

(۱) ۲۱ عدد متمایز از بین اعضای مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 2046\}$  انتخاب شده‌اند. نشان دهید که می‌توان سه عدد متمایز  $a, b$  و  $c$  از بین آن ۲۱ عدد انتخاب کرد به طوری که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$bc < 2a^2 < 4ac$$

(۲) نقاط  $D, E$  و  $F$  به ترتیب روی اضلاع  $BC, AC$  و  $AB$  از مثلث  $ABC$  قرار دارند. ثابت کنید دو مثلث  $ABC$  و  $DEF$  دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و فقط اگر

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

(مرکز ثقل یک مثلث محل تلاقی سه میانه‌ی آن مثلث است.)

(۳) مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$  را  $M$  می‌نامیم. نشان دهید که می‌توان ۱۶ زیرمجموعه از  $M$  انتخاب کرد به طوری که برای هر  $a \in M$ ، ۸ تا از این مجموعه‌ها باشند که اشتراک آنها دقیقاً برابر  $\{a\}$  باشد.

(۴) همه‌ی عددهای طبیعی  $n$  را بیابید که مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  را بتوان به سه مجموعه‌ی مجزای  $A, B$  و  $C$  تقسیم کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه با هم برابر باشد.

(۵) می‌دانیم در چهاروجهی  $ABCD$ ، مجموع زاویه‌های هر رأس برابر  $180^\circ$  درجه است. (مثلاً در رأس  $A$ :  $\angle DAB + \angle CAD + \angle BAC = 180^\circ$ ) نشان دهید که وجوه این چهاروجهی، چهار مثلث برابرند.

(۶) «آتر عدد» تعمیمی از مفهوم عدد است. همان‌طور که می‌دانید هر عدد طبیعی به صورت دنباله‌ی متناهی از ارقام صفر تا نه نوشته می‌شود. یک «ابر عدد» دنباله‌ای از سمت چپ نامتناهی از ارقام صفر تا نه است، مثلاً  $43030303\dots$  یک ابر عدد است. توجه کنید که هر عدد خود یک ابر عدد است (که از جایی به بعد ارقام آن همگی صفرند). با همان روشی که دو عدد با هم جمع یا در هم ضرب می‌شوند، می‌توان دو «ابر عدد» را نیز با هم جمع و یا در هم ضرب کرد. مثال:

$$\begin{array}{r}
 \dots 3030304 \\
 + \dots 4571378 \\
 \hline
 \dots 7601682 \\
 \dots 3030304 \\
 \times \dots 4571378 \\
 \hline
 \dots 4242432 \\
 \dots 212128 \\
 \dots 90912 \\
 \dots 0304 \\
 \dots 128 \\
 \dots 20 \\
 \dots 6 \\
 \hline
 \dots 5038912
 \end{array}$$

الف) فرض کنید  $A$  یک ابرعدد است. ثابت کنید ابرعدد  $B$  وجود دارد که  $A + B = \overleftarrow{0}$  (منظور از  $\overleftarrow{0}$  «ابرعدد»ی است که همه‌ی رقم‌های آن صفر است).

ب) تمام ابرعددهای  $A$  را پیدا کنید که وارون ضربی دارند، یعنی ابرعدد  $B$  وجود دارد که  $A \times B = \overleftarrow{1}$  (منظور از  $\overleftarrow{1}$  «ابرعدد»  $\dots 0001$  است).

ج) آیا درست است که اگر  $A \times B = \overleftarrow{0}$  آن‌گاه  $A = \overleftarrow{0}$  و یا  $B = \overleftarrow{0}$  چرا؟

(۱) اعداد مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 2046\}$  را به ۱۰ مجموعه به صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 3\} \\ A_2 &= \{4, 5, 6, 7\} \\ A_3 &= \{8, 9, \dots, 15\} \\ A_k &= \{2^k, 2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\} \\ A_{10} &= \{1024, \dots, 2046\} \end{aligned}$$

تعداد این مجموعه‌ها ۱۰ تا و تعداد اعضای انتخاب شده ۲۱ است. بنابراین طبق اصل لانه کبوتری، ۳ تا از این اعداد از یک مجموعه انتخاب شده‌اند. این سه عدد را به ترتیب از کوچک به بزرگ  $a$ ،  $b$  و  $c$  می‌نامیم. ادعا می‌کنیم که این سه عدد در رابطه‌ی مورد نظر مسأله صدق می‌کنند.

