

آزمون مرحله‌ی اول سومین دوره مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. توابع زیر مفروضند:

$$f(x) = \frac{1}{\lfloor |x| \rfloor - 1} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{1}{\lceil |x| \rceil - 1}$$

اولاً قلمرو هریک از توابع فوق را به دست آورید. ثانیاً ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$$

۲. تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right)$$

اولاً دوره تناوب آن را تعیین کنید و نمودار آن را در یک دوره تناوب رسم کنید. ثانیاً ثابت کنید که حدهای یکطرفی (چپ و راست) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x)$ هر دو موجودند، ولی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نیست (با روش ϵ و δ [با استفاده از تعریف حد]).

۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چنان تعریف شده است که به ازای هر x و y از \mathbb{R} رابطه زیر برقرار است.

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

اگر $f(0) \neq 0$ و $f'(0)$ موجود و متناهی [متخالف بینهایت] باشد، ثابت کنید f در هر نقطه دارای مشتق است.

۴. تعیین کنید بسط $(a+b+c)^{99}$ در حالت کلی چند جمله می‌تواند داشته باشد.

۵. اگر داشته باشیم

$$S_n = \frac{5}{9} \times \frac{14}{20} \times \frac{27}{35} \times \dots \times \frac{2n^2 - n - 1}{2n^2 + n - 1}$$

مطلوب است تعیین حد S_n ، وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند.

آزمون مرحله‌ی اول سومین المپیاد ریاضی کشور

۶. دو خط D و D' به معادله‌های

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$$

مفروضند. طول عمود مشترک این دو خط را محاسبه کنید.

۷. دو نقطه ثابت B و C در صفحه P مفروضند مکان هندسی نقاطی مانند M از صفحه P را به دست آورید به طوری که داشته باشیم $MB^2 + kMC^2 = a^2$ (k و a دو عدد معلومند و $k > 0$).

۸. عمل دوتایی \oplus در مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \oplus y = x + y - xy$$

که در آن اعمال سمت راست، جمع، تفریق و ضرب معمولی‌اند. اولاً ثابت کنید \oplus در \mathbb{R} شرکتپذیر است؛ ثانیاً عضو بی‌اثر در این عمل را تعیین کنید.



حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین دوره مسابقات ریاضی

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱

تألیف دکتر عبدالله محمودیان

۱. اثبات با استقرا روی n . برای پایه استقرا داریم

$$n = 1 \Rightarrow q \cos \alpha = q \frac{p}{q} = p$$

حکم را برای اعداد کمتر یا مساوی n می‌پذیریم و در مورد $n+1$ ثابت می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\alpha &= \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha \\ &= \cos n\alpha \cos \alpha \\ &\quad + \frac{1}{q} (\cos(n+1)\alpha - \cos(n-1)\alpha) \end{aligned}$$

از آنجا

$$\cos(n+1)\alpha = q \cos n\alpha \cos \alpha - \cos(n-1)\alpha$$

در نتیجه

$$q^{n+1} \cos(n+1)\alpha = q^n \cos n\alpha (q \cos \alpha) - q^n \cos(n-1)\alpha$$

بنابر فرض، $q^n \cos n\alpha$ ، $q \cos \alpha$ و $q^n \cos(n-1)\alpha$ اعداد صحیحند، در نتیجه $q^{n+1} \cos(n+1)\alpha$ عددی صحیح بوده و به حکم استقرا برقرار است.

۲.

