باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم

چهل و سومین دورهٔ المپیاد ریاضی(روز اول)

سال تحصیلی ۱۴۰۴- ۱۴۰۳

تاریخ: ۱۴۰۴/۱/۲۹ - ساعت : ۸:۰۰ - مدت: ۲۷۰ دقیقه - نوع:تشریحی

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۳- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

٤- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از برش سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید.در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

٥- از مخدوش کردن بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

٦- همراه داشتن هر گونه کتاب جزوه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۷- هر سوال این دفترچه ۱۵ نمره دارد.

۸- این دفترچه شامل ۳ سوال و با احتساب جلد ۱ برگ است.

بسمه تعالی

آزمون مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران فروردین ۱۴۰۴ زمان: ۲۷۰ دقیقه

---

۱. آیا عددی طبیعی $n > ۲$ وجود دارد که اگر با هر یک از مقسوم‌علیه‌های اول خود جمع شود عددی مربع کامل بدست آید؟

۲. علي و شايان روي يك جدول بی‌نهايت به شكل نوبتي بازي می‌كنند. در ابتدا تمام خانه‌ها سفيد هستند. علي بازي را شروع می‌كند و در نوبت اول يكي از مربع‌هاي واحد صفحه را سياه می‌كند. در نوبت‌هاي بعد هر نفر بايد يك خانه‌ي سفيد كه مجاور ضلعي حداقل يك خانه‌ي سياه باشد را سياه كند. بازي پس از اينكه هر نفر دقيقا ۱۴۰۴ نوبت بازي كند تمام می‌شود. مجموعه‌ي خانه‌هاي سياه در انتهاي بازي را A می‌ناميم. علي و شايان به ترتيب می‌خواهند محيط شكل A را كمينه و بيشينه كنند. اگر هر دونفر بهترين بازي خود را انجام دهند محيط شكل A برابر چه مقداري خواهد بود؟ (منظور از محیط شکل A جمع طول پاره‌خط‌هایی است که مرز یک خانه سیاه و یک خانه سفید هستند.)

۳. P درون مثلث مختلف الاضلاع ABC با مرکز دایره محاطی I به گونه‌ای قرار دارد که :

$$۲\angle ABP = \angle BCA, ۲\angle ACP = \angle CBA$$

فرض کنید PB و PC خط AI را به ترتیب در B' و C' قطع می‌کنند. خط گذرا از B' و موازی AB خط BI را در X و خط گذرا از C' و موازی با AC خط CI را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید: مثلث‌های PXY و ABC متشابه‌اند .

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیّت‌هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم

چهل و سومین دورهٔ المپیاد ریاضی(روز دوم)

سال تحصیلی ۱۴۰۴- ۱۴۰۳

تاریخ: ۱۴۰۴/۱/۳۰ - ساعت : ۸:۰۰ - مدت: ۲۷۰ دقیقه - نوع:تشریحی

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.

۳- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس ، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

٤- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از برش سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید.در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

٥- از مخدوش کردن بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

٦- همراه داشتن هر گونه کتاب جزوه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۷- هر سوال این دفترچه ۱۵ نمره دارد.

۸- این دفترچه شامل ۳ سوال و با احتساب جلد ۱ برگ است.

بسمه تعالی

آزمون مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران — فروردین ۱۴۰۴ — زمان: ۲۷۰ دقیقه

---

۴. مثلث حاده و مختلف‌الاضلاع ABC با مرکز دایره محیطی O مفروض است. BO و CO ارتفاع وارد از A به BC را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. X مرکز دایره محیطی OPQ و O' قرینهٔ O نسبت به BC است. Y تقاطع دوم دوایر محیطی مثلث‌های BXP و CXQ است. نشان دهید نقاط X, Y, O' هم‌خطند.

