

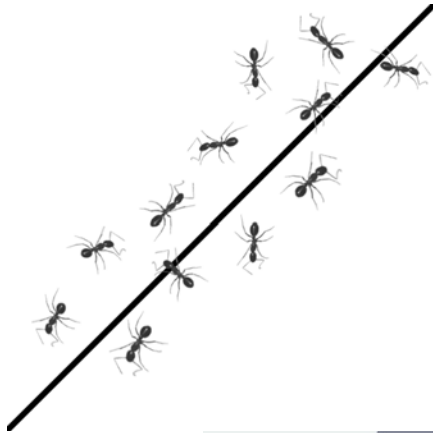
به نام او

مرحله دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز اول

پنجشنبه، ۸ اردیبهشت ۱۳۹۰



(۱) ۱۳۹۰ مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصله سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصله سر هر دو مورچه بیشتر از دو سانتی‌متر باشد فاصله سر دست‌کم دو مورچه بیشتر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه است!)

(۲) در مثلث ABC داریم $\widehat{ABC} = 6^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه \widehat{BAC} را در نقطه D قطع کند. همچنین از رأس C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه \widehat{ABC} را در نقطه E قطع کند. ثابت کنید $\widehat{BED} \leq 3^\circ$.

ذهن زیبا

(۳) همه دنباله‌های صعودی a_1, a_2, a_3, \dots از اعداد طبیعی را بنویسید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ ، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i + j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$ آن‌گاه $a_i \leq a_j$).

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

مرحله دوم بیست و نهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز دوم

جمعه، ۹ اردیبهشت ۱۳۹۰

۴) کوچکترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازه $(-1, 1)$ وجود داشته باشند که مجموع آنها صفر و مجموع مربعهای آنها 20 باشد.



۵) رنگین کمان نام پرندهای کمیاب است. این پرنده زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانش‌مندان حقیقت جدیدی درباره این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای i ام، j ام، k ام و l ام، که $i < j < k < l$ و این پرنده در روزهای i ام و k ام هم‌رنگ باشد و در روزهای j ام و l ام نیز هم‌رنگ و به رنگی متفاوت از روزهای i ام و k ام باشد. حداکثر طول عمر این پرنده بر حسب n چند روز است؟

۶) اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینه l نسبت به عمود منصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$ آن‌گاه $BD' + CE' = D'E'$.

بارم هر سؤال ۷ نمره است.

به نام او

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و نهمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۰

۱. راه حل اول. طبق اصل لانه کبوتری از ۱۳۹۰ مورچه، لااقل ۶۹۵ مورچه یک طرف خط مفروض قرار دارند. فرض کنید این طرف بالای خط باشد. در ادامه تنها آن مورچه‌هایی را در نظر می‌گیریم که در بالای خط قرار دارند.

محور x را در جهت خط و محور y را عمود بر آن انتخاب می‌کنیم و فرض کنید که (x_i, y_i) نمایش‌گر مختصات سر یک مورچه در بالای محور باشد. در این صورت برای دو مورچه‌ی مختلف i و j داریم که:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 2^2 = 4 \Rightarrow (x_i - x_j)^2 \geq 4 - (y_i - y_j)^2 \geq 3$$

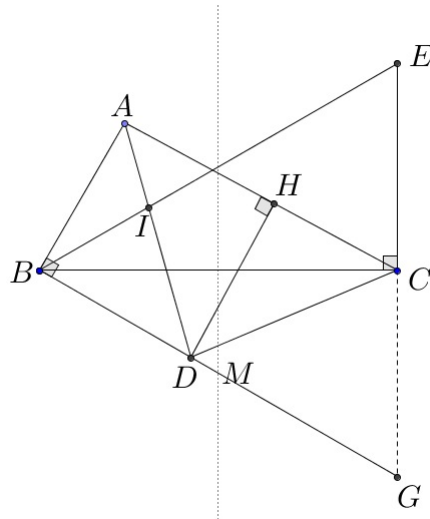
لذا برای هر دو مورچه‌ای در بالای خط داریم که $x_i - x_j \geq \sqrt{3}$ پس اگر فرض کنیم که مورچه‌ها بر حسب مختصه x مرتب شده‌اند، یعنی: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{695}$ داریم که فاصله‌ی هر دو عضو متوالی از دنباله‌ی فوق لااقل $\sqrt{3}$ است پس $1200 > 694 \times \sqrt{3} \geq x_{695} - x_1$ در نتیجه این دو مورچه در راستای x بیش از ۱۲ متر فاصله دارند پس کلاً فاصله‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۱۲ متر است.

