

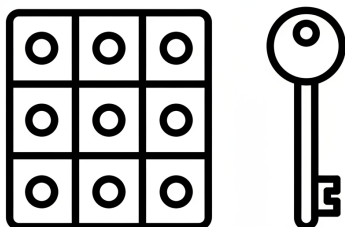
بسمه تعالی

سؤالات و پاسخ‌های آزمون
مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران

بهار ۱۴۰۵

سوال ۱: قفلی هوشمند شامل ۹ سوراخ به شکل یک جدول 3×3 است. در هر لحظه دقیقاً یکی از سوراخ‌ها، بدون این‌که در ظاهر قفل دیده شود، «فعال» است. اگر کلید را در سوراخ فعال وارد کنیم، قفل باز می‌شود و اگر کلید را در سوراخی دیگر وارد کنیم، طبق قواعد زیر سوراخ دیگری فعال می‌شود:

- اگر سوراخ انتخابی و سوراخ فعال در یک سطر باشند، سوراخ سوم همان سطر فعال می‌شود (سوراخی که در آن سطر است و با آن دو متفاوت است).



- اگر سوراخ انتخابی و سوراخ فعال در یک ستون باشند، سوراخ سوم همان ستون فعال می‌شود.
- در غیر این دو صورت، دقیقاً یک سوراخ دیگر وجود دارد که نه هم‌سطر و نه هم‌ستون با سوراخ انتخابی و سوراخ فعال است؛ همان سوراخ فعال می‌شود.

هوشنگ، که قواعد قفل را می‌داند، می‌خواهد قفل را باز کند. او می‌تواند هر بار کلید را در هر یک از ۹ سوراخ (حتی سوراخ‌هایی که قبلاً امتحان کرده است) وارد کند. نشان دهید هوشنگ می‌تواند با یک راه‌برد مناسب، صرف‌نظر از این‌که در ابتدا کدام سوراخ فعال بوده است، حتماً قفل را باز کند. کم‌ترین تعداد دفعاتی که لازم است کلید را وارد سوراخ‌ها کند تا باز شدن قفل تضمین شود چند است؟

راه‌حل: پاسخ عدد ۹ است.

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

ابتدا نشان می‌دهیم که حداقل ۹ مرحله برای بازکردن قفل نیاز است و سپس با ارائه‌ی الگوریتمی نشان می‌دهیم باز کردن قفل با این تعداد عملیات امکان‌پذیر است. در هر لحظه، به خانه‌هایی از جدول که می‌دانیم در آن لحظه سوراخ آن‌ها غیرفعال است، «خانه‌ی امن» می‌گوییم. خانه‌های جدول را مانند شکل شماره‌گذاری می‌کنیم.

ادعا. تعداد خانه‌های امن در ابتدا برابر صفر است و بعد از انجام هر عملیات، حداکثر یک واحد افزایش می‌یابد.

اثبات. از آنجایی که در ابتدا هیچ اطلاعاتی از جدول نداریم، همه‌ی خانه‌ها ناامن هستند. فرض کنید کلید را در خانه‌ی i وارد کرده‌ایم. برای هر خانه‌ی $x \neq i$ ، «خانه‌ی متناظر» x نسبت به i را خانه‌ای تعریف می‌کنیم که اگر پیش از این مرحله x فعال بوده باشد، طبق قواعد سوال، اکنون فعال خواهد شد.

فرض کنید خانه‌ی $i \neq j$ قبل از وارد کردن کلید امن بوده باشد. پس از انجام عملیات، خانه‌ی متناظر این خانه امن می‌شود؛ زیرا اگر فعال شده باشد، به این معنی است که j در مرحله‌ی قبل فعال بوده که با فرض امن بودن آن در تناقض است. پس بعد از وارد کردن کلید، متناظر با هر خانه‌ی امن پیشین، یک خانه‌ی امن خواهیم داشت. بنابراین، با در نظر گرفتن امن‌شدن احتمالی خانه‌ی i ، تعداد خانه‌های امن در هر مرحله حداکثر یک واحد افزایش می‌یابد و ادعا اثبات می‌شود. ■

از آنجایی که برای بازکردن قفل باید ۹ خانه امن داشته باشیم و تعداد آن‌ها در هر مرحله حداکثر یکی افزایش