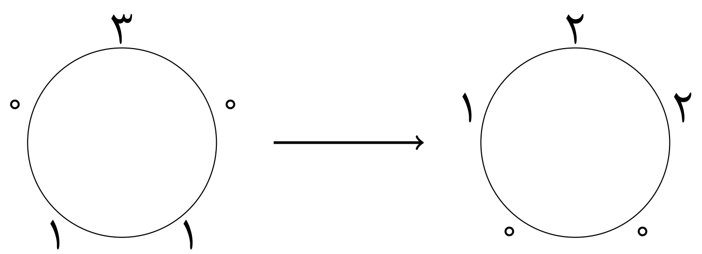
۵. همه‌ی تابع‌ها مانند $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ را پیدا کنید به طوری که برای هر $x, y, z > 0$ داشته باشیم

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq f(x+y+z) \cdot f(xy+yz+xz) \leq 3(x^3+y^3+z^3).$$

۶. علی یک میهمانی بزرگ ترتیب داده‌است و همراه $n-1$ نفر از دوستانش دور یک میز دایره‌ای n-نفره نشسته‌اند؛ علی برای پذیرایی n سیب در مقابل خودش قرار داده است و می‌خواهد آن را میان همه توزیع کند. از آنجا که علی و دوستانش تک‌خوری را دوست ندارند و تا به همه سیب نرسد شروع به خوردن نمی‌کنند، در هر گام هر کسی که حداقل یک سیب دارد به طور هم‌زمان، یک سیبش را به اولین نفر بدون سیب از سمت راستش می‌دهد (در جهت پادساعت‌گرد).

به ازای چه مقادیری از n، پس از تعدادی گام، به وضعیتی می‌رسیم که هر نفر دقیقا ۱ سیب داشته باشد؟

برای مثال اگر در شکل زیر هر عدد نمایانگر تعداد سیب‌های هر نفر باشد، وضعیت سمت چپ بعد از یک گام به وضعیت سمت راست تبدیل می‌شود.



چهل و سومین دوره
المپیاد ریاضی ایران

کمیته ملی المپیاد ریاضی

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم ایران

۱. آیا عددی طبیعی $n > 2$ وجود دارد که اگر با هر یک از مقسوم‌علیه‌های اول خود جمع شود عددی مربع کامل بدست آید؟

پاسخ: نشان می‌دهیم پاسخ خیر است. فرض کنید چنین عددی وجود داشته باشد و آن را n بنامید. ابتدا مشاهده کنید که n نمی‌تواند اول باشد چرا که دو برابر هیچ عدد اولی به جز ۲ مربع کامل نمی‌شود. حال فرض کنید $n = p^\alpha, \alpha \geq 2$. در این صورت در تجزیه $p^\alpha + p$ توان عامل اول p برابر یک است و بنابراین این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد.
بنابراین می‌توانیم فرض کنیم n دو عامل اول متمایز همچون p, q دارد. حال باید داشته باشیم:

$$n + p = p^2x^2, n + q = q^2y^2$$

با کم کردن این دو رابطه از یکدیگر خواهیم داشت

$$p - q = (px - qy)(px + qy)$$

اما از آن جا که $|px + qy| > |p - q|$ و $p - q \neq 0$ چنین چیزی ناممکن است. پس در هر صورت به تناقض رسیدیم.

۲. علي و شايان روي يك جدول بی‌نهايت به شكل نوبتي بازي می‌كنند. در ابتدا تمام خانه‌ها سفيد هستند. علي بازي را شروع می‌كند و در نوبت اول يكي از مربع‌هاي واحد صفحه را سياه می‌كند. در نوبت‌هاي بعد هر نفر بايد يك خانه‌ي سفيد كه مجاور ضلعي حداقل يك خانه‌ي سياه باشد را سياه كند. بازي پس از اينكه هر نفر دقيقا ۱۴۰۴ نوبت بازي كند تمام می‌شود. مجموعه‌ي خانه‌هاي سياه در انتهاي بازي را A می‌ناميم. علي و شايان به ترتيب می‌خواهند محيط شكل A را كمينه و بيشينه كنند. اگر هر دونفر بهترين بازي خود را انجام دهند محيط شكل A برابر چه مقداري خواهد بود؟ (منظور از محیط شکل A جمع طول پاره‌خط‌هایی است که مرز یک خانه سیاه و یک خانه سفید هستند.)

پاسخ: پاسخ برابر ۲۸۰۸ + ۶ = ۲۸۱۴ است.

