

به نام خدا

سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۴۰۲

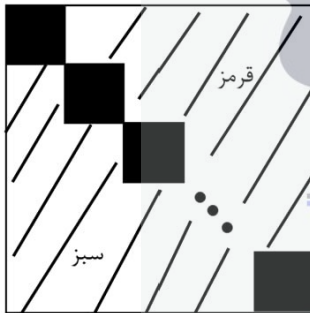
(۱) در مثلث ABC می دانیم، $\angle A = 90^\circ$. نقطه ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می نامیم. PD ، خطوط AB ، AC را به ترتیب در E ، F قطع می کند. همچنین دایره های APE و APF به ترتیب BP را در X و CP را در Y قطع می کنند. ثابت کنید PD ، BY ، CX همسرس هستند.

(۲) ثابت کنید به ازای هر $2 \leq n \in \mathbb{N}$ یک n -تایی مرتب (a_1, a_2, \dots, a_n) از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یکدیگر اول وجود دارد که همگی از ۱۴۰۲ بزرگتر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$\left[\frac{a_1}{a_2} \right] + \left[\frac{a_2}{a_3} \right] + \dots + \left[\frac{a_n}{a_1} \right] = \left[\frac{a_2}{a_1} \right] + \left[\frac{a_3}{a_2} \right] + \dots + \left[\frac{a_1}{a_n} \right]$$

(منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیح است که کوچکتر یا مساوی x باشد)

(۳) یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، خانه i -سطر j -ستون را با قاعدهی زیر رنگ می کنیم:



۱. اگر $i = j$ ، سیاه

۲. اگر $i < j$ ، قرمز

۳. اگر $i > j$ ، سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می کنیم و n -تایی مرتب $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ را یادداشت می کنیم. با تکرار این کار به چند n -تایی مرتب مختلف می توانیم برسیم؟ (در یک n -تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

۴) عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچکترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \dots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

۵) یک دنباله $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هر گاه برای هر n ، $P_{n+1} = P_n + Q$.

فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله‌ی اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه‌ی مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه‌ی صحیح دارد. ثابت کنید

آ- $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

۶) دو دایره W_1, W_2 با شعاع‌های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره‌های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب داخل دایره‌های W_1 و W_2 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که $\angle BPQ = \angle BYQ$ و $\angle CPQ = \angle CXQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های XPC و YPB را S می‌نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS هم‌مرس هستند.

ذهن زیبا