می‌یابد، پس حداقل ۹ مرحله نیاز است. حال کلید را به ترتیب وارد خانه‌های دنباله‌ی زیر می‌کنیم:

$$۵ \rightarrow ۱ \rightarrow ۵ \rightarrow ۲ \rightarrow ۵ \rightarrow ۳ \rightarrow ۶ \rightarrow ۱ \rightarrow ۴$$

نشان می‌دهیم طی انجام این کار قفل حتماً باز می‌شود. جدول زیر خانه‌های امن در هر مرحله را نشان می‌دهد؛ به طوری که برای هر خانه، خانه‌ی امن متناظر آن در مرحله‌ی بعد، در ستون بعدی و هم‌ردیف آن نوشته شده است. در نهایت در مرحله‌ی ۹ام، کلید را وارد تنها خانه‌ی ناامن که ۴ است می‌کنیم و قفل باز می‌شود. دقت کنید که در هر مرحله ممکن است قفل باز شود و نیازی به ادامه‌ی عملیات نباشد.

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
	۵	۹	۱	۳	۷	۵	۴	۷
		۱	۹	۴	۶	۹	۳	۲
			۵	۸	۲	۱	۸	۶
				۲	۸	۴	۵	۹
					۵	۷	۲	۳
						۳	۹	۵
							۶	۸
								۱

سوال ۲: دنباله $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ از اعداد طبیعی بزرگتر از ۱۴۰۵ دارای شرایط زیر است:

• برای هر $1 \leq i \leq 99$ داریم $x_i \geq x_{i+1}$ و $x_{50} > x_{51}$.

• برای هر $1 \leq i < j < k \leq 100$ داریم $\left\lfloor \frac{x_i + x_j + x_k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \right\rfloor$.

نشان دهید $\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_{100}} < \frac{1}{5}$.

(نماد $[x]$ نشان دهنده بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.)

راه حل:

لم ۱. اگر برای سه اندیس $1 \leq i < j < k \leq 100$ بدانیم $\sqrt[3]{x_i + x_j + x_k}$ ، آن گاه $x_i = x_j = x_k$.
اثبات. دقت کنید که با توجه به فرض، $\frac{x_i + x_j + x_k}{3}$ عددی طبیعی است و جزء صحیح آن با خودش برابر است، بنابراین:

$$\sqrt[3]{x_i x_j x_k} \leq \frac{x_i + x_j + x_k}{3} = \left\lfloor \frac{x_i + x_j + x_k}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \right\rfloor \leq \sqrt[3]{x_i x_j x_k}$$

و در نتیجه:

$$\frac{x_i + x_j + x_k}{3} = \sqrt[3]{x_i x_j x_k}$$

که این یعنی حالت تساوی نابرابری حسابی هندسی برای سه عدد x_i, x_j, x_k برقرار شده است و بنابراین $x_i = x_j = x_k$. ■

حال برای $i = 0, 1, 2$ ، قرار دهید:

$$M_i = \{t \in \{1, 2, \dots, 100\} \mid x_t \equiv i\}, \quad X_i = \{x_t \mid t \in M_i\}.$$

اگر هر سه مجموعه M_0, M_1, M_2 ناتهی باشند، با در نظر گرفتن

$$m_0 \in M_0, m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$$

داریم:

$$x_{m_0} + x_{m_1} + x_{m_2} \equiv 0 + 1 + 2 \equiv 0.$$

بنابراین طبق لم $x_{m_0}, x_{m_1}, x_{m_2}$ با هم برابرند اما این سه عدد به پیمانه ۳ متمایزند و نمی‌توانند برابر باشند. پس حداقل یکی از این سه مجموعه تهی است. هم‌چنین اگر هر یک از این مجموعه‌ها مانند M_i حداقل سه عضوی باشد با در نظر گرفتن هر سه عضو متمایز از این مجموعه مانند m, n, p داریم:

$$x_m + x_n + x_p \equiv 3i \equiv 0.$$

و بنابراین طبق لم x_m, x_n, x_p باید برابر باشند و این یعنی X_i تک عضوی است. با توجه به این موضوع و از آنجا که اعضای $\{x_1, x_2, \dots, x_{50}\}$ همگی با همه اعضای $\{x_{51}, x_{52}, \dots, x_{100}\}$ متمایزند، نتیجه می‌گیریم M_i