استراتژی شایان : کوچکترین مستطیلی که شامل همه خانه‌های سیاه است را پوش‌مستطیل شکل می‌نامیم. شایان طوری بازی می‌کند که خانه‌های سیاه‌شده توسط او همواره در یک سطر باشند در هر نوبت ابعاد پوش مستطیل شکل A یک واحد اضافه شود. به این صورت که در هر گام خانه‌ای مجاور با یکی از خانه‌های مرزی پوش مستطیل را رنگ می‌کند که خودش در پوش‌مستطیل نیست. در هر گام محیط پوش مستطیل حداقل دو واحد اضافه می‌شود و محیط هر شکلی از محیط پوش مستطیل متناظر بیشتر است(برای دیدن این موضوع محیط شکل را روی محیط پوش مستطیل تصویر کنید، کل محیط پوش مستطیل باشد پوشیده شود.) بنابراین محیط حداقل ۲۸۰۸ + ۶ خواهد بود.

استراتژی علی: در نوبت دوم علی مانع تشکیل یک مستطیل ۳ × ۱ می‌شود و اگر بتواند به جز نوبت های اول و دوم در بقیه نوبت ها مربعی را انتخاب می‌کند که حداقل ۲ ضلع آن از قبل سیاه شده باشند. فرض کنید علی در T گام بتواند این کار را انجام دهد. بنابر لم اول در باقی گام‌ها که علی نمی‌تواند این کار را انجام دهد، شایان باید در گام قبلی خانه‌های سیاه را به یک مستطیل کامل تبدیل کرده است. زمانی که شایان این کار را انجام می‌دهد خانه‌ای که سیاه می‌کند باید حداقل با دو خانه سیاه مجاور باشد. پس هر گامی که علی محیط را اضافه کند، گام قبل از آن شایان به محیط اضافه نکرده است و در هر گام دیگر علی حداکثر دو واحد به محیط اضافه کرده است، بنابراین تعداد خانه‌های سیاه حداکثر ۲۸۰۸ + ۶ می‌شود.

لم ۱. تنها شکل همبندی که هر خانه سیاه حداکثر یک مرز با خانه‌های بیرونی داشته باشد مستطیل است.

اثبات. فرض خلف می‌کنیم، پوش مستطیل شکل را در نظر بگیرید. ابتدا توجه کنید که باالترین سطر پوش محدب نمی‌تواند کاملا سیاه باشد، در غیر این صورت فرض کنید x باالاترین خانه سفید درون پوش مستطیل باشد، سطر x نمی‌تواند کاملا سفید باشد بنابراین در این سطر یک خانه سفید و سیاه مجاور وجود دارند و خانه بالایی آن خانه سفید هم سیاه است که تناقض است.

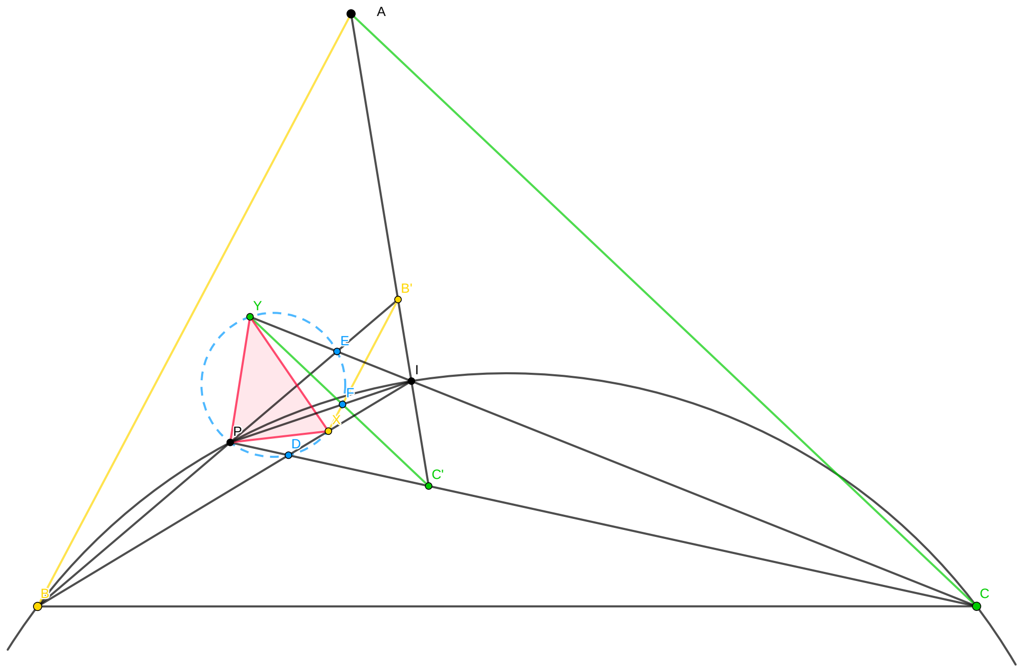
حال یک خانه سفید در بالاترین سطر در نظر بگیرید، در این سطر باید یک خانه سیاه وجود داشته باشد، بدون کم شدن از کلیت مساله فرض کنید این خانه در سمت راست خانه سفید باشد. از خانه سفید به سمت راست حرکت کنید تا به یک مرز سیاه برخورد کنید. بنابرفرض خانه پایینی این خانه، سفید است به این خانه بروید و پایین بروید تا به یک خانه سیاه یا مرز پوش مستطیل بخورید. اگر به مرز نخوردید به سمت راست حرکت کنید تا به اولین خانه سیاه یا مرز پوش مستطیل برخورد کنید و این کار را ادامه دهید تا در نهایت به یکی از مرزهای پوش مستطیل برسید. در این حالت مسیری از خانه‌های سفید پیدا کردیم که مستطیل را به دو ناحیه تقسیم می‌کند و در هر دو قسمت هم خانه‌های سیاه وجود دارند(در غیر این صورت خانه‌های سفید نمی‌توانستند درون پوش‌مستطیل باشند). این موضوع با یکپارچگی خانه‌های سیاه در تناقض است. □

