2$$

$$\Rightarrow M(r) = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)r \quad , \quad M = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_0$$

$$\frac{M}{2} = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_{hm} \Rightarrow R_{hm} = \frac{R_0}{2}$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه نور:

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 j(r) dr \quad , \quad j(r) = n_1(r)\, L_1 + n_2(r)\, L_2$$

$$= n_1(r)\, m_1^3 + n_2(r)\, m_2^3$$

$$\Rightarrow L(r) = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)r \quad , \quad L = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_0$$

$$\frac{L}{2} = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_{hl} \Rightarrow R_{hl} = \frac{R_0}{2}$$

در نتیجه:

$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = 1}$$

ب) ابتدا ثابت n'_{02} برای ستاره‌های نوع ۲ را به دست می‌آوریم. با توجه به این که جرم کل این ستاره‌ها ثابت است:

$$M_2 = 4\pi n'_{02} m_2 \frac{R_0}{2} = 4\pi n_{02} m_2 R_0 \Rightarrow n'_{02} = 2n_{02}$$

$$n_1(r) = \frac{n_{01}}{r^2} \quad r < R_0 \qquad , \qquad n_2(r) = \frac{2n_{02}}{r^2} \quad r < R_0/2$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه جرم:

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad , \quad \rho(r) = n_1(r)\, m_1 + n_2(r)\, m_2$$

$$\Rightarrow M(r) = \begin{cases} 4\pi(n_{01}m_1 + 2n_{02}m_2)r & r < R_0/2 \\ 4\pi(n_{01}m_1 r + n_{02}m_2 R_0) & r > R_0/2 \end{cases}$$

$$M = 4\pi(n_{01}m_1 + n_{02}m_2)R_0 \quad , \quad m_1 = 1\, M_\odot \quad m_2 = 10\, M_\odot$$

ذهن زیبا

با توجه به این که شعاع نیمه جرم ستارگان m_1 به تنهایی برابر با $R_0/2$ است، شعاع نیمه جرم بایستی کمتر از $R_0/2$ باشد:

$$\frac{M}{2} = 4\pi(n_{01} + 20n_{02})R_{hm} \Rightarrow R_{hm} = \frac{1}{2}\frac{n_{01} + 10n_{02}}{n_{01} + 20n_{02}}$$

برای محاسبه‌ی شعاع نیمه نور:

$$L(r) = \int_0^r 4\pi r^2 j(r)dr \quad , \quad j(r) = n_1(r)\,L_1 + n_2(r)\,L_2$$

$$= n_1(r)\,m_1^3 + n_2(r)\,m_2^3$$

$$\Rightarrow L(r) = \begin{cases} 4\pi(n_{01}m_1^3 + 2n_{02}m_2^3)r & r < R_0/2 \\ 4\pi\left(n_{01}m_1^3 r + 2n_{02}m_2^3\frac{R_0}{2}\right) & r > R_0/2 \end{cases}$$

$$L = 4\pi(n_{01}m_1^3 + n_{02}m_2^3)R_0 \quad , \quad m_1 = 1\,M_\odot \quad m_2 = 10\,M_\odot$$

با توجه به این که شعاع نیمه نور ستارگان m_1 به تنهایی برابر با $R_0/2$ است، شعاع نیمه نور بایستی کمتر از $R_0/2$ باشد:

$$\frac{L}{2} = 4\pi(n_{01} + 2000n_{02})R_{hl} \Rightarrow R_{hl} = \frac{1}{2}\frac{n_{01} + 1000n_{02}}{n_{01} + 2000n_{02}}$$

در نتیجه:

$$R_{hm}/R_{hl} = \frac{n_{01} + 10n_{02}}{n_{01} + 20n_{02}}\frac{n_{01} + 2000n_{02}}{n_{01} + 1000n_{02}}$$

اگر نسبت n_{01}/n_{02} را با α نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = \frac{\alpha + 10}{\alpha + 20}\frac{\alpha + 2000}{\alpha + 1000}}$$

و به ازای $\alpha = 10$:

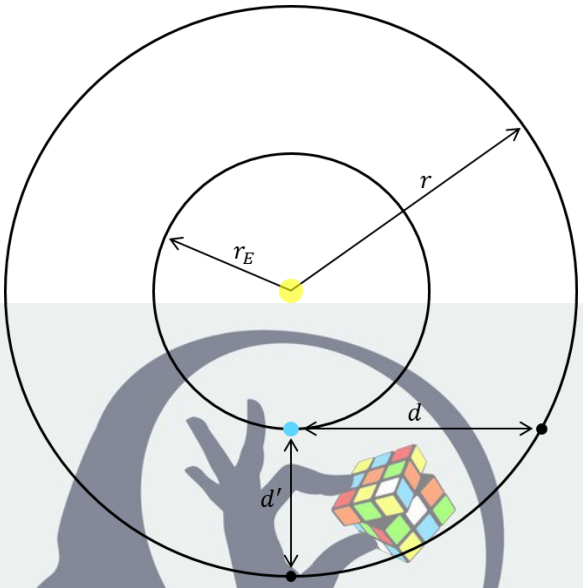
$$\boxed{R_{hm}/R_{hl} = 1.33}$$

ج) در اثر جداسازی جرمی، نسبت R_{hm} و R_{hl} تغییر می‌کنند و دیگر نمی‌توان این دو را یکسان در نظر گرفت. دلیل این تغییر، تفاوت حساسیت این دو شعاع نسبت به توزیع ستارگان است. (R_{hm} به α بیشتر حساس است.)

