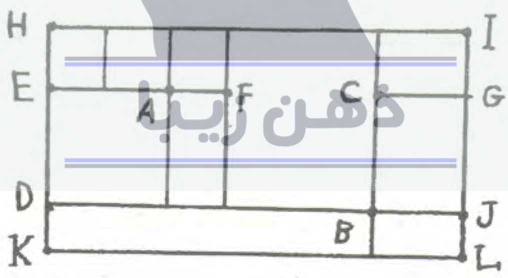
سؤالات آزمون مرحله دوم بیستمین المپیاد ریاضی سال ۸۱

۱) $a_1, a_2, \dots, a_n$ را یک «جایگشت» از اعداد $1, 2, \dots, n$ می‌نامیم هرگاه $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالاً ترتیب آنها تغییر کرده است). تمام جایگشت‌های ۱ تا n مانند $a_1, a_2, \dots, a_n$ را بیابید که برای هر $1 \leq i \leq n$، $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_i)$ بر $i + 1$ بخش‌پذیر باشد.
برای مثال $a_1 = 3$ و $a_2 = 1$ و $a_3 = 4$ و $a_4 = 2$ یک جایگشت از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ است.

۲) یک مستطیل را به وسیله‌ی تعدادی مستطیل (کوچک‌تر) پوشانده‌ایم به طوری که مستطیل‌ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل‌های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم‌چنین هیچ قسمتی از این مستطیل‌ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی‌گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت‌ها را نشان می‌دهد:



بنابراین هر طور که مستطیل را به وسیله‌ی مستطیل‌های کوچک‌تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره‌خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره‌خط‌ها دیده می‌شود، یک نقطه‌ی برخورد را یک «چهارراه» می‌گوییم هرگاه محل تقاطع دو پاره‌خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهار راه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم‌چنین در این شکل ۵ خط افقی (KL, DJ, CG, EF, HI) و ٦ خط عمودی دیده می‌شود، در ضمن شکل به

وسیله‌ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.
نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط‌های افقی، عمودی و تعداد چهارراه‌ها را در نظر بگیریم و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل‌های پوشاننده به اضافه‌ی عدد سه.

۳) در چهار ضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = ۱۳۵^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می‌باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = ۹۰^\circ$، هم‌چنین K محل برخورد دوم دایره‌های محیطی دو مثلث ABD و AMN می‌باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴) A و B دو نقطه‌ی ثابت در صفحه می‌باشند. چهار ضلعی محدّب $ABCD$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه‌ی $\angle ADC = ۹۰^\circ$. ثابت کنید نقطه‌ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهار ضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می‌گذرد.

۵) مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ‌تری توسعه داده‌ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می‌دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a + b\delta$ هستند که $a, b \in R$. (R نشان دهنده‌ی مجموعه اعداد حقیقی است.)
قرار داد می‌کنیم که $a + b\delta = a' + b'\delta$ اگر و تنها اگر $a = a'$ و $b = b'$.
δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^۲ = ۰$!
روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a + b\delta) + (a' + b'\delta) = (a + a') + (b + b')\delta$$
$$(a + b\delta)(a' + b'\delta) = aa' + ab'\delta + ba'\delta + bb'\delta^۲ = aa' + (ab' + ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید این چند جمله‌ای در R ریشه‌ای مضاعف دارد اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه‌ای غیر حقیقی داشته باشد. (ریشه‌ی غیر حقیقی یعنی ریشه‌ای به شکل $a + b\delta$ که $b \neq ۰$).
توضیح: می‌گوییم a ریشه‌ی مضاعف چند جمله‌ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x - a)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۶) در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه‌ی تنیس روی میز بین بچه‌های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده‌اند. بچه‌های کلاس می‌خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می‌دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف

امکان‌پذیر است. ثابت کنید همه‌ی بچه‌های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده‌اند.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیستمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۱

---

۱. ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر $n \geq 3$، اگر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ جای‌گشتی با خاصیت مورد نظر باشد، آن‌گاه $a_n = n$. برای اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:

الف. اگر n فرد باشد. آن‌گاه بنابه فرض مسئله،

$$n|2(a_1 + \cdots + a_{n-1}) = 2(1 + 2 + \cdots + n - a_n) = n(n+1) - 2a_n$$

در نتیجه $n|2a_n$ و چون n فرد است، $n|a_n$ که با توجه به این‌که $a_n \leq n$ نتیجه می‌گیریم $a_n = n$.

