

به نام او

## مرحله‌ی دوم بیست و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز اول

پنج‌شنبه، ۳ اردیبهشت ۱۳۸۸

(۱) فرض کنید  $p(x)$  یک چندجمله‌ای درجه دو است که قدرمطلق مقدار آن در سه نقطه‌ی  $-۱$ ،  $۰$  و  $۱$  کم‌تر یا مساوی یک است. نشان دهید برای هر  $x \in [-۱, ۱]$

$$|p(x)| \leq \frac{۵}{۴}.$$



(۲) یک باغ مربعی‌شکل را به یک شبکه‌ی  $۵۰ \times ۵۰$  از قطعات  $۱$  متر در  $۱$  متر تقسیم کرده‌ایم و در بعضی از قطعه‌ها یک درخت سیب، انار یا هلو کاشته‌ایم. می‌دانیم که مجاور هر درخت انار، دست‌کم یک درخت سیب و مجاور هر درخت هلو دست‌کم یک درخت انار و یک درخت سیب وجود دارد. به‌علاوه مجاور هر قطعه‌ای که در آن درختی نیست، از هر سه نوع درخت وجود دارد. (دو قطعه را مجاور گوییم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند).

نشان دهید تعداد قطعات خالی از  $۱۰۰۰$  تا بیش‌تر نیست.

## ذهن زیبا

(۳) فرض کنید نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی  $A$  از مثلث  $ABC$  ضلع  $BC$  را در  $D$  و دایره‌ی محیطی مثلث را در  $M$  قطع کند. از  $D$  خطی رسم می‌کنیم که دو نیم‌خط  $MB$  و  $MC$  (با نقطه‌ی شروع  $M$ ) را در نقاط  $P$  و  $Q$  قطع کند. ثابت کنید  $\hat{P}AQ \geq \hat{A}$ .

بارم هر سؤال ۷ نمره است.



(۴)  $n(n+2)$  سرباز تازه‌کار در  $n$  ستون برابر در کنار هم، به فاصله‌ی یک قدم، ایستاده‌اند. با فرمان فرمانده، هر سرباز یا سر جایش می‌ایستد یا به یکی از چهار جهت یک قدم بر می‌دارد! پس از جابه‌جایی، سربازها در  $n+2$  ستون برابر، به شکل منظم، قرار گرفته‌اند، به نحوی که دو سطر اول و آخر حذف و دو ستون به چپ و راست اضافه شده است. ثابت کنید  $n$  زوج است.

(۵) اعداد طبیعی  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  دارای این خاصیت هستند که برای هر  $i$  و  $j$  متمایز،  $a_j - a_i$  بخش‌پذیر است. نشان دهید برای هر  $i < j$ ،

$$ia_j \leq ja_i.$$

(۶) ۱۱ نفر دور یک میز دایره‌ای به شکل منظم نشسته‌اند و ۱۱ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۱ بین آن‌ها پخش شده‌است؛ ممکن است برخی کارتی نداشته باشند و برخی بیش از یک کارت داشته باشند. در هر مرحله یک نفر می‌تواند یکی از کارت‌های خود را به فرد مجاورش بدهد در صورتی که اگر شماره‌ی آن کارت  $i$  باشد، قبل و بعد از این عمل، مکان سه کارت  $i-1$ ،  $i$  و  $i+1$  تشکیل یک مثلث حاده‌الزاویه ندهند. (منظور از کارت شماره‌ی ۰ کارت شماره‌ی ۱۱ و منظور از کارت شماره‌ی ۱۲ کارت شماره‌ی ۱ است!)

فرض کنید در ابتدا کارت‌های ۱ تا ۱۱ به ترتیب در جهت عقربه‌های ساعت، به افراد داده شده باشد. ثابت کنید هیچ‌گاه کارت‌ها در دست یک نفر جمع نخواهد شد.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و هفتمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۸۸

۱. دقت کنید:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \frac{x(1+x)}{2}(a+b+c) - \frac{x(1-x)}{2}(a-b+c) + (1-x^2)c$$

$$= \frac{x(1+x)}{2}p(+1) - \frac{x(1-x)}{2}p(-1) + (1-x^2)p(0)$$

اگر  $0 \leq x \leq 1$  باشد، آن گاه:

$$|ax^2 + bx + c| \leq \frac{x(1+x)}{2} + \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{5}{4}$$

و اگر  $-1 \leq x \leq 0$ :

$$|ax^2 + bx + c| \leq -\frac{x(1+x)}{2} - \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \leq \frac{5}{4}$$

این نشان می‌دهد که برای هر  $x$  در بازه  $[-1, 1]$ ،  $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$ . ضمناً با توجه به این نابرابری‌ها تساوی زمانی رخ می‌دهد که:

الف.  $p(x) = \pm(x^2 - x - 1)$  در  $x = +\frac{1}{2}$

ب.  $p(x) = \pm(x^2 + x - 1)$  در  $x = -\frac{1}{2}$

۲. فرض کنید  $a_1, a_2, a_3, a_4$  به ترتیب نمایان‌گر تعداد درختان سیب، درختان انار، درختان هلو و خانه‌های خالی باشند. دقت کنید که هر خانه‌ی خالی، هر درخت هلو و هر درخت انار یک همسایه‌ی سیب دارند. همچنین با توجه به تعداد سیب‌ها که  $a_1$  است، حداکثر  $4a_1$  زوج خانه‌ی همسایه می‌توان یافت که یکی از آن‌ها درخت سیب باشد و دیگری درخت سیب نباشد. پس  $4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$ . اگر شمارش مشابهی را برای تعداد زوج خانه‌های مجاور که دقیقاً یکی از آن‌ها درخت انار و دیگری درخت هلو و یا خالی باشد انجام دهیم، می‌بینیم که هر خانه‌ی خالی و هر درخت هلو یک همسایه‌ی انار دارد و از طرف دیگر با توجه به این که هر درخت انار یک همسایه‌ی سیب دارد، حداکثر سه تا از همسایه‌های یک درخت انار می‌توانند هلو و یا خالی باشند. در نتیجه حداکثر  $3a_2$  زوج خانه‌ی مجاور با این خاصیت می‌توان یافت و لذا  $3a_2 \geq a_3 + a_4$ . با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که  $2a_3 \geq a_4$ . بنابراین:

$$2a_3 \geq a_4 \Rightarrow a_3 \geq \frac{a_4}{2}$$

$$3a_2 \geq a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + a_4 = \frac{3}{2}a_4 \Rightarrow a_2 \geq \frac{a_4}{2}$$

$$4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4 = 2a_4 \Rightarrow a_1 \geq \frac{a_4}{2}$$

پس در کل با توجه به این که  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 50 \times 50 = 2500$  داریم:

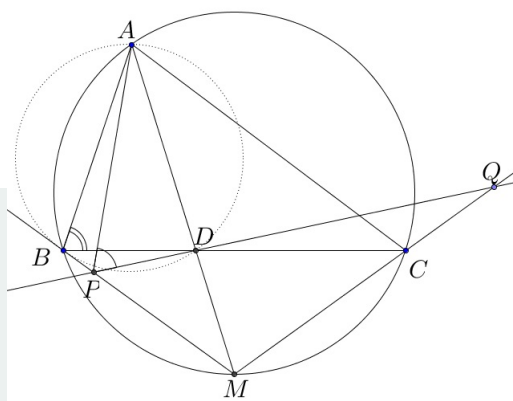
$$2500 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4 = \frac{5}{2}a_4 \Rightarrow 1000 \geq a_4$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۳. با توجه به این که  $AM$  نیم‌ساز زاویه‌ی  $BAC$  است، داریم:

$$\angle DBM = \angle CBM = \angle MAC = \frac{\angle BAC}{2} = \angle BAM$$

پس دایره‌ی محیطی مثلث  $ABD$  در  $B$  بر  $BM$  مماس است و در نتیجه نقطه‌ی  $P$  که روی این خط مماس قرار دارد، نمی‌تواند درون دایره باشد. بنابراین  $\angle APQ = \angle APD \leq \angle ABD = \angle B$  (اگر  $T$  را نقطه‌ی دیگر تقاطع  $PD$  با دایره‌ی محیطی  $ABD$  بگیریم، زاویه‌ی  $\angle ATD$  که برابر  $\angle ABD$  است زاویه‌ی خارجی مثلث  $APT$  خواهد بود و بنابراین از  $\angle APD$  کم‌تر نیست. با استدلال کاملاً مشابه می‌توان فهمید  $\angle AQP \leq \angle C$ . پس در کل:

$$\angle PAQ = 180^\circ - \angle APQ - \angle AQP \geq 180^\circ - \angle B - \angle C = \angle A$$


