واحد

سال اول شمارهٔ اول اول آبان ۱۳۰۹

ریاضیات

عالی و مقدماتی

مدیر مسئول و مؤسس
مصاحب

جای اداره: موقتا ادارهٔ
جریدهٔ قانون
(خیابان باب همایون)

اول و پانزدهم هر ماه منتشر می شود

(بهای نامه در ایران)

سالیانه: از ٤٠ تا ٢٥ قران (برای محصلین ١٠ قران)

ششماهه: فقط برای محصلین ٦ قران

1 er Anneé - Ne 1 JOURNAL DE 1 er Aban. 1309

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES ET SUPÉRIEURES

(Paraissant le 1er et le 15 de Chaque Mois)

DIRECTEUR : MOSSAHEB

Administration : Avenue Babe Homayoun

Abonnement Annuel

Perse : de 40 à 25 Krans.

ETRANGER : 60 FRANCS.

مطبعهٔ «فرهومند» طهران

مجلهٔ ریاضیات

عالی ومقدماتی

اول آبان ماه ۱۳۰۹ شمسی

مقصود ووظیفه ما چیست؟!

کتاب – مجله – روزنامه – قانون وحتی کاد
هر چیزی را احتیاج بوجود می آورد. اگر در علت ایجاد انها غور کنیم می بینیم ابتدا انسان
زا اشیاء احتیاج است یعنی که اگر در علت ایجاد انها غور کنیم می بینیم
احتیاج محیط را ابتدا انها دریافته وسپس در صدد ایجاد انها برآمده است. است
مجلهٔ ریاضیات عالی ومقدماتی نیز یکی از موالید احتیاجات محیط؛
یازده سال قبل نظیر چنین مجله دوام نمی یافت بلکه اصلا کسی بفکر ایجاد انهم نمی افتاد
چرا؟ برای اینکه در تمام ایران ۲ محصل متوسطه بیش نبود وامروز فقط در
طهران ۳۰۰۰ محصل و ۱۵۰۰ محصله مشغول تحصیل وفرا گرفتن علوم وفنون
ریاضیات است میباشند.

مخفی نماند که یکی از مهمترین انها ریاضیات که در نوع
بعبارهٔ اخری تا دیروز محیط احتیاج نداشت وامروز احتیاج ان بچنین مجله که در نوع
خود منحصر بفرد است در نزد اهل کمال واضح ومحتاج بتوضیح وتشریح نمیباشد.
پس از ارادهٔ این مقدمه یعنی پس از اینکه مسلم شد که مجلهٔ ریاضیات را احتیاج محیط
بوجود آورده تکلیف ووظیفه ان نیز معین می شود؛ **تشخیص احتیاجاتی**
که باعث ایجاد مجله شده وکوشیدن در دفع انها.
نکات وملاحظاتی که ما را وادار بانتشار چنین مجله نموده سه چیز است:

اولاً نظر باحتیاج محصّلین و محصّلات بوسائلی برای مشق و تمرین و ورزش فکری در ممالک اروپا هزاران کتاب و تألیفات متنوّعه و مجلّات علمی و فنّی تألیف و ایجاد نموده اند ولی در ایران محصّلین و محصّلات بکلّی از این وسائل عاری میباشند و هیچگونه وسیلهٔ برای اینکه فکر خود را بکار بیندازند ندارند. مجلّهٔ ریاضیات برای برطرف ساختن این نقص در هر یک از شماره ها مسائل حل شده از مقدّمات تا بالا راجع بتمام شعب علوم ریاضی - فیزیک - مکانیک و هیئت و غیره را در دسترس محصّلین و محصّلات و اشخاصی که در این علوم کار می کنند می نهد. بعضی از مسائلی که در صفحات مجلّه حل می شود منتخب از مسائلی که در امتحانات نهائی و مسابقه های ایران داده شده میباشد و برخی مسائلی هستند که دانشمندان محترم و آقایان محصّلین یا محصّلات باذوق طرح نموده باداره بفرستند. ضمناً هر مسئله که در شمارهٔ حل میشود در شمارهٔ که اقلاً یک ماه قبل از آن منتشر شده طرح میگردد. اینمدّت برای این است که خوانندگان محترم مجال تفکّر در حلّ مسائل را داشته باشند و ضمناً برای تشویق اسم هر مشترکی را که منتها پس از بیست و پنج روز پس از طرح مسئله باداره بفرستند در ذیل همان مسئله درج خواهد شد.

ثانیاً بسیاری از اشخاص هستند که فوق العاده شایق و مایل اند که از ترقّیات روز افزون علوم آگاهی یافته و بحدود مشکلات آنها مطّلع گردند واضح است که نیل باین مقصود وسیلهٔ جز مشترک شدن جرائد و مجلّات علمی اروپا که هر کدام قسمتی از این احتیاج را رفع می کند ندارد و این مطلب نیز مشهود است که یکنفر هیچگاه از عهدهٔ چنین عملی بر نمی آید و اساساً رفع این احتیاج بر عهدهٔ کتابخانه ها و قرائت خانه های ملّی میباشد که متأسّفانه هنوز در ایران تأسیس نشده است و تأسیس و ایجاد آنها یکی از بزرگترین آرزو های ادارهٔ مجلّهٔ ریاضیات است. باری مجلّهٔ ریاضیات برای اینکه در رفع این احتیاج تا حدّی که قدرت دارد کوتاهی نکرده باشد در هر شماره خلاصهٔ مطالب جدیده و اکتشافات و ترقّیات نو را از نظر مشترکین محترم خود می گذراند

ثالثاً و بالاخره نداشتن کتب علمی باعث اتلاف وقت بوده و زحمت زیادی برای

محصلین ایجاد می کند. ادارهٔ مجلهٔ ریاضیات برای رفع این اشکال در نظر دارد ـدهٔ کتب علمی متوسطه را که تألیف اغلب آنها تمام شده بحلیهٔ طبع درآورد. واضح است که موفقیت در این قسمت همچنانکه موفقیت در دو قسمتی که قبلاً بدانها اشاره رفت بدون تشویق و مساعدت مادی و معنوی طالبین علم و معرفت و دانشمندان محترم امکان پذیر نیست. فعلاً دورهٔ جبر و مقابلهٔ سالهای پنجم و ششم متوسطه را که تاکنون در ایران بطبع نرسیده است در انتهای شماره های مجلهٔ ریاضیات منتشر میکنیم. این کتاب بسیار ساده نوشته شده و در خور فهم کلیه محصلین این قسمت میباشد. در آخر هر فصل و هر قسمت آن هم مسائلی راجع بآن فصل طرح می گردد که خوانندگان محترم در مطالب تمرین و مشق نمایند ضمناً برای اینکه تا حدی که استطاعت داریم در خدمتگذاری بمعارف و فدا کاری در راه نشر علم و معرفت کوتاهی نکرده باشیم متذکر میشویم که مشترکین ما برای اینکه بهتر ورزیده شوند ممکن است مسائل انتهای فصول را حل کرده در جوف پاکت باداره ارسال دارند. ما زحمت تصحیح آنها را عهده دار شده و پس از تصحیح و تذکر ایرادات وارده بآدرس فرستندگان پس می فرستیم برای این قسمت فقط باید باندازهٔ تمبری که روی پاکت الصاق شده در جوف پاکت تمبر بگذارند و برای زحمت تصحیح آن هیچ گونه تحمیلی نمیشود.

