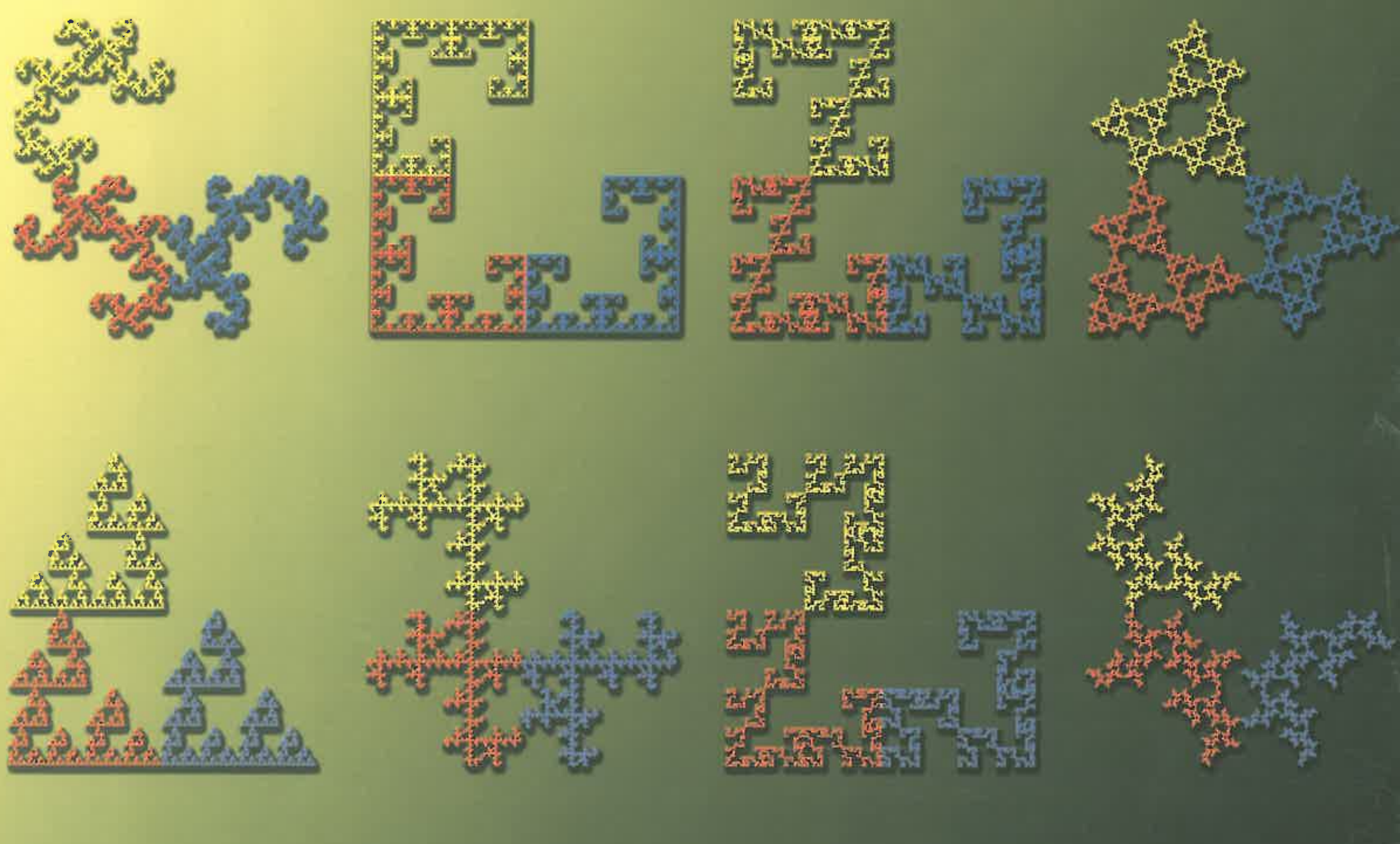
# ماهنامه ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال سوم، شمارهٔ دهم، اردی‌بهشت ۱۳۸۱



۴۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

# نقشه ریگنیک

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال سوم، شمارهٔ دهم، اردی‌بهشت ۱۳۸۱

**صاحب امتیاز و مدیر مسؤول**
یحیی تابش



**نشانی پستی ماهنامه**
تهران، صندوق پستی ۳۸۹-۱۳۴۴۵
تلفن: ۶۰۴۲۵۰۴ (۰۲۱)
نمابر: ۶۰۴۲۹۸۶ (۰۲۱)
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

## فهرست



طرح روی جلد: نگاه کنید به «فرکتال چیست؟»
طرح پشت جلد: استاد احمد بیرشک

# به جای یادداشت

نجمه سروشی

نیازی به معرفی نیست. نام احمد بیرشک برای همهٔ آن‌هایی که وارد عرصهٔ علم و دانش می‌شوند آشناست. چه آن‌هایی که با ریاضی سروکار دارند، چه دیگران. فقط کافی است تا در دوران راهنمایی یا دبیرستان روزی از سر کنجکاوی صفحهٔ اول کتاب درسیتان را نگاه کرده باشید. نام او را حتما دیده‌اید. یادداشت این شمارهٔ ماهنامه نگاهی است به زندگی استاد بیرشک . راستش نخواستیم به شیوهٔ رایج زندگی‌نامه استاد را بنویسیم. بلکه سعی کردیم نکات جالب و آموزندهٔ زندگی استاد را بازگو کنیم. لازم به توضیح است که این مقاله به نوعی بازنویسی و تلخیصی است از کتاب بیرشک نامه. این کتاب در سال ۱۳۷۷ و به مناسبت اعطای دکترای افتخاری در ریاضیات به استاد بیرشک توسط دانشگاه شهید بهشتی چاپ و منتشر شد.

تحصیلاتم خیلی مرتب نبوده است. اولین و بزرگ‌ترین معلمم پدرم بودند. درست یادم نیست چه وقت خواندن را شروع کردم، اما یادم هست که کتاب گلستان را در ۷، ۸ سالگی می‌خواندم، بعد پیش پدرم شروع کردم به یاد گرفتن فرانسه.

سال ۱۲۹۶، به مشهد رفتیم و حدود ۸ ماه آن‌جا بودیم. من هم به مدرسهٔ احمدیه رفتم. می‌توانم بگویم این ۸ ماه تنها دورهٔ تحصیلات منظم من در دبستان بود.

سال ۱۳۰۰ دوباره به تهران برگشتیم و در مدرسهٔ آلیانس ثبت نام کردم. این مدرسه ده کلاس داشت و از کلاس دهم شروع و به کلاس اول ختم می‌شد. امتحان دادم و به کلاس هفتم رفتم، یکی دو ماه درکلاس هفتم بودم بعد یک روز به چند نفر از بچه‌ها که یک چیزی می‌دانستند، گفتم «بچه‌ها مطالبی که می‌گویند برای ما کم است بیایید از مدیر تقاضا کنیم ما را به کلاس بالاتر ببرد.»

همه گفتند مدیر خیلی مرد بداخلاقی است، اما من نامه‌ای به زبان فرانسه خطاب به مدیرمان نوشتم. ایشان هم از این‌که دید چند تا بچه به خودشان جرأت داده‌اند که به زبان فرانسه به او نامه بنویسید خوشش آمد و گفت، شما را امتحان می‌کنم. بعد از امتحان از بین متقاضیان تنها مرا بردند کلاس ششم.

دو ماه بعد همین عمل تکرار شد و رفتم کلاس پنجم و بعد از تابستان کلاس چهارم و بعد از چهار ماه رفتم کلاس سوم اما

شمارهٔ ۱۰
(اردیبهشت ۱۳۸۱) صص ۵ـ۲

باز هم همراه پدرم به جنوب رفتم و تحصیلاتم متوقف شد. اما من چون ذوق کتاب خواندن پیدا کرده بودم و زبان فرانسه را هم خوب یاد گرفته بودم، در جنوب خودم معلم خودم شدم و پنج کتابی که همراه داشتم خواندم. توی سر خودم می‌زدم و توی سر کتاب‌ها، طلبه‌وار درس می‌خواندم. مطلب مشکل بود ولی آن‌قدر می‌خواندم تا بفهمم.

دوباره سال ۱۳۰۶ برگشتم تهران و من رفتم همان مدرسهٔ آلیانس.