توجه کنید که در چنین مسائلی، نیاز است استراتژی اثبات خود و ادعاهایی که درباره آن می‌کنید را ثابت کنید. صرف بیان کلماتی مثل این که بهترین حرکت این بازیکن فلان است یا این که اگر فلان بازیکن این حرکت را نکند موقعیتش بدتر می‌شود اثبات محسوب نمی‌شود. هم‌چنین در نظر بگیرید که حرکتی که در یک یا دو گام آینده بهینه است ممکن است شروع مسیری از حرکات باشد که در نهایت نتیجه بدتری از یک حرکت دیگر بدهد که در کوتاه مدت نتیجه بدتری دارد.

۳. P درون مثلث مختلف الاضلاع ABC با مرکز دایره محاطی I به گونه‌ای قرار دارد که :

$$۲\angle ABP = \angle BCA, ۲\angle ACP = \angle CBA$$

فرض کنید PB و PC خط AI را به ترتیب در B' و C' قطع می‌کنند. خط گذرا از B' و موازی AB خط BI را در X و خط گذرا از C' و موازی با AC خط CI را در Y قطع می‌کند. ثابت کنید: مثلث‌های PXY و ABC متشابه‌اند . پاسخ:



فرض کنید F, E, D به ترتیب محل برخورد خطوط $C'Y, B'X$ و CI, BP و BI, CP باشند. ثابت خواهیم کرد تمامی ۶ نقطه P, X, Y, D, E, F روی یک دایره قرار دارند . ابتدا ثابت میکنیم B, P, I, C هم دایره اند. برای اثبات آن داریم:

$$\angle BPC = \angle A + \angle ABP + \angle PCA = \angle A + \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} = \angle A + \angle ABI + \angle ICA = \angle BIC$$

و محاطی بودن ثابت میشود. حال ثابت میکنیم F مرکز دایره محیطی مثلث $PB'C'$ است. جهت اثبات آن داریم:

$$\angle FB'C' = \angle BAI = \angle IAC = \angle FC'B' = \frac{\angle A}{۲} = ۹۰^\circ - (۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲}) = ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \angle BIC)$$

$$= ۹۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \angle BPC) = ۹۰^\circ - \angle B'PC'$$

و این گزاره هم ثابت میشود .

حال ثابت میکنیم F روی خط PI قرار دارد . برای اثبات آن داریم :

$$\angle C'PF = ۹۰^\circ - \angle PB'C' = \angle PB'A - ۹۰^\circ = \angle BB'A - ۹۰^\circ = (۱۸۰^\circ - \frac{\angle C}{۲} - \frac{\angle A}{۲}) - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ - \frac{\angle C}{۲} - \frac{\angle A}{۲}$$

$$= \frac{\angle B}{۲} = \angle CBI = \angle CPI = \angle C'PI$$

پس همخطی اثبات میشود.
جهت هم دایره بودن ۶ نقطه در مرحله اول ثابت میکنیم نقاط P, D, X, F هم دایره هستند.
جهت اثبات این داریم:

$$\angle PDX = \angle PDI = ۱۸۰^\circ - (\angle DPI + \angle DIP) = ۱۸۰^\circ - (\frac{\angle B}{۲} + (\angle C - \frac{\angle B}{۲})) = ۱۸۰^\circ - \angle C$$

$$\angle PFX = ۱۸۰^\circ - \angle PFB' = ۱۸۰^\circ - ۲\angle PC'B' = ۱۸۰^\circ - ۲(\frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲}) = ۱۸۰^\circ - \angle B - \angle A = \angle C$$