حداکثر پنجاه عضوی است. اما M_0, M_1, M_2 افرازی از مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ هستند و یکی از آنها نیز تهی است، پس دوتای دیگر روی هم صد عضو دارند و هر یک نیز حداکثر پنجاه عضوی هستند و در نتیجه هر یک دقیقاً پنجاه عضو دارند. پس $l, t \in \{0, 1, 2\}$ متمایز و اعداد طبیعی $u \equiv l, v \equiv t$ وجود دارند که:

$$M_l = \{1, 2, \dots, 50\}, \quad M_t = \{51, 52, \dots, 100\}$$

9

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{50} = u, \quad x_{51} = x_{52} = \dots = x_{100} = v.$$

از آنجا که u, v به پیمانه ۳ متمایزند، $2u+v, 2v+u$ نیز به پیمانه ۳ متمایز و ناصفر هستند پس یکی از آنها به پیمانه ۳ هم نهشت ۱ و دیگری هم نهشت ۲ است. فرض کنید $2u+v \equiv 1$ باشد (حالتی که $2v+u \equiv 1$ باشد کاملاً مشابه است) با قرار دادن $i=1, j=2, k=100$ در صورت مسئله داریم: (توجه کنید که $u, v > 1405$ و بنابراین $\sqrt[3]{u}, \sqrt[3]{v} > 11$)

$$\begin{aligned} \frac{2u+v-1}{3} &= \left\lfloor \frac{2u+v}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[3]{u^2 v} \right\rfloor \leq \sqrt[3]{u^2 v} \Rightarrow 2u+v-3\sqrt[3]{u^2 v} \leq 1 \\ \Rightarrow (\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{u})^2 (2\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}) &\leq 1 \Rightarrow (\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{u})^2 \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}} < \frac{1}{33} \\ \sqrt[3]{x_{100}} - \sqrt[3]{x_1} &= \sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{u} < \sqrt{\frac{1}{33}} < \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

سوال ۳: مثلث مختلف الاضلاع و حادة الزاوية ABC با مرکز دایره محیطی O مفروض است. I_a مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رأس A است. خط AI_a ، BC را در K قطع می‌کند. نقطه T روی دایره محیطی I_aBC طوری قرار دارد که مرکز دایره محیطی TKI_a روی BC است. ثابت کنید AO به دایره محیطی مثلث ATI_a مماس است.

راه حل: بدون کم‌شدن از کلیت مسئله فرض کنید $AC > AB$.

ادعا ۱. برای اثبات حکم کافیت نشان دهیم: $\angle ATI_a = 180^\circ - (\frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2})$.
اثبات. می‌دانیم:

$$\begin{aligned}\angle OAI_a &= \angle OAB - \angle I_aAB \\ &= 90^\circ - \angle C - \frac{\angle A}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle C}{2} \\ &= \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}\end{aligned}$$

و برای اثبات حکم باید نشان دهیم $\angle OAI_a = \widehat{ATI_a}$ یا معادلاً:

$$180^\circ - \angle OAI_a = 180^\circ - \frac{\widehat{ATI_a}}{2} \Leftrightarrow 180^\circ - (\frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}) = \angle ATI_a$$

■

و ادعای اول اثبات می‌شود.

I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC ، M تقاطع AI با دایره محیطی ABC و D تقاطع دوم TK با دایره محیطی BCI_a است. دایره محیطی TKI_a ، BC را برای بار دوم در L قطع می‌کند.

ادعا ۲. DI_a موازی BC است.

اثبات. از آنجایی که مرکز دایره محیطی TKI_a روی BC قرار دارد، داریم:

$$\begin{aligned}\angle KTI_a = \angle KLI_a &= 90^\circ - \angle CKI_a \\ &= 90^\circ - (\frac{\angle A}{2} + \angle C) \\ &= \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} \\ &= 90^\circ - \frac{\angle C}{2} - (90^\circ - \frac{\angle B}{2}) \\ &= \angle BCI_a - \angle CBI_a\end{aligned}$$

پس $DI_a \parallel BC$ و ادعای دوم نیز اثبات می‌شود.