اگر این سه عدد متعلق به  $A_1$  باشند، که به وضوح  $bc < 2a^2 < 4bc$  حال فرض کنید که این سه عدد متعلق به یکی دیگر از مجموعه‌ها باشند. مجموعه‌های  $A_1, \dots, A_2$  چه خاصیت جالبی دارند؟ دقت کنید که در همه‌ی این مجموعه‌ها، بزرگ‌ترین عضو مجموعه از دو برابر کوچک‌ترین عضو مجموعه کمتر است. پس برای هر دو عدد مثل  $x$  و  $y$  در این مجموعه‌ها  $x < 2y$ . با توجه به این خاصیت و ترتیبی که برای  $a$  و  $b$  و  $c$  قائل شدیم ( $c < a < b$ )، داریم

$$\left. \begin{aligned} c < a \\ b < 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow bc < 2a^2, \quad \left. \begin{aligned} a < b \\ a < 2c \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 < 2bc \Rightarrow 2a^2 < 4bc$$

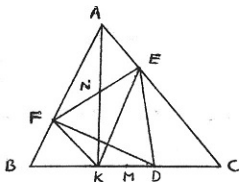
بنابراین  $bc < 2a^2 < 4bc$ .

(۲) ابتدا فرض کنید  $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$ .  $M$  را وسط  $BC$  و  $K$  را قرینه‌ی  $D$  نسبت به  $M$  بگیرید. در این صورت  $BD = KC$  و  $DC = BK$  و بنابراین

$$\frac{CK}{KB} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

و در نتیجه طبق قضیه تالس  $KE \parallel AB$  و  $KF \parallel AC$ . پس چهارضلعی  $AFKE$  متوازی الاضلاع است، و بنابراین قطرهای این چهارضلعی، یعنی  $AK$  و  $EF$ ،

هم‌دیگر را در نقطه‌ی  $N$  نصف می‌کنند.



حالا به مثلث  $\triangle AKD$  توجه کنید. میانه  $AM$  از ضلع  $BC$  و میانه‌ی  $DN$  از ضلع  $EF$ ، میانه‌های این مثلث نیز هستند و بنابراین مرکز ثقل این مثلث (که آن را  $G$  می‌نامیم)،  $AM$  و  $DN$  را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. لذا مرکز ثقل دو مثلث  $\triangle DEF$  و  $\triangle ABC$  نیز هست. اثبات طرف عکس نیز مشابه است. فرض کنید مراکز ثقل این دو مثلث بر هم منطبق باشند، بنابراین میانه  $AM$  از ضلع  $BC$  و  $DN$  از ضلع  $EF$  هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کنند. محل برخورد  $AN$  با  $BC$  را  $K$  بنامید. در این صورت چون در مثلث  $\triangle AKD$ ،  $AM$  و  $DN$  هم‌دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کرده‌اند، لذا باید میانه باشند. پس

$$AN = NK, KM = MD$$

حال با توجه به این‌که  $AN = NK$  و  $FN = NE$ ، چهار ضلعی  $AFKE$  باید متوازی الاضلاع باشد و لذا  $KE \parallel AB$  و  $KF \parallel AC$ . بنابراین طبق قضیه تالس

$$\frac{AF}{FB} = \frac{CK}{KB} = \frac{CE}{EA}$$

اما ثابت کردیم  $KM = MD$ ، پس  $CK = BD$  و  $KB = DC$  و رابطه‌ی فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA}$$

(۳) مجموعه‌های  $A_1, A_2, \dots, A_{16}$  را به روش زیر می‌سازیم:

ابتدا  $A$  تا از این مجموعه‌ها را انتخاب کرده و ۱ را در آنها می‌گذاریم، سپس  $A$  تا  $A$  دیگر را (که دقیقاً همان  $A$  تا  $A$  قبل نباشند) انتخاب کرده و ۲ را در آنها می‌گذاریم و به همین ترتیب کار را ادامه می‌دهیم؛ یعنی برای هر یک از اعضای  $M$ ، مثل  $a, A$