به خودم گفتم درست است که من در این مدت مدرسه نبودم ولی بی‌کار هم نبودم امتحان می‌دهم و می‌روم به کلاس دوم (ماقبل آخر). در آن وقت رئیس مدرسه عوض شده بود. رئیس جدید با من صحبت کرد و گفت «من شما را می‌برم کلاس اول ولی امسال نمی‌توانی امتحان بدهی آخر سال است. سال دیگر امتحان خواهی داد». گفتم «من حاضر بودم بروم کلاس پایین‌تر حالا شما لطف می‌کنید مرا به کلاس اول می‌برید». بعد از یک هفته مسیو سیلوستر آمد و گفت «بیرشک به تو تبریک می‌گویم برای این‌که تو در گرامر زبان فرانسه آن‌قدر قوی هستی که شاگردهای مدارس فرانسه هم نیستند». گفتم «متشکرم» روز بعد معلم ریاضی آمد و به من گفت «صبح‌ها چه‌وقت می‌آیی به مدرسه؟». گفتم «زود می‌آیم، ساعت ۷». گفت «ممکن است خواهشی بکنم؟ با هم برویم توی آن اتاق بنشینیم مسایل را با هم حل کنیم بعد بیاییم سر کلاس». گفتم «اطاعت می‌شود». در خدمت ایشان هم یک هفته گذشت مسیو سیلوستر آمد به من گفت «تو را برای امتحان معرفی کردم». گفتم «من چیزی نمی‌دانم». گفت «فرانسهٔ تو خیلی قوی است حسابت هم خیلی خوب است بقیه‌اش را هم کار کن.» من هم اطاعت کردم.

در آن زمان در ۲۴ ساعت ۳ ساعت بیشتر نمی‌خوابیدم. می‌رفتم به پارکی که حالا وزارت امور خارجه است یعنی باغ ملی. زیر درختی می‌نشستم و درس می‌خواندم. بعد می‌آمدم منزل. در آن زمان تازه به تهران آمده بودیم و هنوز جایی نداشتیم، منزل یکی از اقوام بودیم. خانهٔ آن‌ها خیلی شلوغ بود. یک میز کنار اتاق بود و روی آن رومیزی بلندی بود. می‌رفتم زیر میز که کسی مزاحم نشود و درس می‌خواندم.

۵۷ نفر برای امتحان معرفی شده بودیم. من هم با نهایت ناامیدی رفتم و امتحان دادم، بعد نتیجهٔ امتحان را اعلام کردند و بنده شدم نفر اول بین ۵۷ نفر.

خیلی برای من تشویق‌آمیز بود. تصمیم گرفتم که وقت تلف شده را تا جایی که ممکن است جبران کنم. سال تحصیلی ۱۳۰۶ تا ۱۳۰۷ رفتم به کلاس سوم متوسطه تابستان کلاس چهارم را خواندم و سال پنجم را هم در مدرسهٔ شرف تحصیل کردم. تابستان هم کلاس ششم را خواندم و بعد رفتم دانش‌سرای عالی. سه سال هم در دانش‌سرای عالی بودم تا این که افتادم در جریان زندگی و کار بسیار دلپذیر و دوست‌داشتنی معلمی را پیشه کردم.

## زندگی‌نامهٔ علمی دانش‌وران

عادت بنده این است که وقتی به یک مطلبی برمی‌خورم که آن را نمی‌دانم یا نمی‌فهمم آن‌قدر می‌گردم تا پیدا کنم تا اول خودم مطلب را بفهمم و بعد در کتاب بیاورم.

یک بار به اسم یک شیمیدان برخوردم که هیچ جا سابقه‌ای از او ندیده بودم در کتابخانهٔ دانش‌نامهٔ ایران و اسلام چند جلد از زندگی‌نامهٔ علمی دانشوران به‌طور متفرقه بود. رفتم و در بین این کتاب‌ها گشتم، دیدم زندگی‌نامهٔ او به‌طور کامل به ضمیمهٔ کارهایش آمده است. رفتم سراغ اسامی چند نفر دیگر که دیدم واقعاً حق مطلب را ادا کرده است.

تصمیم گرفتم که یک مؤسسه‌ای پیدا کنم که کار ترجمهٔ آن را به عهده بگیرد. در سال ۱۳۵۷ فکر کردم بنیاد پهلوی این کار را می‌کند، رفتم به آن‌ها پیشنهاد دادم و آن‌ها هم قبول کردند، ولی انقلاب شد و بنیاد و صاحب بنیاد، هم از بین رفتند. و کار همین‌طور ماند. تا بعدها آقای لاریجانی در مرکز انتشارات علمی و فرهنگی پیدا شد و کار ترجمه شروع شد.

### دانش‌نامه نویسی و بنیاد دانش‌نامهٔ بزرگ فارسی

در ترجمهٔ زندگی‌نامهٔ علمی دانشوران، ما مجبور بودیم از دانش‌نامه‌هایی به زبان‌های گوناگون جهان بهره بگیریم تا بتوانیم آن‌ها را ترجمه کنیم. به فکر افتادم که مؤلفان و استادان ما یک زبان بیشتر نمی‌دانند و به این همه مأخذ و مرجع دسترسی ندارند، در این حال، چرا دانش‌نامه‌ای به زبان فارسی فراهم نیاوریم که هر چه می‌خواهیم به زبان خودمان در دسترسمان قرار گیرد و مردم هم به آسانی بتوانند از آن استفاده کنند. مدتی به این موضوع می‌اندیشیدم تا این‌که در مرداد ۱۳۶۷ با دکتر محمود بروجردی مدیر عامل شرکت انتشارات علمی و فرهنگی در این‌باره صحبت کردم. ایشان از پیشنهاد من بسیار استقبال کردند.

## هدف: هنر، دانش و فرهنگ

شمعی افروخته در مقابل کتابی که هر دو روی زمینه پرچم ایران قرار داده شوند. و عنوان گروه فرهنگی هدف در آن نقش گردد و این مجموعه در درون یک حلقه طلایی رنگ قرار گیرد.این نشان گروه فرهنگی هدف بود.

استاد بیرشک در سال ۱۳۱۵ پیشنهاد تأسیس گروهی را با دوستان خود در جامعهٔ لیسانسیه‌های دانشسرای عالی مطرح کردند و پس از آن تصمیم تأسیس گروه هدف گرفته شد.

«گروه هدف با تشکیل یک سری کلاس‌های شبانه آغاز شد، از آموزش و پرورش خواستیم که با تأسیس این کلاس‌ها موافقت کند و در ۱۶ مرداد ۱۳۲۷ کلاس‌ها دایر شد.

در سال ۱۳۳۰ پول نسبتاً قابل ملاحظه‌ای جمع شده بود، چیزی حدود ۲۷ هزار تومان، در این سال تصمیم گرفتیم اولین دبیرستان را دایر کنیم. در این زمان تعداد اعضای گروه زیاد شده بود و جمع ما به ۱۴ نفر رسیده بود.

در سال ۱۳۳۴ دومین دبیرستان و در سال ۱۳۳۶ سومین دبیرستان و همین‌طور گروه توسعه پیدا کرد، طوری‌که در سال ۱۳۵۳ ما دارای ۱۳ مدرسه و ۱۵ هزار دانش‌آموز بودیم.

این مدارس بسیار مجهز بودند و خیلی خوب هم به تعلیم بچه‌ها توجه می‌کردند، سال‌های متمادی در هر کجا که یک مسابقهٔ علمی برگزار می‌شد، مدارس هدف مقام اول را داشتند.

ما فکر نمی‌کردیم کسی بتواند این مدارس را از بین ببرد، چون معقول نبود که مؤسسه‌ای که در خدمت اجتماع بود از بین برود. اما در شورای انقلاب در اسفند ۱۳۵۸ تصویب شد که هیچ مدرسه‌ای ملی نباشد. برای این که در قانون اساسی آمده بود که تحصیلات باید مجانی باشد و در مقابل تحصیل نباید پول گرفت در نتیجه همهٔ این مدارس تعطیل شد.

## خیام

از یکی از معلمان فرانسوی خاطره واقعاً جالب توجهی دارم. آقایی بود به‌نام بونو. در ماه آذر رسید تهران. سرکلاس پنجم دبیرستان شرف بودم. بعد در ماه اسفند که داشت به ما گرامر درس می‌داد، برای مقایسه، جملات فارسی به‌کار می‌برد، یعنی در عرض سه ماه زبان فارسی یاد گرفته بود. این مرد تا این درجه باهوش بود، فوق‌العاده هم انسان بود.

در آن زمان مرحوم ابوالقاسم اعتصام‌زاده رباعیات خیام را ترجمه می‌کرد به شعر فرانسوی که شاید بهترین ترجمه به زبان فرانسه از رباعیات خیام باشد.