■

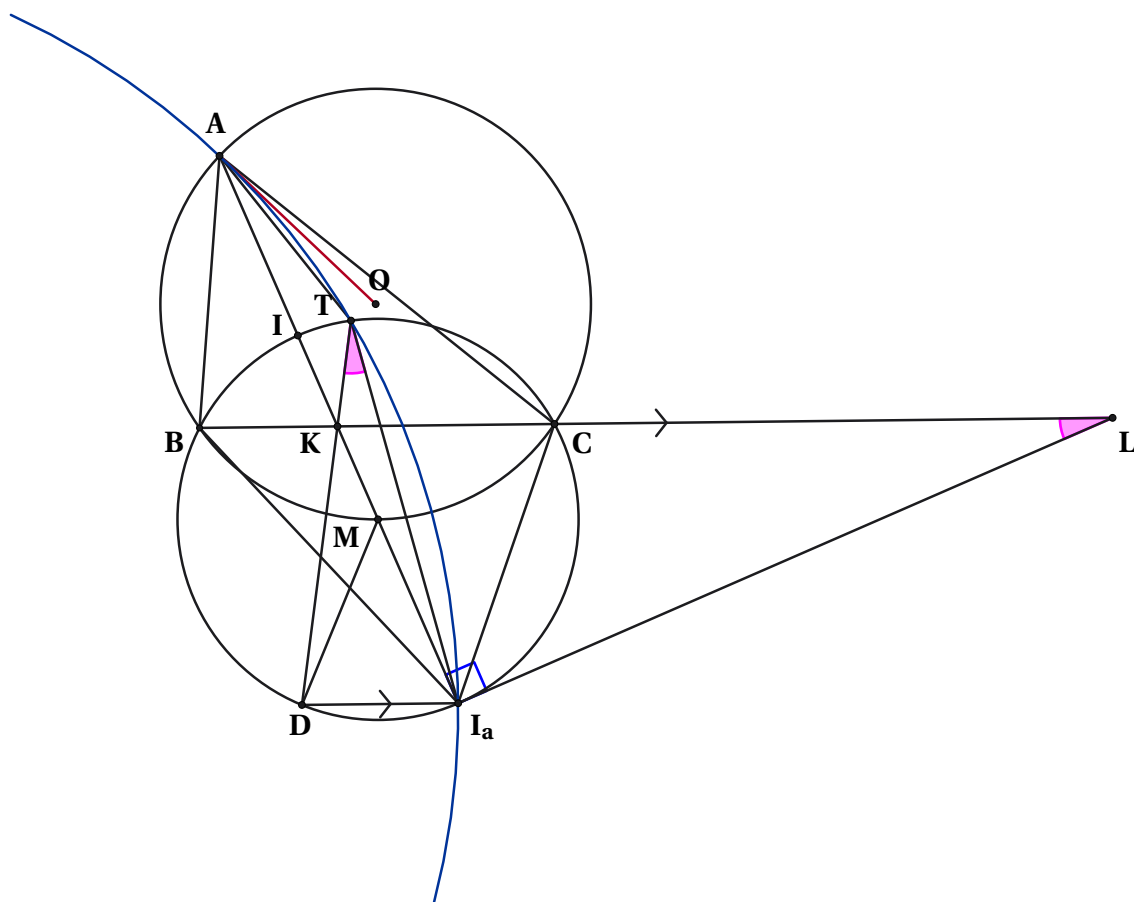
می‌دانیم نقاط $BICI_a$ روی دایره به مرکز M قرار دارند و با توجه به قوت نقطه K در دوایر محیطی ABC و BCI_a داریم:

$$KM \times KA = KB \times KC = KD \times KT$$

پس چهارضلعی $ATMD$ محاطی است و در نتیجه $\angle ATD = \angle AMD$.
با استفاده از نتایج به دست آمده داریم:

$$\begin{aligned}\angle ATI_a &= \angle ATD + \angle DTI_a \\ &= \angle AMD + \underbrace{\angle DMI_a}_{\text{right angle}} \\ &= 1\lambda^{\circ\circ} - \underbrace{\angle DMI_a}_{\text{right angle}} \\ &= 1\lambda^{\circ\circ} - (\underbrace{\angle B}_{\text{right angle}} - \underbrace{\angle C}_{\text{right angle}})\end{aligned}$$

و اثبات تمام است (دقت کنید که دو تساوی آخر از توازی DI_a, BC و اینکه M مرکز دایره محیطی BCI_a است نتیجه می‌شوند).



