# آزمون مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. اگر $p$ عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آنگاه ثابت کنید عدد $A = ۷^p - ۶^p - ۱$ بر ۴۳ بخشپذیر است.

۲. مثلث $ABC$ به اضلاع $a$، $b$ و $c$ و مساحت $S$ داده شده است. اثبات یا رد کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ای مانند $P$ درون آن وجود داشته باشد به گونه‌ای که فاصلهٔ آن از سه رأس مثلث مزبور به ترتیب $x$، $y$ و $z$ باشد، آن است که مثلثی به اضلاع $a$، $y$ و $z$ و مساحت $S_۱$، مثلثی به اضلاع $b$، $x$ و $z$ و مساحت $S_۲$ و مثلثی به اضلاع $c$، $x$ و $y$ و مساحت $S_۳$ وجود داشته باشد که $S_۱ + S_۲ + S_۳ = S$.

۳. فرض می‌کنیم $n$ و $r$ دو عدد طبیعی باشند. کوچکترین عدد طبیعی $m$ را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشد که برای هر افراز مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, m\}$ به $r$ زیرمجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_r$، در یکی از $A_i$ها ($۱ \leqslant i \leqslant r$) دو عدد $a$ و $b$ پیدا شوند به گونه‌ای که $۱ < \frac{a}{b} \leqslant ۱ + \frac{۱}{n}$ باشد.

۴. تعداد $n \geqslant ۲$ نقطه $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_n$ در صفحه داده شده‌اند به گونه‌ای که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست واقع نیستند و هر دو نقطهٔ $A_i$ و $A_j$ یا با پاره‌خط $A_iA_j$ به هم متصلند و یا نقطه‌ای مانند $A_k$ وجود دارد که با پاره‌خطهای $A_iA_k$ و $A_jA_k$ به این دو نقطه متصل است.

الف) حداقل تعداد پاره‌خطهای لازم را پیدا کنید.

ب) در حالتی که $n = ۶$ و $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ یک شش‌ضلعی محدب باشد، حداقل چند پاره‌خط لازم است افزوده شود تا شرایط بالا برقرار گردد.

۵. اگر $D_۱$ و $D_۲$ دو خط متنافر باشند، آنگاه ثابت کنید بینهایت خط راست وجود دارد که [همهٔ] نقاط روی آنها از این دو خط به یک فاصله‌اند.

۶. اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند به گونه‌ای که کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ برای بینهایت عدد گویای $x$ مقداری گویا گردد، آنگاه ثابت کنید $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می‌توان به شکل نسبت دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

# حل مسائل مرحله‌ی دوم یازدهمین دوره المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: بهمن ماه ۱۳۷۲

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۱
تألیف دکتر عبادالله محمودیان

۱. چون $p$ عددی اول است پس $p \equiv \pm ۱ \pmod{۶}$.

$$۶^۶ \equiv ۱ \pmod{۴۳} \qquad ۷^۶ \equiv ۱$$
$$۶^{۶k} \equiv ۱ \pmod{۴۳} \qquad ۷^{۶k} \equiv ۱$$

$$۷ \equiv ۱ + ۶ \Longrightarrow ۷^{۶k+۱} \equiv ۶^{۶k+۱} + ۱ \pmod{۴۳}$$
$$۷^۵ \equiv ۶^۵ + ۱ \pmod{۴۳}$$
$$\Longrightarrow ۷^{۶t+۵} \equiv ۷^۵ \equiv ۱ + ۶^۵ \equiv ۱ + ۶^{۵+۶t} \pmod{۴۳}$$
$$\Longrightarrow ۷^p \equiv ۶^p + ۱ \pmod{۴۳} \qquad \text{برای هر } p$$

۲. شرط غلط است. مثلث متساوی‌الاضلاع $ABC$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که

$$a = b = c = ۱,\ x = y = \frac{\sqrt{۳}}{۳},\ z = \frac{\sqrt{۲۱}}{۳}$$

مثلثی به اضلاع $a$، $y$ و $z$ وجود دارد که مساحت آن برابر است با $S_۱ = \sqrt{۳}/۱۲$. به همین ترتیب مثلثهایی به اضلاع $b$، $x$ و $z$ و مساحت $\sqrt{۳}/۱۲$ و $c$، $x$ و $y$ و مساحت $\sqrt{۳}/۱۲$ وجود دارد. اما نمی‌توان $P$ را داخل $ABC$ یافت که $PA = x$، $PB = y$ و $PC = z$ زیرا طول $PC$ که باید درون مثلث باشد از طول بزرگترین ضلع مثلث یعنی ۱، بیشتر است.