پس این دو زاویه مکمل اند و هم دایره بودن نقاط P, D, X, F ثابت میشود.به طریق کاملا مشابه ثابت میشود نقاط P, Y, E, F نیز هم دایره هستند ، اکنون برای ثابت شدن هم دایره بودن ۶ نقطه فقط کافیست محاطی بودن چهارضلعی $PDFE$ را ثابت کنیم . برای این کار ابتدا ثابت میکنیم $DC' = DI, EB' = EI$ برای اثبات این گزاره داریم:

$$\angle DC'I = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \angle DIC'$$

و ساقین بودن مثلث دیگر هم به طور مشابه ثابت میشود. به وسیله لم ۱ که در انتها ثابت شده است ، این محاطی بودن ثابت میشود ، پس اکنون هم دایره بودن آن ۶ نقطه را میدانیم ، به کمک زاویه بازی هایی که در بالاتر انجام دادیم به راحتی و به کمک حالت سه زاویه تشابه خواست سوال ثابت میگردد و حکم ثابت میشود .

لم ۱:
اگر در مثلث ABC نقاط P روی AB و Q روی AC و R روی BC به گونه ای قرار داشته باشند که $PB = PR, QR = QC$ و O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد ، آنگاه نقاط A, P, O, Q روی یک دایره قرار دارند .

اثبات لم۱ :

شکل مساله به صورت زیر است

نقطه R' را قرینه نقطه R نسبت به خط PQ قرار دهید و همچنین فرض کنید O' مرکز دایره

محیطی مثلث APQ باشد . ثابت میکنیم نقاط A, P, Q, R' هم دایره اند ، زیرا که داریم :

$$\angle PR'Q = \angle PRQ = ۱۸۰^\circ - \angle BRP - \angle CRQ = ۱۸۰^\circ - \angle B - \angle C = \angle A = \angle PAQ$$

پس هم دایره بودن ثابت شد .
حال داریم که

$$\angle R'PB = ۱۸۰^\circ - \angle APR' = ۱۸۰^\circ - \angle AQR' = \angle R'QC$$

و با توجه به اینکه طبق فروض سوال دو مثلث $R'PB, R'QC$ هر دو ساقین هستند و زاویه راسشان هم یکیست ، پس متشابه هستند ، پس:

$$\angle PBR' = \angle QCR'$$

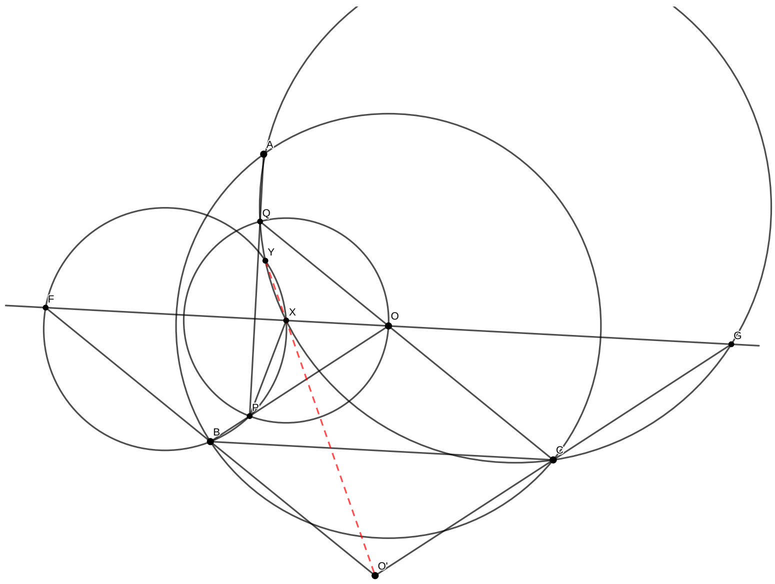
پس نقطه R' روی دایره محیطی مثلث ABC هم قرار دارد . نقاط $R'_۱$ و $R'_۲$ به ترتیب روبرو قطری های نقطه R' در دایره محیطی مثلث های ABC و APQ هستند ، نقاط $A, R'_۱, R'_۲$ همگی روی خط عمود بر $R'A$ در A هستند پس هم خط اند . حال داریم:

$$\angle AR'_۲R' = \angle APR' = ۲\angle R'BA = ۲\angle R'R'_۱A$$

پس مثلث $R'R'_۲R'_۱$ ساقین است . پس چون O', O به ترتیب وسط $R'R'_۲, R'R'_۱$ هستند ، پس مثلث $R'O'O$ هم ساقین است پس $O'R' = O'O$ پس حکم لم ثابت میشود.

۴. مثلث حاده و مختلف‌الاضلاع ABC با مرکز دایره محیطی O مفروض است. BO و CO ارتفاع وارد از A به BC را به ترتیب در P و Q قطع می‌کنند. X مرکز دایره محیطی OPQ و O' قرینهٔ O نسبت به BC است. Y تقاطع دوم دوایر محیطی مثلث‌های BXP و CXQ است. نشان دهید نقاط X, Y, O' هم‌خطند.

پاسخ: شکل مساله مانند زیر است :



نقطه G محل برخورد $O'C$ با دایره محیطی AXC است و همچنین نقطه F محل برخورد خط $O'B$ با دایره محیطی BPX است . ابتدا ثابت میکنیم خط OX موازی خط BC است . داریم:

$$\angle POX = ۹۰^\circ - \angle OQP = \angle OCB = \angle OBC$$

و توازی ثابت میشود . حال ثابت میکنیم FX و GX موازی با BC اند . داریم :

$$\angle BFX = \angle XPO = \angle XOP = ... = \angle CBO = \angle O'BC$$

و به طور مشابه XG هم با BC موازیست. پس همگی F, X, O, G روی خطی موازی BC قرار دارند . اکنون داریم :

$$O'B = O'C, O'F = O'G \rightarrow O'B.O'F = O'C.O'G$$

پس O' روی محور اصلی دوایر BPX, QXC قرار دارد و حکم ثابت میشود

۵. همه‌ی تابع‌ها مانند $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ را پیدا کنید به طوری که برای هر $x,y,z>۰$ داشته باشیم

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\le f(x+y+z)\cdot f(xy+yz+xz)\le ۳(x^۳+y^۳+z^۳).$$

پاسخ: ابتدا با قرار دادن $x=y=z=a$ خواهیم داشت:

$$f(۳a)f(۳a^۲)=۹a^۳ \tag{۱}$$

با قرار دادن $a=۱$ داریم $f(۳)=\pm۳$ از آن جا که ضرب تابع در منفی یک تاثیری در برقراری شرط مساله ندارد می‌توان فرض کرد $f(۳)=۳$.

حال قرار دهید $x+y+z=۳$ باید داشته باشیم $f(xy+yz+zx)\le ۳$. بنابراین با استفاده از لم داریم برای هر $۰<l\le ۳$ ، $f(l)\le ۳$. از این موضوع به همراه قرار دادن $a=\frac{l}{۳}$ در ۱ نتیجه می‌شود برای هر $۰<l\le ۳$ ، $f(l)=l$.

حال قرار دهید $xy+yz+zx=۳$ بنا بر لم $x+y+z$ می‌تواند هر مقدار $l>۳$ ای را اتخاذ کند، بنابراین برای هر $l>۳$ داریم $f(l)\le l$. این موضوع و رابطه ۱ مشابه بالا نتیجه می دهند $f(l)=l$. بنابراین جواب‌های معادله عبارتند از $f(x)=x, f(x)=-x$.

لم ۲. اگر $x,y,z>۰$ باشند که $x+y+z=۳$ عبارت $xy+yz+zx$ می‌تواند تمام مقادیر بازه $(۰,۳]$ را اتخاذ کند.