سؤال ۷

با توجّه به شکل:

$$d = \sqrt{r^2 - r_E^2} \quad , \quad d' = r - r_E$$



$$2(d - d') = c\Delta t \Rightarrow \sqrt{r^2 - r_E^2} - (r - r_E) = \frac{c\Delta t}{2} \quad , \quad A \equiv \frac{c\Delta t}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 - r_E^2 = A^2 + (r - r_E)^2 + 2A(r - r_E)$$

$$\Rightarrow A^2 + 2r_E^2 - 2rr_E + 2Ar - 2Ar_E = 0 \Rightarrow 2(r_E - A)r = A(A - 2r_E) + 2r_E^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{A(A - 2r_E) + 2r_E^2}{2(r_E - A)}}$$

با جایگذاری، مقدار عددی $\boxed{r = 2.34\ \text{AU}}$ به دست می‌آید.

سؤال ۸

الف)

$$E_{tot} = E_f - E_i \approx -GM^2\left(\frac{1}{R_{ns}} - \frac{1}{R_{wd}}\right) \Rightarrow \boxed{|E_{tot}| = 2.58 \times 10^{46}\ \text{J}}$$

ب) با توجه به مقدار پهن شدگی و جرم هسته‌ی ستاره:

$$0.5\ \Delta\lambda/\lambda = v/c \Rightarrow v = 5000\ \text{km s}^{-1} \quad , \quad M_{env} = 8.6\ M_\odot$$

$$E_1 = \frac{1}{2}M_{env}v^2 \Rightarrow \boxed{E_1 = 2.13 \times 10^{44}\ \text{J}}, \boxed{E_1/E_{tot} = 0.83\ \%}$$

ج) ابتدا درخشندگی ابرنواختر را به دست می‌آوریم

$$M - M_{sun} = -2.5 \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right) \Rightarrow L = 194\, L_\odot \quad , \quad \tau = 2 \text{ ماه}$$

$$E_2 = L\tau \Rightarrow \boxed{E_2 = 3.87 \times 10^{35}\ \text{J}}, \boxed{E_2/E_{tot} = 10^{-9}\ \%}$$

د) انرژی نوترینوها برابر است با:

$$E_3 = E_{tot} - E_1 - E_2 \Rightarrow \boxed{E_3 = 2.56 \times 10^{46}\ \text{J}}, \boxed{E_3/E_{tot} = 99.17\ \%}$$

هـ)

$$N_\nu = \frac{E_3}{E_\nu} \Rightarrow \boxed{N_\nu = 3.20 \times 10^{58}}$$

و)

$$n_\nu = \frac{N_\nu}{4\pi d^2} \times \sigma_{\text{انسان}} \Rightarrow \boxed{n_\nu = 5.33 \times 10^{14}}$$

سؤال ۹

الف) رابطه‌ی بین قدر ظاهری، قدر مطلق و فاصله به صورت زیر است:

$$m - M = 5 \log d - 5$$

$M = -9.1$ محل بیشینه‌ی قدر مطلق و $d = 20\ \text{Mpc}$ فاصله‌ی به دست آمده است. اگر قدر مطلق $M' = -7.7$ می‌بود، فاصله چنین به دست می‌آمد:

$$M' - M = -5 \log \frac{d'}{d} \Rightarrow \boxed{d' = 10.5\ \text{Mpc}}$$

ب) جرم با استفاده از شعاع کهکشان (R) و سرعت حرکت ستاره‌ها (v) تعیین می‌شود. شعاع زاویه‌ای کهکشان (θ) از روی رصد به دست می‌آید:

$$M = \frac{v^2 R}{G} \quad , \quad R = \theta d \quad \Rightarrow \quad M \propto d$$

درخشندگی با اندازه‌گیری شار دریافتی به دست می‌آید:

$$L = 4\pi d^2 F \quad \Rightarrow \quad L \propto d^2$$

در نتیجه:

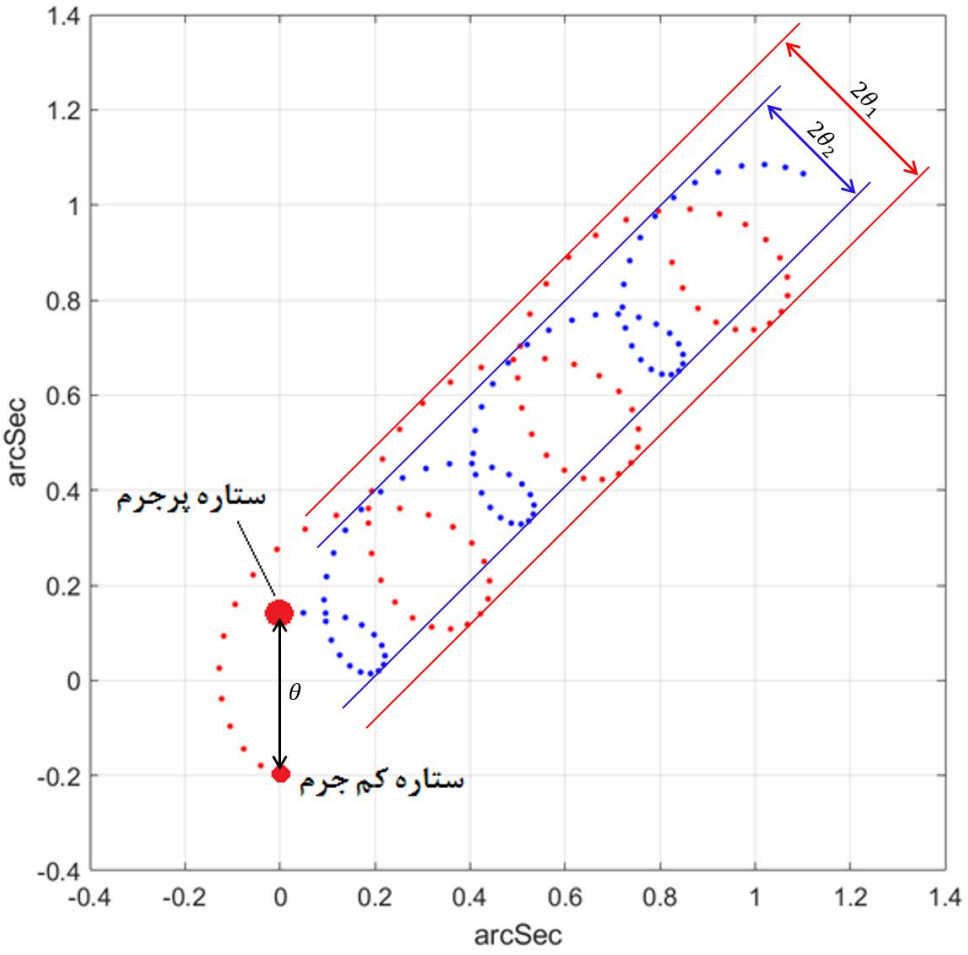
$$M/L = \frac{v^2 \theta}{4\pi G F} \times \frac{1}{d} \Rightarrow \boxed{M/L \propto d^{-1}}$$

ج) با توجّه به رابطه‌ی تناسبی به دست آمده در قسمت ب:

$$\boxed{(M/L)' = 3.8\, M_\odot/L_\odot}$$

سؤال ۱۰

الف) مدار هر کدام از ستاره‌ها حول مرکز جرم دایره‌ای و میل مداری ۹۰ درجه است. بنابراین فاصله‌ی بین خطوط مماس بر مسیر حرکت هر ستاره، برابر با قطر مدار آن است.



ذهن زیبا

با توجه به شکل: $r_1/r_2 = \theta_1/\theta_2 =$.

با توجه به تعریف مرکز جرم: $M_2/M_1 = r_1/r_2$.

هم‌چنین می‌دانیم $M_1 = M_\odot$ است.

$$\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = 1.5 \Rightarrow \boxed{M_2 = 1.5\ M_\odot}$$

برای حل قسمت‌های ب و ج، ابتدا شعاع مدار نسبی دو ستاره را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از قانون سوم کپلر

$$r = \left(\frac{P^2 GM}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

M مجموع جرم دو ستاره است. دوره‌ی تناوب با اندازه‌گیری تعداد نقاط درون یک تناوب به دست می‌آید ($P = 230$ روز).

$$\Rightarrow r = 1.49 \times 10^{11}\ \text{m} \approx 1\ \text{AU}$$

ب) فاصله‌ی زاویه‌ای دو ستاره را با توجه به شکل به دست می‌آوریم ($\theta = 0.33''$).

$$d = \frac{r}{\theta_{\text{rad}}} \Rightarrow \boxed{d = 9.32 \times 10^{16}\ \text{m} \approx 3\ \text{pc}}$$

ج) با توجه به تعریف مرکز جرم:

$$r_1 = \frac{M_2}{M} r \quad , \quad r_2 = \frac{M_1}{M} r \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_1 = 0.6\ \text{AU} \quad , \quad r_2 = 0.4\ \text{AU}}$$