۳. اگر $m \geqslant rn + r$، اعداد $rn$، $rn + ۱$، … و $rn + r$ را در نظر می‌گیریم. دو تا از این اعداد در یکی از $A_i$ها قرار دارند پس

$$\left.\begin{array}{r} a, b \in A_i \\ a > b \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{rn+i}{rn+j} \leqslant \frac{rn+r}{rn} = ۱ + \frac{۱}{n}$$

برای $m = rn + r - ۱$ یک مثال می‌آوریم.

برای هر $1 \leqslant i \leqslant r$ تعریف می‌کنیم

$$A_i = \{x \mid x \equiv i \pmod{i}\}$$

ادعا می‌کنیم $A_i$ها دارای شرایط مسأله هستند. $a$ و $b$ را دو عضو از $A_i$ می‌گیریم که $a > b$. اگر $i \neq r$، $k$ و $l$ وجود دارند به طوری که $a = kr + i$ و $b = lr + i$.

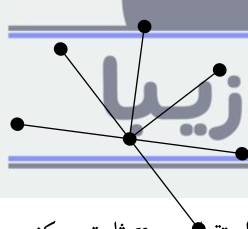
$$\frac{a}{b} = \frac{kr+i}{lr+i} \geqslant \frac{(l+1)r}{lr+i} = 1 + \frac{r}{lr+i}$$
$$\geqslant 1 + \frac{r}{lr} = 1 + \frac{1}{l}$$
$$> 1 + \frac{1}{n}$$

اگر $r = i$، $k$ و $l$ وجود دارند که $a = kr$ و $b = lr$.

$$\frac{a}{b} = \frac{kr}{lr} = \frac{k}{l} \geqslant \frac{l+1}{l} = 1 + \frac{1}{l}$$
$$> 1 + \frac{1}{n}$$

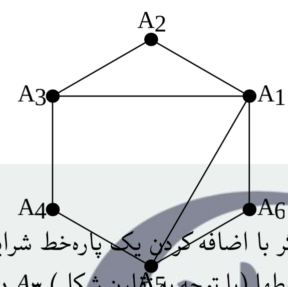
پس در هر صورت اگر $\frac{a}{b}$ بزرگتر از ۱ باشد، از $1 + \frac{1}{n}$ نیز بیشتر است و حکم برقرار نمی‌شود.
پس $m = r(n+1)$.

۴. الف) $n - 1$. شکل نشان می‌دهد که با $n - 1$ پاره‌خط مسأله قابل حل است.



این ادعا را که اقلاً $n - 1$ پاره‌خط لازم است با استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم. برای $n = 2$ مسأله بدیهی است فرض کنیم برای $n = k$ درست باشد. اکنون $k + 1$ نقطهٔ $A_1$، $A_2$، … و $A_{k+1}$ را که دارای شرایط مسأله باشند در نظر می‌گیریم به طوری که تعداد کل پاره‌خطهای شکل کمتر از $k$ باشد. در این صورت دستِ‌کم به یکی از این نقاط فقط یک پاره‌خط وصل شده است (چرا؟). اگر این نقطه و این پاره‌خط را از شکل حذف کنیم در نتیجه $k$ نقطه خواهیم داشت (با حفظ شرایط مسأله) که با کمتر از $k - 1$ پاره‌خط به هم وصل شده‌اند که مخالف فرض استقراست.

ب) با توجه به شکل با اضافه کردن دو پاره‌خط شرایط مسأله برقرار می‌شود.




اولاً باید به‌وضوح پاره‌خطّی اضافه کنیم ولی اگر با اضافه کردن یک پاره‌خط شرایط مسأله برقرار شود بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود این پاره‌خطها (با توجه به تقارن شکل) $A_1A_3$ یا $A_1A_4$ هستند. که در هر دو صورت نقاط $A_2$ و $A_5$ دارای شرایط مسأله نیستند. پس با اضافه کردن تنها یک پاره‌خط نمی‌توان شرایط مسأله را برقرار کرد.

۵. نقطهٔ دلخواه $M$ را روی $D_2$ در نظر می‌گیریم. از $M$ خط $\Delta$ را موازی با $D_1$ رسم می‌کنیم. صفحهٔ نیمساز زاویهٔ بین $D_2$ و $\Delta$، $(P)$ را با صفحهٔ هم فاصلهٔ $\Delta$ و $D_1$، $(Q)$، قطع می‌دهیم. محل تقاطع $P$ و $Q$ را $\delta$ می‌نامیم . اگر $A$ نقطه‌ای از $\delta$ باشد چون $A$ در $P$ است از $D_2$ و $\Delta$ به یک فاصله است و چون $A$ در $Q$ است از $\Delta$ و $D_2$ به یک فاصله است. پس هر نقطهٔ $\delta$ از $D_2$ و $D_1$ به یک فاصله است. با تغییر دادن $M$ بینهایت خط به‌دست می‌آید.

