۱. کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلا اگر در یک لحظه ساعت زمان ۱۲:۲۳:۰۵ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

$$۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱, \ldots$$

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

۲.همه‌ی دنباله‌های $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq ۳$ داشته باشیم:

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}+\frac{۱}{a_۲a_۴}+\frac{۱}{a_۳a_۵}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۲}a_n}=۱-\frac{۱}{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_{n-۱}^۲}$$

۳. در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I ، K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B,C به ترتیب AC, AB را در E, F قطع می‌کنند. ثابت کنید دوایر EIK, FIL, AEF همرس هستند.

۴.درمثلث ABC، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره $CB'M$ خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های $ABD, CB'M$ برای بار دوم در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره $CB'M$ را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره‌خط CM را نصف می‌کند.

۵. سهند و غلام روی جدولی ۱۴۰۳ × ۱۴۰۳ که در ابتدا همه ی خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعا ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سهند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سهند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند.

در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشرده شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سهند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سهند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سهند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

۶. فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک x, y را بیابید که داشته باشیم

$$\frac{x^۲ - ۱}{y^۲ - ۱} = (p + ۱)^۲$$

سوال ۱. کیمیا ساعت عجیبی دارد. عقربه ثانیه شمار این ساعت درست کار نمی‌کند و در هر لحظه به جای یک ثانیه به طور تصادفی ۳۴ یا ۴۷ ثانیه جابجا می‌شود. مثلا اگر در یک لحظه ساعت زمان ۱۲:۲۳:۰۵ را نشان دهد ممکن است در لحظات بعدی به ترتیب زمان‌های

$$۱۲:۲۳:۳۹, ۱۲:۲۴:۱۳, ۱۲:۲۵:۰۰, ۱۲:۲۵:۳۴, ۱۲:۲۶:۲۱, \ldots$$

را نشان دهد. ثابت کنید همواره لحظه‌ای وجود دارد که عقربه ثانیه‌شمار عدد مربع کاملی را نشان می‌دهد.

راه حل: ابتدا مشاهده کنید که اگر در لحظه‌ای عقربه ثانیه شمار روی ۳۶ یا ۴۹ قرار بگیرد به خواسته‌مان می‌رسیم، در مرحله بعدی اگر عقربه روی ۲ قرار بگیرد به خواسته‌مان می‌رسیم چرا که در گام بعدی باید روی یکی از $۴۹ = ۴۷ + ۲, ۳۶ = ۳۴ + ۲$ قرار گیرد. به طور بازگشتی دنباله اعداد خوب را این طور تعریف می‌کنیم که ۳۶, ۴۹ خوبند و در هر مرحله اگر برای عدد y ، $y + ۳۴, y + ۴۷$ هر دو خوب بودند y را به اعداد خوب اضافه می‌کنیم. قرار گرفتن ساعت روی هر عدد خوب ما را به خواسته‌مان می‌رساند چرا که بعد از تعدادی مرحله هر عدد خوب حتما به ۳۶ یا ۴۹ می‌رسد. ادعا می‌کنیم اگر y خوب باشد $y + ۱۳$ هم‌خوب است.(جمع‌ها را به پیمانه ۶۰ انجام می‌دهیم یعنی باقی‌مانده آن‌ها بر ۶۰ را در نظر می‌گیریم). داریم

$$(y + ۱۳) + ۳۴ = y + ۴۷$$

و

$$(y + ۱۳) + ۴۷ = y + ۶۰ \overset{۶۰}{\equiv} y$$

که طبق فرض هر دو خوب هستند. بنابراین باقی‌مانده تمام اعداد به فرم $۱۳k + ۳۶$ بر ۶۰ خوب هستند. باقی‌مانده اعداد

$$۳۶ + ۱۳k, ۰ \leq k \leq ۵۹$$

دوبدو بر ۶۰ متفاوت است، چرا که

$$۶۰ \nmid (۳۶ + ۱۳k) - (۳۶ + ۱۳k') = ۱۳(k - k'), ۰ \leq k, k' \leq ۵۹$$

(برای دیدن این موضوع می‌توانید از لم اقلیدس استفاده کنید) بنابراین تمامی اعداد خوب هستند و ساعت با شروع از آن‌ها حتما به یکی از اعداد ۳۶ یا ۴۹ می‌رسد.

