به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

پنج‌شنبه، ۹ اردیبهشت ۱۳۸۹ | **روز اول** | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۱) a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a > b$. اگر دو عدد $ab - 1$ و $a + b$ نسبت به هم اول باشند و دو عدد $ab + 1$ و $a - b$ نیز نسبت به هم اول باشند، ثابت کنید $(ab+1)^2 + (a-b)^2$ مربع کامل نیست.

۲) n نقطه در صفحه داریم که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط نیستند. ثابت کنید تعداد مثلث‌هایی که رئوس آن‌ها از بین این n نقطه باشند و مساحت آن‌ها یک باشد، از $\frac{2}{3}(n^2 - n)$ بیش‌تر نیست.

۳) دایره‌های W_1 و W_2 در D و P متقاطع‌اند. A و B به ترتیب روی W_1 و W_2 هستند به طوریکه AB بر دو دایره مماس است. فرض کنید D نزدیک‌تر از P به خط AB باشد. AD دایره‌ی W_2 را برای بار دوم در C قطع می‌کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$D\widehat{P}M = B\widehat{D}C$$

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحلهٔ دوم بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

جمعه، ۱۰ اردیبهشت ۱۳۸۹ | **روز دوم** | زمان: چهار ساعت و نیم

---

۴) ضریب‌های چندجمله‌ای $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عددهایی حقیقی‌اند و

$$\min\{d, b+d\} > \max\{|c|, |a+c|\}$$

ثابت کنید که معادله‌ی $P(x) = 0$ در بازه‌ی $[-1,1]$ جواب ندارد.

۵) در مثلث ABC، $\widehat{A} = 60^\circ$. اضلاع AB و AC را از طرف B و C امتداد می‌دهیم و به ترتیب E و F را روی این امتدادها طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CF = BC$. نقطه‌ی K محل برخورد دایره‌ی محیطی مثلث ACE با EF (به غیر از E) است. ثابت کنید K روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد.

۶) مدرسه‌ای n دانش‌آموز دارد و تعدادی کلاس فوق برنامه برای آن‌ها تدارک دیده شده است که هر دانش‌آموز می‌تواند در هر تعداد از کلاس‌ها ثبت نام کند. در هر کلاس حداقل دو دانش‌آموز ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم که اگر دو کلاسِ مختلف، حداقل دو دانش‌آموز مشترک داشته باشند، آن‌گاه تعداد اعضای آن دو کلاس، متفاوت است. ثابت کنید تعداد کلاس‌ها از $(n-1)^2$ بیشتر نیست.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست و هشتمین دوره‌ی المپیاد ریاضی، ۱۳۸۹

---

۱. ابتدا دقت کنید که

$$(ab+1)^2+(a-b)^2=a^2b^2+a^2+b^2+1=(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$$

ادعا می‌کنیم که تحت شرایط مسئله a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند. زیرا اگر عامل اول مشترکی مثل p داشته باشند، تفاضل آن‌ها یعنی a^2-b^2 باید بر p بخش‌پذیر باشد. پس $p|a+b$ و یا $p|a-b$.

اگر $p|a+b$، با توجه به این که $(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ بر p بخش‌پذیر است، باید $ab-1$ هم بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه نسبت به هم اول بودن $a+b$ و $ab-1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. مشابه این حالت اگر $p|a-b$، با توجه به این که $(ab+1)^2+(a-b)^2=(a^2+1)(b^2+1)$ هم بر p بخش‌پذیر است، باید $ab+1$ بر p بخش‌پذیر باشد که با توجه به نسبت به هم اول بودن $a-b$ و $ab+1$ که فرض سؤال است امکان ندارد. پس در کل a^2+1 و b^2+1 نسبت به هم اول هستند و اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مربع کامل باشد هر دو مربع کامل هستند. یعنی عدد صحیح x یافت می‌شود که $x^2=a^2+1$. این نتیجه می‌دهد که $(x-a)(x+a)=1$ و چون $x-a$ و $x+a$ هر دو صحیح هستند باید هر دو برابر ۱ یا هر دو برابر ۱− باشند. پس در هر صورت با هم برابرند که این نتیجه می‌دهد a برابر صفر است که با طبیعی بودن a تناقض دارد. بنابراین این حاصل‌ضرب نمی‌تواند مربع کامل باشد.