تا از این مجموعه‌ها که برای هیچ‌یک از اعضای قبلی دقیقاً همین ۸ تا را انتخاب نکرده‌ایم، انتخاب می‌کنیم و  $a$  را در این ۸ تا قرار می‌دهیم. چنین کاری قطعاً ممکن است؛ چون تعداد حالتی که می‌توان ۸ تا از این ۱۶ مجموعه را انتخاب کرد برابر است با  $12870 = \binom{16}{8} < 10000$ . بنابراین می‌توان ۸ مجموعه را برای هر یک از ۱۰۰۰۰ عضو  $M$  چنان انتخاب کرد، که این ۸ تایی‌ها برای هیچ دو عضوی یکسان نباشند.

حال واضح است که مجموعه‌های  $A_1, \dots, A_{16}$  خاصیت مورد نظر را دارند. زیرا برای هر  $a \in M$ ، اگر همان ۸ مجموعه‌ای که  $a$  را در آنها قرار داده‌ایم در نظر بگیریم، همه‌ی آنها  $a$  را دارند و هیچ چیز مشترک دیگری ندارند، زیرا طبق نحوه‌ی ساختن ما، برای هیچ عضو دیگری، دقیقاً همین ۸ مجموعه را انتخاب نکرده‌ایم.

(۴) فرض کنید مجموع اعضای  $A, B$  و  $C$  برابر  $k$  باشد. در این صورت

$$1 + 2 + \dots + n = 3k \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 3k \Rightarrow n(n+1) = 6k$$

در این صورت واضح است که  $n$  باید به یکی از فرم‌های  $6t$ ،  $6t+2$ ،  $6t+3$  و  $6t+5$  باشد. و  $n$  نمی‌تواند به فرم‌های  $6t+1$  و  $6t+4$  باشد (چون در این صورت  $n(n+1)$  مضرب ۶ نخواهد شد). بنابراین لازم است که  $n = 6t$  یا  $6t+2$ ،  $6t+3$  یا  $6t+5$ .

حال دقت کنید که اگر  $n$  خاصیت مورد نظر را داشته باشد،  $n+6$  هم خاصیت مورد نظر را خواهد داشت. زیرا کفایت اعداد  $\{n+1, \dots, n+6\}$  را به سه زوج  $(n+1, n+6)$ ،  $(n+2, n+5)$  و  $(n+3, n+4)$  دسته‌بندی کرده و هر زوج را به یکی از مجموعه‌های  $A, B$  و  $C$  اضافه کنید. بنابراین،

چون  $n = 6t$ ، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه  $n = 6t$ ها ( $t \in \mathbb{N}$ ) خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون  $n = 8$ ، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه  $n = 6t+2$ ها ( $t \in \mathbb{N}$ ) خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون  $n = 9$ ، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه  $n = 6t+3$ ها ( $t \in \mathbb{N}$ ) خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

چون  $n = 5$ ، خاصیت مورد نظر را دارد (چرا؟) همه  $n = 6t+5$ ها ( $t \geq 0$ ) خاصیت مورد نظر را خواهند داشت.

اعداد  $2 = 6 \times 0 + 2$  و  $3 = 6 \times 0 + 3$  هم که به وضوح خاصیت مورد نظر را ندارند. پس، اعدادی که خاصیت مورد نظر مسأله را دارند عبارتند از:

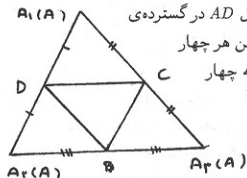
$$n = 6t, t \in \mathbb{N}$$

$$n = 6t + 2, t \in \mathbb{N}$$

$$n = 6t + 3, t \in \mathbb{N}$$

$$n = 6t + 5, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(۵) چهار وجهی را از رأس  $A$  باز کنید. چون مجموع سه زاویه موجود در هر یک از رئوس  $B, C$  و  $D$  برابر  $180^\circ$  است، گسترده‌ی این چهار وجهی، همان طور که در شکل می‌بینید، بصورت یک مثلث خواهد بود، که نقاط  $B, C$  و  $D$  وسط‌های اضلاع آن هستند (دقت کنید که مثلاً یال  $AD$  در گسترده‌ی چهار وجهی دو بار ظاهر می‌شود). بنابراین هر چهار مثلث موجود در شکل، یعنی هر چهار وجه چهار وجهی، با هم برابرند (چرا؟).