اینها خلاصهٔ از نواقص و طرق اصلاح آنها بود ولی البته همان طور که در فوق هم گفتیم موفقیت کامل ما بسته بتشویق و مساعدتهای دانشمندان و ایران دوستانست و مطابق مثل مشهور یک دست صدا ندارد و تا بحال دیده نشده که یک نفر به تنهائی در کاری پیشرفتهای عمده حاصل کند. خلاصه چون صفحات مجله برای مقاصد عالیتر از این که در باب اهمیت آن مقاله نگارش یابد منتشر می گردد دیباچه را همین جا ختم کرده از باری تعالی موفقیت کامل را در خدمت بوطن عزیز و برادران و خواهران وطنی خود خواستاریم

(مصاحب)

مسائل حل شده و دستورات و مقالات مفید

I - حرکت (متمّم حساب مقدّماتی)

چون در هیچیک از کتب حساب مقدّماتی اسمی از حرکت بمیان نیامده متعلّمین دورهٔ اوّل متوسّطه تصوّر صحیحی در این مطلب و متعلّقات آن ندارند و بدین واسطه در حلّ مسائل راجع باین موضوع باشکالاتی بر میخورند لهذا بی مناسبت نیست که مختصری در این باب متذکّر شویم.

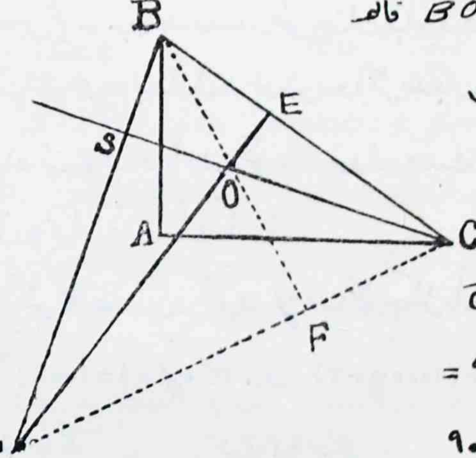
(دنباله دارد)

۱ - (حساب) - سه طفل مشغول گردو بازی میشوند. در موقع شروع عدّهٔ گردوهای آنها با اعداد ۷ و ۶ و ۵ متناسب بوده و پس از آنکه بازی تمام شد عدّهٔ گردوها با اعداد ۶ و ۵ و ۴ متناسب شد اوّلاً معلوم کنید کدام یک برده و کدام یک باخته اند؟ ثانیاً اگر یکی از اطفال دوازده گردو بیش از شروع ببازی داشته باشد کلیّهٔ چند گردو دارند و در ابتدای بازی هر یک چند گردو داشته اند؟

حل - می توان گفت عدّهٔ گردوها موقع شروع با اعداد $\frac{5}{18}$ و $\frac{6}{18}$ و $\frac{7}{18}$ و در موقع ختم با اعداد $\frac{4}{15}$ و $\frac{5}{15}$ و $\frac{6}{15}$ متناسب است و چون $\frac{5}{15} = \frac{6}{18}$ عدّهٔ گردوهای دوّمی تغییر نکرده و چون $\frac{5}{18}$ از $\frac{4}{15}$ بزرگتر است سوّمی باخته پس اوّلی برده است. بنابراین اختلاف $\frac{7}{18}$ و $\frac{6}{15}$ کلیّهٔ عدّهٔ گردوها مساویست با ۱۲ و چون $\frac{6}{15} - \frac{7}{18} = \frac{1}{90}$ عدّهٔ گردوها مساویست با: $90 \times 12 = 1080$ پس در موقع شروع بازی اوّلی $1080 \times \frac{7}{18}$

ششم اگر دود آ $۱۰۸۰ \times \frac{۵}{۱۸} = ۳۰۰$ وسوّمی $۱۰۸۰ \times \frac{۶}{۱۸} = ۳۶۰$ ودوّمی $= ۴۲۰$

۲- (هندسه)- فرض می‌کنیم O مرکز و E نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلّث قائم‌الزاویه ABC باوتر باشد. از نقطهٔ B عمود BS را بر CO فرود آورده و محلّ تقاطع آن را با شعاع OE به L می‌نمائیم. ثابت کنید که EL معادل نصف محیط مثلّث ABC است.



حل- مثلّث BOS قائم‌الزاویه و متساوی الساقین است زیرا:

$$\widehat{OBS} = \widehat{EBL} - \widehat{EBO} = ۹۰ - \frac{\hat{C}}{۲} - \frac{\hat{B}}{۲} = ۹۰ - \frac{B+C}{۲} = ۴۵$$

پس: BS = SO از طرف دیگر خطّ BO بر CL عمود است پس اگر F موقع آن باشد از مثلّث BFL نتیجه می‌شود $\widehat{FLB} = ۴۵^\circ$ بالنتیجه از مثلّث CSL چنین حاصل می‌شود: SL = CS و از این تساوی و تساوی فوق الذکر لازم آید که دو مثلّث BSC و SOL متساوی گردند پس LO = BC = a از طرف دیگر $OE = \frac{b+c-a}{۲}$ پس:

$$LE = EO + OL = \frac{b+c-a}{۲} + a = \frac{a+b+c}{۲}$$

۳- (جبر)- مطلوب است مقدار عددی:

$$x = \frac{(a^{۲}b^{۳})^{\frac{۱}{۴}}\, b^{-۲}\, c^{\frac{۱}{۳}}}{a^{\frac{۲}{۳}}\, b^{-\frac{۵}{۴}}\, c^{\frac{۱}{۴}}}$$

بازاء $a=۲$ و $b=۳$ و $c=۴۳۲$

حل - کسر فوق مساوی است با: $x=a^{\frac{۱}{۳}}b^{\frac{۱}{۲}}b^{-۲}c^{\frac{۱}{۳}}a^{-\frac{۲}{۳}}b^{\frac{۵}{۴}}c^{-\frac{۱}{۴}}$

$$=a^{\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}}\,b^{\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}-۲}\,c^{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}}=a^{-\frac{۱}{۳}}b^{-\frac{۱}{۴}}c^{\frac{۱}{۱۲}}=$$

$$\frac{c^{\frac{۱}{۱۲}}}{a^{\frac{۱}{۳}}b^{\frac{۱}{۴}}}=\frac{c^{\frac{۱}{۱۲}}}{(a^{۴}b^{۳})^{\frac{۱}{۱۲}}}=\sqrt[۱۲]{\frac{۴۳۲}{۲^{۴}\times ۳^{۳}}}=۱$$

۴ - (جبر) - دو عدد سه رقمی چنان بیابید که اگر بمجموعشان یک واحد بیفزائیم مجموع معادل هزار شود و اگر عدد بزرگتر را در سمت راست عدد کوچکتر بنویسیم یا عدد کوچکتر را در سمت بزرگتر قرار دهیم عدد اوّل ۶ برابر عدد ثانی باشد.

