

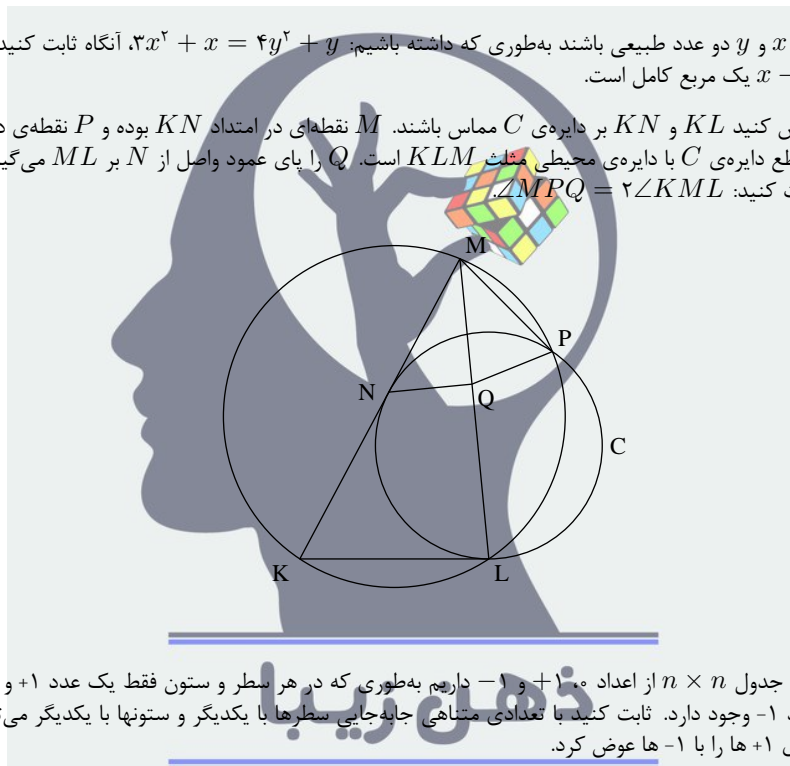
آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که داشته باشیم: $x^2 + y^2 = 4y^2 + x = 3x^2 + x$ ، آنگاه ثابت کنید که $x - y$ یک مربع کامل است.

۲. فرض کنید KN و KL بر دایره‌ی C مماس باشند. M نقطه‌ای در امتداد KN بوده و P نقطه‌ی دیگر تقاطع دایره‌ی C با دایره‌ی محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می‌گیریم. ثابت کنید: $\angle MPQ = 2\angle KML$.



۳. یک جدول $n \times n$ از اعداد 0 ، 1 و -1 داریم به طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد 1 و یک عدد -1 وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جای‌جایی سطرها با یکدیگر و ستونها با یکدیگر می‌توان جای 1 ها را با -1 ها عوض کرد.

۴. فرض کنید x_1, x_2, x_3, x_4 چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$ ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 \geq \max \left\{ \sum_{i=1}^4 x_i, \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i} \right\}$$

$\max\{a, b\}$ یعنی بزرگترین عضو مجموعه‌ی $\{a, b\}$.

۵. در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده‌اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. همچنین فرض کنید نیمسازهای دو زاویه‌ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط F و E قطع کنند. ثابت کنید: اگر $BE = CF$ ، آنگاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

۶. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p = \frac{b}{4} \sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگترین مقدار p را با ذکر دلیل، پیدا کنید.



راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۶

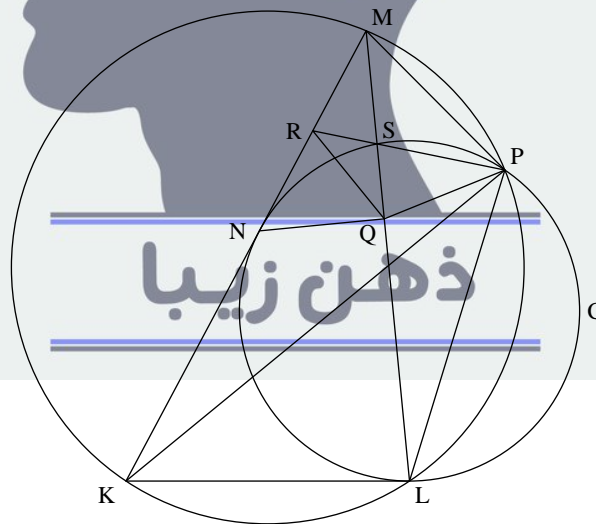
منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبدالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهرا ن اخباریفر