سوال ۴: چهارضلعی محدب $ABCD$ با شرط $\angle B = \angle A + \angle C$ مفروض است. نیمساز زاویه $\angle CDA$ ضلع BC را در E قطع می‌کند و می‌دانیم $\angle AED = 90^\circ$. H پای عمود E به AD و M وسط BE است. نشان دهید چهارضلعی $CDHM$ محاطی است.

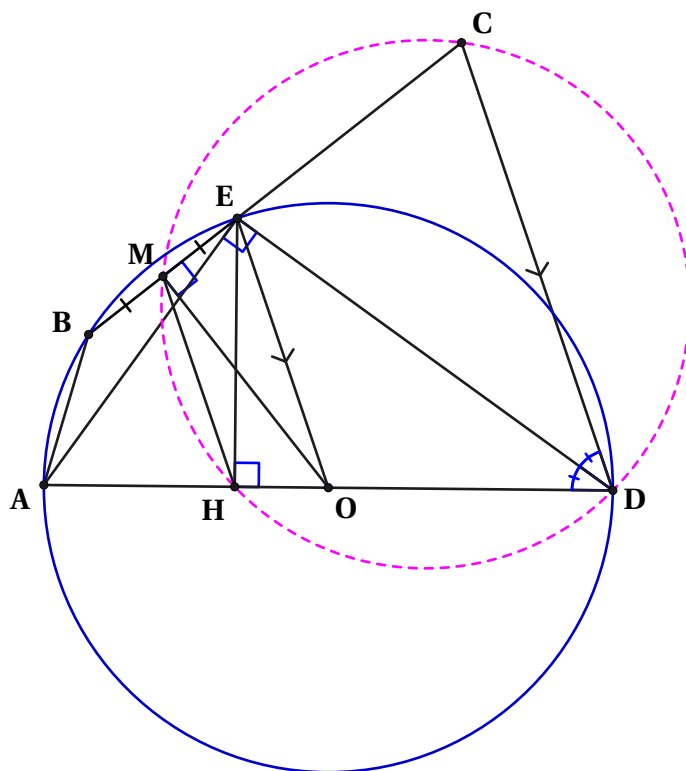
راه حل اول: از آنجایی که $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ و $\angle B = \angle A + \angle C$ داریم:

$$2\angle B + \angle D = 360^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - \frac{\angle D}{2} = 180^\circ - \angle EDA$$

در نتیجه چهارضلعی $BEDA$ محاطی است و $\angle ABD = \angle AED = 90^\circ$. وسط AD که مرکز دایره محیطی $BEDA$ است را O می‌نامیم. چون M وسط BE است پس $OM \perp BE$ و در نتیجه چهارضلعی $OHME$ محاطی است. همچنین داریم:

$$\angle AOE = 2 \times \angle ADE = \angle ADC \Rightarrow EO \parallel DC$$

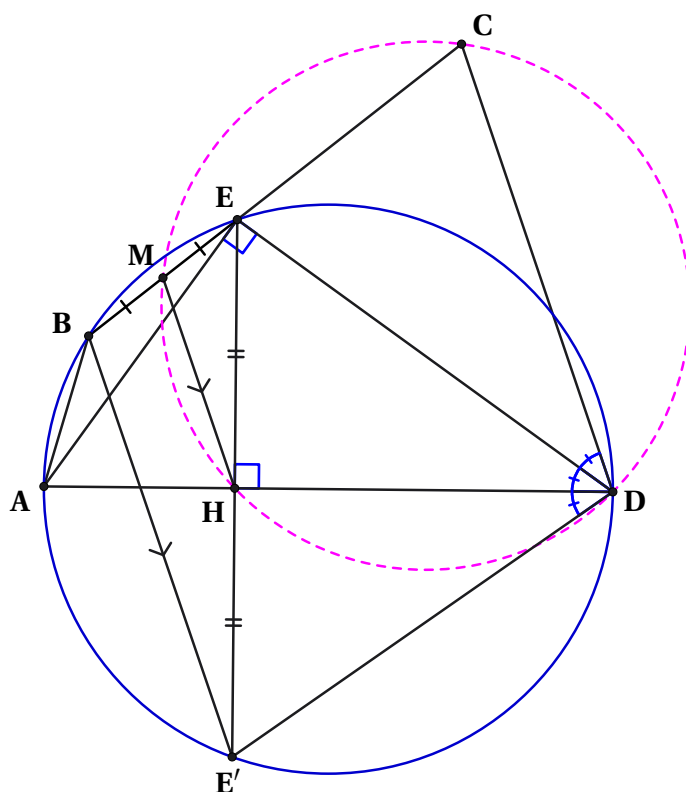
پس چهارضلعی $CDHM$ نیز محاطی است.