آن‌وقت در روزنامهٔ «ستارهٔ جهان» هر روز یک رباعی منتشر می‌کرد. بنده هم روزی یک رباعی از این روزنامه یاد می‌گرفتم و حفظ می‌کردم. یک روز رفتم سراغ بونو. آخر درسمان بود، نشسته بود کنار میز، وقتی می‌خواست بلند شود به او گفتم «مسیو بونو. بنشینید. من برایتان یک شعر بخوانم» برایش ترجمهٔ اعتصام‌زاده را خواندم و گفتم این ترجمهٔ این رباعی خیام است:

آنان که محیط فضل و آداب شدند
در جمع کمال شمع اصحاب شدند
ره زین شب تاریک نبردند برون
گفتند فسانه‌ای و در خاک شدند

اعتصام‌زاده آن را به شعری ترجمه کرده بود فوق‌العاده شیوا، درست و به‌صورت یک رباعی؛ آن را برای بونو خواندم، مدتی سرش را گرفت در میان دست‌هایش و گفت: «یک دفعهٔ دیگر برایم بخوان.» گفت: «شعری به این لطافت در عمرم نشنیده بودم، برای من بنویس.» نوشتم. گفت «از این‌ها داری؟ مقداری

برای من بنویس، من خیلی از تو ممنون می‌شوم.».[1]

## گاهنامهٔ تطبیقی سه هزار ساله

یک بار رفتم سر کلاس، بعد از درس علوم اجتماعی و اطلاعات عمومی بود. جزوه‌اش را گرفتم و نگاه کردم دیدم گفته است که اولین راه‌آهن ایران یعنی راه‌آهن تهران به شاه‌عبدالعظیم در سال ۱۸۸۸ کشیده شده، بعد از مدتی راه‌آهن تبریز به جلفا و جلفا به شرفخانه در ۱۳۳۲ ساخته شده، و بالاخره در سال ۱۳۰۶ اولین کلنگ راه‌آهن سراسری ایران زده شد و راه‌آهن در ۱۳۱۷ تمام شد. دیدم که این شاگرد بی‌گناه بیچاره فکر می‌کند مگر راه‌آهن ایران سر قهقرایی داشته که اولی در ۱۸۸۸ بوده و دومی در ۱۳۲۳ و آخری در ۱۳۰۶. مثل این بود که عقربهٔ زمان به عقب برمی‌گردد. این بود که آمدم و جدولی درست کردم و به معلمین گفتم که آقایان همت کنید تاریخ‌ها را یکسان کنید. آن‌ها که فرنگی است تاریخ ایرانی کنید و آن‌هایی که قمری است هم تاریخ ایرانی کنید. اگر می‌خواهید آن تاریخ‌ها را هم بگویید، ولی تاریخ ایرانی آن‌را هم ذکر کنید. این جرقه‌ای بود که برای این کار زده شد. مدت‌ها خودم برای تبدیل این تاریخ از جدول‌هایی که در دایره‌المعارف فارسی است و آقای تقی ریاحی تنظیم کرده‌اند استفاده می‌کردم منتها وقت زیادی می‌گرفت، بعد تصمیم گرفتم این را تبدیل کنم و یک جدول اساسی برای همه بنویسم.

علت انتشار کتاب گاهنامهٔ تطبیقی عدم شناخت مردم از گاه‌نامهٔ ایرانی بوده است. تقویم بسیار آشفته‌ای داشتیم.

در حال حاضر نیز در حال مکاتبه با دایره‌المعارف‌های بزرگ جهان می‌باشیم تا بتوانیم تقویم ایرانی را در همهٔ آن‌ها درج کنیم. در واقع نشان داده‌ایم که تقویم ما که در قرن یازدهم میلادی یعنی نه قرن پیش تنظیم شده است، ۸۳۰ بار از تقویم مسیحی که همه تصور می‌کنند که دقیق‌ترین تقویم است، دقت بیشتری دارد. تقویم مسیحی در طی ۳۳ قرن یک روز با زمان واقعی اختلاف پیدا می‌کند. یعنی پس ازگذشت ۳۳ قرن باید اصلاح شود. در حالی که تقویم ما در دو میلیون و سیصد و نود هزار سال به این تفاوت می‌رسد که اختلاف بسیار قابل توجه و چشمگیری است.

## حیاط عالی

در همان سال‌های ۱۲۹۲، ۱۲۹۳ چند تا لغت فرانسه یاد گرفته بودم. گوشهٔ طاقچه کتاب فرانسه‌ای بود که تصمیم گرفتم آن را ترجمه کنم. رفتم کتاب را آوردم و شروع کردم به ترجمهٔ چهار، پنج سطر اولش. در سطر دوم از «کورسوپریور» صحبت می‌کرد. من می‌دانستم «کور» یعنی حیاط و «سوپریور» یعنی عالی. بنابراین ترجمه کردم حیاط عالی.

البته بعد از این‌که سه چهار سطر جلو رفتم متوقف شدم. نکتهٔ جالب این بود که من در چنین سنی تصمیم داشتم کتاب ترجمه کنم.

وقتی در ۱۳۰۲ رفتیم جنوب دو تا کتاب داستان گرفته بودم کتاب‌هایی علمی بودند به‌صورت داستان. من ضمن آن‌که با کتاب حساب بازِنان وگرامرکلودوژه کشتی می‌گرفتم این دو تا کتاب را ترجمه کردم. یکی از آن‌ها‌را هم پاکنویس کردم. خطم هم نسبتاً بد نبود. نقاشی هم کردم. بعدها این کتاب به نام «مردی که طلا می‌سازد» چاپ شد.

اولین کتابی هم که از انگلیسی ترجمه کردم و چاپ شد سرگذشت علم بود. اثر جورج سارتن که برندهٔ جایزهٔ بهترین ترجمهٔ سال هم شد.

---

۱) کیهان فرهنگی

# آرایش کارت‌ها

*سیدهادی ناصری*

در این مقاله قصد داریم نشان دهیم که با یک آرایش خاص برای کارت‌ها می‌توان قاعده‌ای داد تا بتوان محل قرارگرفتن هر کارت را در این آرایش معین کرد و علاوه بر آن برای هر کارت به‌خصوص در این آرایش بتوان با فرمولی، تعیین کرد که کارت مذکور از چه نوعی و دارای چه شماره‌ای است، به همین منظور ابتدا مسأله را با حالت خاص زیر آغاز می‌کنیم.

## عدد آرایشی

۴۰ کارت از نوع‌های $A$ و $B$ و $C$ و $D$ که هرکدام شامل ۱۰ کارت با شماره‌های ۱، ۲، ...، ۱۰ می‌باشند را در نظر می‌گیریم. پس می‌توان فرض نمود:

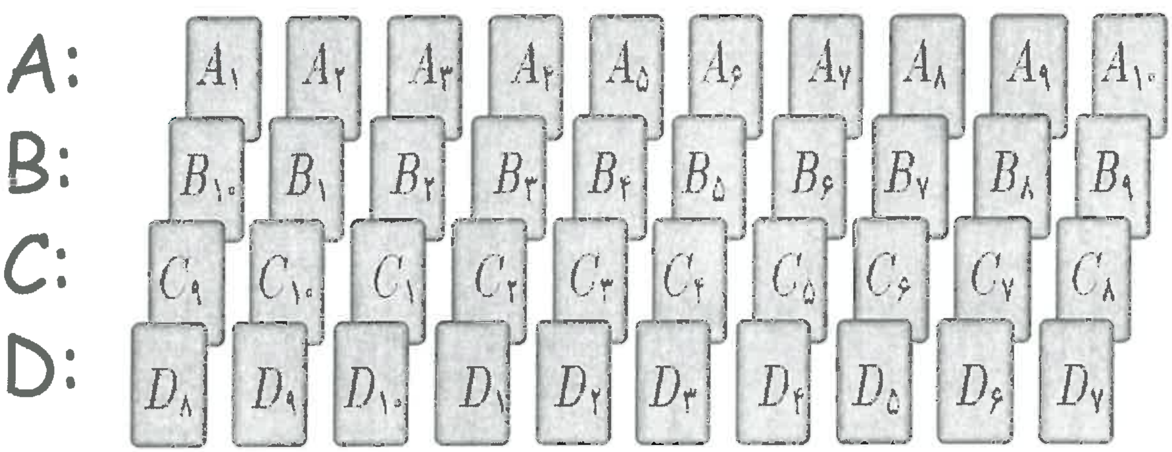
$A$ کارت نوع : $A_1, \dots, A_{10}$

$B$ کارت نوع : $B_1, \dots, B_{10}$

$C$ کارت نوع : $C_1, \dots, C_{10}$

$D$ کارت نوع : $D_1, \dots, D_{10}$

هر نوع کارت را از ۱ تا ۱۰ مرتب کرده و به‌صورت زیر آرایش می‌دهیم:




حال کارت‌های هر ستون را از پایین به بالا و از چپ به راست جمع می‌کنیم و روی هم قرار می‌دهیم.

شمارهٔ ۱۰
(اردیبهشت ۱۳۸۱) صص ۱۰ــ۶

به فرم زیر:

$$D_{10} \to C_{9} \to B_{10} \to A_{1} \to D_{9} \to C_{10} \to \cdots \to A_{9} \to D_{7} \to C_{8} \to B_{9} \to A_{10}$$

کارت‌ها را به همان ترتیب، در هر سطر از چپ به راست و تا ۱۰ ستون می‌چینیم

$$D_{8}\ C_{9}\ B_{10}\ A_{1}\ D_{9}\ C_{10}\ B_{1}\ A_{2}\ D_{10}\ C_{1}$$

$$B_{2}\ A_{3}\ D_{1}\ C_{2}\ B_{3}\ A_{4}\ D_{2}\ C_{3}\ B_{4}\ A_{5}$$

$$D_{3}\ C_{4}\ B_{5}\ A_{6}\ D_{4}\ C_{5}\ B_{6}\ A_{7}\ D_{5}\ C_{6}$$

$$B_{7}\ A_{8}\ D_{6}\ C_{7}\ B_{8}\ A_{9}\ D_{7}\ C_{8}\ B_{9}\ A_{10}$$

آرایشی را که به‌دست آوردیم، آرایش $(*)$ می‌نامیم. اگر مکان قرارگرفتن کارت‌ها را از چپ به راست و از بالا به پایین شماره‌گذاری کنیم؛ این اعداد را اعداد آرایش می‌نامیم که بیان‌گر مکان کارت مورد نظر در آرایش $(*)$ است. حال که با نحوهٔ چیدن کارت‌ها آشنا شدیم، فرض کنیم در کلیهٔ مراحل، کارت‌ها را از پشت بچینیم.