سوال ۲. همه‌ی دنباله‌های $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $n \geq ۳$ داشته باشیم:

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}+\frac{۱}{a_۲a_۴}+\frac{۱}{a_۳a_۵}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۲}a_n}=۱-\frac{۱}{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_{n-۱}^۲}$$

پاسخ:
ابتدا برای $n=۳$ داریم

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}=۱-\frac{۱}{a_۱^۲+a_۲^۲} \qquad (۱)$$

این رابطه نتیجه می‌دهد $a_۱=۱$ چرا که در غیر این صورت خواهیم داشت $a_۱\geq ۲$ و بنابراین

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}\leq\frac{۱}{۲}<\frac{۴}{۵}\leq ۱-\frac{۱}{a_۱^۲+a_۲^۲} \qquad (۲)$$

هم‌چنین واضح است که $a_۳\neq ۱$ چرا که در غیر این صورت طرف چپ تساوی ۱ برابر یک می‌شود که به طور اکید از طرف راست بزرگ‌تر است. بنابراین مشابه نامساوی ۲ نتیجه می‌گیریم $a_۲=۱$.

حال با قرار دادن در رابطه بازگشتی بدست می‌آید $a_۳=۲, a_۴=۳, a_۵=۵,\ldots$ و دو طرف رابطه برابرند با $\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۶},\frac{۱۴}{۱۵},\ldots$. بنابراین حدس می‌زنیم $a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}$ (دنباله معروف فیبوناچی) و دو طرف رابطه برای n برابرند با

$$\frac{a_na_{n-۱}-۱}{a_na_{n-۱}}$$

.

این موضوع را می‌توان به استفرا ثابت کرد، پایه استقرا برقرار است فرض کنید حکم برای $n-۱$ برقرار باشد، واضح است که رابطه بازگشتی a_n را به طور یکتا مشخص می‌کند پس کافی است چک کنیم

$$a_n=a_{n-۱}+a_{n-۲}$$

در رابطه بازگشتی صدق می‌کند. با قرار دادن در رابطه باید بررسی کنیم

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}+\frac{۱}{a_۲a_۴}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_{n-۳}}+\frac{۱}{a_na_{n-۲}}=۱-\frac{۱}{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_{n-۱}^۲}=۱-\frac{۱}{a_na_{n-۱}}$$

با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\frac{۱}{a_۱a_۳}+\frac{۱}{a_۲a_۴}+\cdots+\frac{۱}{a_{n-۱}a_{n-۳}}+\frac{۱}{a_na_{n-۲}}=۱-\frac{۱}{a_{n-۱}a_{n-۲}}+\frac{۱}{a_na_{n-۲}}$$
$$=۱-\frac{۱}{a_n-۲}\times(\frac{۱}{a_n}-\frac{۱}{a_{n-۱}})=۱-\frac{۱}{a_{n-۲}}\times\frac{a_n-۲}{a_{n-۱}a_n}=۱-\frac{۱}{a_{n-۱}a_n}$$

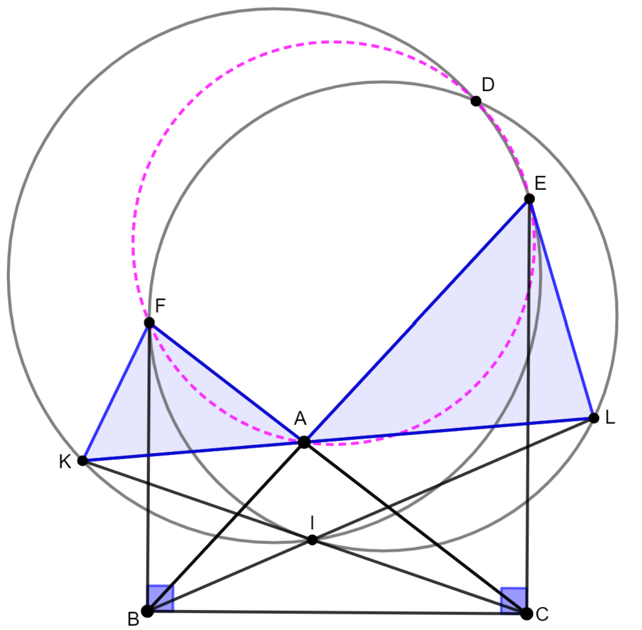
همین‌طور بنا به فرض استقرا داریم،

$$a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_{n-۲}^۲+a_{n-۱}^۲=a_{n-۲}a_{n-۱}+a_{n-۱}^۲=a_{n-۱}(a_{n-۲}+a_{n-۱})=a_{n-۱}a_n$$

و کار تمام است.

سوال۳. در مثلث ABC مرکز دایره‌های محاطی داخلی، محاطی خارجی نظیر راس B و محاطی خارجی نظیر راس C را به ترتیب I ، K و L می‌نامیم. خطوط عمود بر BC در B, C به ترتیب AC, AB را در E, F قطع می‌کنند. ثابت کنید دوایر EIK, FIL, AEF همرس هستند.