۱. معادله هم ارز است با $y^2 = (x-y) + 3(x^2 - y^2)$ و یا

$$(x-y)(3(x-y) + 6y + 1) = y^2$$

قرار می‌دهیم $d = (x-y)(3(x-y) + 6y + 1)$ اگر $d > 1$ را عدد اولی در نظر بگیرید که $p|d$ چون $p|x-y$ از رابطه‌ی قبل داریم $p|y$ و از آنجا $p|y$ در نتیجه $p|3(x-y) + 6y$ و چون $p|d$ پس $p|3(x-y) + 6y + 1$ بنابراین، $p=1$ که غیرممکن است. پس $d=1$ در این صورت چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $(x-y) + 3(x-y) + 6y + 1$ و $(x-y)$ برابر یک است و حاصل ضرب این دو عدد مربعی کامل است بنابراین هر دو مربع کامل‌اند و این حکم را ثابت می‌کند.

۲. فرض کنید S نقطه‌ی تقاطع دو خط ML با دایره‌ی C و R نقطه‌ی تقاطع امتداد SP با MN باشد.



توجه کنید که

$$\angle KPL = \angle KLM = \angle LPS$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

9

$$\angle SPM = \angle LPK = \angle KML$$

بنابراین، دایره‌ی محیطی مثلث SMP بر KM در M مماس است. پس،

$$(RM)^2 = RS \cdot RP = (RN)^2$$

بنابراین، $RN = RM$ ؛ یعنی R وسط MN و مرکز دایره‌ی محیطی مثلث MNQ است. در نتیجه،

$$\angle MPS = \angle SMR = \angle MQR$$

پس M, R, P و Q روی یک دایره قرار دارند و بنابراین،

$$\angle MPQ = \angle MPS + \angle RPQ = \angle KML + \angle KML = 2\angle KML$$

۳. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حکم به‌ازای $n = 2$ بدیهی است. فرض کنیم حکم به‌ازای عددهای طبیعی کوچکتر از n درست باشد.

درایه‌ی واقع در سطر a و ستون b جدول را با $A(a, b)$ نشان می‌دهیم. حال دنباله‌های $\{\alpha_i\}$ و $\{\beta_i\}$ از اعداد طبیعی با شرط $1 \leq \alpha_i \leq n$ و $1 \leq \beta_i \leq n$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A(\alpha_1, \beta_1) = -1, \quad A(\alpha_i, \beta_i) = -1, \quad A(\alpha_{i+1}, \beta_i) = 1$$

(چون در هر سطر و هر ستون فقط یک عدد 1 و یک عدد -1 وجود دارد α_i ها و β_i ها به طور یکتا تعریف می‌شوند) اما چون عضوهای دنباله‌ی $\{\alpha_i\}$ فقط n مقدار متمایز را می‌توانند اختیار کنند، عددهای طبیعی k و e به طوری $e < k$ وجود دارند که $\alpha_k = \alpha_e$ در این صورت، از

$$A(\alpha_k, \beta_{k-1}) = A(\alpha_e, \beta_{e-1}) = 1$$

نتیجه می‌شود $\beta_{k-1} = \beta_{e-1}$ و سپس از

$$A(\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}) = A(\alpha_{e-1}, \beta_{e-1}) = 1$$

نتیجه می‌شود $\alpha_{k-1} = \alpha_{e-1}$ و به همین ترتیب می‌توانیم ادامه دهیم و ثابت کنیم $\alpha_1 = \alpha_{k-e+1}$ و $\beta_1 = \beta_{k-e+1}$.

حال اگر $k - e < n$ حکم با استقرا درست است.

اگر $k - e = n$ آنگاه $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ و $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ جایگشتی از شماره‌ی سطرها و ستونهای جدول است. پس کافی است سطرها را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله‌ی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ به دنباله‌ی $\alpha_1, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_2$ تبدیل شود و سپس ستونهای جدول را طوری جابه‌جا کنیم که دنباله‌ی β_1, \dots, β_n به دنباله‌ی $\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_1$ تبدیل شود.