می‌خواهیم مکان کارت شمارهٔ $k$ از نوع $A$، $B$، $C$ یا $D$ را مشخص کنیم. ابتدا پارامتر $h$ را به‌فرم زیر معین می‌کنیم:

$$h = \begin{cases} 0 & \text{اگر کارت نوع } A \text{ مد نظر باشد.} \\ 3 & \text{اگر کارت نوع } B \text{ مد نظر باشد.} \\ 6 & \text{اگر کارت نوع } C \text{ مد نظر باشد.} \\ 9 & \text{اگر کارت نوع } D \text{ مد نظر باشد.} \end{cases}$$

با مشخص شدن $h$، $S$ را به فرم زیر تعیین می‌کنیم:

$$S = 4k + h$$

$S$ عدد آرایشی متناظر با کارت شمارهٔ $k$ از نوع مورد نظر است که با توجه به تعریف عدد آرایشی می‌توان کارت خواسته شده را ارایه نمود.

قابل توجه است که اگر مقدار $S$ به‌دست آمده، عددی بزرگ‌تر از ۴۰ باشد در این‌صورت $S' \overset{40}{\equiv} S$ را معین می‌کنیم که $S' < 40$ عدد آرایشی واقعی می‌باشد.

**مثال ۱ .** می‌خواهیم در آرایش $(*)$، کارت شمارهٔ ۷ از نوع $C$ را معین کنیم. اگر $k = 7$ و $h = 6$ آنگاه $S = 34$.

حال که عدد آرایشی $(*)$، به‌دست آمده، با رجوع به آرایش $(*)$، می‌توان مکان کارت موردنظر را معین کرد و کارت خواسته شده را ارایه داد.

**تعمیم مسأله:** اگر به‌جای ۴ نوع، از $m$ نوع کارت استفاده کنیم، در آرایش مقدماتی برای چیدن سطر $j$ ام مانند حالت اول، از ستون $j$ ام شروع به چیدن کارت‌ها می‌کنیم و کارت‌های اضافی از آن نوع را از ابتدای سطر $j$ ام، از چپ به راست می‌چینیم و نحوهٔ ساختن

آرایش $(*)$ مشابه حالت قبل می‌باشد. با این تفاوت که پارامتر $h$ و $S$ به فرم زیر تعیین می‌گردند:

$$h = \begin{cases} \text{۰} & \text{کارت نوع اول} \\ \text{۱}(m-\text{۱}) & \text{کارت نوع دوم} \\ \text{۲}(m-\text{۱}) & \text{کارت نوع سوم} \\ (j-\text{۱})(m-\text{۱}) & \text{کارت نوع } j \text{ ام} \\ (m-\text{۱})(m-\text{۱}) & \text{کارت نوع } m \text{ ام} \end{cases}$$

داریم $S = mk + h$ یا $S = mk + (t-\text{۱})(m-\text{۱})$ به ازای $t = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, m$ که $k, t, m \in \mathbb{N}$ و $k$ شمارهٔ کارت از نوع $t$ ام است.

لازم به ذکر است که هیچ محدودیتی برای اختیار کردن شماره‌های کارت‌ها نداریم و این مطلب برای هر دسته از کارت‌ها، با شماره‌های متوالی ۱، ...، $n$ که $n \in \mathbb{N}$، درست است.

## پادآرایش

در این قسمت می‌خواهیم بعد از چیدن کارت‌ها و به‌دست آوردن آرایش $(*)$ مشخص کنیم کارت دلخواه که در مکان $S$ ام آرایش قرار گرفته است یا به عبارتی دیگر دارای عدد آرایشی $S$ است، دارای چه شماره و نیز از چه نوع کارتی است.

به همین منظور، با مشخص شدن $S$، برای $t = \text{۰}, \text{۱}, \ldots, m-\text{۱}$ معادلهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S = mk + t(m-\text{۱})$$

که در آن $S$ عدد آرایشی کارت مورد نظر است، $m$ تعداد نوع کارت، $t$، کارت نوع $t$ ام و $k$، شمارهٔ کارت مورد نظر.

در معادلهٔ (۱)، با قرار دادن مقادیر مختلف $t$، تساوی را به‌ازای $k$ به‌دست آمده چک می‌کنیم و مقادیر $t$ و $k$ را که طبیعی می‌باشند، مشخص می‌کنیم.

**مثال ۲**. اگر در آرایش $(*)$، که به‌وسیلهٔ ۴ نوع کارت و با شماره‌های ۱، ...، ۱۰ ساخته بودیم، کارتی با عدد آرایشی ۲۷ را خارج کنند، داریم $\text{۲۷} = \text{۴}k + \text{۳}t$ به‌ازای $t = \text{۰}, \text{۱}, \text{۲}, \text{۳}$.

اگر $t = \text{۰}$، $k \notin \mathbb{N}$ ولی به ازای $t = \text{۱}$، $k = \text{۶}$ عددی طبیعی است. پس کارت خارج شده، با شمارهٔ ۶ و از کارت نوع دوم؛ $t+\text{۱}$ ام؛ که در اینجا کارت نوع $B$ است، بوده است.

قابل توجه است مقادیری که برای $t$ و $k$ به‌دست می‌آیند، یکتا می‌باشند؛ زیرا به‌کمک قضیهٔ الگوریتم تقسیم، ضمن اینکه می‌توان نشان داد $t$ و $k$ یکتا هستند الگوی مناسب‌تری برای به‌دست آوردن $k$ و $t$ می‌توان ارایه نمود.

## به‌دست آوردن الگوی مناسب

داریم $S = mk + t(m-\text{۱})$ به‌ازای $t = \text{۰}, \text{۱}, \ldots, m-\text{۱}$. حال اگر $t = \text{۰}$ آنگاه $k = \frac{S}{m}$. اگر $k$ ی به‌دست آمده یک عدد طبیعی باشد، عملیات پایان می‌پذیرد و کارت مورد نظر از نوع اول و با شمارهٔ $k = \frac{S}{m}$ می‌باشد.

**مثال ۳.** اگر در مثال قبل $S = ۲۸$ باشد خواهیم داشت $۴k = ۱۸$ و در نتیجه $k = ۷$. با توجه به مطلب فوق، کارت مورد نظر از نوع اول و با شمارهٔ ۷ است یعنی کارت $A_۷$.

اگر $t \neq ۰$ داریم:

$$S = m(k+t) - t - (m-t) + (m-t) = \underbrace{m(k+t-۱)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(m-t)}_{\in \mathbb{N}}$$

پس در هر دو حالت برای $S$ و $m$ عناصر منحصر به فرد $q$ و $m > r > ۰$ موجودند که $S = mq + r$. برای توجیه یکتا بودن $t$ و $k$ توجه کنید که طبق الگوریتم تقسیم $q$ و $r$ به‌طور یکتا معین می‌شوند، پس $t$ و $k$ را می‌توان از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر برای $t \neq ۰$ به‌دست آورد.:

$$\begin{cases} k + t - ۱ = q \\ \\ m - t = r \end{cases}$$

چون دستگاه دارای دو معادلهٔ مستقل خطی است، جواب یکتا برای $k$ و $t$ به‌دست می‌آید. برای $t = ۰$ نیز واضح است.

با توجه به مطلب فوق و توجه به این نکته که در هر $m$ عدد متوالی، تنها یک عدد مضرب $m$ است، در آرایش $(*)$ در هر $m$ کارت با اعداد آرایشی متوالی، از هر نوع کارت دقیقاً یک عنصر وجود دارد.

توجه کنید، اگر در پاد آرایش کارتی برداشته شود و از عدد آرایش ارایه شده نتوانیم با دستورالعمل ذکر شده، $k$ و $t$ را معین کنیم، علت آن است که عدد آرایش، شمارهٔ واقعی نیست.

برای معین کردن شمارهٔ واقعی آرایش، کافی است از همنهشتی به پیمانه $۱۰m$ کمک بگیریم. $(S' \equiv S(mod ۱۰m)$ برای اولین عدد $S'$ ای که بتوان $k$ و $t$ را به‌دست آورد استفاده می‌کنیم، یعنی می‌توان از $S' = S + ۱۰m$، عدد آرایش واقعی، $S'$، را تعیین کرد.

