آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$، n تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \ge a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4$$

۲. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. I مرکز دایره‌ی محاطی آن و D نقطه‌ی تقاطع AI با دایره‌ی محیطی مثلث ABC است. فرض کنید E و F به‌ترتیب پای عمودهای وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $IE + IF = \frac{1}{2}AD$، زاویه‌ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. nتایی $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اعداد طبیعی را «خوب» می‌نامیم، اگر داشته باشیم $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$ و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از a_iها برابر n نشود. تمام n تاییهای «خوب» را پیدا کنید.

(به‌عنوان مثال ۳تایی $(1, 1, 4)$ «خوب» است ولی ۵تایی $(1, 2, 1, 2, 4)$ «خوب» نیست، زیرا حاصل‌جمع مؤلفه‌های اول، دوم، چهارم برابر ۵ است.)

۴. فرض کنید که عدد طبیعی n حداقل چهار مقسوم‌علیه متمایز داشته باشد و $0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ چهار کوچکترین مقسوم‌علیه آن باشند. کلیه‌ی اعداد طبیعی n را پیدا کنید که $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

۵. مثلث ABC که در آن $BC > CA > AB$ مفروض است. نقطه‌ی D را روی ضلع BC، و نقطه‌ی E را روی امتداد ضلع AB (نزدیک A) طوری در نظر می‌گیریم که $BD = BE = AC$. دایره‌ی محیطی مثلث BED ضلع AC را در نقطه‌ی P قطع می‌کند و BP نیز دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. ثابت کنید $AQ + CQ = BP$.

۶. اگر $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ دو nتایی از صفر و یک باشند، فاصله‌ی A و B را برابر تعداد iهایی می‌گیریم که $a_i \neq b_i$، $(1 \le i \le n)$.

(به‌عنوان مثال اگر $A = (0, 1, 1)$ و $B = (1, 1, 0)$، فاصله‌ی A و B برابر ۲ است.) حال فرض کنید که A، B و C سه nتایی از صفر و یک باشند، به‌طوری که فاصله‌ی دو به دوی آنها d است.

الف) نشان دهید که d زوج است.

ب) ثابت کنید که یک nتایی از صفر و یک، مثل D، وجود دارد که فاصله‌اش با A، B و C برابر $\frac{d}{2}$ است.