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

نتیجه اینکه $x = y = z$

از آنجا

$$p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

۳.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq g(x)$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

چون f صعودی است،

$$f(f(x)) \leq f(g(x)) \quad (1)$$

همچنین با توجه به فرض داریم

$$f(g(x)) \leq g(g(x)) \quad (2)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$f(f(x)) \leq g(g(x))$$

و به همین ترتیب قسمت دوم نامساوی نیز حاصل می‌شود. پس

$$f(f(x)) \leq g(g(x)) \leq \varphi(\varphi(x))$$

۴. اگر x صحیح باشد، داریم

$$\lfloor x \rfloor = x, \lfloor x + y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor, \lfloor -x \rfloor = -x, \lfloor -x - y \rfloor = -x + \lfloor -y \rfloor$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = x + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$$

و به همین ترتیب، داریم

$$\lfloor -x \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -x + \lfloor -y \rfloor = \lfloor -x - y \rfloor$$

حال اگر تساویهای فوق هر دو برقرار باشند، ثابت می‌کنیم باید حداقل یکی از دو مقدار x و y صحیح باشد؛ زیرا اگر x و y هیچ‌کدام صحیح نباشند خواهیم داشت

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1, \quad \lfloor y \rfloor + \lfloor -y \rfloor = -1$$

$$\lfloor x + y \rfloor + \lfloor -x - y \rfloor = \{-1, -1\}$$

و در نتیجه با جمع دو تساوی $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + y \rfloor$ و $\lfloor -x \rfloor + \lfloor -y \rfloor = \lfloor -x - y \rfloor$ خواهیم داشت

$$\text{ذهن زیبا}$$

$$\{-1, -1\} = -2$$

که امکانپذیر نیست. از این تناقض حکم نتیجه می‌شود.

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

۵. بنا بر تعریف مشتق f ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + hg(h) - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(x)g(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x)g(h) \\ &= f(x) \lim_{h \rightarrow 0} g(h) \\ &= f(x) \cdot 1 = f(x) \end{aligned}$$

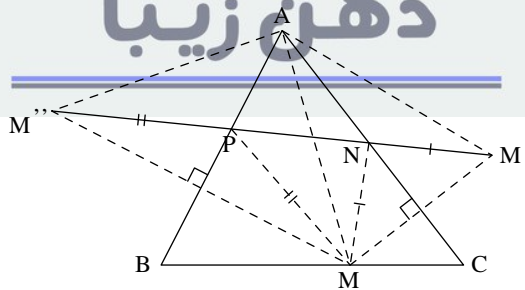
۶. اگر نقطه دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم، از بین مثلثهایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند، محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود.

قرینه‌های نقطه M را نسبت به اضلاع AC و AB ، به ترتیب M' و M'' می‌نامیم؛ خط $M'M''$ دو ضلع AC و AB را به ترتیب در نقاط N و P قطع می‌کند. مثلث MNP ، با محیط $M'M''$ ، جواب این قسمت از مسأله است. (چرا؟)

اما مثلث $AM'M''$ متساوی‌الساقین به زاویه رأس $\angle M'AM'' = 2\angle A$ است.

حال مسأله به تعیین نقطه M به طوری که قاعده مثلث حاصل ($M'M''$) مینیمم شود، تبدیل می‌شود. چون مثلثهای حاصل ($AM'M''$) متساوی‌الساقین با زاویه رأس $\angle A$ هستند، پس قاعده $M'M''$ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد (چرا؟)، و این در حالتی است که $AM = AM' = AM''$ مینیمم باشد، یعنی پای ارتفاع از رأس A باشد. با تعویض M با نقاطی روی اضلاع AC و AB ، نتیجه می‌گیریم که مثلث مورد نظر همان مثلث ارتفاعی محاط در مثلث ABC است.

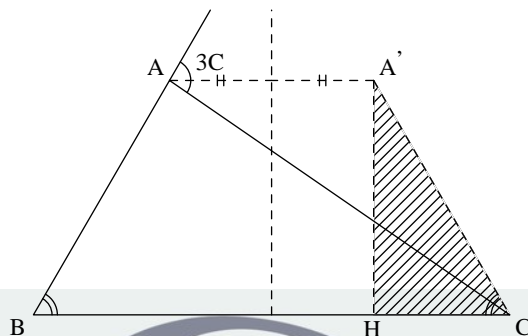
ذهن زیبا



۷. روش اول. فرض کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مطلوب است. اگر قرینه A را نسبت به عمود منصف BC ، بنا بر مینیمم مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است (چرا؟). اما دوزنقه $AA'CB$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

متساوی الساقین است، از آنجا $AB = AA' = A'C$.