(۶) الف) فرض کنید  $A = \dots a_2 a_1 a_0$ .

$A$  ممکن است در جلوی خود تعدادی صفر داشته باشد،  $a_i$  را اولین رقم غیر صفر  $A$  بگیرد. ابر عدد  $B = \dots b_2 b_1 b_0$  را به این صورت می‌سازیم:

$$b_n = \begin{cases} 0 & n < i \\ 10 - a_i & n = i \\ 9 - a_n & n > i \end{cases}$$

در این صورت واضح است که  $A + B = \overset{\leftarrow}{0}$ .

(ب) مشخص است که رقم یکان  $A$  باید فرد و مخالف ۵ باشد. زیرا اگر رقم یکان  $A$  زوج و یا ۵ باشد، رقم یکان  $A \times B$  نیز یا زوج خواهد شد و یا ۵، و به هر حال ۱ نخواهد شد.

ادعا می‌کنیم که شرط فوق، کافی نیز هست. یعنی اگر  $A = \dots a_2 a_1 a_0$  و  $a_0 = 5$  و

فرد و  $a_0 \neq 5$  باشد، در این صورت  $A$  حتماً وارون ضریبی دارد.

برای اثبات ادعای خود سعی می‌کنیم عدد  $B = \dots b_2 b_1 b_0$  را طوری بسازیم

که  $A \times B = \overset{\leftarrow}{0}$ . اولاً چون  $a_0$  فرد و مخالف ۵ است، پس  $(a_0, 10) = 1$ ،

در نتیجه  $\exists 0 \leq b_0 \leq 9 : a_0 b_0 \stackrel{1^\circ}{\equiv} 1$

به این ترتیب با انتخاب  $b_0$  به صورت فوق، رقم یکان  $A \times B$ ، برابر ۱ خواهد شد.

حال فرض کنید ارقام  $b_0, b_1, \dots, b_k$  را چنان ساخته باشیم که  $k+1$  رقم اول  $A \times B$ ، برابر  $1 \dots 0 \dots 0$  باشد. نشان می‌دهیم می‌توان  $b_{k+1}$  را طوری

انتخاب کرد که  $k+2$  رقم اول  $A \times B$  برابر  $1 \dots 0 \dots 0$  باشد.

ابتدا فرض کنید  $1 \dots 0 \dots 0 \overset{\text{تا } k}{\dots} \dots \overset{\text{تا } k}{c_{k+2} c_{k+1}} \dots c_{k-1} b_{k-1} \dots b_0 = A \times B$  در این صورت

$$\begin{aligned} A \times b_{k+1} b_k b_{k-1} \dots b_0 &= \dots c_{k+2} c_{k+1} \overset{\text{تا } k}{\dots \dots \dots} 1 \\ &+ 10^{k+1} A \times b_{k+1} \\ &= \dots c_{k+2} c_{k+1} \overset{\text{تا } k}{\dots \dots \dots} 1 \\ &+ (A \times b_{k+1}) \dots \dots \end{aligned}$$

رقم یکان  $A \times b_{k+1}$  برابر است با باقی مانده‌ی  $a_0 \times b_{k+1}$  بر  $10$ . بنابراین اگر  $b_{k+1}$  را طوری انتخاب کنیم که

$$a_0 \times b_{k+1} + c_{k+1} \stackrel{1^\circ}{\equiv} 0 \quad (*)$$

در این صورت  $k+2$  رقم اول  $A \times B$  برابر  $1 \dots 0 \dots 0$  خواهد شد. برای

ارضای معادله‌ی  $(*)$  کفایت  $b_{k+1}$  را برابر باقی مانده‌ی  $-c_{k+1} b_0$  بر  $10$  بگیرد. در این صورت

$$a_0 \times b_{k+1} + c_{k+1} \stackrel{1^\circ}{\equiv} a_0 (-b_0 \cdot c_{k+1}) + c_{k+1}$$

