

# آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. فرض کنید  $a, b$  و  $c$  سه عدد حقیقی مثبت باشند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

ثابت کنید  $a, b$  و  $c$  می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۲. فرض کنید  $a, b, c$  و  $d$  اعدادی طبیعی باشند به طوری که،

$$ab = cd$$

آیا  $S = a + b + c + d$  می‌تواند عددی اول باشد؟

۳. مثلث  $ABC$  مفروض است. نقاطی مانند  $D$  و  $E$  خارج مثلث  $ABC$  در نظر می‌گیریم به طوری که مثلثهای  $ADB$  و  $AEC$  قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشند ( $\angle D = 90^\circ$  و  $\angle E = 90^\circ$ ).

اگر  $F$  نقطه‌ی وسط ضلع  $BC$  باشد ثابت کنید مثلث  $DFE$  نیز قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

۴. روی یک خط راست  $n$  نقطه‌ی قرمز و  $n$  نقطه‌ی آبی نه لزوماً متمایز به‌طور دلخواه قرار گرفته‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای متفاوت از مجموع فواصل دوبه‌دو نقاط با رنگهای یکسان کمتر نیست.

ذهن زیبا

# راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۵

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. به آسانی می‌توان ثابت کرد که نابرابری داده شده معادل است با

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b+c) > 0.$$

اگر این رابطه برقرار باشد، بدون کم کردن از کلیت مسأله فرض کنید  $a \leq b \leq c$ . در این صورت، جمله‌های دوم، سوم و چهارم مثبت‌اند. بنابراین جمله‌ی اول نیز باید مثبت باشد. یعنی  $a+b > c$  و این همان نابرابری مثلث است. دو نابرابری دیگر مثلث نیز به روشنی برقرارند.

۲. ابتدا لم زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

لم. اگر  $a, b, c$  و  $d$  عددهایی طبیعی باشند به طوری که  $ab = cd$ ، آنگاه عددهای طبیعی  $x, y, z$  و  $t$  وجود دارند که

$$a = xy, \quad b = zt, \quad c = xz, \quad d = yt$$

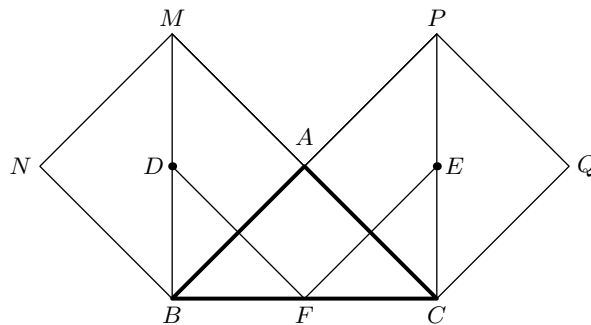
برهان. فرض کنید که  $x = (a, c)$  (که در این جا  $(m, n)$  بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک  $m$  و  $n$  را نشان می‌دهد). فرض کنید  $a = xa'$  و  $c = xc'$ . در این صورت،  $a'b = c'd$ . چون  $a'|a'b$  پس  $a'|c'd$  و چون  $(a', c') = 1$  پس  $a'|d$ . بنابراین،  $d = a'u$ . به دلیل مشابه  $b = c'v$  و با جایگذاری در معادله نتیجه می‌شود  $u = v$ . حال کافی است قرار دهیم  $y = a', z = c', t = u = v$ .  $\square$

حال بنابر لم بالا،

$$a + b + c + d = xy + zt + xz + yt = (x+t)(y+z)$$

و بنابراین،  $S$  عددی مرکب است.

۳. برای اثبات، دو مربع  $AMNB$  و  $APQC$  را روی اضلاع  $AB$  و  $AC$  بنا می‌کنیم.



واضح است که  $E$  و  $F$  مراکز این دو مربع‌اند. حال دو مثلث  $ABP$  و  $ACM$  را در نظر می‌گیریم. روشن است که

$$AB = AM, \quad AC = AP, \quad \angle MAC = \angle BAP$$

پس این دو مثلث مساوی‌اند. بنابراین  $BP = MC$ .

با توجه به اینکه  $AM \perp AB$  و  $AP \perp AC$ ، روشن است که مثلث  $ABP$  از دوران مثلث  $AMC$  به اندازه‌ی  $90^\circ$  به دست می‌آید. بنابراین  $MC \perp BP$ .

روشن است که  $FE$  وسط‌های دو ضلع مثلث  $BCP$  را به هم وصل کرده است بنابراین  $EF$  موازی  $BP$  و برابر نصف آن است. به دلیل مشابه  $FD$  نیز موازی  $MC$  و برابر نصف آن است. چون  $BP$  و  $MC$  مساوی و عمود بر هم‌اند، نتیجه می‌شود که  $DF$  و  $FE$  نیز برابر و بر هم عمودند و این حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۴. فرض کنید که  $A_1, A_2, \dots, A_n$  نقاط قرمز و  $B_1, B_2, \dots, B_n$  نقاط آبی را نمایش دهند. نقطه‌ی دلخواه  $O$  را روی این خط انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $a_i = |OA_i|$  و  $b_i = |OB_i|$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$\sum_{i < j} |a_i - a_j| + \sum_{i < j} |b_i - b_j| = \sum_{i < j} (a_j - a_i) + \sum_{i < j} (b_j - b_i)$$

$$= \sum_{i < j} (a_j - b_i) + \sum_{i < j} (b_j - a_i)$$

$$\leq \sum_{i < j} |a_j - b_i| + \sum_{i < j} |b_j - a_i|$$

$$\leq \sum_{i, j} |a_i - b_j|.$$

## راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم چهاردهمین المپیاد ریاضی کشور

و این دقیقاً همان حکم مسأله است.

یادداشت. اگر نقاط را به جای اینکه روی خط بگیریم، در یک فضای  $n$ -بعدی اقلیدسی نیز در نظر بگیریم، کماکان حکم مسأله درست خواهد بود. این مطلب با به کار بستن قضیه‌ی لوی برای این حالت خاص مسأله که بررسی کردیم نتیجه می‌شود. این قضیه را بیان می‌کنیم  
قضیه. فرض کنید که

$$(1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq r)a_{ij}, \quad (1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq r)b_{ij}$$

اعدادی حقیقی و دلخواه باشند. اگر نابرابری

$$\sum_{i=1}^p \left| \sum_{j=1}^r a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{i=1}^q \left| \sum_{j=1}^r b_{ij} v_j \right|$$

برای مقادیر حقیقی  $v_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) درست باشد، آنگاه این نابرابری برای بردارهای یک فضای ضرب داخلی حقیقی (مانند  $\mathbb{R}^n$ ) نیز برقرار خواهد ماند.