راه حل دوم: از حل اول می دانیم چهارضلعی $BEDA$ محاطی است. قرینه E نسبت به AD را E' می نامیم. داریم $\angle AED = \angle AE'D = 90^\circ$ ، پس چهارضلعی $AEDE'$ و در نتیجه $ABEDE'$ نیز محاطی است. همچنین M و H به ترتیب اوساط اضلاع BE و $E'E$ هستند، پس $MH \parallel BE'$ و داریم:

$$\begin{aligned}\angle HMC = \angle HME &= \angle E'BE \\ &= 180^\circ - \angle EDE' \\ &= 180^\circ - \angle HDC\end{aligned}$$

که نشان می دهد $CDHM$ محاطی است و حکم اثبات می شود.



سوال ۵: فرض کنید برای هر عدد طبیعی k ، $d(k)$ نشان دهندهٔ تعداد مقسوم علیه‌های صحیح و مثبت k باشد. ثابت کنید دنبالهٔ نامتناهی $a_1, a_2, a_3, \dots$ از اعداد صحیح و مثبت وجود ندارد به طوری که برای هر $i < j$ داشته باشیم:

$$d(a_i + a_j) = i + j$$

راه حل: ابتدا توجه کنید که اگر i عددی فرد و j عددی زوج باشد، با توجه به شرایط مسئله، $d(a_i + a_j)$ عددی فرد است و بنابراین $a_i + a_j$ باید مربع کامل باشد. حال دقت کنید که اگر دنبالهٔ $a_1, a_3, a_5, \dots$ کراندار باشد، دنبالهٔ $a_1 + a_3, a_1 + a_5, \dots$ در نتیجه دنبالهٔ

$$d(a_1 + a_3) = 4, d(a_1 + a_5) = 6, \dots$$

نیز باید کراندار باشند که به وضوح این گونه نیست. به طور مشابه دنبالهٔ $a_2, a_4, a_6, \dots$ نیز بی کران است. حال فرض کنید $m > n$ دو عضو متمایز از مجموعهٔ $\{a_1, a_3, a_5, \dots\}$ باشند و با توجه به آنچه گفتیم، دنباله‌های بی کران $b_1, b_2, b_3, \dots$ و $c_1, c_2, c_3, \dots$ وجود دارند که برای هر k طبیعی، $b_k > c_k$ و

$$m + a_{2k} = b_k^2, \quad n + a_{2k} = c_k^2$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$m - n = b_k^2 - c_k^2 \geq b_k^2 - (b_k - 1)^2 = 2b_k - 1$$

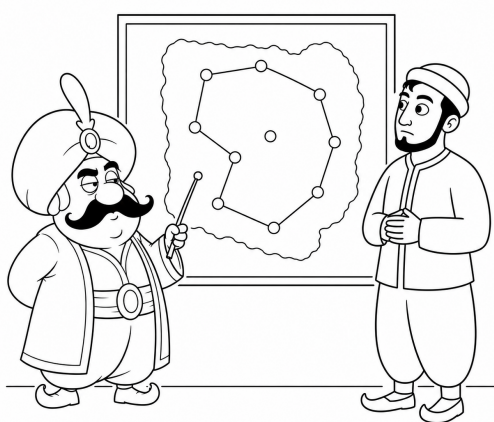
که با بی کران بودن دنبالهٔ $b_1, b_2, b_3, \dots$ در تناقض است.

سوال ۶: شکرستان تعدادی روستا دارد و بین هر دو روستا جاده‌ای جداگانه وجود دارد. نشان دهید اگر تعداد روستاها بیش‌تر از ۳ تا باشد، حاکم شکرستان می‌تواند کدخدای هر روستا را طبق ضوابط زیر به بازدیدی از همه روستاها، **غیر از روستای خودش**، بفرستد.