ب. اگر n زوج باشد($n = 2k$)، آن‌گاه همانند قسمت قبل $n|2a_n$، لذا $k|a_n$ و $a_n \leq n$، بنابراین $a_n = 2k$ یا $a_n = k$.

اگر $a_n \neq n$، آن‌گاه باید $a_n = k$. اما بنابه فرض مسئله ($i = n-2$) می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n-1|2(a_1 + \cdots + a_{n-2}) &= 2(1 + 2 + \cdots + n - a_n - a_{n-1}) \\ &= n(n+1) - 2a_n - 2_{n-1} \\ &= n(n-1) + 2n - 2k - 2a_{n-1} \\ &= n(n-1) + n - 2a_{n-1} \end{aligned}$$

پس $n-1|n-2a_{n-1}$ و یا معادلاً $2k-1|2k-2a_{n-1}$ و در نتیجه $2k-1|k-a_{n-1}$، اما به وضوح $|k-a_{n-1}| < 2k-1$ و بنابراین $k - a_{n-1} = 0$ و یا $a_{n-1} = k$ که تناقض است (چون a_n هم برابر k بود).

بنابر مطالب بالا در هر جای‌گشت با شرایط مسئله $a_n = n$. حال a_n را از دنباله حذف می‌کنیم. دنباله‌ی به دست آمده نیز جای‌گشتی از ۱ تا $n-1$ با خاصیت مورد نظر مسئله است، در نتیجه جمله‌ی آخر این دنباله یعنی a_{n-1} هم باید برابر $n-1$ باشد. به همین ترتیب مشخص است که برای هر $3 \leq k \leq n$ باید داشته باشیم $a_k = k$. برای a_1 و a_2 هم به وضوح می‌توان دو حالت ۱ و ۲ یا ۲ و ۱ را در نظر گرفت. به این ترتیب تنها دو جای‌گشت $(1, 2, \ldots, n)$ و $(2, 1, 3, \ldots, n)$ خاصیت مورد نظر مسئله را دارند.

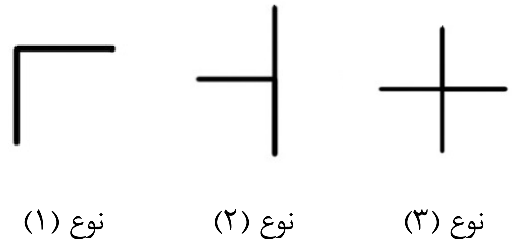
۲. قرار دهید

R : تعداد مستطیل‌ها، H : تعداد خطوط افقی

V : تعداد خطوط عمودی، X : تعداد چهارراه‌ها

می‌خواهیم ثابت کنیم $H + V + X = R + 3$. برای کار مجموع زاویه‌های مستطیل‌های پوشاننده را از دو روش محاسبه می‌کنیم. اولاً چون تعداد مستطیل‌ها R و جمع زوایای هر مستطیل 360° است، پس این مقدار برابر است با $R \times 360^\circ$. ثانیاً گره‌های شکل به صورت یکی از انواعی است که در شکل ۱ (ابتدای صفحه‌ی بعد) می‌بینید.

تعداد گره‌های نوع (۱) یعنی رأس‌های مستطیل بزرگ فقط ۴تا است. تعداد گره‌های نوع (۳) هم که Xتا است. اما تعداد گره‌های نوع (۲) چندتا است؟ اگر به شکل دقت کنید متوجه خواهید شد که هر یک از دو سر یک پاره‌خط افقی و عمودی به غیر از چهار ضلع مستطیل بزرگ به گره از نوع (۲) ختم



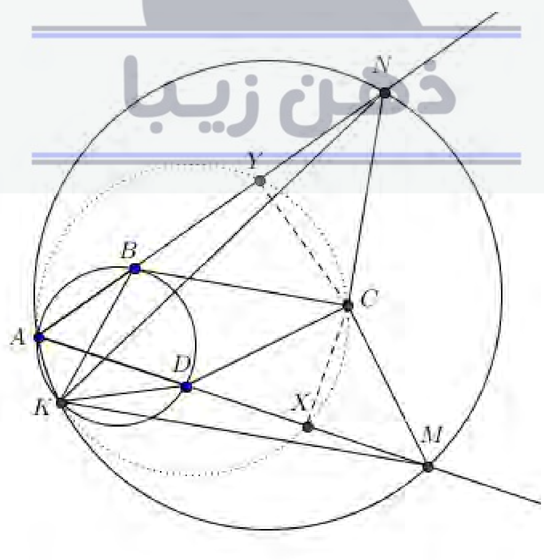
شکل ۱: انوع مختلف گره‌های موجود در شکل

می‌شود. بنابراین تعداد گره‌های نوع (۲) برابر است با $۲ \times (H + V - ۴)$. حال توجه کنید که گره‌های نوع (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب زوایای ۹۰°، ۱۸۰° و ۳۶۰° تولید می‌کنند. پس مجموع زاویه‌های مستطیل برابر است با:

$$۴ \times ۹۰^\circ + ۲ \times (H + V - ۴) \times ۱۸۰^\circ + X \times ۳۶۰^\circ = (H + V + X - ۳) \times ۳۶۰^\circ$$

از مقایسه‌ی این مقدار با مقداری که در ابتدا به دست آوردیم حکم مسئله نتیجه می‌شود.