۴. ادعا می‌کنیم این عمل برای عدد طبیعی  $n > 2$  امکان پذیر است، اگر و تنها اگر برای  $n - 2$  امکان پذیر باشد. فرض کنید برای بیان چهار جهت از چهار واژه‌ی ”بالا“، ”پایین“، ”چپ“ و ”راست“ استفاده کنیم. دقت کنید که اگر  $n$  ستون  $n + 2$  تایی بخواهند به  $n + 2$  ستون  $n$  تایی تبدیل شوند، نفرات سطر بالا باید حتماً یک واحد به پایین حرکت کنند و نفرات پایین باید حتماً یک واحد به بالا بروند. به همین ترتیب نفرات سمت راست باید یک قدم به سمت چپ بروند و نفرات سمت چپ یک واحد به سمت راست بیایند. (البته به غیر از نفر بالایی و پایینی این ستون‌ها که در ستون بالا و پایین هستند و حرکتشان توضیح داده شد.) حال به بقیه‌ی سربازها توجه کنید. آن‌ها شامل  $n - 2$  ستون،  $n$  تایی هستند که باید به  $n$  ستون  $n - 2$  تایی تبدیل شوند. بنابراین ادعا ثابت می‌شود. بنابراین با تکرار چندباره‌ی این ادعا می‌توان دید که اگر  $n$  عددی زوج باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای  $n = 2$  قابل انجام باشد. همچنین اگر  $n$  عددی فرد باشد این کار قابل انجام است، اگر و تنها اگر برای  $n = 1$  قابل انجام باشد. این کار برای  $n = 1$  قابل انجام نیست، زیرا دو سرباز کناری هر دو تنها می‌توانند به خانه‌ی وسط بیایند و این امکان ندارد. اما در مورد  $n = 2$  به سادگی می‌توان دید که این کار قابل انجام است. پس این کار تنها زمانی ممکن است که  $n$  زوج باشد.

۵. برای هر زوج  $i < j$  از اعداد طبیعی متمایز، می‌دانیم که  $a_j - a_i | a_j$  و با توجه به اکیداً صعودی و طبیعی بودن  $a_i$  ها:

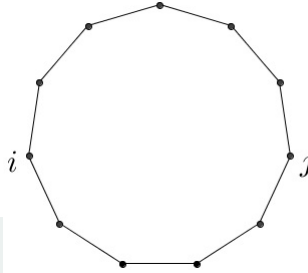
$$a_j > a_j - a_1 > a_j - a_2 > \dots > a_j - a_i$$

از طرف دیگر همه‌ی جمله‌های بالا مقسوم‌علیه  $a_j$  هستند. بنابراین اگر  $a_j > b_1 > b_2 > \dots > b_k$  همه‌ی مقسوم‌علیه‌های  $a_j$  باشند، خواهیم داشت  $a_j - a_i \leq b_i$ . حال از آن جا که  $b_i + 1$  امین مقسوم‌علیه بزرگ

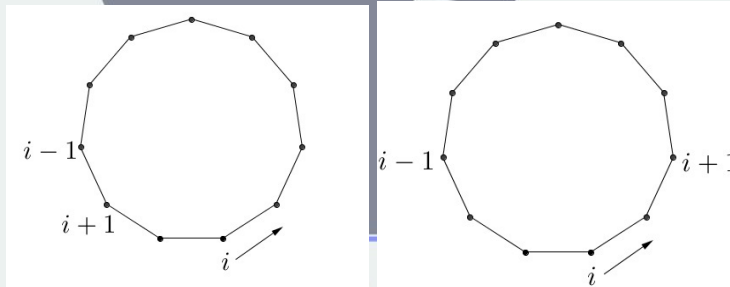
$a_j$  است،  $b_i \leq \frac{a_j}{i+1}$  و بنابراین در کل:

$$a_j - a_i \leq b_i \leq \frac{a_j}{i+1} \Rightarrow (i+1)(a_j - a_i) \leq a_j \Rightarrow ia_j \leq (i+1)a_i \leq ja_i$$

۶. ابتدا میز را به ۱۱ کمان برابر تقسیم کنید. حال اگر کارت‌های  $i$  و  $j$  در دو نقطه از جدول باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها را تعداد کمان‌های بین نقاط آن دو می‌گیریم (تعداد کمان‌های کم‌تر). به طور مثال در شکل زیر فاصله‌ی دو کارت  $i$  و  $j$  برابر ۵ است.



حال بعد از هر مرحله مجموع فاصله‌های کارت‌های با شماره‌های متوالی را محاسبه می‌کنیم. (دقت کنید که کارت ۱ با ۱۱ شماره‌ی متوالی دارند!) اگر محل کارت  $i$  در کمان کوچک‌تر بین  $i+1$  و  $i-1$  باشد، این مقدار تغییر نمی‌کند. (زیرا فاصله‌ی  $i+1$  و  $i-1$  تغییر نمی‌کند، اما در بین فاصله‌ی  $i$  و  $i+1$  و همین‌طور  $i$  و  $i-1$ ، از یکی یک واحد کم می‌شود و به دیگری یک واحد اضافه می‌گردد.) و در غیر این صورت دو واحد تغییر می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



مجموع فاصله تغییر نمی‌کند. دو واحد تغییر می‌کند.

بنابراین زوجیت این مقدار همواره ثابت می‌ماند. در ابتدا این مقدار برابر ۱۱ است و اگر قرار باشد همه‌ی کارت‌ها در یک نقطه جمع شوند، این مقدار باید برابر صفر شود که امکان ندارد.