حل - اگر x عدد بزرگتر و y عدد کوچکتر باشد این دو معادله حاصل میشود: $x+y+1=۱۰۰۰$ و $۱۰۰۰x+y=۶(۱۰۰۰y+x)$

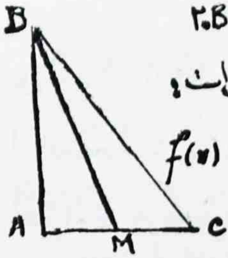
از آنجا $x=۸۵۷$ و $y=۱۴۲$.

II - دستگاههای درجهٔ دوّم.

حلّ دستگاههای دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوّم اغلب بسیار طولانی و مشکل و از حدود جبر مقدّماتی خارج است ولی در بعضی دستگاههای مخصوص می توان بسهولت مجهولات را تعیین کرد و چون این قسمت در جبر مقدّماتی بی اهمیّت نیست لازم می دانیم این قواعد را تذکّر داده بواسطهٔ امثلهٔ چندی آنها را مفهوم سازیم. (دنباله دارد)

۵ - (جبر) - از مثلّث قائم الزّاویهٔ ABC $(A=۹۰^{\circ})$ اضلاع $AC=b$ و $AB=c$ معلومند اوّلاً بین A و C نقطهٔ مانند M چنان تعیین کنید

که طول BM نصف مجموع AC و AM باشد؛ ثانیاً در حالتی که مسئله صاحب دو جواب است (M', M'') $BM' \times BM''$ و $BM' + BM''$ را بحسب b و c بدست آورید.



حل - ۱- فرض کنیم $AM = x$ باشد $2BM = AM + AC$ $= x + b$ خلاصه: $MB = \sqrt{x^2 + c^2}$ پس معادلهٔ مسئله این است:

$2\sqrt{x^2 + c^2} = x + b$ یا $f(x) = 3x^2 - 2bx + 4c^2 - b^2 = 0$

و از آنجا: $x = \frac{b \pm 2\sqrt{b^2 - 3c^2}}{3}$

بحث - شرط حقیقی بودن ریشه های معادله آنست که: $b^2 - 3c^2 \geq 0$ یا $b \geq c\sqrt{3}$. از طرف دیگر مقادیری از x قابل قبولند که بین ۰ و b واقع باشند. خلاصه $f(b) = 4c^2 > 0$ پس b همیشه خارج ریشه‌ها است و چون نصف مجموع دو ریشه $\frac{b}{3}$ از b کوچکتر است b از هر دو ریشه بزرگتر میباشد. پس باید هر دو ریشه مثبت باشند. امّا مجموع دو ریشه مثبت است بنابراین کافی است حاصل ضرب آنها $\frac{4c^2 - b^2}{3}$ مثبت باشد و برای این مقصود لازم است که $2c > b$ باشد. در این حالت مسئله دو جواب دارد در حالتی که $b > 2c$ باشد ریشه های معادله مختلف العلامه خواهند بود و فقط ریشهٔ مثبت قابل قبول است.

خلاصه: $c\sqrt{3} < b < 2c$ دو جواب — $b > 2c$ یک جواب.

بازاء $b = c\sqrt{3}$ نتیجه می‌شود: $x' = x'' = \frac{b}{3}$ و بازاء $b = 2c$: $x'' = \frac{2b}{3}$ است

۲- چون $2BM = x + b$: $BM' + BM'' = \frac{1}{2}(x' + x'' + 2b) = \frac{4b}{3}$

و $BM' . BM'' = \frac{b + x'}{2} \cdot \frac{b + x''}{2} = \frac{b^2 + c^2}{3}$

۴- (جبر) - دستگاه $f(x) = x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda = 0$ و $\varphi(x) = x^2 - 2\lambda x - 3 = 0$

مفروض است. λ را چنان تعیین کنید که دو معادله دارای یک ریشهٔ مشترک باشند.

حل - هر ریشهٔ مشترک از دو معادلهٔ فوق ریشهٔ مشترک تفاضلشان یعنی: $2x-\lambda-3=0$ خواهد بود و چون این معادله فقط بازاء $x=\frac{\lambda+3}{2}$ محقق می‌شود کافی است این مقدار در یکی از دو معادلهٔ فوق صدق کند مثلاً چون آن را در معادلهٔ $f(x)=0$ قرار دهیم حاصل می‌شود $(\lambda+1)^2=0$ از آنجا $\lambda=-1$ و مقدار ریشهٔ مشترک چنین است: $x=\frac{1+3}{2}=2$

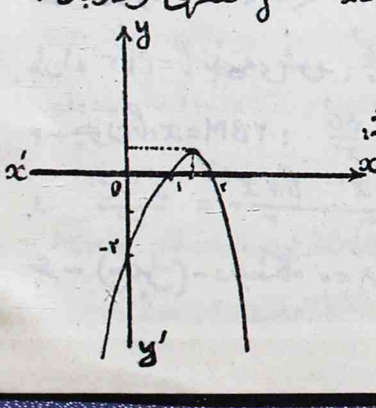
۷ - (جبر) - تابع $y=ax^2+bx+c$ مفروض است. میدانیم که تابع ماکزیمومی دارد معادل $+\frac{1}{4}$ و مجموع مکعبات ریشه‌هایش مساوی است با ۹ و بالاخره y - بازاء $\frac{3}{2}$ می نیموم دارد. مطلوبست محاسبهٔ a b c و نمایش تغییرات تابع حاصل.