۳. راه‌حل اول. نقطه‌های X و Y را به ترتیب وسط DM و BN بگیرید. با توجه به این که دو دایره در نقطه‌ی K متقاطع هستند، زاویه‌های $\angle KNB$ و $\angle KMD$ در دایره‌ی محیطی AMN روبه‌رو به کمان AK هستند و در نتیجه با هم برابرند. به همین ترتیب زاویه‌های $\angle KBA$ و $\angle KDA$ در دایره‌ی محیطی ABD روبه‌رو به کمان AK هستند و لذا با هم برابر هستند. برابری این زاویه‌ها نتیجه می‌دهد که دو مثلث KMD و KNB با هم متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌های $\angle KYB$ و $\angle KXD$ که زاویه‌های بین میانه و ضلع متناظر در این دو مثلث هستند با هم برابر می‌شوند. این برابری نتیجه می‌دهد که چهارنقطه‌ی A، K، Y و X روی یک دایره قرار دارند.



از طرف دیگر با توجه به این‌که $\angle ABC = ۱۳۵^\circ$ و $\angle BCN = ۹۰^\circ$ نتیجه می‌شود که مثلث BCN

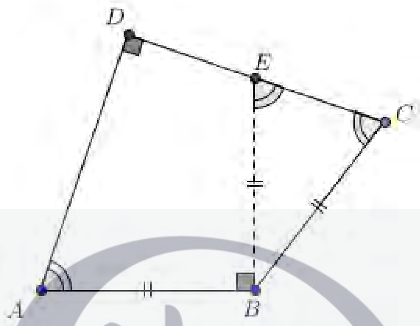
قائم‌الزوایه‌ی متساوی‌الساقین است و لذا میانه‌ی آن یعنی YC ارتفاع هم هست و این یعنی $\angle AYC = ۹۰^\circ$. با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $\angle AXC$ هم قائمه است. پس چهارنقطه‌ی A، Y، X و C هم روی یک دایره قرار دارند. بنابراین در کل پنج نقطه‌ی A، K، Y، C و X هم‌دایره هستند و در نتیجه $\angle AKC = \angle AYC = ۹۰^\circ$. بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

راه‌حل دوم. باید ثابت کنیم دایره‌ی محیطی مثلث ABD، دایره‌ی محیطی مثلث AMN و دایره‌ی به قطر AC، غیر از A در نقطه‌ی دیگری (K) هم‌رس هستند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم مرکزهای این سه دایره هم‌خط هستند. (چرا؟)

برای اثبات هم‌خطی مرکزهای این سه دایره، کافی است ثابت کنیم متجانس این مرکزها نسبت به A و به نسبت تجانس ۲ هم‌خط هستند. متجانس مرکز دایره به قطر AC، C می‌باشد. متجانس مرکزهای دایره‌های محیطی ABD و AMN را که البته نقطه‌ی مقابل قطری A در این دایره‌ها می‌باشند، به ترتیب P و S می‌گیریم. پس کافی است نشان دهیم سه نقطه‌ی P، S و C هم‌خط هستند. از آن‌جایی که زاویه‌های $\angle SMA$، $\angle PBA$، $\angle SNA$ و $\angle PDA$ قائمه هستند، لذا $SN \parallel PB$ و $SM \parallel PD$. بنابراین اگر محل برخورد PB با SM را L و محل برخورد PD و SN را R بنامیم، چهارضلعی $PRSL$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. حال به موقعیت نقطه‌ی C توجه کنید. فاصله‌ی C تا SL برابر فاصله‌ی C تا PD و هم‌چنین فاصله‌ی C تا SRوبرابر با فاصله‌ی C تا PL است. بنابراین C محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، و در

نتیجه نقطه‌های P، C و S هم‌خط هستند و حکم ثابت می‌شود.

