

آزمون مرحله‌ی دوم اولین دوره مسابقات ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۳

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبداللہ محمودیان

۱. هرگاه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک به یک باشد ثابت کنید $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: f نیز یک به یک است.

۲. ثابت کنید عدد $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ اصم (کنگ) است.

۳. ماتریس $A_{(2 \times 2)}$ را چنان بیابید که داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۴. نقطه M چنان حرکت می‌کند که مجموع مربعات فواصل آن از وجوه مکعب مقداری است ثابت. مکان هندسی نقطه M را به دست آورید.

۵. با استفاده از حروف لغت «احتمال» چند کلمه چهارحرفی (با معنی یا بدون معنی) می‌توان ساخت؟

۶. ۱۰ کیسه از گلوله‌های هم‌شکل داریم که وزن هریک از گلوله‌های ۹ تا از این کیسه‌ها ۱۰ گرم است ولی وزن هریک از گلوله‌های یکی از کیسه‌ها ۹ گرم است. با یک بار توزین [با ترازوی عقربه‌ای] تعیین کنید کدام یک از کیسه‌ها از گلوله‌های ۹ گرمی تشکیل شده است.

۷. حاصل عبارت $S_n = \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{1}} + \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \text{Arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ را به دست آورید. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ را نیز پیدا کنید.

۸. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{اگر } x = \frac{1}{n} \text{ و } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) تابع فوق در چه نقاطی دارای حد است؟

ب) نشان دهید حد تابع f در صفر موجود نیست.

۹. سه نقطه A ، B و C را به ترتیب بر خط مفروض l اختیار می‌کنیم ($AB \neq BC$). دایره متغیری در نقطه B بر خط l همواره مماس است. از نقاط A و C مماسهایی بر این دایره [دایره] رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه M محل تلاقی این مماسها را تعیین کنید.

آزمون مرحله‌ی دوم اولین دوره مسابقات ریاضی

۱۰. با الهام گرفتن از اشکال زیر مجموع $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$ را به دست آورید.