حال اگر از نقطه A' عمود $A'H$ را بر BC رسم کنیم، مثلث قائم‌الزاویه $A'HC$ قابل رسم است زیرا اگر فرض شود، داریم $A'C = x$ و $A'H = h$ و $BC = a$ (و h معلومند) پس

$$HC = \frac{a-x}{2}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه $A'HC$ می‌توان نوشت

$$x^2 = h^2 + \frac{(a-x)^2}{4}$$

یا

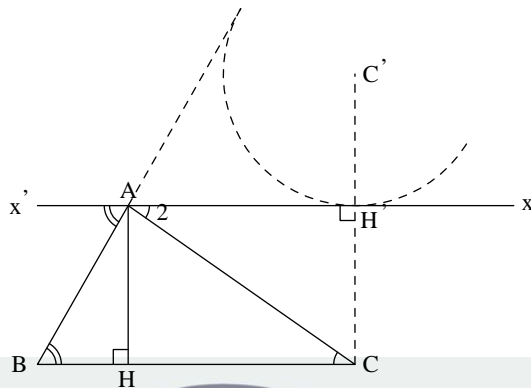
$$3x^2 + 2ax - 4h^2 - a^2 = 0$$

چون طولهای a و h معلومند، a^2 و h^2 قابل رسمند؛ از آنجا ریشه‌های معادله درجه دوم قابل ترسیمند (مجموع و حاصلضرب آنها معلومند)؛ با تعیین x و رسم مثلث $A'HC$ ، CH را به اندازه a امتداد می‌دهیم. به مرکز B و شعاع $A'C$ دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ محل تلاقی این دایره با خطی که موازی CB و به فاصله h از آن، رسم می‌شود نقطه A را به دست می‌دهد.

روش دوم. اگر از نقطه A خط $x'x$ را به موازات BC رسم کنیم بنا بر خاصیت توازی، زاویه $\angle x'AB$ دو برابر زاویه $\angle xAC$ است (زیرا $\angle B = 2\angle C$). چون ارتفاع AH معلوم است، پس خط $x'x$ معلوم است، و مسأله به مسأله زیر تبدیل می‌شود.

دو نقطه B و C و خط $x'x$ مفروض است. نقطه A را بر خط $x'x$ چنان بیابید که $\angle A_3 = 2\angle A_2$. (یا $\angle x'AB = 2\angle xAC$).

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی



برای حل مسألهٔ اخیر، قرینة نقطهٔ C نسبت به خط $x'x$ را C' و محل تقی CC' با $x'x$ را H' می‌نامیم. به مرکز C' و شعاع $C'H'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ B مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم. محل تلاقی خط مماس، با خط $x'x$ نقطهٔ A است (چرا؟).

۸. ابتدا تقاطع صفحه و سطح مخروطی را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 3(2x+y)^2 = 0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} 4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

از طرفی،

$$4x^2 - y^2 + 3(2x+y)^2 = 2(2x+y)(4x+y) = 0$$

بنابراین، از این رابطه و دستگاه فوق نتیجه می‌شود که صفحهٔ $2x+y-z=0$ سطح مخروطی را در دو صفحهٔ $4x+y=0$ و $2x+y=0$ قطع می‌کند. بنابراین، فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی، دو خط d و d' ، به معادلات زیر است.

$$\begin{array}{l} d \mid \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \\ d' \mid \begin{cases} 4x+y=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \end{array}$$

اینک پارامترهای هادی دو خط d و d' را تعیین می‌کنیم. پارامتر هادی خط d ، $(-1, 2, 0)$ ، و پارامتر هادی خط d' ، $(-1, 4, 2)$ است. زاویهٔ بین این دو خط را α می‌نامیم و چنین محاسبه می‌شود:

$$\cos \alpha = \frac{1+8}{\sqrt{5}\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$$