• هر کدخدا از روستایی شروع کند و بعد از این‌که از بقیه روستاها **دقیقاً یک بار** گذشت به همان نقطه شروع برگردد.

• جاده بین هر دو روستا را **دقیقاً دو** کدخدا طی کنند.

برای مثال، فرض کنید شکرستان ۴ روستا با شماره‌های ۱ تا ۴ دارد. کدخدای هر روستا باید یک مسیر بسته بین ۳ روستای دیگر طی کند، از روستای خودش بازدید نکند و هر شش جاده بین روستاها دقیقاً دو بار طی شود.



مسیر بازدید روستاها می‌تواند به این شکل باشد:

- کدخدای روستای ۱: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$
- کدخدای روستای ۲: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
- کدخدای روستای ۳: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
- کدخدای روستای ۴: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

راه حل: مسئله را با استفاده از یک گراف مدل‌سازی می‌کنیم؛ به این شکل که هر روستا را یک «رأس» و جاده بین دو روستا را یک «یال» در نظر می‌گیریم. از آنجا که بین هر دو روستا جاده‌ای وجود دارد، با یک گراف کامل K_n روبه‌رو هستیم.

هر رأس گراف را با یکی از اعداد $0, 1, \dots, n-2$ و یک رأس دلخواه را با نماد s نام‌گذاری می‌کنیم. پس مجموعه رأس را به صورت

$$\{s\} \cup V, \quad V = \{0, 1, \dots, n-2\}$$

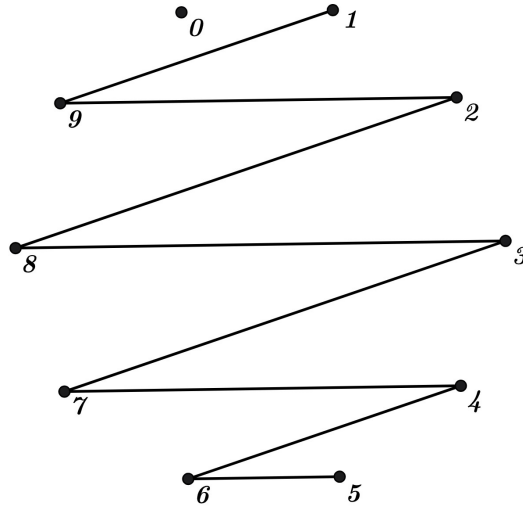
در نظر می‌گیریم. محاسبات روی اعداد $0, 1, \dots, n-2$ را به پیمانه $n-1$ انجام می‌دهیم. اکنون برای هر رأس، یک دور در نظر می‌گیریم که از آن رأس عبور نکند و از بقیه رأس دقیقاً یک بار بگذرد؛ بنابراین طول هر یک از این دورها برابر $n-1$ است. کافی است n دور از این نوع بسازیم، به‌طوری‌که هر رأس دقیقاً در یکی از آنها غایب باشد و در عین حال هر یال گراف دقیقاً دو بار در میان این دورها پیموده شود. ابتدا یک دور پایه C_0 را که از رأس 0 عبور نمی‌کند تعریف می‌کنیم. رئوسی که بین دو حضور s قرار می‌گیرند را با $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ نشان می‌دهیم؛

$$C_0: s \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-2} \rightarrow s.$$

که در آن داریم:

$$v_i \equiv (-1)^{i-1} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \pmod{n-1} \quad (1 \leq i \leq n-2).$$

برای مثال، اگر $n = 11$ ، مسیر $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{n-2}$ به شکل زیر درمی آید:



برای هر $j \in V$ ، دور C_j را با «شیفت» دادن رئوس C_0 غیر از s به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C_j : s \rightarrow (v_1 + j) \rightarrow (v_2 + j) \rightarrow \dots \rightarrow (v_{n-2} + j) \rightarrow s,$$

که تمام جمع ها به پیمانه ی $n-1$ هستند. واضح است که در C_j هیچ گاه رأس j ظاهر نمی شود، زیرا در C_0 رأس 0 ظاهر نشده و افزودن j به پیمانه ی $n-1$ ، را به j می فرستد و سایر رئوس را روی $V \setminus \{j\}$ نگاشت می کند. پس هر C_j دوری است که از همه ی رئوس به جز j می گذرد. اکنون دور C_s را که از رأس s عبور نمی کند به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C_s : 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-2 \rightarrow 0.$$