۶. روش اول. اثبات را با استقرا روی مجموع درجات صورت و مخرج انجام می‌دهیم. اگر درجهٔ $f$ را $n$ و درجه $g$ را $m$ بگیریم استقرا روی $m+n$ انجام می‌شود (فرض می‌کنیم $n \geqslant m$). اگر $m+n=1$، حکم واضح است. $f$ به یکی از دو صورت زیر است.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}(x+a)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q(x+a)}$$

فرض کنیم حکم برای همه اعداد کمتر از $m+n$ درست باشد. ثابت می‌کنیم برای $m+n$ درست است. $x_0$ را یکی از اعدادی می‌گیریم که $\frac{f(x)}{g(x)}$ گویاست و $t(x)$ را می‌گیریم $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ پس

$$t(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = 0 \Longrightarrow (x-x_0) \mid t(x_0)$$

$$\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x_0)g(x)} = t(x) = (x-x_0)\,u(x)$$

$u(x_0)$ به‌ازای هریک از اعداد گویایی که $t$ گویاست گویا می‌شود. (زیرا $x-x_0$ هم گویاست.) و مجموع درجه‌های صورت و مخرج $u$ برابر $m+n-1$ است. پس $u(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که $p$ و $q$ دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا هستند. اما

$$\frac{f(x)}{g(x)} = t(x) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x-x_0)\,u(x) + \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \\
&= \frac{(x-x_0)\,p(x) + \big(f(x_0)/g(x_0)\big)q(x))}{q(x)}
\end{aligned}
$$

اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر بود، به جای $\frac{f}{g}$، $\frac{g}{f}$ را که در شرایط صدق می‌کند در نظر می‌گیریم، و کار را ادامه می‌دهیم.

روش دوم. فرض می‌کنیم $f$ از درجهٔ $n$ و $g$ از درجهٔ $m$ باشد. ثابت می‌کنیم اگر $\frac{f}{g}$ به‌ازای $n+m+1$ مقدار گویا، گویا شود آنگاه $\frac{f}{g}$ را می‌توان به صورت تقسیم دو چندجمله‌ای با ضرایب گویا نوشت.

$$n = \deg(f),\, m = \deg(g),\, t = n+m+1$$

$$\alpha_1,\dots,\alpha_t \in \mathbb{Q}, \quad \frac{f}{g}(\alpha_1),\dots,\frac{f}{g}(\alpha_t) \in \mathbb{Q}, \frac{f}{g}(\alpha_i) = \beta_i$$

$p$ را یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n$ با ضریب بزرگترین درجه برابر ۱ و $q$ را یک چندجمله‌ای از درجهٔ $m$ می‌گیریم به طوری که

$$p(\alpha_i) = \beta_i q(\alpha_i), \quad i = 1,\dots,t$$

چنین چندجمله‌ایهایی وجود دارند زیرا اگر $f$ و $g$ را بر ضریب $x^n$ در $f$ تقسیم کنیم دو چندجمله‌ای جدید در $t$ تساوی بالا صدق می‌کنند.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \\
q(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0
\end{aligned}
$$

و مجموعهٔ معادلات

$$\alpha_i^n + a_{n-1}\alpha_i^{n-1} + \cdots + a_0 = \beta_i(b_m\alpha_i^m + b_{m-1}\alpha_i^{m-1} + \cdots + b_0)$$

برای $i = 1, 2, \dots, m+n-1$ دارای جواب است ($a_j$ها و $b_j$ها مجهولند) و چون ضرایب دستگاه گویا هستند، دستگاه دارای ریشهٔ گویاست. پس ضرایب $p$ و $q$ گویا هستند. از

$$\frac{p(\alpha_i)}{q(\alpha_i)} = \frac{f(\alpha_i)}{g(\alpha_i)}, \quad i = 1,\dots,m+n+1$$

نتیجه می‌شود

$$pg(\alpha_i) \equiv fq(\alpha_i), \quad i = 1,\dots,m+n+1$$

درجهٔ $fq$ و $pg$، $m+n$ است و به‌ازای $m+n+1$ مقدار برابرند؛ پس

$$pg \equiv fq \Longrightarrow \frac{p}{q} \equiv \frac{f}{g}$$