# سؤالات بیست ودومین المپیاد ریاضی کشور سال ۱۳۸۳ (مرحله‌ی دوم)

۱) در مثلث قائم الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ ($\widehat{A} = 90^\circ$)، نقطهٔ $D$ محل برخورد نیمساز داخلی زاویهٔ $A$ با ضلع $BC$ و نقطهٔ $I_a$ مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر زاویهٔ $A$ است. ($I_a$ محل برخورد نیمسازهای زوایای خارجی $B$ و $C$ است.) ثابت کنید

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

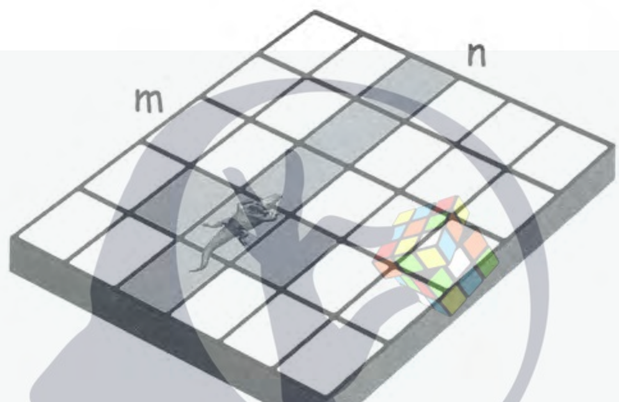
۲) فرض کنید $f : [0, \infty) \longrightarrow R$ دارای این خاصیت است که $f(x) - 3x$ و $f(x) - x^3$ توابعی صعودی اند. نشان دهید $f(x) - x^2 - x$ نیز صعودی است. ( تابع $g$ را صعودی گوییم هر گاه اگر $x \leq y$ آنگاه $g(x) \leq g(y)$ )

۳) وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفهٔ مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که دست کم در یکی از دو سرش نمایندگی دارد به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.

۴) همهٔ توابع $f : N \longrightarrow N$ را بیابید که برای هر $m,n$ طبیعی، $m+n$ بر $f(m)+f(n)$ بخش پذیر باشد.

۵) نیمساز داخلی زاویهٔ $A$ از مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، ضلع $BC$ و دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را، به ترتیب، در $D$ و $M$ قطع می‌کند.
خطی گذرنده از نقطهٔ $D$ دایرهٔ به مرکز $M$ و به شعاع $MB$ را در $X$ و $Y$ قطع کرده است.
ثابت کنید خط $AD$ زاویهٔ $\widehat{XAY}$ را نصف می‌کند.

۶) مهرهٔ تمساح در جدول $m \times n$ ($m \geq ۴$) می‌تواند همهٔ خانه‌های هم‌ستون خودش و همین طور خانه‌های مجاور هم‌سطر خودش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهرهٔ تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که همهٔ تمساح ها باید عمودی باشند.)



به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۳

---

۱. $BI$ نیم‌ساز زاویه‌ی $B$ است، بنابر قضیه‌ی نیم‌سازها داریم:

$$\frac{DI}{IA}=\frac{BD}{AB},\qquad \frac{DI}{IA}=\frac{I_aD}{I_aA}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{I_aA}{I_aD}=\frac{AD}{I_aD}+1$$

بنابرای کافی است نشان دهیم $\frac{BD}{AB}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$، داریم

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin(45^\circ)=\frac{BH}{AB}\leq\frac{BD}{AB}$$

که در آن $H$ پای عمود وارد از $B$ بر $AD$ می‌باشد و در نتیجه طول آن از طول $BD$ بیش‌تر نیست، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۲. فرض کنید $x\leq y$، باید نشان دهیم $f(x)-x^2-x\leq f(y)-y^2-y$. بنابر فرضیات مسئله داریم:

$$f(x)-3x\leq f(y)-3y,\qquad f(x)-x^3\leq f(y)-y^3$$

پس

$$f(y)-f(x)\geq 3y-3x,\qquad f(y)-f(x)\geq y^3-x^3$$

حال اگر نشان دهیم $f(y)-f(x)\geq y^2+y-x-x^2$، حکم ثابت می‌شود. برای این کار کافی است نشان دهیم $y^2+y-x-x^2$ از حداقل یکی از دو عبارت $3y-3x$ و $y^3-x^3$ کوچک‌تر یا مساوی است، فرض کنید مطلب اخیر درست نباشد، در این صورت