راه حل دوم. اگر به مرکز سر هر مورچه دایره‌ای به شعاع یک سانتی‌متر رسم کنیم، فرض مسئله معادل این می‌شود که هیچ دو دایره‌ای هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند و همگی خط مورد نظر را قطع می‌کنند (چرا؟) همچنین این که همه‌ی دایره‌ها خط مورد نظر را قطع می‌کنند نتیجه می‌دهد که همه‌ی دایره‌ها به کلی داخل نواری به پهنای ۴ به مرکزیت خط قرار می‌گیرند.

با فرض خلف اگر فرض کنیم که سر همه‌ی مورچه‌ها درون طول ۱۰۰۰ سانتی‌متر قرار می‌گیرد می‌توان نتیجه گرفت که طول ۱۰۰۲ از نوار مورد نظر وجود دارد که همه دایره‌ها به کلی درون آن باشند. اما مساحت این ناحیه ۴۰۰۸ سانتی‌متر مربع است که از مجموع مساحت دایره‌های درون این ناحیه $(4367 \approx 1390\pi)$ کم‌تر است و این تناقض است.

توضیح: راه‌حل‌های دیگری نیز برای این مسئله وجود دارد که کران‌های به‌تری نیز می‌دهد.

۲. راه حل اول. مطابق شکل G را قرینه‌ی نقطه‌ی E نسبت به ضلع BC بگیرید. در این صورت BEG یک مثلث متساوی‌الساقین است ($BE = BG$) که یک زاویه‌ی 60° دارد ($\angle EBG = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} = 60^\circ$). پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر M را وسط ضلع BG از این مثلث بگیریم با توجه به این که در مثلث متساوی‌الساقین میانه همان ارتفاع است، $EM \perp BG$ و در نتیجه $\angle BEM = 30^\circ$. پس کافی است نشان دهیم که $BD \leq BM$. برای این منظور توجه کنید که نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle A$ است. پس اگر H پای عمود وارد از D بر AC باشد، $BD = DH$. اما از طرف دیگر با توجه به این که $DH \leq AC$ عمود است، $DH \leq DC$. پس در کل $BD \leq DC$. این نشان می‌دهد که D و B در یک طرف عمود منصف BC قرار دارند. اما می‌دانیم که عمود منصف BC ، طبق قضیه‌ی تالس BG را در نقطه‌ی وسطش یعنی M قطع می‌کند. در نتیجه D روی پاره‌خط BM قرار دارد و لذا $DB \leq BM$ و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.



راه حل دوم. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC که در این جا محل تقاطع BE و AD است را مطابق معمول با I نمایش می‌دهیم. α را برابر $\frac{1}{2}\angle BAC$ بگیریم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\angle IBD &= 90^\circ - \angle IBA = 90^\circ - \frac{\angle CBA}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \\ \angle CEB &= 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - \frac{\angle CBA}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ\end{aligned}$$

بنابراین در دو مثلث BED و BEC ، $\angle CEB = \angle EBD = 60^\circ$ و BE ضلع مشترک هر دو است. از آن جا که $\angle EBC = 30^\circ$ است، کافی است نشان دهیم که $BD \leq CE$ ولی می‌دانیم که $\frac{BD}{AB} = \tan \alpha$ و پس $\frac{EC}{BC} = \tan(30^\circ)$

$$\begin{aligned}BD \leq CE &\Leftrightarrow AB \tan \alpha \leq BC \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \frac{AB}{BC} \cdot \tan \alpha \leq \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \tan \alpha \frac{\sin(120^\circ - 2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \leq \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \alpha \sin(120^\circ - 2\alpha)}{\cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \leq \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \sin(120^\circ - 2\alpha) \leq 2 \cos^2 \alpha \cdot \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow \sin 120^\circ \cdot \cos(2\alpha) - \sin 120^\circ \cdot \sin(2\alpha) \leq (1 + \cos(2\alpha)) \tan 30^\circ \\ &\Leftrightarrow (\sin 120^\circ - \tan 30^\circ) \cdot \cos(2\alpha) - \cos 120^\circ \cdot \sin(2\alpha) \leq \tan 30^\circ\end{aligned}$$

حال برای نشان دادن این حکم معادل آخر از نامساوی کوشی شوارتز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&((\sin 120^\circ - \tan 30^\circ) \cdot \cos(2\alpha) - \cos 120^\circ \cdot \sin(2\alpha) \leq \tan 30^\circ)^2 \\ &\leq ((\sin 120^\circ - \tan 30^\circ) \cdot \cos(2\alpha) - \cos 120^\circ \cdot \sin(2\alpha) \leq \tan 30^\circ)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} = \tan^2(30^\circ)\end{aligned}$$