۴. توجه کنید که

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 x_i^3 &= \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \frac{1}{3}(x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) \end{aligned}$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی - هندسی

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1^3 x_2^3 x_3^3} = \frac{1}{x_4}$$

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

به همین ترتیب با اعمال این نامساوی بر جمله‌های دیگر مجموع $\sum_{i=1}^4 x_i^2$ ، نتیجه می‌شود

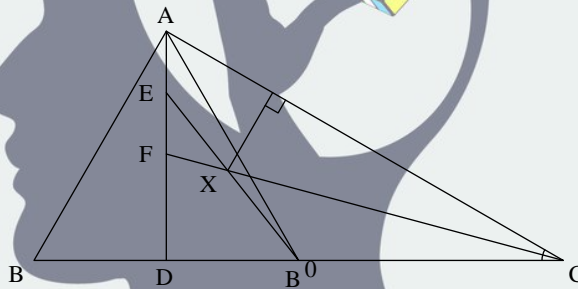
$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 \geq \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i}$$

برای اثبات قسمت دیگر، با توجه به نامساوی توانی می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i^2 \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^4 x_i}{4} \right)^2.$$

که هم‌ارز است با $\sum x_i^2 \geq \frac{1}{16} (\sum x_i)^2$. پس کافی است ثابت کنیم $\sum_{i=1}^4 x_i \geq 16 \sum_{i=1}^4 x_i^2$. چون $\sum_{i=1}^4 x_i > 0$ پس باید ثابت کنیم $\sum_{i=1}^4 x_i \geq 4$ و این نیز با توجه به نامساوی حسابی-هندسی و تساوی $\prod_{i=1}^4 x_i = 1$ روشن است.

۵. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین نباشد، مثلاً $AB < AC$ و این صورت $BD < CD$ پس اگر B' قرینه B نسبت به D باشد، B' بین C و D خواهد بود. نقطه‌ی E نمی‌تواند بین F و D باشد زیرا در این صورت نتیجه می‌شود $B'E < CE \leq CF$



و چون $BE = B'E$ می‌توان نتیجه گرفت $BE < CF$ است که خلاف فرض است. پس E بین A و F است. در نتیجه دو پاره خط EB' و FC یکدیگر را در نقطه‌ای مانند X قطع می‌کنند. X روی نیمساز $\angle C$ است. پس از AC و DC به یک فاصله است. ضمناً X روی نیمساز $\angle AB'D$ قرار دارد. پس از AB' و DC نیز به یک فاصله است. ولی این ناممکن است زیرا اگر از X به AC عمود کنیم، خط عمود خارج شده از X قبل از برخورد با AC را قطع می‌کند. پس فاصله‌ی X تا AC بیشتر از فاصله‌ی X تا AB' است. ولی بنابر استدلال بالا این دو فاصله باید برابر باشند.

۶. روشن است که b عددی زوج است. اگر $b = 2c$ آنگاه $p = \frac{c}{\sqrt[3]{\frac{a-c}{a+c}}}$ یعنی $\frac{p^3}{c^3} = \frac{a-c}{a+c}$. قرار می‌دهیم $\frac{p^3}{c^3} = \frac{m^3}{n^3}$ که $(m, n) = 1$. حال اگر $(a - c, a + c) = k$ پس $a - c = kn^3$ و $a + c = km^3$ و چون داشتیم $2p = \frac{cm}{n}$ نتیجه می‌شود $4p = \frac{k(n^3 - m^3)m}{n}$.

حال m و n یا هر دو فردند یا فقط یکی از آنها فرد است. اگر m و n هر دو فرد باشند آنگاه $n^3 - m^3$ پس $4p = k(n^3 - m^3)$. اگر m و n دارای زوجیت متفاوت باشند از رابطه‌ی $2c = k(n^3 - m^3)$ نتیجه می‌شود که k زوج است. پس $k = 2r$ و چون $(n^3 - m^3, n) = 1$ نتیجه می‌شود $n | k$ پس

راه حل سؤالات آزمون مرحله‌ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

$r = ns$ بنابراین، $2p = s(n-m)(n+m)m$ اما $2p$ فقط به دو شکل به صورت حاصل ضرب چهار عدد صحیح نوشته می‌شود (ترتیب را در نظر نمی‌گیریم)

$$2p = 2p \times 1 \times 1 \times 1, \quad 2p = p \times 2 \times 1 \times 1$$

حال اگر

$$(n-m)(n+m)m = 2p \times 1 \times 1 \times 1$$

آنگاه چون $n+m > m$ پس $n+m = 2p$ بنابراین، $n+m = 2p$ و $m = 1$ و $n-m = 1$ پس $n+m = 3 \neq 2p$ در نتیجه، در این حالت نمی‌توانیم داشته باشیم $n+m = 2$ زیرا در این صورت نتیجه می‌شود $n = m = 1$ و $n-m = 0$ که ناممکن است. پس $n+m = p$ اگر $m = 2$ و $n-m = 1$ آنگاه $p = 5$ و اگر $m = 1$ و $n-m = 1$ نتیجه می‌شود $p = 3$ و به‌ازای $n-m = 2$ نتیجه می‌شود $p = 4$ که ممکن نیست. پس $p = 5$ بزرگترین مقدار p است.