**مثال ۴.** در آرایش $(*)$، کارت $D_۸$ با عدد آرایشی ظاهری ۱ را خارج می‌کنیم.

$S = ۱$ و $m = ۴$ است پس $m$، $S$ را نمی‌شمارد. در نتیجه $S = mq + r$ که $m > r > ۰$. با توجه به روابط بالا $r = ۱$، $q = ۰$، $t = ۳$ و $k = -۲$. چون $k$ عددی طبیعی نیست عدد آرایش ارایه شدهٔ $S$، عدد آرایش ظاهری کارت مورد نظر است.

برای به‌دست آوردن عدد آرایشی واقعی از رابطهٔ $S' = mn + S$ که $n = ۱۰$ و $m = ۴$ استفاده می‌کنیم. پس $S' = ۴۱$ و در ضمن $t \neq ۰$ (چون $۴ \nmid ۴۱$). حال

که $t \neq ۰$، $S' = ۴q' + r'$ که $۴ > r' > ۰$. در اینجا $Q' = ۱۰$ و $r' = ۱$ می‌شود و با حل دستگاه بالا به‌دست می‌آید $t = ۳$ و $k = ۸$. ملاحظه می‌شود که کارت ارایه شده همان $D_۸$ یعنی کارت نوع چهارم با شمارهٔ ۸ است.

تا اینجا ما مسایل را برای $m$ نوع کارت که داری شماره‌های ۱ تا $n$ بودند بررسی کردیم. حالا مسأله را تعمیم می‌دهیم.

## تعمیم آرایش

الزاماً نباید شماره کارت‌ها از یک شروع شوند و مسأله برای کارت‌ها از $m$ نوع و با شماره‌های $(f+۱)$ تا $n$ نیز برقرار است. البته نحوهٔ محاسبهٔ عدد آرایشی کمی متفاوت است.

$$\text{کارت نوع اول} : (A) \quad : \quad A_{f+۱}A_{f+۲}\dots A_n$$

$$\text{کارت نوع دوم} : (B) \quad : \quad B_{f+۱}B_{f+۲}\dots B_n$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\text{کارت نوع } m\text{ام} : (M) \quad : \quad m_{f+۱}m_{f+۲}\dots m_n$$

حال اگر کارت شمارهٔ $k$ از نوع $t$ اُم مد نظر باشد، آرایش (*) را به همان ترتیب تشکیل می‌دهیم و $S$، عدد آرایش را به فرم زیر معین می‌کنیم:

$$S = mk + (t-۱)(m-۱) - (mf)$$

که $t = ۱, ۲, \dots, m$ و $k = f+۱, f+۲, \dots, n$.

## تعمیم پاد آرایش

اگر شمارهٔ کارت‌ها که از $m$ نوع می‌باشند و از $f+۱$ تا $n$ شماره‌گذاری شده‌اند را در نظر بگیریم، یعنی عدد آرایشی ارایه شده در این حالت $S'$ باشد، برای تعیین شماره و نوع کارت انتخاب شده، عدد آرایشی $S$ را به‌فرم زیر تعیین می‌کنیم:

$$S = S' + mf$$

و از فرمول $S = mk + (t-۱)(m-۱)$، به‌طور مستقیم یا به‌صورت $S'' \equiv S(mod(m(n-f)))$، $t$ و $k$ را تعیین می‌کنیم.

# آرش در سیارهٔ تویاپ (قسمت هشتم)

*ایمان افتخاری*

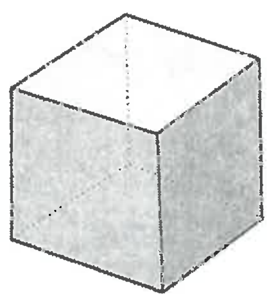
فردای آن‌روز آرش از دوستش امید خواست که بعد از ظهر به خانهٔ آن‌ها بیاید. خیلی دوست داشت راجع به خوابی که دیده بود با امید صحبت کند. آرش و امید از سال اول راهنمایی با هم هم‌کلاس بودند و هر دو به شدت به ریاضی علاقمند هستند. هر کدام از آن‌ها هر وقت به مسأله جالبی برخورد می‌کند آن‌را حتماً با دیگری مطرح می‌کند. خیلی وقت‌ها هم با هم مطالعه می‌کنند. این کار برایشان خیلی جذاب‌تر از کار فردی است. هفتهٔ پیش با هم کتابی را خوانده بودند که ظاهراً بسیاری از مطالبی که آرش در خواب دیده بود نتیجهٔ آن بود! آرش در راه مدرسه تا خانه خوابش را با هیجان بسیار برای امید تعریف کرد.

امید: عجب خواب عجیبی! جالبه که اکثر چیزهایی را که قبلاً در مورد درست کردن رویه‌ها به‌وسیله مثلث‌ها با هم دیده بودیم، این‌جوری تو خوابت ظاهر شده.

این مسألهٔ سیاره‌ای که به قطعات مستطیل شکل تقسیم شده هم واقعاً چیز جالبیه، این دیگه از کجا اومد، خدا می‌دونه!

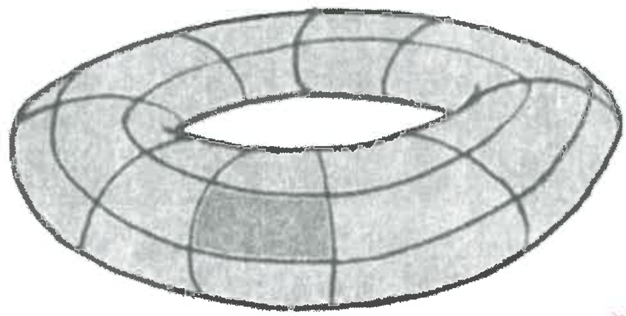
آرش: تقصیر آقای صولتی است! این‌قدر بد امتحان دادم که نگو! به‌خصوص سرکشیدن نقشهٔ خاورمیانه. داشتم فکر می‌کردم چقدر خوب بود اگر همهٔ کشورها مستطیل شکل بودند! زیاد بهش فکر نکردم ولی گمان می‌کنم سطح کره را نمی‌شه با تعداد مستطیل یه جوری پوشاند که خط‌ها تقریباً صاف و زاویه‌ها هم تقریباً ۹۰° باشند.

امید: اما مثلاً مکعب هم تقریباً مثل کره است و در واقع کره‌ای است که با ۶ تا مربع درست شده.



آرش: اما اگر یک کم توی مکعب را باد کنی و به اطراف یکی از رأس‌ها نگاه کنی، سه تا زاویه با مجموع ۳۶۰° می‌بینی. پس در واقع مستطیل‌ها زاویه‌هاشون به هیچ وجه ۹۰° نیست، زاویه‌ها تقریباً ۱۲۰° اند.

به هر حال فکر می‌کنم که روی تیوپ می‌شه این کار را انجام داد.



امید: یعنی وقتی عدد اویلر، یا آن‌طور که تو خواب می‌گفتید عدد خی، صفر باشد؟ خوب نمی‌دونم. به هر حال شاید بد نباشد در این مورد هم صحبت کنیم.

آرش: خیلی هم باحاله. ولی فکر می‌کنم بهتر باشه اول کارمون را با رویه‌ها تموم کنیم. من احساس می‌کنم اگر اول مسأله را درست بفهمیم شاید بتونیم نتایج اون را در مورد این مسألهٔ مستطیل‌ها هم به‌کار ببریم.

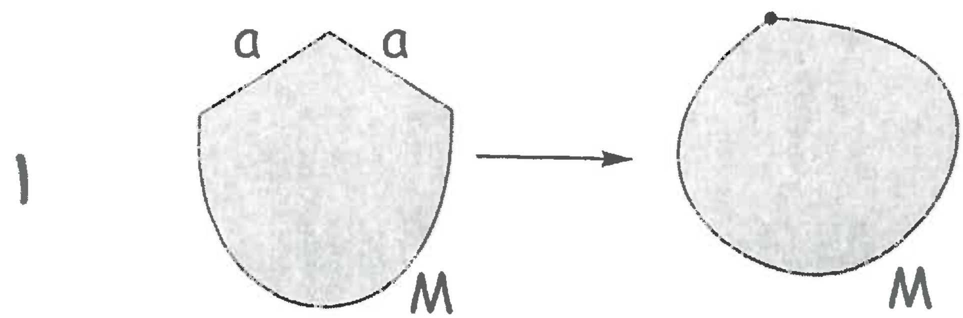
امید: پس می‌تونیم اون مسأله را ادامه بدیم؟

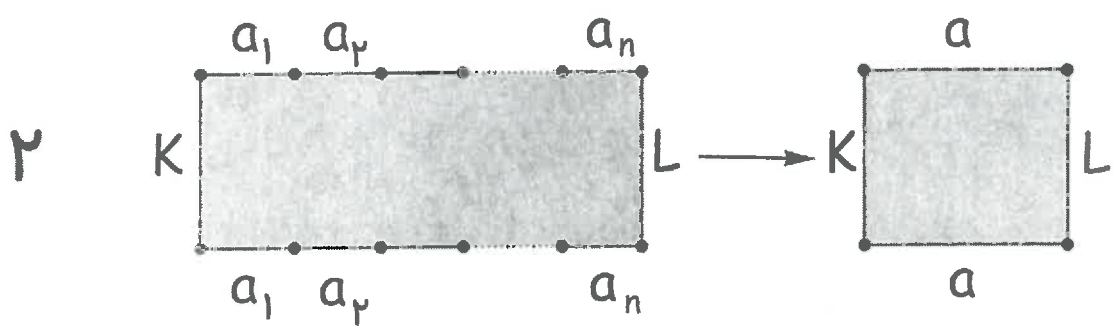
آرش: چرا که نه؟

آرش چند ورق کاغذ سفید و دو تا خودکار حاضر کرد و منتظر شد تا امید شروع کند.