حل - از مفروضات اول و سوم این دو معادله حاصل میشود:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{1}{4} \qquad -\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$$

بعلاوه: $x'^3+x''^3=(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')=\frac{b(3ac-b^2)}{a^3}=9$

از حل این سه معادله حاصل میشود: $a=-1$ و $b=3$ و $c=-2$ پس: $y=-x^2+3x-2$. بازاء $x=1$ و $x=2$ y صفر می‌شود و بازاء $\frac{3}{2}$ ماکزیمومی دارد معادل $\frac{1}{4}$ و خلاصهٔ تغییرات آن از جدول و منحنی ذیل معلوم می‌گردد:



x	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$\frac{3}{2}$	↗	2	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	-2	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↘	$-\infty$

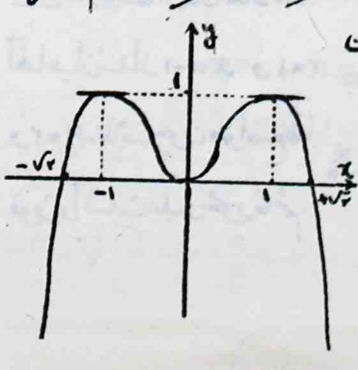
۸-(**مشتقات**)- تابع $y = 2x^2 - x^4$ مفروض است. اولاً مطلوبست نقاطی که در آنها مماس موازی محور طول است. ثانیاً تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع. ثالثاً معادلهٔ مماس مرسوم از نقطهٔ از منحنی که طولش ۲ باشد و معادلهٔ خطی که از نقطهٔ تماس بر مماس عمود شود. (این خط قائم بر منحنی خوانده می شود)

حل- ۱- برای اینکه در نقطهٔ مماس موازی محور طول باشد باید مشتق تابع صفر گردد خلاصه مشتق y عبارتست از: $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2)$ و چون بازاء $x=0$ و $x=\pm 1$ $y'=0$ میشود در این نقاط مماس موازی محور طولست عرض نظیر این طولها عبارتند از ۰ و ۱ و ۱

۲- مشتق تابع علامت $x(1-x^2)$ را دارد. اینمقدار در فاصله $(-\infty, -1)$ مثبت (تابع صعودی) در فاصلهٔ $\underbrace{\text{منفی}}_{}$ $(-1, 0)$ (تابع نزولی) در فاصلهٔ $(0, +1)$ مثبت (تابع صعودی) و بالاخره در فاصلهٔ $(+1, +\infty)$ منفی میباشد (تابع نزولی) پس بازاء $x = \pm 1$ تابع ماکزیموم و بازاء $x=0$ می نیموم دارد. بعلاوه y بازاء $x=0$ و $x=\pm\sqrt{2}$ صفر گشته و بازاء $x=\pm\infty$ مساویست با $-\infty$. خلاصهٔ اینمطالب در جدول ذیل مشهود میگردد

x	$-\infty$	↗	$-\sqrt{2}$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$+\sqrt{2}$	↗	$+\infty$
y'			$+$		0	$-$	0	$+$	0		$-$		
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+1$	↘	0	↗	$+1$	↘	0	↘	$-\infty$

چون مواضع نقاط فوق را معین نموده بین آنها را وصل کنیم این منحنی حاصل می شود:



۳- عرض نقطهٔ از منحنی که طولش ۲ باشد مساویست با ۸- و ضریب زاویهٔ مماس در این

نقطه معادلست با : ۲۴- = (۴-۱) ۲ × ۴ پس معادلهٔ مماس این است :

$y+8=-24(x-2)$ یا $y+24x-40=0$. ضریب زاویهٔ قائم مماس است

با $\frac{1}{24}$ پس معادلهٔ آن چنین است $y+8=\frac{1}{24}(x-2)$ یا $24y-x+194=0$

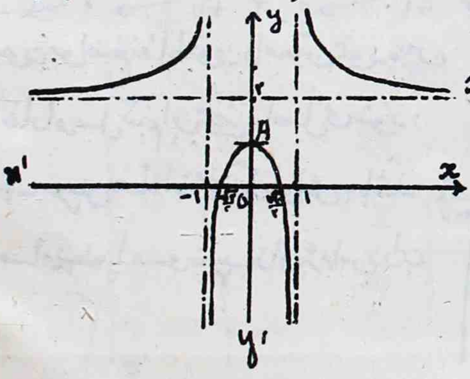
۹ - (مشتقّات) - تابع $y=\frac{2x^2-1}{x^2-1}$ مفروض است. نقطهٔ مانند $A(0,1)$ بر منحنی نمایش این تابع فرض می‌کنیم. اوّلاً معادلهٔ خطّ مماس بر این نقطه را بنویسید؛ ثانیاً معیّن کنید در چه نقطهٔ این خط محور عرضها را قطع می‌کند. (مسابقهٔ مدرسهٔ نظام سنه ۱۳۴۶ قمری)

حل - اوّلاً باید منحنی نمایش تابع را رسم کرد. برای این مقصود ملاحظه می‌کنیم که بازاء $x=\pm1$ تابع منفصل و بازاء $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ صفر می‌شود و بازاء $x=\pm\infty$ بسمت ۲ میل می‌کند مشتق آن

$$y'=\frac{4x(x^2-1)-2x(2x^2-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

بازاء $x=0$ صفر شده از + به - میرود پس بازاء این مقدار x تابع ماکزیمم دارد معادل ۱ . در فاصلهٔ $(-\infty,0)$ که مشتق مثبت است تابع صعودی و در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ نزولی می‌باشد. خلاصهٔ این مطالب در جدول ذیل مشهود می‌شود

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
y'				+			0			—			
y	2	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	2



منحنی سه مجانب دارد و معادلات آنها عبارتند از $x=-1$ و $x=1$ و $y=2$ خلاصه چون مواضع نقاط فوق را نسبت بدو محور قائم

تعیین نموده بین آنها را وصل کنیم منحنی مطلوب حاصل میشود
اوّلاً چون در نقطهٔ A تابع ماکزیمومی دارد معادلهٔ مماس مطلوب عبارت
از $y=1$ ثانیاً نقطهٔ A خود نقطهٔ تلاقی مماس و محور عرض است .

۱۰ـ (هندسه) ـ ثابت کنید که اگر P و C و B و A چهار نقطهٔ واقع بر خط مستقیم باشند رابطهٔ ذیل برقرار است :

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0 \qquad \text{(اولی)}$$

دلیل اوّل ـ اگر P را مبدء قرار داده و طول نقاط A و B و C را نسبت باین مبدء به a و b و c بنمائیم اثبات رابطهٔ فوق باثبات این اتحاد راجع می شود :

$$a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)\equiv 0$$

و صحت این مطلب بدیهی است .