اثبات. قرار دهید

$$x=a, ۰<y\le ۳-a, z=۳-a-y$$

که a عددی ثابت است. می‌خواهیم ببینیم با تغییر y چه مقادیری پوشش داده می‌شوند. در واقع باید برد تابع

$$-y^۲+(۳-a)y+a(۳-a)$$

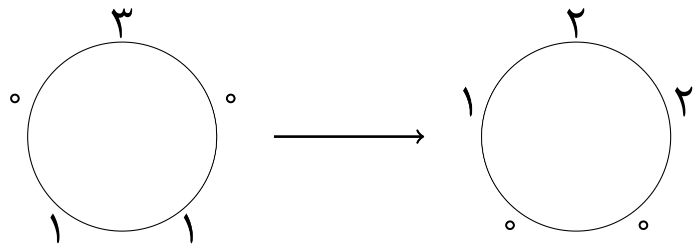
در بازه $(۰,۳-a)$ را بررسی کنیم که یک عبارت درجه دوست. با حل معادله درجه دو مربوطه نتیجه می‌شود که این برد برابر $(a(۳-a),\frac{(۳-a)^۲}{۴}+a(۳-a)]$ است. با تغییر a بین صفر تا یک، کل اعداد بازه $(۰,۳]$ باید درون برد قرار بگیرند. □

لم ۳. اگر $x,y,z>۰$ باشند $xy+yz+zx=۳$ عبارت $x+y+z$ می‌تواند هر مقدار بزرگ‌تر از سه‌ای را اتخاذ کند.

اثبات. از لم بالا نتیجه می‌شود اگر $x+y+z=۳t$ آن‌گاه $xy+yz+zx$ می‌تواند هر عددی در بازه $(۰,۳t^۲)$ باشد. □

۶. علی یک میهمانی بزرگ ترتیب داده‌است و همراه $n-1$ نفر از دوستانش دور یک میز دایره‌ای n-نفره نشسته‌اند؛ علی برای پذیرایی n سیب در مقابل خودش قرار داده است و می‌خواهد آن را میان همه توزیع کند. از آنجا که علی و دوستانش تک‌خوری را دوست ندارند و تا به همه سیب نرسد شروع به خوردن نمی‌کنند، در هر گام هر کسی که حداقل یک سیب دارد به طور هم‌زمان، یک سیبش را به اولین نفر بدون سیب از سمت راستش می‌دهد (در جهت پادساعت‌گرد).
به ازای چه مقادیری از n، پس از تعدادی گام، به وضعیتی می‌رسیم که هر نفر دقیقا ۱ سیب داشته باشد؟

برای مثال اگر در شکل زیر هر عدد نمایانگر تعداد سیب‌های هر نفر باشد، وضعیت سمت چپ بعد از یک گام به وضعیت سمت راست تبدیل می‌شود.



پاسخ: ادعا می‌کنیم پاسخ برابر توان‌های دوست. این موضوع را به استقرا ثابت می‌کنیم، در واقع فرض کنید $n = 2^i$، به استقرا نشان می‌دهیم بعد از $n-1$ گام به وضعیت همه یک می‌رسیم. فرض کنید حکم برای 2^{i-1} درست باشد، بنابراین بعد از $2^{i-1}-1$ گام به وضعیتی می‌رسیم که نفر اول $2^{i-1}+1$ سکه و $2^{i-1}-1$ نفر بقیه یک سکه دارند، در مرحله بعد نفر اول و نفر روبروییش دور دایره هر کدام 2^{i-1} سکه دارند و بنابراین طبق فرض استقرا بعد از $2^{i-1}-1$ گام دیگر همه یک سکه خواهند داشت و حکم ثابت می‌شود.
حال ادعا می‌کنیم هیچ n دیگری جواب نیست. ابتدا توجه کنید در یک مرحله به آخر هیچ دو خانه پشت سر همی نباید سکه داشته باشند چرا که در غیر این صورت به یک خانه دو سکه می‌رسد. بنابراین وضعیت قبلی باید نیمی از خانه‌ها خالی و نیم دیگر دو باشد. پس تعداد سکه ها زوج است. ادعا می‌کنیم در این حالت در نوبت‌های $2k$ تمام جایگاه‌های فرد خالی و همه جایگاه‌های زوج مشابه گام k برای $\frac{n}{2}$ سکه می‌شود. این مساله را با استقرا ثابت می‌کنیم، پایه بدیهی است. اگر پایه درست باشد بعد از یک گام خانه بعدی هر خانه زوج پر یک سکه می‌گیرد و گام بعد همه این سکه‌ها بعلاوه همین تعداد از خانه‌های زوج به اولین خانه خالی زوج بعدی منتقل می‌شوند که حکم را ثابت می‌کند. حال حکم سوال به استقرا از این حقیقت نتیجه می‌شود.