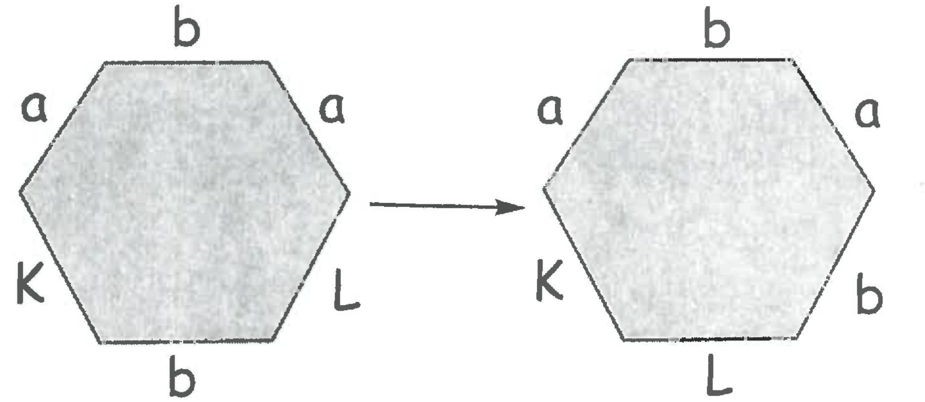
امید: پس ما یک چند ضلعی داریم که اعداد $n$ ,... ,۲ ,۱ دو بار روی اضلاع آن نوشته شده، یعنی یک $2n$ ضلعی. تا حالا چند تا عمل برای ساده کردن، هم پیدا کردیم که به این صورت است. حرف‌های بزرگ را برای بلوک‌های اعداد می‌گذارم و حرف‌های کوچک را برای خود اعداد ...

این شکل‌ها اعمالی را که تا حالا پیدا کردیم نشان می‌دهند.

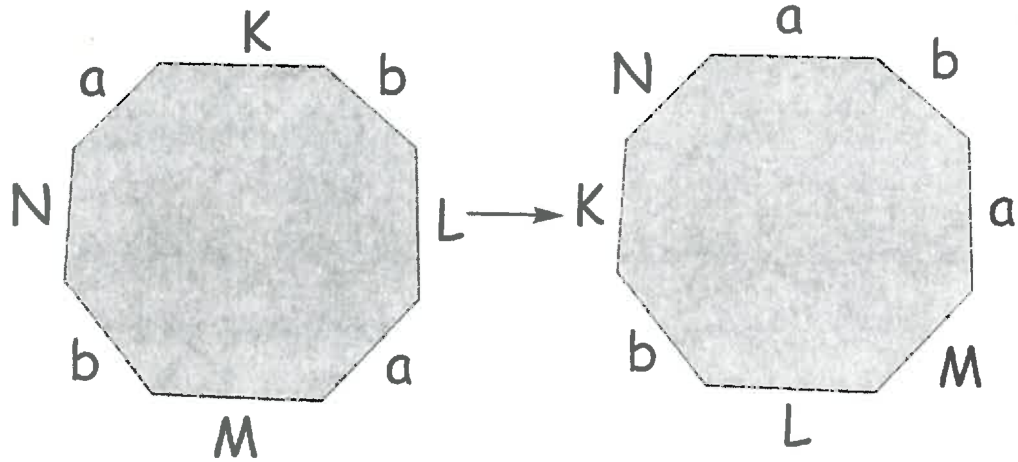


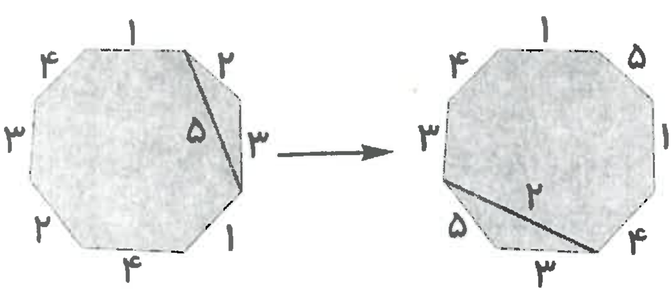



۳




۴

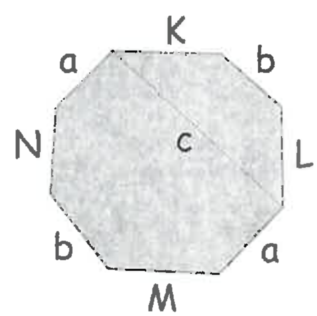



آرش: صبر کن! صبر کن! این آخری دیگه از کجا اومد؟

امید: ببخشید! این حالت کلی‌تر آخرین چیزی است که پنج‌شنبه پیدا کرده بودیم. یادت هست که در ترتیب (۱۲۳۱۴۲۳۴) یک برش به این شکل دادیم و عدد ۵ را روی ضلع گذاشتیم؟

آرش کمی فکر کرد و گفت: آ... هان! یعنی منظورت اینه که یه برش این‌جوری می‌زنیم . . .




و بعد دو ضلع «$b$» را به هم می‌چسبانیم؟ آخر سر هم اسم $c$ را دوباره $b$ می‌گذاریم، درسته؟

امید: بله درسته! حالا باید ببینیم که آیا با این روش می‌شه همه چیز را ساده کرد یا نه.

ادامه دارد . . .

# فرکتال چیست؟ (قسمت دوم)

*امید نقشینه ارجمند*

## فرکتال‌های خودمتشابه

خاصیت اول، مجموعهٔ کانتور را به یاد آورید. $C$ را می‌توان به دو قسمت طوری افراز کرد که هر دو قسمت از نظر هندسی شبیه به $C$ باشند. همین خاصیت را در خم کخ، مثلث سرپینسکی و مثال بعد از آن هم می‌توانید ببینید، البته با کمی تفاوت. در خم کخ، چهار خم کوچک‌تر وجود دارد که هر چند بعضی از آن‌ها با هم اشتراک دارند ولی این اشتراک یک مجموعه تک عضوی است. یعنی می‌توان گفت این چهار خم کوچک‌تر، خم کخ را «تقریباً افراز کرده‌اند». همین مطلب را می‌توانید در مثلث سرپینسکی هم مشاهده کنید.

اکنون می‌خواهیم با این ایده‌ها تعدادی فرکتال طراحی کنیم. الگوریتم زیر را اجرا کنید.

۱) مربعی دل‌خواه رسم کنید.

۲) آن‌را به ۴ مربع مساوی تقسیم کنید.

۳) مربع بالا سمت راست را حذف کنید.

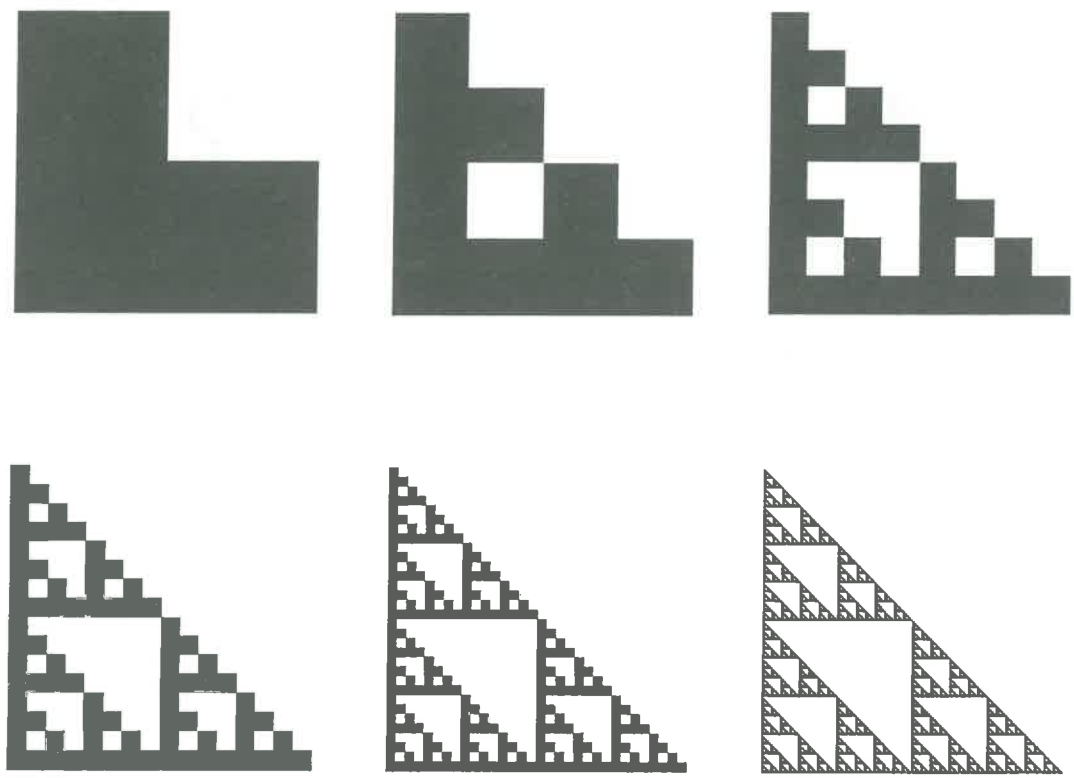
۴) سه مربع باقی‌مانده را یکی یکی در نظر بگیرید و به مرحله ۲ بروید.