دلیل دوّم ـ بنابر قضیهٔ شال : $\overline{PA}=\overline{PC}+\overline{CA}$ و $\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{CB}$

حال اگر طرفین تساوی اوّل را در $\overline{BC}$ و طرفین دوّمی را در $\overline{CA}$ ضرب نموده جمع کنیم نتیجه می شود

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}=\overline{PC}(\overline{BC}+\overline{CA})+\overline{CA}\cdot\overline{BC}+\overline{CB}\cdot\overline{CA}$$

و چون ملاحظه کنیم که جملهٔ اخیر طرف دوّم صفر و جملهٔ داخل پرانتز معادل $\overline{AB}$ ـ است حکم ثابت می شود

۱۱ـ (مثلّثات) ثابت کنید که اگر در مثلّثی $\beta=45^\circ$ و $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ باشد زاویه γ معادل ۱۲۰ درجه است (مسابقهٔ فوائد عامه سنه ۱۳۰۷)

حل ـ از قضیه جیوب حاصل می شود : $\sin\alpha=\frac{a}{b}\sin\beta$ اما $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

پس $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ بالنتیجه: $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

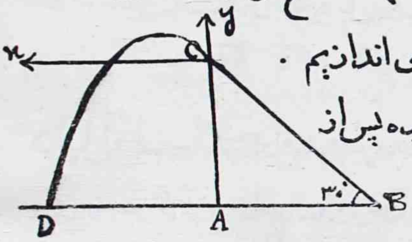
$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ وچون $\alpha < 45^\circ$: $\cos\alpha = +\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

پس: $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos 45^\circ + \cos\alpha\sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وچون γ منفرجه است ناچار: $\gamma = 120^\circ$

۱۲- (فزیك و مكانیك). از نقطهٔ B انتهای سطح مورّب BC جسمی را با سرعت اوّلیهٔ ۱۰ متر در ثانیه بطرف بالا می اندازیم. این جسم بدون اصطکاک بر سطح مورّب لغزیده پس از ۲ ثانیه بنقطهٔ C میرسد و از آنجا حرکت خود را ادامه داده و در نقطهٔ D بزمین می افتد بنا بر آنکه $\hat{B} = 30^\circ$ باشد مطلوبست محاسبهٔ AD $(g = 980\,cm)$



حل - حرکت جسم بر سطح مورّب حرکت متغیّرهٔ منتظم است مبطئه که سرعت اوّلیه اش ۱۰۰۰ سانتی متر در ثانیه و شتابش $g\sin\alpha = \frac{980}{2} = 490\frac{cm}{sec^2}$ است پس معادلهٔ این حرکت چنین خواهد بود $e = 1000t - 245t^2$ (۱) و سرعت آن چنین است $v = 1000 - 490t$. بنابراین متحرّك با سرعت $1000 - 490\times 2 = 20\frac{cm}{sec}$ به C میرسد و از آن بعد معادلهٔ مسیرش نسبت بدو محور قائم Cx و Cy که اوّلی موازی AB و دوّمی بر آن عمود است چنین خواهد بود: $y = x\,tg\,\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$

یا: $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{49x^2}{30}$ خلاصه در نقطهٔ D ؛ $y = AC$. برای محاسبهٔ AC ملاحظه می کنیم که اگر در معادلهٔ (۱) $t = 2$ فرض شود حاصل میشود $BC = e = 2000 - 980 = 1020$ پس $|AC| = BC\sin 30 = 510$ بنابراین $AD = x$ از معادلهٔ ذیل بدست آید

$$-510 = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{49x^2}{30}$$

تنها ریشهٔ مثبت این معادله قابل قبول است و آن مساوی است با: $x = 17,8$ سانتی متر.

« ریاضیّات عالی »

۱۳- (آنالیز) - مخروط دواری مفروض است. اولاً مطلوبست معادلهٔ منحنی که مولد های مخروط را بزاویهٔ ثابتی قطع کند. ثانیاً مطلوبست مکان هندسی مرکز انحناء منحنی سؤال اوّل در نقاط مختلف آن ثالثاً ثابت کنید که مماسهاء مرسوم بر دو منحنی در نقاط متناظره بر هم عمودند.

حل - برای سهولت راس مخروط را مبدء و محور آنرا محور z قرار میدهیم. برای تعیین معادلهٔ آن فرض میکنیم $M(x, y, z)$ نقطهٔ از سطح بدن آن و α زاویهٔ محور با مولد ها و θ زاویهٔ محور طول با تصویر OM بر سطح xOy باشد مختصات نقطهٔ M چنین خواهند بود، $x = z\,tg\alpha\cos\theta$, $y = z\,tg\alpha\sin\theta$, $z = z$

در این معادله دو پارامتر موجود است: (θ, z) و برای اینکه منحنی مرسوم بر این سطح بدست آید کافی است بین این دو پارامتر رابطهٔ برقرار کنیم مثلاً اگر فرض کنیم $z = f(\theta)$ منحنی ذیل یکی از منحنیاتی است که بر مخروط مفروض رسم شده:

$$x = tg\alpha\cos\theta f(\theta) \qquad y = tg\alpha\sin\theta f(\theta) \qquad z = f(\theta) \tag{1}$$

از طرف دیگر معادلهٔ یکی از مولد ها این است،

$$x = z\,tg\alpha\cos\theta \qquad y = z\,tg\alpha\sin\theta \tag{2}$$

پس پارامترهای کثور های این مولد عبارتند از 1 , $tg\alpha\sin\theta$, $tg\alpha\cos\theta$

و چون پارامتر دیر کثورهاء مماس بر منحنی (۱) عبارتند از:

$$dx = tg\alpha\,(f'\cos\theta - f\sin\theta)\,d\theta$$

$$dy = tg\alpha\,(f'\sin\theta + f\cos\theta)\,d\theta$$

$$dz = f'\,d\theta$$

باید: $\pm\dfrac{tg\alpha\cos\theta dx + tg\alpha\sin\theta dy + dz}{\sqrt{1+tg^2\alpha}\,\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$ مقدار ثابتی داشته باشد و اگر این مقدار ثابت را به $\cos\beta$ نموده بجای dx و dy و dz مقدارشان را قرار داده اختصارات لازمه را بجا آوریم نتیجه می شود: $\dfrac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \pm\dfrac{\sin\alpha}{tg\beta}$

از آنجا: $f(\theta) = c\,e^{\pm\frac{\sin\alpha}{tg\beta}\cdot\theta}$ و اگر برای سهولت $c\,tg\alpha$ را به a و $\pm\dfrac{\sin\alpha}{tg\beta}$ را به K بنمائیم معادلات منحنیات مطلوب چنین میشود

$$\left\{x = a\cos\theta e^{K\theta}\ ,\quad y = a\sin\theta e^{K\theta}\ ,\quad z = c e^{K\theta}\right. \tag{3}$$