اما  $b_0 b_0 \stackrel{1^\circ}{\equiv} 1$ ، چنان بود که  $a_0 b_0 \stackrel{1^\circ}{\equiv} 1$ ، بنابراین

$$a_0 \times b_{k+1} + c_{k+1} \stackrel{1^\circ}{\equiv} -a_0 b_0 \cdot c_{k+1} + c_{k+1} \stackrel{1^\circ}{\equiv} -c_{k+1} + c_{k+1} \stackrel{1^\circ}{\equiv} 0$$

به این ترتیب دیدیم که دنباله‌ی  $b_0, b_1, b_2, \dots$  را می‌توان طوری گسترش داد که ارقام اول  $b_0, b_1, \dots, b_{k+1} \times A$  برای هر  $k \in \mathbb{N}$  برابر  $1 \dots 0 \dots 0$  شوند، پس تا  $k+1$

$$A \times B = \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 1 = \overset{\leftarrow}{0} 1$$

(ج) سعی می‌کنیم ابر عدد‌های ناصفر  $A = \dots a_2 a_1 a_0$  و  $B = \dots b_2 b_1 b_0$  را طوری بسازیم که همه ارقام حاصل ضرب  $C = A \times B = \dots c_2 c_1 c_0$  برابر صفر باشند.

می‌گیریم  $a_0 = 5$  و  $b_0 = 2$ ، در این صورت  $c_0 = 0$ . حال می‌خواهیم  $a_n$ ها و  $b_n$ ها را بگونه‌ای پیدا کنیم که برای هر  $n$ ،  $c_n = 0$ . این کار را به شیوه‌ی استقرایی انجام می‌دهیم. به حاصل ضرب  $A \times B$  توجه کنید!

$$\begin{array}{r} \dots r_2 r_1 \\ \dots a_2 a_1 a_0 \\ \times \dots b_2 b_1 b_0 \\ \hline \dots c_2 c_1 c_0 \end{array}$$

که در بالای هر طبقه ده بریک نقلی از طبقه‌ی قبل را نوشته‌ایم. یکان  $A \times B$  که با انتخاب  $a_0 = 5$  و  $b_0 = 2$  صفر می‌شود و البته ده بریک برای رقم دهگان ایجاد می‌کند.

رقم دهگان  $A \times B$  برابر است با باقی‌مانده‌ی  $1 + 5b_1 + 2a_1$  بر  $10$ . پس برای صفر کردن  $c_1$  باید  $9 \leq a_1, b_1 \leq 9$  را چنان پیدا کنیم که

$$2a_1 + 5b_1 + 1 \equiv 0$$

مثلاً کفایت قرار دهیم  $a_1 = 2$  و  $b_1 = 1$ .

حال فرض کنید  $a_i$ ها و  $b_i$ ها را برای  $i < n$  طوری ساخته‌ایم که برای  $i < n$ ،  $c_i = 0$ ؛ و سعی می‌کنیم  $a_n$  و  $b_n$  را طوری پیدا کنیم که رقم بعدی  $C$ ، یعنی  $c_n$  هم صفر شود. اما  $c_n$  برابر است با باقی‌مانده‌ی عبارت زیر بر  $10$  (چرا؟)

$$5b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + 2a_n + r_n$$

که در آن  $r_n$  رقم نقلی از طبقه‌ی قبلی است. باید نشان دهیم اعداد  $9 \geq a_n, b_n \geq 0$  موجودند، به طوری که

$$5b_n + 2a_n \equiv -(a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + r_n) = c$$

بسمه تعالی

باشگاه دانش پژوهان جوان

کمیته ملی المپیاد ریاضی ایران

راه حل سوالات مرحله دوم المپیاد ریاضی کشور ..... سال ۱۳۷۹

---

اگر  $c = 2k$ ، می‌گیریم  $b_n = 0$  و  $a_n \equiv k$ .

اگر  $c = 2k + 1$ ، می‌گیریم  $b_n = 1$  و  $a_n \equiv k - 2$ .

به این ترتیب می‌توانیم ابرعددهای ناصفر  $A$  و  $B$  را طوری تکمیل کنیم که برای هر  $n$ ،  $c_n = 0$ .

---