آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی دانش‌آموزان کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۱. حد تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{(x^2-2x+1)\sin\frac{1}{x-1}}{\sin\pi x}$$

را در نقطهٔ $x_0=1$ تعیین کنید.

۲. الف) نمودار تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=4x(1-|x|),\qquad |x|\leqslant 1$$

را رسم کنید.

ب) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ مشتق دارد؟

ج) آیا تابع

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x} & \text{اگر } x\neq 0\\ 4 & \text{اگر } x=0\end{cases}$$

در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

د) نمودار تابع فوق را رسم کنید.

۳. کوچکترین عدد درست]صحیح[مثبتی را تعیین کنید که چون آخرین رقم سمت راست آن به سمت چپ برده شود عدد حاصل $\frac{3}{2}$ عدد قبلی باشد.

۴. اگر مجموعهٔ S شامل تمام ماتریسهای حقیقی $n\times n$ باشد، به طوری که مجموع هریک از سطرهای آنها برابر ۱ شود، یعنی

$$S=\left\{[a_{ij}]_{n\times n}\,\middle|\, a_{ij}\in\mathbb{R}\wedge\forall i,\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1\right\}$$

الف) ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب ماتریسها بسته است.

ب) آیا S عضو بی‌اثر دارد؟

ج) آیا همهٔ عناصر S معکوسپذیرند؟

۵. تعیین کنید به‌ازای چه مقادیری از عدد طبیعی n عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n!$$

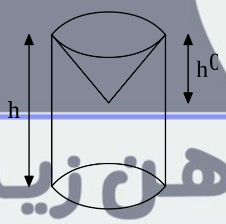
۶. پنج خودنویس، چهار مداد، دو دفترچه و سه خودکار را می‌خواهیم بین دو نفر طوری تقسیم کنیم که به هریک حداقل یکی از نوشت‌افزارهای فوق تعلق گیرد. مطلوب است تعداد حالات ممکن این تقسیم. (اشیاء غیر متمایز هستند).

هندسه و مثلثات

۱. در یک صفحه نقطهٔ O' را به دلخواه روی محور Ox در نظر می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه M را یک بار حول نقطهٔ O به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M' به‌دست آید. بار دوم نقطهٔ M را حول نقطهٔ O' به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M'' به‌دست آید. ثابت کنید نقطهٔ P، وسط $M'M''$، نقطه‌ای ثابت است.

۲. ذوزنقهٔ $ABCD$ را در نظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم امتداد ساقهای AB و DC در M و قطرهای AC و BDدر N متقاطع باشند. اگر طول قاعده‌های AD و BC را به ترتیب مساوی a و b قرار دهیم نسبت مساحت مثلثهای AMD و AND را بر حسب a و b محاسبه کنید.

۳. مرکّبدان استوانه‌ای شکلی دارای یک مجرای مخروطی است به طوری که رأس مخروط بر سطح مرکّب مماس است. مطلوب است تعیین نسبت ارتفاع مخروط به ارتفاع مرکّبدان، برای آنکه هرگاه مرکّبدان واژگون شود، مرکّب آن نریزد.



۴. مطلوب است اثبات هندسی تساوی

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۲} + \mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: فروردین ماه ۱۳۶۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

آنالیز و ریاضی جدید

۱. تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)^2 \sin\frac{1}{x-1}}{\sin \pi x} \\ &= \frac{x-1}{\sin \pi x}\left((x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right) \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $h(x) = (x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sin \pi x}$، داریم

$$f(x) = g(x)h(x)$$

اما با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} g(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sin \pi x} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\pi \cos \pi x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

در ضمن، ثابت می‌کنیم که $\lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$. باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$، می‌توان $\delta > 0$ را طوری پیدا کرد که

$$0 < |t| < \delta \Longrightarrow \left|t\sin\frac{1}{t}\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

اما $|\sin\frac{1}{t}| \leqslant 1$. بنابراین،

$$\left|t\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant |t|$$

پس اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ قرار دهیم $\delta = \varepsilon$ آنگاه (۱) به وضوح درست خواهد بود. بنابراین،

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1} = 0$$

و در نتیجه،

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) \times \lim_{x\to 1} h(x) = \frac{-1}{\pi} \times 0 = 0$$