۳. ابتدا نشان می‌دهیم که این دنباله اکیداً صعودی است. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که برای یک عدد طبیعی i ، $a_i = a_{i+1}$. حال برای یک عدد اول بزرگ مثل p ، j را برابر $p - i$ قرار دهید. در این صورت $i + j$ اول است و تنها دو مقسوم‌علیه دارد. پس $a_i + a_j$ هم تنها دو مقسوم‌علیه دارد و در نتیجه اول است. اما $a_{i+1} + a_j = a_i + a_j$ و لذا $a_{i+1} + a_j$ هم اول بوده و در نتیجه دو مقسوم‌علیه دارد.

پس $i + j + 1 = p + 1$ هم اول است که امکان ندارد.
 حال i و j را برابر 2^{p-2} که p یک عدد اول است قرار دهید. در این صورت $i + j = 2^{p-1}$ p مقسوم علیه دارد.
 پس $2a_i$ هم باید p مقسوم علیه داشته باشد. حال اگر تجزیه‌ی $2a_i$ به عوامل اول به صورت $2^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_s + 1) = p$$

پس تنها یکی از $\alpha_i + 1$ می‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد و آن هم ناچاراً $\alpha_1 + 1$ است. پس $\alpha_1 = p - 1$ و در نتیجه $a_i = a_{2^{p-2}} = 2^{p-2}$. حال دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح داریم که در بی‌نهایت عدد صحیح مثل $a_k = k$ ، k شده است. در این صورت این دنباله مجبور است برای هر عددی این خاصیت را داشته باشد. پس تنها دنباله‌ای که در این خاصیت صدق می‌کند دنباله‌ی اعداد طبیعی است.

۴. فرض کنید اعداد حقیقی a_1, a_2, \dots, a_n شرط مسئله را برآورده کنند. در این صورت

$$20 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 < \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = n$$

پس $n \geq 21$. می‌خواهیم نشان دهیم که $n = 22$ جواب است. برای این منظور فرض کنید

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{21}$$

تعدادی عدد حقیقی در بازه‌ی $(-1, 1)$ باشند که $a_1 + a_2 + \dots + a_{21} = 0$ و $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{21}^2 = 20$. حال دقت کنید که $a_1 \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{21}}{21} \leq a_{21}$. پس $a_1 \leq 0 \leq a_{21}$. از طرفی با توجه به این که ۲۱ کوچک‌ترین عدد ممکن با این خاصیت است هیچ‌کدام از a_i ها نمی‌توانند صفر باشند. بنابراین عدد طبیعی مشخص k وجود دارد که

$$-1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k < 0 < a_{k+1} \leq \dots \leq a_{21} < 1$$

اگر $k \leq 10$ ، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq k + 1$ باید $0 < a_i < 1$ باشد و در نتیجه $0 < a_i^2 < a_i$. حال داریم:

$$\begin{aligned} 20 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{21}^2 = (a_1^2 + \dots + a_k^2) + (a_{k+1}^2 + \dots + a_{21}^2) \\ &< (a_1^2 + \dots + a_k^2) + (a_{k+1} + \dots + a_{21}) \\ &< (a_1^2 + \dots + a_k^2) + (-a_1 - a_2 - \dots - a_k) \\ &< 2k \leq 20 \end{aligned}$$

که یک تناقض است. اگر هم $k \geq 11$ ، با در نظر گرفتن دنباله‌ی $-a_i$ به جای a_i و تکرار استدلال بالا به تناقض می‌رسیم. پس n نمی‌تواند برابر ۲۱ باشد و لذا $n \geq 22$. برای $n = 22$ هم دنباله‌ی زیر شرایط خواسته شده را دارد.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{11} = -a_{12} = -a_{13} = \dots = -a_{22} = \sqrt{\frac{11}{10}}$$

پس پاسخ مسئله ۲۲ است.

۵. با استقرار روی n نشان می‌دهیم که حداکثر تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان برابر $2n - 1$ است. برای این تعداد روز اگر رنگ‌های مختلف را با شماره‌های $1, 2, \dots, n$ نمایش دهیم، دنباله‌ی زیر از رنگ‌ها که

طول آن برابر $2n - 1$ است به وضوح خاصیت خواسته شده را دارد.
 $(1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 1)$

در حالت $n = 1$ حکم کاملاً بدیهی است. حال فرض کنید که حکم برای اعداد کم‌تر از n درست باشد و می‌خواهیم حکم را در حالت n نتیجه بگیریم.