۹. روش اول. فرض کنیم که x و y دو عضو G_a باشند. بنابراین، m و n در \mathbb{Z} وجود دارند به طوری که

$$x = a^n, y = a^m$$

پس

$$xy = a^n a^m = a^{n+m}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

چون $n + m$ عضو \mathbb{Z} است، پس $xy \in G_a$ ، بنابراین، نسبت به عمل ضرب (عمل گروه) بسته است. از طرف دیگر $e = a^0$ عضو همانی G_a است زیرا به‌ازای هر $x \in G_a$ داریم

$$xe = a^n a^0 = a^{n+0} = a^n = x$$

$$ex = a^0 a^n = a^{0+n} = a^n = x$$

همچنین وارون هر عضو $x = a^n$ در G_a عبارت است از $y = a^{-n}$ که متعلق به G_a است زیرا $-n \in \mathbb{Z}$

$$xy = a^n a^{-n} = a^0 = e$$

$$yx = a^{-n} a^n = a^0 = e$$

بالاخره اگر $x = a^n$ ، $y = a^m$ و $z = a^t$ اعضای G_a باشند آنگاه

$$x(yz) = a^n (a^m a^t) = a^n a^{m+t} = a^{n+m+t}$$

$$(xy)z = (a^n a^m) a^t = a^{n+m} a^t = a^{n+m+t}$$

و عمل ضرب در G_a شرکتپذیر بوده و در نتیجه G_a زیرگروه G است. روش دوم، برای اثبات زیرگروه بودن G_a از قضیه زیر استفاده می‌کنیم. شرط لازم و کافی برای اینکه زیر مجموعه‌ی ناتهی G_a از G ، یک زیرگروه G باشد آن است که به‌ازای هر x و y از G_a ،

$$xy^{-1} \in G_a$$

بدیهی است که $G_a \neq \emptyset$. زیرا $e \in G_a$. فرض کنیم x و y عضوهایی از G_a باشند. بنابراین، n و m در \mathbb{Z} وجود دارند به طوری که

$$y = a^m, x = a^n$$

اینک،

$$xy^{-1} = a^n (a^m)^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m}$$

بنابراین، $xy^{-1} \in G_a$ در نتیجه، G_a زیرگروه G است.

۱۰. الف) در حالت کلی پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم و احتمال هریک را می‌نویسیم.

$$P(A) = p \quad \text{پیشامد } A: \text{ گلوله به هدف بخورد}$$

$$P(B) = q \quad \text{پیشامد } B: \text{ گلوله به هدف نخورد}$$

پیشامدهای فرعی عبارتند از

:	پرتاب اول به هدف بخورد	:	A
:	پرتاب دوم به هدف بخورد	:	BA
:	:	:	:
:	پرتاب nام به هدف بخورد	:	$\underbrace{BB \cdots BA}_{n-1 \text{ بار}}$
:	احتمال p^{n-1}	:	:

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

در نتیجه،

$$P(\text{در پرتاب } n \text{ ام به هدف بزیم}) = q^{n-1} p$$

پس احتمال آنکه دقیقاً سه گلوله مصرف شود برابر $q^2 p$ یعنی

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9}{1000}$$

است.

(ب) این پیشامد اجتماع پیشامدهای متمایز «سه گلوله مصرف شود»، «چهار گلوله مصرف شود» و ... است و با نمادگذاری فوق می‌شود

$$BBA \cup BBBBA \cup \dots \cup BB \dots BA \cup \dots$$

پس احتمال این پیشامد برابر جمع احتمالات متمایز فوق است.