راه‌حل:
تقاطع دوم دوایر محیطی مثلث‌های EIK و FIL را D می‌نامیم. پس داریم:



$$\angle EDI = \angle EKI$$

$$\angle FDI = \angle FLI$$

کافیست نشان دهیم $\angle FDE = ۱۸۰^\circ - \angle A$. می‌دانیم K, A, L همخط هستند. از آنجایی که $\angle ACL = \angle AKB = ۹۰^\circ - \frac{\angle C}{۲}$ و $\angle LAC = \angle BAK = \frac{\angle A}{۲}$، دو مثلث ACL و AKB متشابه بوده و داریم:

$$\frac{AC}{AK} = \frac{AL}{AB}$$

همچنین از آنجایی که $CE \parallel BF$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF \times AE = AB \times AC = AL \times AK \Rightarrow \frac{AF}{AL} = \frac{AE}{AK}$$

پس $ALE \sim AFK \rightarrow ALF \sim AEK$ و داریم:

$$\begin{aligned}
\angle EKI + \angle FLI &= \angle EKL + \angle LKI + \angle FLK + \angle KLI \\
&= \angle EKL + \angle FLK + ۱۸۰^\circ - \angle LIK \\
&= \angle EKL + \angle AEK + ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} \\
&= ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} + ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} = ۱۸۰^\circ - \angle A
\end{aligned}$$

پس چهارضلعی $AEDF$ محاطی است و حکم اثبات می‌شود.

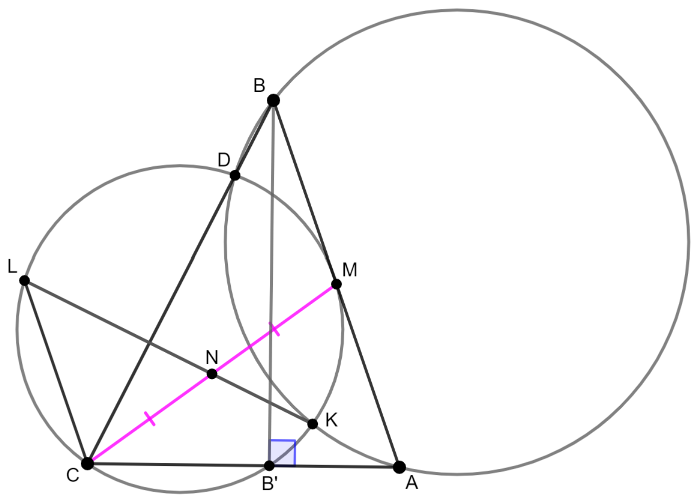
سوال ۴

ABC، M وسط AB و B' پای ارتفاع B است. دایره $CB'M$ خط BC را برای بار دوم در D قطع می‌کند. دایره‌های $ABD, CB'M$ برای بار دوم در K متقاطع هستند. خط موازی AB که از C می‌گذرد، دایره $CB'M$ را برای بار دوم در L قطع می‌کند. ثابت کنید KL پاره‌خط CM را نصف می‌کند.

راه‌حل:

از آنجایی که $CL \parallel AB$ و $ABDK$ محاطی است داریم $180° - \angle AKD = \angle ABD = \angle BCL = \angle DKL$، پس A, K, L همخط هستند.

همچنین از آنجایی که $B'M$ میانهٔ وارد بر وتر است و $CB'ML$ محاطی است داریم $\angle MAB' = \angle MB'A = \angle MLC$، پس چهارضلعی $AMLC$ متوازی‌الاضلاع بوده و حکم اثبات می‌شود.



سوال ۵ سهند و غلام روی جدولی ۱۴۰۳×۱۴۰۳ که در ابتدا همه ی خانه‌های آن سفید هستند بازی می‌کنند. به ازای هر سطر و هر ستون یک دکمه داریم (مجموعا ۲۸۰۶ دکمه). با شروع از سهند هر کس در نوبت خود یک دکمه که قبلاً فشار داده نشده را فشار می‌دهد، و سپس نوبت نفر دیگر می‌شود تا زمانی که تمام دکمه‌ها فشار داده شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط سهند تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ مشکی تبدیل می‌شوند. با فشار دادن دکمه یک سطر یا یک ستون توسط غلام تمام خانه‌های آن سطر یا ستون، مستقل از رنگشان قبل از فشرده شدن دکمه، کاملا به رنگ قرمز تبدیل می‌شوند.

در انتها پس از این که همه دکمه‌ها فشرده شدند غلام به اندازه تعداد خانه‌های قرمز منهای تعداد خانه‌های سیاه و سهند به اندازه تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های قرمز امتیاز می‌گیرند اگر غلام و سهند هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند، غلام حداقل چند امتیاز کسب خواهد کرد. (به بیان دیگر بیشترین امتیازی که غلام با بازی خوب خود مستقل از بازی سهند می‌تواند از کسب آن مطمئن باشد را بیابید.)