۲ — مرکز انحنای منحنی در هر نقطه واقع است بر قائم اصلی مارّ بر آن نقطه و فاصلهٔ آن از نقطهٔ مفروض معادل شعاع انحنای منحنی در آن نقطه می باشد پس باید شعاع انحنای منحنی (۳) و (کسینوس دیرکتور) های قائم اصلی آن را حساب کرد. برای این گوئیم اگر α و β و γ کسینوس دیرکتورهای مماس باشند: $\alpha = \frac{dx}{ds}$ و $\beta = \frac{dy}{ds}$ و $\gamma = \frac{dz}{ds}$ خلاصه:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{2K\theta}\left[a^2(1+K^2) + c^2K^2\right]d\theta^2$$

یا اگر برای اختصار مقدار داخل کروشه را به m^2 بنمائیم: $ds = m e^{K\theta} d\theta$ پس:

$$\alpha = \frac{a}{m}(-\sin\theta + K\cos\theta) \text{ و } \beta = \frac{a}{m}(\cos\theta + K\sin\theta) \text{ و } \gamma = \frac{cK}{m}$$

خلاصه اگر طول قوس را متغیّر مطلق قرار داده شعاع انحنا را به R بنمائیم:

$$R^2 = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2$$

و چون: $\frac{d\alpha}{ds}$ و $\frac{d\beta}{ds}$ و $\frac{d\gamma}{ds}$ را حساب کنیم از رابطهٔ فوق نتیجه می شود: $R = \pm \frac{m^2}{a\sqrt{K^2+1}} e^{K\theta}$. اینک از روی دستورات (فرنه) (کسینوس دیرکتورهای) قائم اصلی بدست آمد ($\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds}$ وغیره) و از آنجا مختصات مرکز انحنا بدست می آید:

$$\begin{cases} x_1 = a e^{K\theta}\cos\theta + \frac{m^2}{a(1+K^2)} e^{K\theta}(-\cos\theta - K\sin\theta) \\ y_1 = a e^{K\theta}\sin\theta + \frac{m^2}{a(1+K^2)} e^{K\theta}(-\sin\theta + K\cos\theta) \\ z_1 = c e^{K\theta} \end{cases}$$

۳ — برای اثبات قسمت سوّم کافی است مبرهن کنیم که:

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0$$

و اثبات این مطلب را که فقط عملیات جبری است بعهدهٔ خوانندگان محترم می گذاریم.

مسائل حل کردنی

مسئله - بنابر آنکه ۷۵ گاو در ۱۲ روز علف مزرعه را که ۶۰ آر وسعت دارد نشخوار نموده باشند و ۸۱ گاو در ۱۵ روز علف مزرعهٔ بوسعت ۷۲ آر را نشخوار کرده باشند چند گاو لازم است تا در ۱۸ روز علف چمنی بوسعت ۹۶ آر را نشخوار کنند بنابر آنکه در موقع ورود گاوها ارتفاع علف در سه چمن مساوی بوده و نمو آنها نیز متماثلا انجام گیرد؟ (حل حسابی) (نیوتون) (Newton)

مسئله - در مسئلهٔ فوق بجای اعداد حروف اختیاری قرار داده مسئله را حل نمائید.

مسئله - مطلوب است مقدار عددی عبارت x^3+3x+2 بازاء $x=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}}$ - مسئله ثابت کنید که اگر از نقطهٔ واقع بر محیط دایرهٔ محیطی مثلثی سه عمود بر اضلاع آن وارد آوریم موقع آنها بر پای استقامت خواهند بود. (سمسون) (Simpson)

مسئله - مثلث ABC مفروض است. فرض می کنیم G محل تلاقی سه میانه و M نقطهٔ غیر مشخصی از سطح مثلث باشد. اولاً مطلوب است محاسبهٔ $\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$ بحسب اضلاع مثلث ثانیاً ثابت کنید که: $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3\overline{MG}^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ ثالثاً نقطهٔ در سطح مثلث چنان بیابید که مجموع مربعات فواصلش از رؤس کمترین مقدار ممکنه را داشته باشد

مسئله - دستگاه ذیل را حل کنید:

$$x^2+y^2+z^2=14 \qquad y(x+z)=8 \qquad x^2z^2-4xz+3=0$$

مسئله - مطلوب است حد $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ وقتی $x\to a$

مسئله - مطلوب است اولاً تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$ ثانیاً x در چه حدودی تغییر کند تا y بتواند

جیب قوسی مانند α گردد؟

مسئله - منحنی $y=-x^3+2x-1$ وخط $y+2x+1=0$ مفروض است. نمایش منحنی وخط را نسبت بدو محور رسم کرده قطعهٔ از سطح را که در سمت راست محور yy' محصور بین خط و منحنی و محور $x'x$ است حساب کنید.

(سال ششم دار المعلمین مرکزی سنه ۱۳۰۷)

مسئله - معادلهٔ $\sin x+\cos x=a$ را حل کنید. تعیین کنید بزرگترین مقدار a را که بازاء آن معادلهٔ مفروض دارای جواب میباشد. (مسابقهٔ نفط سنهٔ ۱۳۰۶)

مسئله - در هر منشور $\Delta=A+A'-2A$. ثابت کنید که بازاء مقداری از A Δ می نیموم دارد و مقدار مینیموم را حساب کنید

مسئله - حسن وحسین وعلی با زنهای خود مسماة به اختر و عصمت وعفت ببازار رفته و هر یك آنقدر دستمال می خرند که عدهٔ آنها مساوی قیمت یك دستمال باشد بحسب قران. بنابر آنکه خرج هر مردی ۶۳ قران بیش از خرج زنش باشد وبعلاوه حسن ۲۳ دستمال بیش از عصمت وحسین ۱۲ دستمال بیشتر از اختر خریده باشد زن هر یك را تعیین کنید.

مسئله - مطلوبست محاسبهٔ سطح مثلثی که مختصات رؤسش $(1,2,5)$ و $(8,3,6)$ و $(9,7,5)$ باشد

مسئله - توابع $\frac{\sqrt{1-\cos^3(x-a)}}{x-a}$ و $\frac{\sin\frac{1}{x-a}}{1+e^{\frac{1}{x-a}}}$ بازاء $x=a$ منفصل اند. مطلوبست نوع انفصال هر یك.