الگوریتم بالا یک الگوریتم بی‌پایان است (پس در واقع اصلاً الگوریتم نیست!). ولی با انجام آن به تعداد زیاد، شکلی به‌دست می‌آید که تقریبی از یک فرکتال است.

برای اجرای الگوریتم باید در مرحلهٔ اول یک مربع به ضلع $\frac{1}{2}$، در مرحلهٔ دوم سه مربع به‌ضلع $\frac{1}{4}$ و در مرحلهٔ $n$ام $3^{n-1}$ مربع به ضلع $\frac{1}{2^n}$ را حذف کنید. با زیاد شدن $n$، هم تعداد مربع‌ها زیاد می‌شود و هم ضلع آن‌ها کوچک می‌شود. تا جایی‌که تعداد مربع‌ها از

شمارهٔ ۱۰
(اردیبهشت ۱۳۸۱) صص ۲۰ــ۱۴

مولکول‌های صفحه کاغذ بیش‌تر و ضلع آن‌ها از قطر اتم کم‌تر می‌شود!



همان‌طورکه در شکل مشاهده می‌کنید نتیجه بسیار شبیه مثلث سرپینسکی است، با این تفاوت که قالب شکل به‌جای مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث قائم‌الزاویه است.

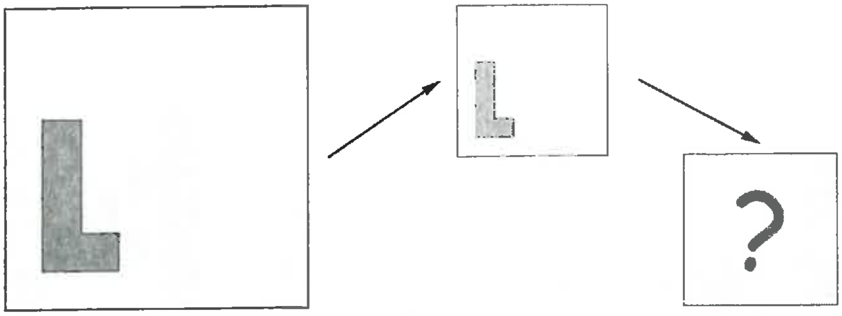
## استفاده از تبدیل‌های هندسی دیگر

به فرکتالی که ساختیم توجه کنید. اگر این فرکتال را با ضرایب $\frac{1}{2}$ تجانس دهیم، با انتقال مناسب ۳ نسخه از شکل حاصل، فرکتال اصلی پوشانده می‌شود. شما به غیر از تجانس و انتقال، با تبدیل‌های هندسی دیگری نیز آشنا هستید. به‌عنوان مثال دوران و تقارن حول یک محور نیز تبدیل‌هایی هندسی هستند.

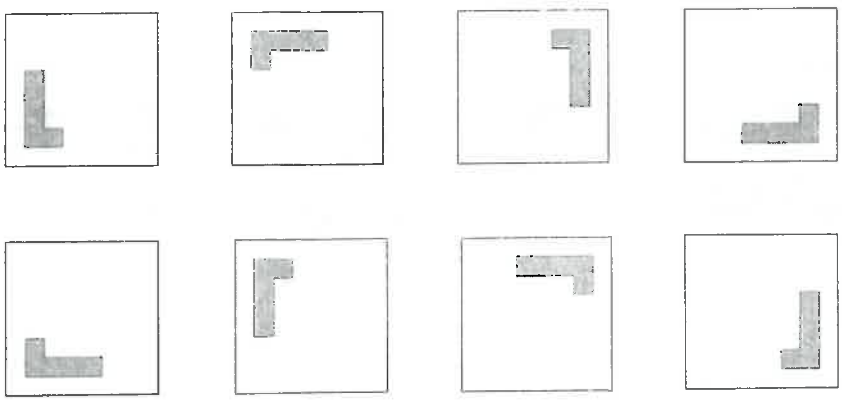
فرض کنید می‌خواهیم یک مربع $1 \times 1$ را به‌وسیله تبدیل‌هایی که ذکر شد به مربع $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ تبدیل کنیم. این کار به چند طریق ممکن است؟ سعی می‌کنیم آن‌ها را شناسایی کنیم.

در قدم اول باید مربع را با ضریب $\frac{1}{2}$ تجانس دهیم زیرا بقیه تبدیل‌ها اندازهٔ مربع را ثابت نگه‌می‌دارند. برای این‌که گوشه‌های مربع از

هم شناخته شوند روی یکی از گوشه‌ها حرف $L$ را می‌نویسیم.

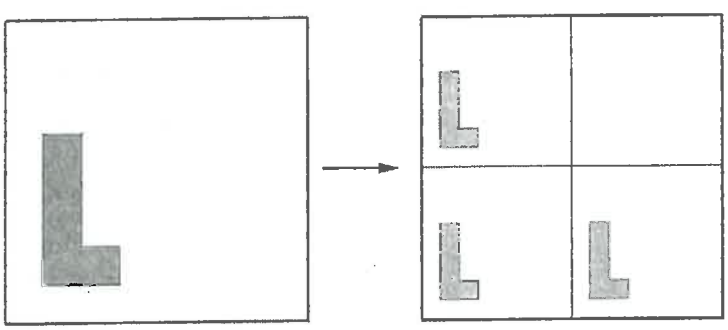


اکنون توجه کنید که در مرحلهٔ نهایی کافی است نشان دهیم که $L$ روی کدام رأس است و در ضمن آیا به همان شکل باقی‌مانده است یا این‌که قرینه شده است. مکان $L$، ۴ حالت مختلف دارد و دو حالت هم برای قرینه بودن یا نبودن باید در نظر گرفت. در نتیجه ۸ حالت مختلف برای تبدیل مربع $1 \times 1$ به مربع $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ می‌توان شمرد.

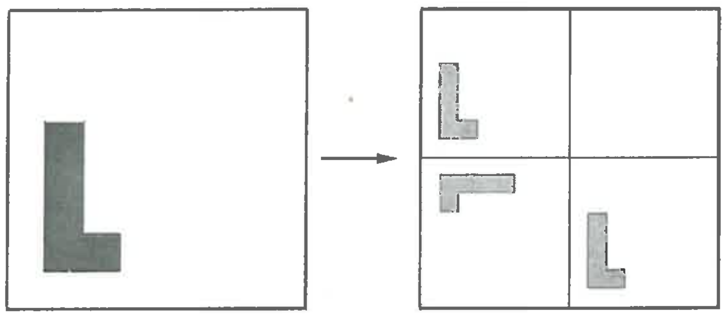


در سطر دوم، همان‌طور که می‌بینید، مربع یک‌بار قرینه شده‌است.

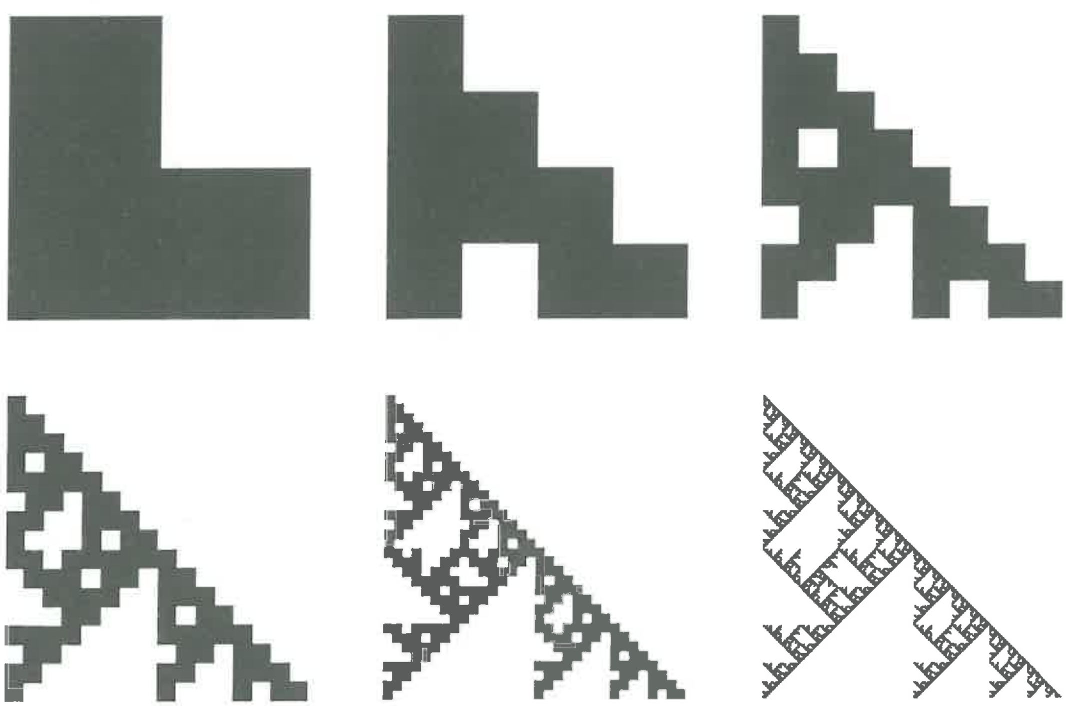
در فرکتالی که در ابتدا ساختیم سه تبدیل هندسی شرکت کرده تنها از تجانس و انتقال به‌وجود آمده بودند و الگوریتمی که برای تعریف آن بیان شد را می‌توان در شکل زیر خلاصه کرد.