راه‌حل:
ادعا می‌کنیم پاسخ n است.

ابتدا استراتژی غلام برای رسیدن به این امتیاز را بیان می‌کنیم. هر گاه سهند دکمه یک سطر را فشار می‌دهد، غلام در نوبت بعد دکمه یک ستون را فشار می‌دهد و هر گاه سهند دکمه یک ستون را فشار می‌دهد غلام دکمه یک سطر را فشار می‌دهد. فرض کنید سهند در مجموع k سطر و $n-k$ ستون را انتخاب کند، در این صورت از ستونی که غلام متناظر با سطر i ام سهند انتخاب می‌کند حداقل $n-k+i$ خانه قرمز باقی می‌مانند چرا که تنها سطرهایی که سهند بعد از این انتخاب رنگ می‌کند می‌تواند رنگ یک خانه از این ستون را سیاه کند. از طرفی اگر غلام سطری انتخاب کند که در مجموع سطر j ام انتخاب‌شده باشد حداقل j خانه قرمز جدید می‌گیریم چرا که $n-j$ ستون باقی‌مانده که هر کدام از آن‌ها می‌توانند سیاه یا خانه‌ای که قبلا شمرده شده باشند بنابراین در مجموع حداقل

$$(۱+۲+\cdots+n-k)+(n-k+۱+n-k+۲+\cdots+n)=\frac{n^۲+n}{۲}$$

خانه قرمز می‌گیریم که حداقل n تا از خانه‌های سیاه بیشتر است.

برای این که نشان دهیم غلام کار بهتری نمی‌تواند بکند باید نشان دهیم سهند راهبردی دارد که امتیازش حداقل $n-$ بماند. فرض کنید سهند سطر اول را سیاه کند و از این به بعد هر گاه غلام سطری را انتخاب کرد ستونی را انتخاب کند و برعکس. مشابه قبل اگر غلام k ستون انتخاب کند و آخرین انتخابش یک ستون باشد حداقل

$$(۱+۲+\cdots+n-k)+(n-k+۱+n-k+۲+\cdots+n-۱)$$

و اگر آخرین انخابش یک سطر باشد حداقل

$$(۱+۲+\cdots+(n-k-۱))+(n-k+۱+n-k+۲+\cdots+n-۱+n)$$

خانه سیاه می‌شوند که هر دو از $\frac{n^۲-n}{۲}$ بیشترمساوی‌اند.

راه‌های دیگری هم برای اثبات این قسمت وجود دارد، مثلا استقرا و تحلیل بعد از حرکت اول غلام.

سوال ۶ فرض کنید p یک عدد اول است. همه اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک x,y را بیابید که داشته باشیم

$$\frac{x^{۲}-۱}{y^{۲}-۱}=(p+۱)^{۲}$$

راه‌حل:
با طرفین‌وسطین رابطه سوال داریم

$$x^{۲}-۱=((p+۱)y)^{۲}-(p+۱)^{۲}\Rightarrow (p+۱)^{۲}-۱=((p+۱)y)^{۲}-x^{۲}\Rightarrow p(p+۲)=((p+۱)y-x)((p+۱)y+x)$$

از آن‌جا که p عددی اول است باید $p|(p+۱)y-x$ یا $p|(p+۱)y+x$. اگر p پرانتز اول را عاد کند داریم

$$(p+۱)y+x|p+۲$$

با توجه به این که

$$(p+۱)y+x$$

از $۲p+۳$ بزرگتر است به مشکل نامساوی می‌خوریم.

بنابراین $p|(p+۱)y+x$ که نتیجه می‌دهد $y\overset{p}{\equiv}-x$. با قرار دادن $x=pk-y$ داریم

$$p(p+۲)=(p(y-k)+۲y)(py+pk)\Rightarrow p+۲=(p(y-k)+۲y)(k+y)$$

اگر $y>k$ طرف راست از $۳(p+۴)$ بزرگتر می‌شود که تناقض است. اگر $y\le k$ از آن‌جا که $k+y\le p+۲$ داریم $۲y\le p+۲$. حال اگر $y-k\le -۲$ باشد

$$(p(y-k)+۲y)(k+y)<(k+y)(-۲p+۲y)(k+y)\le ۰$$

که تناقض است. بنابراین $k=y+۱$. با جایگذاری داریم

$$(۲y-p)(۲y+۱)=p+۲\Rightarrow ۴y^{۲}+(۱-p)y-۲p-۲=۰$$

که با اتحاد مربع نتیجه می‌دهد $y=\frac{p-۱}{۲}$ و مشاهده می‌کنیم

$$y=\frac{p-۱}{۲},x=\frac{p(p+۳)}{۲}-\frac{p-۱}{۲}$$

تنها جواب‌های مساله هستند و p باید فرد باشد.