مسئله - مطلوبست محاسبهٔ $\int_1^2\frac{dx}{x^2(x^2+x+1)^2}$ (امتحان آگرگاسیون ریاضیات پاریس سنهٔ ۱۸۸۱)

مسئله - منحنی $y=\frac{u-\frac{au^2}{2}}{U+a}$ و $x=\frac{1-2au}{U+a}$ و $z=\frac{a}{U+a}$ که در آن U تابعی است از u مفروض است. U را چنان تعیین کنید که وقتی a تغییر کند تا میل فوق دارای انولیپ باشد. (لیسانس Bordeaux امتحان کتبی)

مصاحب — جبر و مقابله

فصل اول - حدود

۱- **تعریفات** - کمیتی را که مقادیر مختلفه اختیار کند **متغیّر** خوانند (مانند درجهٔ حرارت یک اطاق) مقداری را که متغیّر نباشد **ثابت** اصطلاح کرده اند. معمولاً مقادیر متغیّره را بحروف اواخر الفبا و مقادیر ثابته را بحروف اوایل می نمایند.

اغلب وقتی متغیّری تغییر می کند تغییراتش موجب تغییرات یک یا چند متغیّر دیگر می گردد در این صورت متغیّرها را **تابع** یکدیگر خوانند مثلاً شعاع دایره و سطح آن تابع یکدیگرند.

معمولاً وقتی چند متغیّر در مسئلهٔ دخالت داشته باشند فرض می کنند یکی از آنها بخودی خود تغییر کند و آنرا **متغیّر مطلق** می خوانند. بدیهی است که متغیّرهای دیگر بتبعیت متغیّر مطلق تغییر می کنند و از این جهت است که آنها را **تابع** آن می نامند مثلاً اگر شعاع دایره متغیّر مطلق فرض شود سطح و محیط آن تابع شعاع خواهند بود.

ممکن است مقداری تابع چندین متغیّر مطلق باشد مانند حجم مکعب مستطیل که تابع طول و عرض و ارتفاع جسم است. در آنچه ذیلاً می گوئیم توابعی را منظور نظر قرار میدهیم که فقط تابع یک متغیّر مطلق باشند.

برای نمودن این که y تابع x است حرف اخیر را در داخل پرانتزی که مقدّم بر آن یکی از حروف f یا g یا h یا φ یا ψ وغیره میباشند قرار میدهند مثلاً $y=f(x)$. مقدار عددی y بازاء $x=a$ چنین نموده می شود: $f(a)$

مثال- از تساوی $y=f(x)=5x^2+3x-1$ معلوم می شود که y تابع x است و مقدار عددی آن بازاء $x=1$ و $x=0$ و $x=-1$ بترتیب چنین اند+:

۲- **حد**- هرگاه متغیّری مانند x در ضمن تغییرات خود آنقدر بمقدار ثابت a نزدیک شود که $|a-x|$ از هر مقدار کوچک مثبت اختیاری مانند ε (هر قدر کوچک که بخواهیم) کوچکتر گردد گویند x بسمت a میل می کند و یا a حدّ x است و این مطلب را چنین می نمایند:

$$x \longrightarrow a \quad \text{یا} \quad a = \lim x$$

مثال ۱- اگر فرض کنیم $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$ از دستورات

+ $f(1)=5+3-1=7$ و $f(0)=-1$ و $f(-1)=5-3-1=1$

تصاعد هندسی نتیجه می شود: $x_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ از آنجا: $\frac{1}{2^{n-1}} = 2 - x$. طرف ثانی را از هر مقدار مثبت اختیاری (هرقدر کوچک که بخواهیم) می توان کوچکتر نمود مثلاً اگر بخواهیم $\frac{1}{2^{n-1}}$ از $\frac{1}{1{,}000{,}000}$ کوچکتر شود کافی است n را معادل ۲۱ اختیار کنیم. ازاین مقوله معلوم می شود که وقتی n فوق العاده زیاد شود $2 - x$ از هر مقدار مثبتی مانند ε کوچکتر می گردد پس بازاء $n=\infty$: $x_n \to 2$ یا $\lim x_n = 2$.

مثال ۲ـ فرض کنید زید ۱۶ تومان داشته باشد و هر روز نصف پول خود را خرج کند روز اول ۸ تومان. روز دوم ۴ تومان. روز سوم ۲ تومان. روز چهارم یک تومان برای او خواهد ماند و هکذا بقسمیکه دارائی زید بسمت صفر میل میکند.

مثال ۳ـ فرض کنیم $x_1 = 0{,}6$ و $x_2 = 0{,}66$ و $x_3 = 0{,}666$ و .... و $x_n = 0{,}\overbrace{66\ldots6}^{n\ \text{عدد}}$ وقتی n بی نهایت بزرگ شود x_n بسمت $\frac{2}{3}$ میل می نماید.

مثال ۴ـ محیط (وسطح) کثیرالاضلاع محیطی و محاطی بسمت محیط (وسطح) دایرهٔ محاطی یا محیطی میل میکند. بعبارهٔ اخری حدّ محیط (وسطح) یکی از دو کثیرالاضلاع فوق محیط وسطح دایرهٔ مذکور است.

تبصره ـ ۱ـ مقداری را که حدّش صفر باشد بی نهایت کوچک خوانند مثلاً وقتیکه x بی نهایت زیاد شود $\frac{1}{x}$ بی نهایت کوچک است. (معمولاً مقادیر بینهایت کوچک بیکی از حروف ε و η وغیره نموده می شود.)

۲ـ هرگاه مقدار مطلق کمیتی از هر مقدار مثبتی (هرقدر بزرگ که بخواهیم) تجاوز کند گویند آن مقدار از حیث قدر مطلق بی نهایت بزرگ است. مثلاً $\frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ وقتیکه x بی نهایت بزرگ است وبعلامت ∞ نموده می شود.

فرع ـ هرگاه $|a-x|$ بی نهایت کوچک باشد. a حد x است وبالعکس

۳ـ قضایای ذیل مهم ترین قضایای مبحث حدود می باشند:

۱ـ هرگاه از دو متغیّر x و y که پیوسته باهم مساویند اوّلی بسمت a میل کند دومی نیز بسمت a میل می نماید.

ب - اگر دو متغیر x و y پیوسته باهم مساوی و بترتیب بسمت a و b میل کند: $a=b$

ج - هرگاه چند مقدار دارای حدودی باشند حد مجموع (حاصل ضرب) آنها مساوی است با مجموع (حاصل ضرب) حدودشان.