فرض کنید روز اول رنگین کمان R باشد و در k روز با شماره‌های R_1, R_2, \dots, R_k این رنگ را داشته است. (طبیعتاً $R_1 = 1$ است!)

حال هر کدام از بازه‌های $(R_1, R_2), (R_2, R_3), \dots, (R_{k-1}, R_k)$ و (R_k, \dots) را در نظر بگیرید. (منظور از بازه‌ی (R_i, R_{i+1}) روزهای بین روز R_i ام و R_{i+1} ام است.) اگر پرده در روز در دو بازه‌ی مختلف دارای یک رنگ باشد، فرض مسئله در مورد این دو روز و سر و ته بازه‌ی شامل روز اول به هم می‌خورد. بنابراین بازه‌های مختلف رنگ‌های مختلف دارند.

C_i را برابر تعداد رنگ‌هایی بگیرید که رنگین کمان در بازه‌ای که از روز R_i شروع می‌شود به خود می‌گیرد. طبق نتیجه‌ی بالا باید $\sum_{i=1}^k C_i = n - 1$ باشد. با توجه به این که $C_i < n$ است، طبق فرض استقرا تعداد روزهای بازه‌ای که از R_i شروع می‌شود حداکثر برابر $2C_i - 1$ است. تنها دقت کنید که تعداد روزهای بازه‌ی آخر ممکن است برابر صفر باشد که در این صورت تعداد کل روزهای عمر رنگین کمان حداکثر $k + \sum_{i=1}^{k-1} (2C_i - 1) = 2n - 1$ است. در غیر این صورت که این تعداد ناصفر باشد تعداد روزهای عمر رنگین کمان حداکثر $k + \sum_{i=1}^k (2C_i - 1) = 2n - 2 < 2n - 1$ است.

۶. فرض کنید که M وسط ضلع BC و a عمود منصف این ضلع باشد. X را نقطه‌ی تقاطع a و l بگیرید و به علاوه فرض کنید $\angle MCE = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$ باشد. Y را نقطه‌ای روی پاره‌خط DE بگیرید که $EY = EC$ و Z قرینه‌ی نقطه‌ی Y نسبت به عمود منصف BC باشد. (پس Z روی خط l' است.) در این صورت به وضوح چهارضلعی $BCYZ$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و در نتیجه یک چهارضلعی محاطی است. K را نقطه‌ی تقاطع دوم (غیر از Z) دایره‌ی محیطی این چهارضلعی با خط l' بگیرید. (اثبات در حالتی که این دایره بر l' مماس باشد کاملاً مشابه است. در این حالت K همان Z خواهد بود.) ادعا می‌کنیم که با این شرایط $D'B = D'K$ است.

$$\angle CED = 36^\circ - (\angle MCE + \angle CMX + \angle MXE) = 36^\circ - (18^\circ - \gamma + 9^\circ + \alpha) = 9^\circ + \gamma - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle CYE = \frac{18^\circ - \angle CED}{2} = \frac{18^\circ - 9^\circ - \gamma + \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

حال از آنجا که مثلث ZXY متساوی‌الساقین است، $\angle XYZ = 9^\circ - \angle MXE = 9^\circ - \alpha$ (۲)

$$(1), (2) \Rightarrow \angle CYZ = 180^\circ - (9^\circ - \alpha) - (45^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

چهارضلعی $CYKZ$ با توجه به نحوه‌ای که K را معرفی کردیم محاطی است و در نتیجه $\angle CKZ =$

$$\text{پس } \angle CYZ = 45^\circ + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle CKE' = 180^\circ - \angle CKZ = 135^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \angle CE'K &= 36^\circ - (\angle MCE' + \angle XMC + \angle MXE') \\ &= 36^\circ - (18^\circ - \gamma + 9^\circ + 18^\circ - \alpha) = \alpha + \gamma - 9^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}\angle KCE' &= 180^\circ - (\angle CE'K + \angle CKE') \stackrel{(۳),(۴)}{=} 180^\circ - (\alpha + \gamma - 90^\circ + 135^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{4}) \\ &= 135^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{4} = \angle CKE' \\ &\Rightarrow \angle KCE' = \angle CKE'\end{aligned}$$

پس نشان دادیم که مثلث $CE'K$ یک مثلث متساوی الساقین است و در نتیجه $CE' = KE'$. به طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $BD' = KD'$ و بنابراین در کل $D'E' = D'K + KE' = BD' + CE'$ و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