حال اثبات می کنیم که هر یال دقیقاً دو بار پیموده می شود. یال ها را به دو دسته تقسیم می کنیم: ابتدا یال های متصل به s را بررسی می کنیم. این یال ها از نوع sv برای $v \in V$ هستند. در دور C_s ، رأس s اصلاً ظاهر نمی شود؛ در نتیجه هیچ یال متصل به s در C_s نیست. در C_0 ، رأس s دقیقاً با دو رأس v_1 و v_{n-2} مجاور است؛ بنابراین C_0 شامل دقیقاً دو یال sv_1 و sv_{n-2} است. در دور C_j ، این دو یال به صورت $s(v_1 + j)$ و $s(v_{n-2} + j)$ ظاهر می شوند. وقتی j روی تمام V تغییر کند، هر رأس $v \in V$ دقیقاً یک بار به شکل $v_1 + j$ و یک بار به شکل $v_{n-2} + j$ به دست می آید. پس هر یال sv در دقیقاً دو دور از نوع C_j ظاهر می شود. بنابراین هر یال متصل به s ، دقیقاً دو بار پیموده می شود.

سپس یال های داخل V را بررسی می کنیم. «طول» یک یال را به صورت

$$d(u, v) = \min(|u - v|, (n-1) - |u - v|)$$

تعریف می‌کنیم. با بررسی دور C_0 متوجه می‌شویم که اعداد $2, 3, \dots, n-2$ دقیقاً یک‌بار بین تفاضل رؤوس دو سر یک یال ظاهر می‌شوند.
طول‌های تولید شده را بر اساس زوج یا فرد بودن n تحلیل می‌کنیم:

• **برای طول‌های $2 \leq L < \frac{n-1}{2}$:** مطابق شکل به راحتی می‌توان دریافت که در دور C_0 دقیقاً دو یال با طول L (یال‌های $v_{L-1}v_L$ و $v_{n-2-L}v_{n-1-L}$) داریم. با اعمال شیفت‌های j ، این یال‌ها در اجتماع دورهای C_j مجموعاً $2(n-1)$ بار ظاهر می‌شوند (این شیفت‌ها روی شکل بالا مانند دوران عمل می‌کنند). چون روی مجموعه V دقیقاً $n-1$ یال با طول L داریم، هر کدام از این یال‌ها دقیقاً دو بار پوشش داده می‌شوند.

• **برای طول ویژه $L = \frac{n-1}{2}$ (در صورتی که n فرد باشد):** چون n فرد است، $n-1$ زوج است و طول $L = \frac{n-1}{2}$ وجود دارد. این طول در C_0 تنها یک‌بار تولید می‌شود (یال $v_{\frac{n-1}{2}-1}v_{\frac{n-1}{2}}$). با اعمال شیفت‌ها، مجموعاً $n-1$ یال با این طول تولید می‌شود. از طرفی روی گراف V ، تعداد یال‌های با طول $\frac{n-1}{2}$ دقیقاً $\frac{n-1}{2}$ تاست. پس یال با این طول نیز دقیقاً دو بار پیموده می‌شود.

• **برای طول ۱:** طول ۱ (که معادل اختلاف $n-2$ است) مطابق شکل در C_0 تنها یک‌بار به صورت $v_{n-3}v_{n-2}$ ظاهر می‌شود. با اعمال شیفت‌ها، یال‌های با طول ۱ مجموعاً $n-1$ بار در دورهای C_j ظاهر می‌شوند (یعنی هر یال با طول ۱ دقیقاً یک‌بار). از طرف دیگر، دور C_s نیز دقیقاً از تمام یال‌های طول ۱ تشکیل شده است و آن‌ها را یک‌بار می‌پیماید. در نتیجه هر یال با طول ۱ یک‌بار در خانواده‌ی $\{C_j\}$ و یک‌بار در C_s ظاهر شده و در مجموع دقیقاً دو بار پیموده می‌شود.

بنابراین همه‌ی یال‌های گراف، دقیقاً دو بار پیموده شده‌اند و خانواده‌ی n تایی دورهای $\{C_s, C_0, C_1, \dots, C_{n-2}\}$ تمام شرایط مسئله را برآورده می‌کند.