د - هرگاه دو متغیر دارای حدودی باشند حد تفاضل (خارج قسمت) آنها مساوی است با تفاضل (خارج قسمت) حدودشان. برای نمونه قضیهٔ (ج) را در بارهٔ دو عامل ثابت کرده اثبات بقیه را بعهدهٔ خوانندگان محترم می گذاریم: فرض کنیم a_1 و a_2 بترتیب حد x_1 و x_2 باشند. بنابفرع فوق $a_1 - x_1 = \varepsilon_1$ و $a_2 - x_2 = \varepsilon_2$ از آنجا: $(a_1 + a_2) - (x_1 + x_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. فرض کنیم η بزرگترین ε ها باشد. تساوی فوق چنین نوشته می شود: $(a_1 + a_2) - (x_1 + x_2) < 2\eta$ و چون η را می توان از هر مقدار مثبت مفروضی کوچکتر نمود طرف اول نامساوی فوق از هر مقدار دلخواهی کوچکتر می شود پس: $\lim (x_1 + x_2) = a_1 + a_2 = \lim x_1 + \lim x_2$

۴ - **صور مبهم** - گاهی در تعیین مقدار عددی تابعی بازاء مقدار مخصوصی از متغیر مطلق مثلاً $x=a$ صور مبهمی از قبیل $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty-\infty$ و امثال اینها دست میدهد. اگرچه با محاسبات جبر مقدماتی رفع این ابهامها در صورت کلی ممکن نیست مع ذلک قواعد مخصوصی هست که بعداً احتیاج الیه ما خواهد شد و ما بذکر آنها مبادرت می کنیم:

۱ - $\frac{0}{0}$. هرگاه بازاء $x=a$ کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ بیرون آید موافق یکی از قضایای جبر مقدماتی دو جملهٔ کسر هر یک بقوتی از $x-a$ قابل قسمتند و پس از حذف عامل مشترک دو جمله که وجودش باعث ابهام شده ابهام رفع می گردد.

مثال - مطلوبست مقدار عددی $\frac{x^2-1}{x^3-1}=y$ بازاء $x=1$. بازاء این مقدار صورت و مخرج کسر صفر میشوند پس هر دو به $x-1$ قابل قسمت می باشند و پس از حذف این عامل از دو جمله نتیجه میشود: $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ حال اگر $x=1$ شود y معادل $\frac{2}{3}$ می گردد. این مقدار را **مقدار حقیقی** y بازاء $x=1$ خوانند.

۲ - **قضیه** - مقدار هر کثیر الجملهٔ صحیح بازاء $x=\pm\infty$ همان مقدار جملهٔ بالاترین درجه است.

برهان - اگر کثیر الجملهٔ مفروض $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + l$ را بصورت $ax^n(1 + \frac{b}{ax} + \dots + \frac{l}{x^n})$ نوشته و x را بسمت ∞ میل دهیم

دیده میشود که $f(x)$ بسمت مقدار ax^n میل می کند.

۳ـ مقدار کسر $y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+l}{\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\dots+\lambda}$ بازاء $x=\pm\infty$ ـ بنا بقضیهٔ فوق مقدار صورت و مخرج بترتیب همان مقدار ax^n و αx^m است پس مقدار y معادل مقدار $\frac{ax^n}{\alpha x^m}$ میباشد بنا براین اگر $m=n$ باشد y بسمت $\frac{a}{\alpha}$ میل می کند و اگر $n<m$ باشد حد آن صفر است و بالاخره اگر $n>m$ باشد y از حیث قدر مطلق بی نهایت بزرگ می شود.

مثال ـ کسور $\frac{2x^2+1}{x^2-6}$ و $\frac{x-x^6}{2+x^5}$ و $\frac{-7x}{x^2+1}$ وقتی $x=\pm\infty$ شود بترتیب بسمت ۲ و $\mp\infty$ و صفر میل می کنند.

۴ـ گاهی اوقات ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ بواسطهٔ تقسیم دو جملهٔ کسر بقوهٔ مناسبی از x رفع میشود مثلا برای تعیین مقدار واقعی $y=\frac{x^2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^4-1}+2x^2}$ بازاء $x=+\infty$ چون صورت و مخرج را به x^2 تقسیم کنیم نتیجه می شود: $y=\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}}}{2+\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}$ حال اگر $x\to+\infty$ این کسر بسمت $\frac{1}{2}$ میل می کند. (دنباله دارد)

«مسائل حل کردنی»

۱ـ ثابت کنید که اگر $f(x)=a^x$ و $\varphi(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ باشد این دو رابطه برقرار است $f(\alpha+\beta)=f(\alpha\beta)$ و $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)=\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$ وبعد $\frac{f(x+h)}{f(x-h)}$ و $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ را حساب کنید.

۲ـ مطلوبست مقدار هر یک از توابع ذیل بازاء مقداری از x که در زیر آنها نوشته شده

$\underset{x=2}{y}=\frac{3x-6}{x^2-7x+2}$ $\underset{x=1}{y}=\frac{1-x}{1-x^2}$ $\underset{x=a}{y}=\frac{x^6-a^6}{x-a}$ $y=\frac{x}{x^2-1}$

$\underset{y=2}{z}=\frac{y^3-2y^2-y-2}{y^2-5y+6}$ $\underset{x=2}{y}=\frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$

$\underset{x=-2}{y}=\frac{x^4+7x^3+18x^2+20x+8}{x^4+9x^3+30x^2+44x+24}$ $\underset{x=1}{y}=\frac{x^3-x}{x-1}$

$\underset{x=\infty}{y}=\frac{x^2-2x-7}{x^3+5x}$ $\underset{x=\infty}{y}=\frac{3x^2-5x+4}{2x-1+8}$ $\underset{x=-\infty}{y}=\frac{1}{x^2}$

$\underset{x=2}{y}=\frac{x+\frac{x+2}{x-2}}{x-1+\frac{x}{x-2}}$ $\underset{x=\infty}{y}=\frac{2x^3+6x^2-7}{4x^3-x^2-x-1}$ $\underset{x=\infty}{y}=\frac{5x+7}{2x+1}$

$\underset{x=0}{y}=\frac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x}$ $\underset{x=\infty}{y}=\frac{x+1}{2^{x+1}}:\frac{x}{2^x}$

$\underset{x=1}{y}=\frac{x^5-2x^3+2x^2-2x+1}{x^3+x^2-4x+2}$ $\underset{x=a}{y}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{a-x}$ $\underset{x=a}{y}=\frac{2x^2-ax-a^2}{3x^2-4a^2x+a^2}$

آقای میرزا الهه‌خان اکرام - شیراز - معارف

اعتذار

دراین شماره بواسطهٔ تفصیل مقدمه مجبور شدیم در کلیهٔ قسمتها باختصار کوشیده و حتی بعضی مطالب را حذف نمائیم . امید واریم در شماره های بعد این نقیصه جبران گردد

(پاورقی مجلهٔ ریاضیات)

از شماره آینده پاورقی مجلهٔ ریاضیات

« عالم دزد »

شروع میشود از خواندن آن غفلت نکنید .

داستان

(عزیز و غزال)

رمان شیرینی است بقلم سید اشرف الدین حسینی مدیر نامهٔ نسیم شمال جلدے یك قران در تمام کتابخانه ها بفروش میرسد .   نمره اعلان (۱)