۴. مطابق شکل در نقطه‌ی B عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند. چون $\angle B = \angle D = 90^\circ$، بنابراین $ADEB$ محاطی است و لذا $\angle BEC = \angle DAB$. از طرفی با توجه به فرضیات مسئله در مورد چهارضلعی $ABCD$، $\angle DAB = \angle BCD$، بنابراین $\angle BEC = \angle BCD$ و در نتیجه $BE = BC = AB$ بنابراین نقطه‌ی E روی CD نقطه‌ای ثابت در صفحه است، که مکان آن تنها به A و B بستگی دارد.



۵. فرض کنید $a + b\delta$ $(\delta \neq 0)$، یک ریشه‌ی $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ باشد. پس

$$0 = P(a+b\delta) = a_0 + a_1(a+b\delta) + \cdots + a_n(a+b\delta)^n$$

اما با توجه به این که $\delta^2 = 0$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای یا به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$(a+b\delta)^k = a^k + ka^{k-1}b\delta$$

بنابراین

$$0 = (a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n) + b\delta(a_1 + 2a_2a + \cdots + na_na^{n-1})$$

توجه کنید که اگر $u + \delta v = 0$، آن‌گاه با توجه به قرارداد ذکر شده در صورت مسئله $u = 0$ و $v = 0$. پس

$$a_0 + a_a + \cdots + a_na^n = P(a) = 0$$

و می‌توان نوشت $P(x) = (x-a)Q(x)$. حال باید نشان دهیم که a ریشه‌ی $Q(x)$ هم می‌باشد. برای این کار Q را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم، $Q(x) = (x-a)R(x) + c$ و

$$\begin{aligned} & P(x) = (x-a)((x-a)R(x)+c) \\ \Rightarrow \quad & 0 = P(a+b\delta) = b\delta(b\delta R(a+b\delta)+c) \\ & = b(b\delta^2R(a+b\delta)+c\delta) = bc\delta \end{aligned}$$

پس $bc\delta = 0$، و در نتیجه $bc = 0$ و چون $b \neq 0$، پس $c = 0$. بنابراین $P(x) = (x-a)^2R(x)$.
برای اثبات طرف دیگر چون a ریشه‌ی مضاعف $P(x)$ است، پس $P(x) = (x-a)^2R(x)$. در این صورت برای هر $x = a + b\delta$ $(b \neq 0)$ خواهیم داشت،

$$P(a+b\delta) = (b\delta)^2R(a+b\delta) = 0$$

۶. فرض کنید این ۲۰ نفر به ترتیب $x_۱$، $x_۲$،...، $x_{۲۰}$ بازی انجام داده باشند. چود در مجموع ۱۰۰ بازی انجام شده است، لذا $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۲۰} = ۲۰۰$.

تعداد راه‌های انتخاب دو تیم دو نفره با شرایط مسئله برابر است با $\binom{۱۰۰}{۲} - \sum_{k=۱}^{۲۰} \binom{x_k}{۲}$. زیرا برای انتخاب دو تیم دو نفره، که دو نفر هم‌تیمی با هم بازی کرده باشند، باید دو تا از ۱۰۰ بازی انجام‌شده را انتخاب کنیم (به $\binom{۱۰۰}{۲}$ روش) و دو نفر شرکت‌کننده در هر بازی را به عنوان یک تیم بگیریم. اما از این تعداد، باید حالاتی را که دو تیم عضو مشترک پیدا می‌کنند کم کنیم. تعداد حالت‌ها برابر $\sum_{k=۱}^{۲۰} \binom{x_k}{۲}$ است، زیرا اگر عضو مشترک دو تیم، نفر k باشد، دو عضو دیگر تیم‌ها باید از بین x_k نفری انتخاب شوند که با نفر k بازی کرده‌اند. پس،

$$۴۰۵۰ = \binom{۱۰۰}{۲} - \sum_{k=۱}^{۲۰} \binom{x_k}{۲} = ۴۹۵۰ - \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{۲۰} x_k^۲ + \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{۲۰} x_k$$

بنابراین $\sum_{k=۱}^{۲۰} x_k^۲ = ۲۰۰۰$. پس

$$\frac{۱}{۲۰}\sum_{k=۱}^{۲۰} x_k^۲ = \left(\frac{\sum_{k=۱}^{۲۰} x_k}{۲۰}\right)^۲$$

اما می‌دانیم که برای هر n عدد حقیقی $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$

$$\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} x_k^۲ \geq \left(\frac{\sum_{k=۱}^{n} x_k}{n}\right)^۲$$

و تساوی تنها زمانی اتفاق می‌افتد که $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n$. بنابراین در مسئله‌ی فوق هم باید $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_{۲۰}$ باشند.