۲. فرض کنید k مثلث با مساحت یک در بین مثلث‌های با رئوس در بین این نقاط موجود باشد. یک زوج از این نقاط را به دل‌خواه در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی بین این دو نقطه برابر d باشد. هر نقطه‌ی دیگری که مثلث تولید شده توسط آن و دو نقطه‌ی در نظر گرفته‌شده برابر یک باشد، باید فاصله‌ای برابر $\frac{2}{d}$ از خط شامل آن دو نقطه داشته باشد. پس این چنین نقاطی باید روی دو خط موازی(و به فاصله‌ی $\frac{2}{d}$) با پاره‌خط شامل آن دو نقطه قرار داشته باشند و از آن‌جا که طبق فرض مسئله روی هیچ خطی سه نقطه از نقاط قرار ندارند تعداد چنین نقاطی حداکثر ۴ است(روی هر کدام از دو خط حداکثر دو نقطه). حال دقت کنید که اگر برای همه‌ی $\binom{n}{2}$ زوج نقطه، تعداد این نقاط را بشماریم هر مثلث دقیقاً سه بار شمرده شده است. پس

$$4\binom{n}{2}\geq 3k \Rightarrow \frac{2}{3}(n^2-n)\geq k$$

و به این ترتیب حکم مسئله ثابت می‌شود.

۳. فرض کنید امتداد پاره‌خط PD که محور اصلی دو دایره است، پاره‌خط AB را در نقطه‌ی N قطع کند. چهارضلعی $BDPC$ محاطی است و در نتیجه $\angle BDC=\angle BPC$. بنابراین کافی است نشان دهیم $\angle DPM=\angle BPC$ یا معادلاً $\angle DPB=\angle MPC$. نقطه‌ی N روی محور اصلی دو دایره قرار دارد، بنابراین قوت آن نسبت به دو دایره برابر است:

$$NA^2=NB^2\Rightarrow NA=NB$$

حال داریم:

$$\angle PBC = \angle PDC = \frac{۱}{۲}\widehat{ADP} = \angle PAB$$

$$\angle PCB = \frac{۱}{۲}\widehat{PDB} = \angle PBA$$

پس مثلث‌های PCBو PBA متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌ی بین میانه و ضلع متناظر آن‌ها با هم برابر است. حال دقت کنید که PM میانه‌ی نظیر ضلع BC در مثلث PBC و PN میانه‌ی ضلع AB در مثلث PAB است و لذا $\angle DPB = \angle NPB = \angle MPC$ و این همان حکمی است که قصد اثبات آن را داشتیم.

۴. راه‌حل اول. به برهان خلف فرض کنید α یک ریشه‌ی حقیقی معادله باشد که $|\alpha| \leq ۱$. بنابراین:

$$P(\alpha) = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + b\alpha^۲ + c\alpha + d = ۰ \Rightarrow a\alpha^۳ + c\alpha = -(b\alpha^۲ + d)$$

$$\Rightarrow |\alpha||a\alpha^۲ + c| = |b\alpha^۲ + d| \Rightarrow |a\alpha^۲ + c| \geq |b\alpha^۲ + d| \geq b\alpha^۲ + d$$

حال دقت کنید که بیش‌ترین مقداری که تابع $f(x)|ax + c|$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ می‌پذیرد، به ازای یکی از مقادیر انتهایی بازه است. و به عبارتی $f(x) \leq \max\{f(۰), f(۱)\} = \max\{|c|, |a + c|\}$. پس:

$$|a\alpha^۲ + c| \leq \max\{|c|, |a + c|\}$$

با استدلالی مشابه می‌توان گفت که تابع خطی $g(x) = bx + d$ نیز کم‌ترین مقدار خود را در یکی از نقاط انتهایی می‌پذیرد. پس:

$$b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

حال بنابر رابطه‌های بالا داریم:

$$\max\{|c|, |a + c|\} \geq |a\alpha^۲ + c| \geq b\alpha^۲ + d \geq \min\{d, b + d\}$$

در نتیجه باید $\max\{|c|, |a + c|\} \geq \min\{d, b + d\}$ که با فرض مسئله در تناقض است، پس چنین αای وجود ندارد.