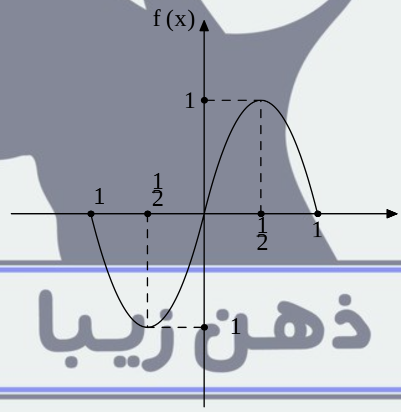
۲. الف)

$$-1 \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow |x| = -x \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = 4x + 4x^2 \Longrightarrow f'(x) = 4 + 8x \Longrightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = 4 + 4x \end{cases}$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow |x| = x \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = 4x - 4x^2 \Longrightarrow f'(x) = 4 - 8x \Longrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = 4 - 4x \end{cases}$$



ب)

$$\text{مشتق چپ } f \text{ در صفر} = 4 + 8 \times 0 = 4 = 4 - 8 \times 0$$
$$= \text{مشتق راست } f \text{ در صفر}$$

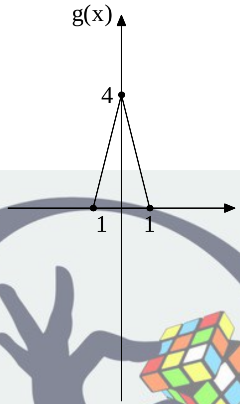
پس f در صفر مشتق دارد.

ج)

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 4(1 - |x|) = 4 = g(0)$$

پس g در صفر پیوسته است.

د)



۳. می گیریم $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$. داریم

$$\overline{a_0 a_k \cdots a_1} = \frac{3}{2} \times \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$$

m را تعریف می‌کنیم

$$m = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1}$$

پس

$$10^k a_0 + m = \frac{3}{2} \times (10m + a_0) = 15m + \frac{3a_0}{2}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 10^k a_0 \times 2 + 2m = 30m + 3a_0 \\ &\Longrightarrow 28m = (10^k \times 2 - 3)a_0 \\ &\Longrightarrow 0 \equiv \pm a_0 \Longrightarrow a_0 \equiv 0 \pmod 4 \\ &\Longrightarrow a_0 = \{0 \text{ یا } 4 \text{ یا } 8\} \end{aligned}$$

اما $m > 0$، پس $a_0 \neq 0$ و $a_0 = \{4 \text{ یا } 8\}$.

$$\begin{aligned} 10^k \times 2 - 3 \equiv 28m \equiv 0 &\Longrightarrow 3 \equiv 3^k \times 2 \\ &\Longrightarrow 1 \equiv 3^{k-1} \times 2 \\ &\Longrightarrow -3 \equiv 3^{k-1} \\ &\Longrightarrow -1 \equiv 3^{k-2} \pmod 7 \end{aligned}$$

پس

$$\min(k-2) = 3 \Longrightarrow \min(k) = 5$$

و

$$\begin{aligned}\min(n) &= \min(10m + a_0)\\ &= 10\min(m) + \min(a_0)\\ &= 10\min\left(\frac{10^k \times 2 - 3}{28}\right)a_0 + 4\\ &= 10 \times \left(\frac{10^5 \times 2 - 3}{28}\right) \times 4 + 4 = 285714\end{aligned}$$

پس حداقل n با این شرایط، عبارتست از ۲۸۵۷۱۴.

۴. الف) می‌گیریم

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n\times n}$$

حالا از $A, B \in S$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\text{مجموع درایه‌های سطر } i \text{ از } A\times B &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times 1\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1\end{aligned}$$

پس $A \times B$ نیز در S است.

ب) بله. $I_{n\times n}$، یعنی ماتریس واحد $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

ج) خیر. کافی است یکی از سطرهای ماتریس A دوبار ظاهر شود تا دترمینان آن صفر شود و A عضو معکوس نداشته باشد.

۵. اگر $n \leqslant 4$ باشد، وقتی که $n = 1$ یا $n = 3$ است، این عبارت مجذور کامل می‌شود و در حالتی که $n > 4$ باشد،

$$\begin{aligned}1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + n! &\equiv 1! + 2! + 3! + 4!\\ &\equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3 \pmod 5\end{aligned}$$

ولی هیچ مجذوری به پیمانهٔ ۵ همنهشت ۳ نیست، پس تنها $n = 1$ و $n = 3$ جوابهای مسأله‌اند.

حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

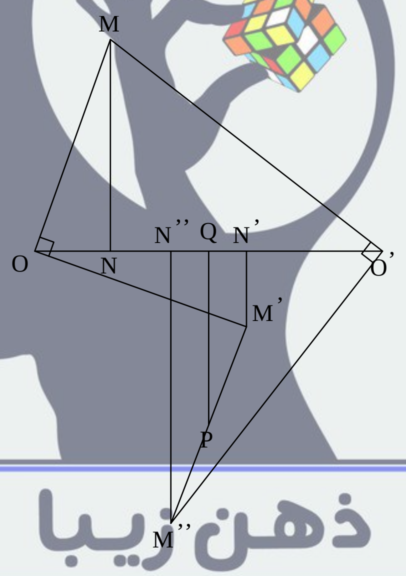
۶. برای تقسیم n چیز بین دو نفر باید ببینیم n را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد نوشت. روشن است که پاسخ این پرسش $n+۱$ است. اما در دوتا از این تقسیمها، یک نفر سهمی از تقسیم ندارد ($n=۰+n=n+۰$). بنابراین، اگر چیزها را به ترتیب تقسیم کنیم، خودنویسها را به ۴ طریق، مدادها را به ۳ طریق، دفترچه‌ها را به ۱ طریق و خودکارها را به ۲ طریق می‌توان تقسیم کرد. بنابراین، تعداد کلِّ حالات ممکن عبارت است از

$$۴\times۳\times۱\times۲=۲۴$$

هندسه و مثلثات

۱. از P، M، M' و M'' بر OO' عمود می‌کنیم و پای ارتفاعها را Q، N، N' و N'' می‌نامیم. داریم

$$۲PQ=M'N'+M''N''$$



پس

$$\left.\begin{array}{r} OM=OM'' \\ \angle N=\angle N'=۹۰^\circ \\ \angle OMN=\angle M'ON'=۹۰-\angle MON \end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle ONM'=\triangle OMN$$

و به همین ترتیب، $\triangle M''N''O'=\triangle O'NM$. پس

$$ON=M'N' \quad \text{و} \quad MN=ON'=N''O' \quad \text{و} \quad M''N''=NO' \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} ۲PQ=M'N'+M''N''=ON+NO'=OO' \\ ON'-QN'=N''O'-N''Q=\frac{۱}{۲}OO' \end{cases}$$

بنابراین، PQو OQ هر دو ثابتند و نقطهٔ P ثابت است.

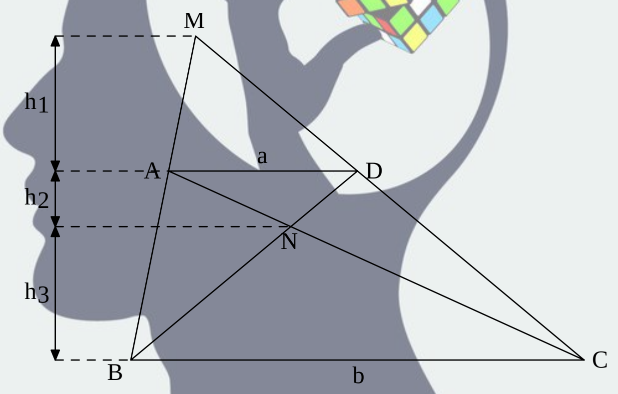
حل مسائل آزمون مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد ریاضی

۲. داریم

$$\frac{S_{AMD}}{S_{AND}}=\frac{ah_1}{ah_2}=\frac{h_1}{h_2}=x$$
$$\frac{a}{b}=\frac{h_1}{h_1+h_2+h_3}=\frac{\frac{h_1}{h_2}}{\frac{h_1}{h_2}+1+\frac{h_3}{h_2}}=\frac{x}{x+1+\frac{b}{a}}$$

پس

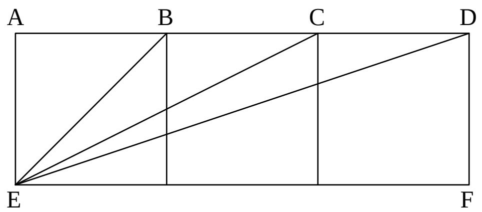
$$\frac{a}{b-a}=\frac{x}{1+\frac{b}{a}}\Longrightarrow x=\frac{b+a}{b-a}\quad(b>a)$$



۳. برای اینکه هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب نریزد باید حجم قسمت حاوی مرکب برابر حجم بقیهٔ مرکبدان منهای حجم مخروط باشد، یعنی

$$(h-h')S=h'S-\frac{1}{3}h'S\Longrightarrow h-h'=\frac{2}{3}h'$$
$$\Longrightarrow\frac{h'}{h}=\frac{3}{5}$$

۴. مستطیل $ADEF$ با طول ۳ و عرض ۱ را مطابق شکل در نظر می‌گیریم.



$$FB^{۲} = ۲ = BC \cdot BD \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{FB}{BD} = \dfrac{BC}{FB} \\ \angle B = \angle B \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle BFD \sim \triangle BCF$$

پس

$$\angle BCF = \angle BFD \Longrightarrow \angle BDF + \angle BCF = \angle BDF + \angle BFD = \frac{\pi}{۴}$$

یعنی

$$\mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۲} + \mathrm{Arctg}\,\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$