(بیش از سه گلوله مصرف شود) P

$$\begin{aligned} &= P(BBA) + P(BBBBA) + \dots \\ &= P(B)P(B)P(A) + P(B)P(B)P(B)P(A) + \dots \\ &= q^2 p(1 + q + q^2 + \dots) \\ &= q^2 p \times \frac{1}{1-q} = q^2 \end{aligned}$$

و با جایگذاری مقدار عددی،

$$P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

نکته. در قسمت (ب)، پیشامد مورد نظر را می‌توان بر حسب مکمل پیشامد تعریف کرد.

$$P(\text{یک یا دو گلوله مصرف شود}) = 1 - P(\text{سه گلوله مصرف شود})$$

و چون مصرف یک گلوله و مصرف دو گلوله پیشامدهای متمایزند،

$$P(\text{دو گلوله مصرف شود}) + P(\text{یک گلوله مصرف شود}) = P(\text{یک یا دو گلوله مصرف شود})$$

با جایگذاری مقادیر عددی

$$\begin{aligned} P(\text{بیش از سه گلوله مصرف شود}) &= 1 - (p + qp) \\ &= 1 - p(1 + q) \\ &= 1 - \frac{90}{100} \left(1 + \frac{1}{10}\right) \\ &= 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

۱۱. روش اول. فرض کنیم $x \in \mathbb{R}$ ؛ داریم

$$\begin{aligned}(x+x)^2 &= x+x \\ (x+x)(x+x) &= x+x \\ x^2+x^2+x^2+x^2 &= x+x \\ x+x+x+x &= x+x \\ x+x &= 0 \\ x &= -x\end{aligned}$$

بنابراین، قرینه هر عضو با خودش برابر است.

حال فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}$ ؛ چون $x, y \in \mathbb{R}$ ، داریم

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x+y \\ (x+y)(x+y) &= x+y \\ x^2+xy+yx+y^2 &= x+y \\ x+xy+yx+y &= x+y \\ xy+yx &= 0\end{aligned}$$

چون $y = -y$ پس $xy - yx = 0$. از آنجا $xy = yx$ و حلقه، جابجایی است.

روش دوم. از $a(-b) = (-a)b = -ab$ استفاده می‌کنیم. داریم

$$x = x^2 = (-x)(-x) = (-x)^2 = -x$$

پس هر عضو با قرینه‌اش برابر است. بنابراین،

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) &= (x-y)^2 = x-y \\ x^2+x(-y)+yx+y(-y) &= x-y \\ x-xy+yx-y &= x-y \\ xy &= yx\end{aligned}$$

ذهن زیبا

۱۲. فرض کنیم $a < b$ ، چون $c > 0$ ، پس $ac < bc$. به طرفین نامساوی مقادیر مساوی ab را می‌افزاییم

$$ab + ac < ab + bc$$

$$a(b+c) < b(a+c)$$

چون $b+c > 0$ ، پس

$$a < \frac{b(a+c)}{b+c}$$

و چون $b > 0$ ،

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad (1)$$

حل مسائل مرحله‌ی دوم سومین المپیاد ریاضی

حالت $a > b$ نیز به همین ترتیب ثابت می‌شود. حال داریم

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \Rightarrow \frac{a+c}{b+c} < 1$$

و با توجه به نامساوی (۱) داریم

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < 1$$

برای قسمت آخر مسأله، با فرض $a < b$ داریم $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < 1$ ، با انتخاب c به عنوان عددی گنگ، ثابت می‌کنیم $b \left(\frac{a+c}{b+c} \right) = x$ ، عددی گنگ خواهد بود. از آنجا $a < x < b$ جواب مطلوب ماست.

حال فرض کنیم c عددی گنگ بوده ولی $b \left(\frac{a+c}{b+c} \right)$ گنگ نباشد پس

$$\left(\frac{a+c}{b+c} \right) b = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{Z})$$

$$(a+c)bq = p(b+c)$$

$$abq + cbq = bp + pc$$

$$c = \frac{b(aq - p)}{p - bq}$$

$$a < b \Rightarrow \frac{a+c}{b+c} \neq 1 \Rightarrow p \neq bq$$

و a, b, p و q اعداد صحیحند، c عددی گویاست که متناقض فرض گنگ بودن آن است. از این تناقض نتیجه می‌شود که اگر c گنگ باشد، $\frac{a+c}{b+c}$ نیز گنگ است و حکم خواسته شده برقرار است.