$$y^2+y-x^2-x>3y-3x,\qquad y^2+y-x^2-x>y^3-x^3$$

پس

$$(y-x)(y+x+1)>3(y-x),\qquad (y-x)(y+x+1)>(y-x)(y^+xy+x^2)$$

که با توجه به مثبت بودن $y-x$ داریم:

$$x+y+1>3,\qquad y+x+1>y^2+xy+x^2$$

اگر بگیریم $S=x+y$ و $P=xy$، نتایج بالا به شکل زیر در می‌آیند:

$$S>2,\qquad S+1>S^2-P$$

از طرفی با استفاده از نامساوی حسابی‌هندسی می‌توان دید که $P\leq\frac{S^2}{4}$، با استفاده از این رابطه و دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$S+\frac{S^2}{4}+1>S+P+1>S^2$$

در نتیجه $3S^2-4S-4<0$ که این مطلب با توجه به این‌که $S>2$ غلط می‌باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد $y^2+y-x^2-x$ از حداقل یکی از دو عبارت $3y-3x$ و یا $y^3-x^3$ کم‌تر یا مساوی است و این مطلب حکم را ثابت می‌کند.

۳. در صورت مسئله باید یک تصحیح به این شکل انجام شود که (( هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است.)) حال به حل مسئله می‌پردازیم. اگر فرض کنیم یک شرکت در $n$ شهر نمایندگی دارد، آن‌گاه حداکثر $\binom{n}{۲}$ جاده را می‌تواند مرمت کند. بنابراین باید داشته باشیم $۳۰ \leq \binom{n}{۲}$، که این رابطه نشان می‌دهد $n \geq ۹$، یعنی هر شرکت حداقل در ۹ شهر نمایندگی دارد.
بنابراین حداقل $۹ \times ۸۰ = ۷۲۰$ نمایندگی در شهرها وجود دارد، پس شهری وجود دارد که در آن حداقل

$$\left\lceil \frac{۷۲۰}{۱۰۰} \right\rceil = ۸$$

نمایندگی وجود دارد.

۴. اگر قرار دهیم $m = n$، داریم $۲f(n)|۲n$ پس $f(n)|n$. در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی $n$ باید $f(n) \leq n$.
حال فرض کنید $m$ عدد طبیعی دل‌خواهی باشد، در این صورت چون تعداد اعداد اول نامتناهی است پس عدد اول $P > m$ وجود دارد، حال به جای $n$ در رابطه‌ی اصلی $P - m$ را قرار می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$f(m) + f(P-m)|P \Rightarrow f(m) + f(P-m) = P$$

اما چون $f(m) \leq m$ و $f(P-m) \leq P-m$ پس با توجه به رابطه‌ی بالا در هر دو نامساوی اخیر تساوی برقرار است. پس $f(m) = m$ برای هر عدد طبیعی برقرار است. این مطلب نشان می‌دهد که تنها تابع مورد نظر تابع همانی است.

۵. در مسئله چهار نقطه‌ی $B$، $C$، $X$ و $Y$ روی یک دایره قرار دارند.(توجه کنید که چون $AD$ نیم‌ساز است، پس دو کمان $MB$ و $MC$ روی دایره‌ی محیطی با هم برابر هستند، در نتیجه $MB = MC$. پس دایره‌ی به مرکز $M$ و شعاع $MB$ از $C$ هم می‌گذرد.) پس داریم:

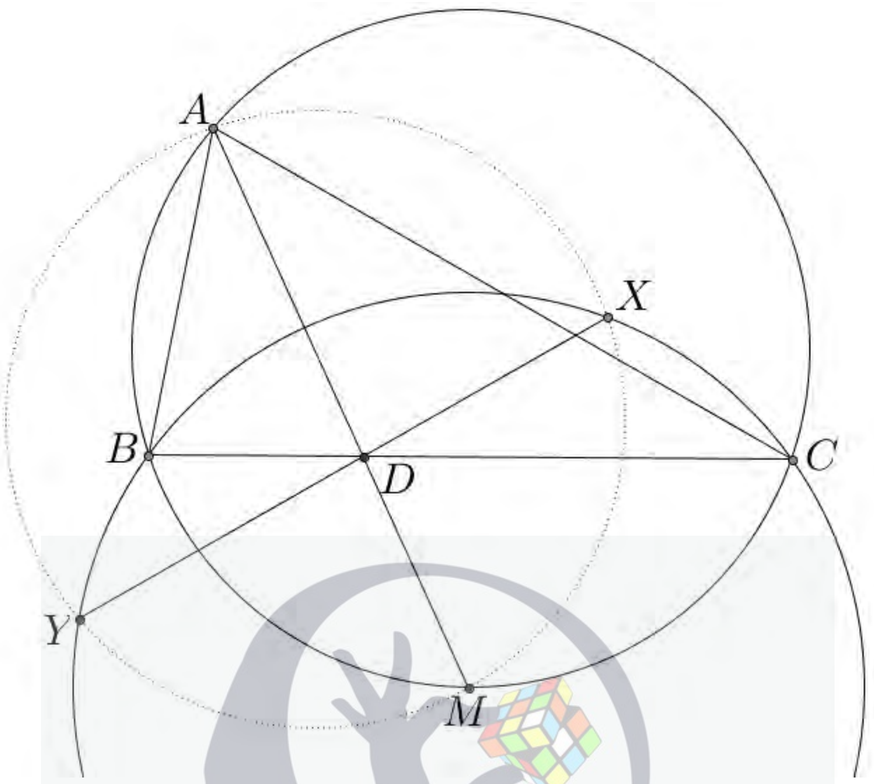
$$BD \times DC = DX \times DY$$

از طرفی چهار نقطه‌ی $A$، $B$، $C$ و $M$ نیز روی دایره‌ی محیطی قرار دارند. پس

$$AD \times DM = BD \times DC$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$AD \times DM = DX \times DY$$




پس چهارضلعی $AXMY$ محاطی است، در نتیجه $\angle YXM = \angle YAM$ ، $\angle XYM = \angle XAM$. با توجه به روابط اخیر و این که مثلث $XYM$ متساوی‌الساقین است($M$ مرکز دایره‌ای است که از $X$ و $Y$ می‌گذرد). داریم $\angle YAM = \angle MAX$ که همان حکم مسئله می‌باشد.

۶. اگر در هر ستون یک مهره‌ی تمساح قرار دهیم تمام خانه‌ها تهدید می‌شوند، یعنی با $n$ تمساح تمام صفحه تهدید می‌شود. نشان می‌دهیم که این کار با کم‌تر از $n$ تمساح امکان‌پذیر نیست. فرض کنید $\alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد تمساح‌ها در ستون $i$ام باشد. اگر تعداد مهره‌ها در ستون‌های $i_1$، $i_2$، ... و $i_k$ صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$\alpha_{i_1-1} + \alpha_{i_1+1} \geq m$$
$$\alpha_{i_2-1} + \alpha_{i_2+1} \geq m$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{i_k-1} + \alpha_{i_k+1} \geq m$$

دلیل این مطلب این است که اگر در یک ستون تعداد مهره‌ها صفر باشد چون هر کدام از خانه‌های این ستون باید تهدید شود، باید در دو ستون مجاور آن حداقل $m$ تمساح وجود داشته باشد.(اگر ستون اول و یا آخر مهره نداشته باشد تنها یک ستون مجاور دارد و باید در همه‌ی خانه‌های آن ستون تمساح باشد.) اگر همه‌ی این نامساوی‌ها را جمع کنیم، نتیجه می‌شود جمع همه‌ی آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $mk$ است. پس حداقل یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j-1} \geq \frac{mk}{2}, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j+1} \geq \frac{mk}{2}$$

(منظور از $\alpha_0$ و یا $\alpha_{n+1}$ در صورت نیاز صفر است.)

بنابراین $k$ تا از $\alpha_i$ها موجود هستند که مجموع آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{2}$ است. (توجه کنید که اگر ستون اول یا آخر تعداد مهره‌هایش صفر باشد، آن‌گاه ممکن است که $k-1$ تا از $\alpha_i$ها مجموع‌شان بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{2}$ باشد که این مطلب در تخمین ما به‌تر خواهد بود.)

حال در عبارت $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ که نشان‌دهنده‌ی تعداد مهره‌ها است، $k$ جمله برابر صفر است و مجموع حداکثر $k$ جمله‌ی دیگر حداقل $\frac{mk}{2}$ است و $n-2k$ جمله‌ی دیگر هم هر کدام حداقل یک هستند. پس

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \geq \frac{mk}{2} + (n-2k)$$

چون $m \geq 4$، داریم $\frac{mk}{2} \geq 2k$ پس

$$\frac{mk}{2} + (n-2k) \geq n$$

بنابراین حداقل به $m$ تمساح نیاز داریم و این مطب اثبات را تمام می‌کند.