راه‌حل دوم. دقت کنید که

$$P(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d = (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ + c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$$

اگر $x \notin \{-۱, ۰, ۱\}$، ثابت می‌کنیم:

الف. $(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$

ب. $c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲)$

برای اثبات ادعای الف، می‌دانیم که $۰ < |x| < ۱$، پس

$$(a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ = x^۲((a + c)x + (b + d))$$

حال دقت کنید که:

$$b + d > |a + c \geq x(a + c)| \geq\Rightarrow (a + c)x^۳ + (b + d)x^۲ > ۰$$

برای اثبات ادعای ب دقت کنید که $۱ - x^۲ > ۰$ و در نتیجه:

$$d > |c| > |xc| \geq -xc \Rightarrow cx + d > ۰ \Rightarrow (۱ - x^۲)(cx + d) > ۰ \Rightarrow c(x - x^۳) + d(۱ - x^۲) > ۰$$

حال با جمع زدن رابطه‌های الف و ب به این نتیجه می‌رسیم که $P(x)$ ریشه‌ای در $[-۱,۱]$ ندارد، مگر احتمالاً در ۰، ۱+ و یا ۱− که این سه عدد را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$P(۰) = d > |c| \geq ۰$$
$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > a + c \Rightarrow P(-۱) > ۰$$
$$b + d > |a + c| \Rightarrow b + d > -a - c \Rightarrow P(۱) > ۰$$

پس این نقاط هم ریشه‌ی $P(x)$ نیستند و اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۵. زاویه‌ی $\angle BCT$ زاویه‌ای از مثلث متساوی‌الساقین BCE با زاویه‌ی خارجی $\angle ABC$ است، پس $\angle BCT = \frac{۱}{۲}\angle ABC$ و به طور مشابه $\angle CBT = \frac{۱}{۲}ACB$. پس:

$$\angle CTF = \angle BCT + \angle CBT = \frac{۱}{۲}\angle ABC + \angle ACB = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle BAC) = ۶۰^\circ$$

بنابراین چهارضلعی $ABTC$ محاطی است و در نتیجه $\angle EBF = \angle ACE = \angle AKE$. این نتیجه می‌دهد که $\angle ABF = ۱۸۰^\circ - \angle EBF = ۱۸۰^\circ - \angle AKE = \angle AKF$. پس چهارضلعی $ABKF$ محاطی است.
حال داریم که $\angle EBK = \angle CFK$ و $\angle BEK = \angle KCF$ و $BE = CF$، پس مثلث‌های KEB و KCF هم‌نهشت هستند و لذا $KE = KC$. به عنوان نتیجه دو کمان EK و KC برابر هستند و AK نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ خواهد بود.

۶. فرض کنید برای عدد طبیعی $۲ \leq i \leq n$، منظور از A_i مجموعه‌ی کلاس‌های iنفره باشد. نشان می‌دهیم که $|A_i| \leq \frac{n(n-۱)}{i(i-۱)}$. طبق فرض هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی از دانش‌آموزان حداکثر در یک کلاس از کلاس‌های A_i می‌توانند با هم شرکت کنند، پس به عبارتی $|A_i|\binom{i}{۲} \leq \binom{n}{۲}$. پس $|A_i| \leq \frac{n(n-۱)}{i(i-۱)}$.
حال می‌دانیم که

$$m = |A_۲| + |A_۳| + \cdots + |A_n|$$

در نهایت با جای‌گذاری نامساوی به دست آمده در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} m &\leq n(n-۱)\left(\frac{۱}{۲(۲-۱)} + \frac{۱}{۳(۳-۱)} + \cdots + \frac{۱}{n(n-۱)}\right) \\ &= n(n-۱)\left(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}\right) = n(n-۱)(۱ - \frac{۱}{n}) = (n-۱)^۲ \end{aligned}$$

و در نتیجه اثبات حکم به پایان می‌رسد.