می‌خواهیم با استفاده از ۸ تبدیلی که معرفی کردیم، فرکتال‌های دیگری بسازیم. یکی از تبدیل‌ها را تغییر می‌دهیم.

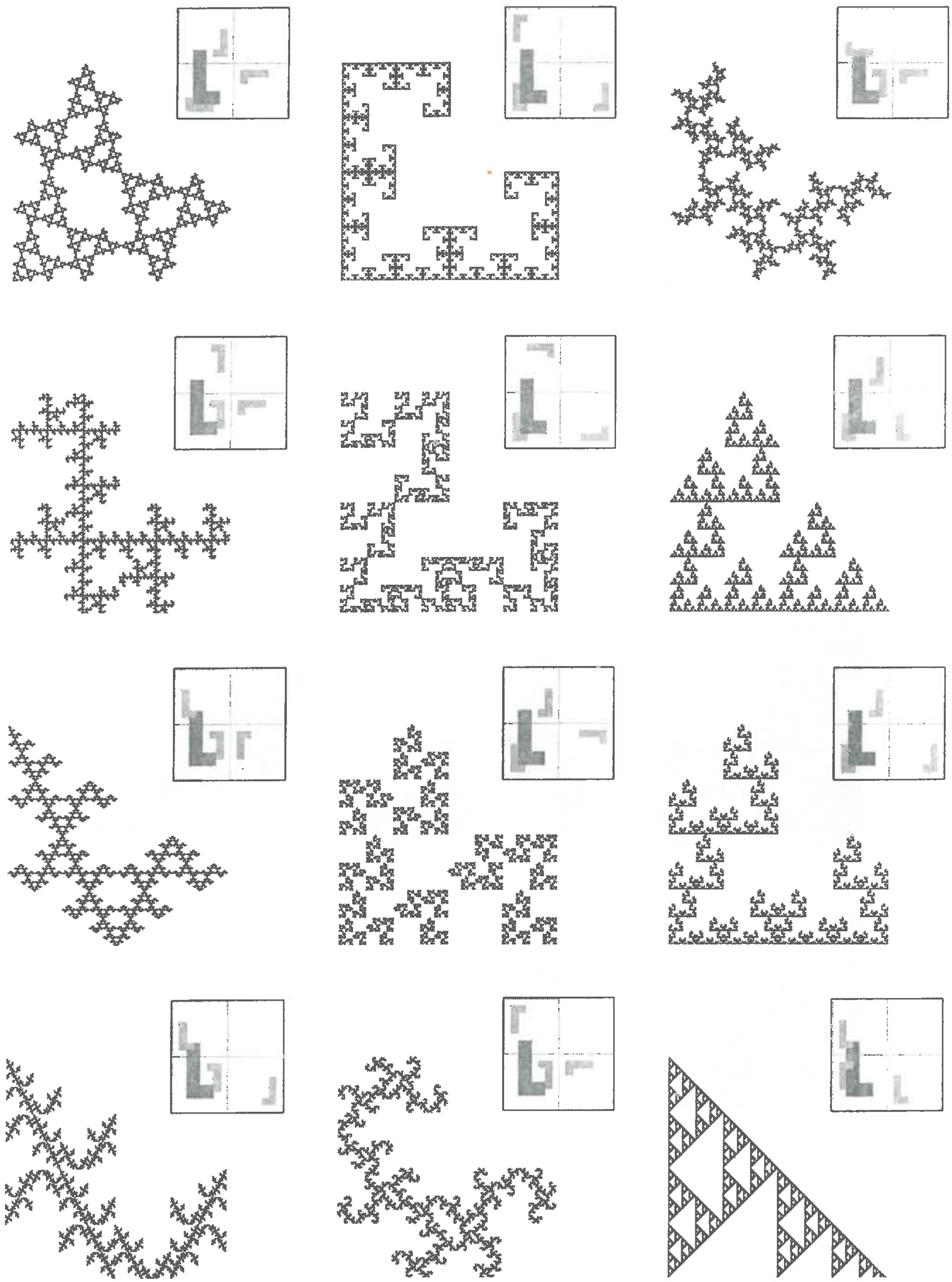


چند مرحله آغازی ساخت این فرکتال و شکل نهایی آن، چنین خواهد بود.



مشاهده می‌کنید که فرکتالی کاملاً متفاوت ساخته شد. با انجام تغییراتی بیش‌تر، فرکتال‌های زیبای دیگری به‌وجود می‌آید. در زیر تعدادی

از این فرکتال‌ها را می‌بینید.



فکر می‌کنید با این روش چه تعداد فرکتال متفاوت می‌توان ساخت؟ هر یک از سه مربع کوچک، ۸ حالت مختلف دارد. پس در مجموع $۸ \times ۸ \times ۸ = ۵۱۲$ الگوی مختلف وجود دارد. ولی بعضی از این الگوها منجر به فرکتال‌هایی یکسان می‌شوند و بعضی هم با یک تقارن قابل تبدیل به یکدیگرند. به هر حال به‌نظر می‌رسد تعداد چنین فرکتال‌هایی از صد تجاوز کند.

فرکتال‌هایی که ساختیم هرچند از نظر ظاهری با هم تفاوت دارند ولی خواص مشترکی هم می‌توان در بین آن‌ها یافت. مساحت همهٔ آن‌ها صفر است. برای نشان دادن این مطلب می‌توان به شکل زیر استدلال کرد.

فرض کنید ضلع مربع آغازی $a$ باشد. پس در ابتدا قبل از انجام هر کاری، شکلی داریم با مساحت $S_۰ = a^۲$. در قدم اول از ۴ مربع یکی را حذف کرده‌ایم، پس $S_۱ = \frac{۳}{۴}S_۰$. به‌همین ترتیب در مرحلهٔ $n+۱$-ام، تعدادی مربع وجود دارد که ما $\frac{۱}{۴}$ آن‌ها را حذف می‌کنیم و $\frac{۳}{۴}$ باقی می‌ماند. در نتیجه $S_{n+۱} = \frac{۳}{۴}S_n$. با استقرا ثابت می‌شود که $S_n = (\frac{۳}{۴})^n a^۲$. اکنون توجه کنید که مساحت شکل نهایی کوچک‌تر یا مساوی $S_n$ است، یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$، $۰ \leq S \leq S_n$. ولی واضح است که $\lim_{n\to\infty} S_n = ۰$، پس $S = ۰$.

بُعد همهٔ فرکتال‌هایی که ساختیم نیز با هم برابر است. توجه کنید که با استفاده از سه نسخه از هرکدام می‌توان فرکتالی دو برابر فرکتال اول ساخت. پس بعد همهٔ آن‌ها برابر $\frac{\log ۳}{\log ۲}$ است.

## یک الگوریتم جالب

می‌خواهیم به وسیلهٔ کامپیوتر یکی از فرکتال‌هایی که تعریف کردیم را رسم کنیم. هرکدام از این فرکتال‌ها به‌وسیلهٔ سه تبدیل هندسی معرفی شده‌اند. این سه تبدیل را $T_۱$، $T_۲$ و $T_۳$ بنامید. واضح است که اگر $F$ فرکتال مورد نظر باشد رابطهٔ زیر برقرار است.

$$F = T_۱(F) \cup T_۲(F) \cup T_۳(F)$$

یعنی سه نسخهٔ کوچک شدهٔ $F$، کل $F$ را پوشانده‌اند. اکنون فرض کنید $x_۰$ نقطه‌ای از $F$ باشد. می‌خواهیم به‌کمک $x_۰$ فرکتال $F$ را بسازیم. اگر $n_۱$ عضو $\{۱, ۲, ۳\}$ باشد آنگاه $x_۱ = T_{n_۱}(x_۰)$ نیز نقطه‌ای از $F$ است (به رابطهٔ بالا توجه کنید). به این ترتیب سه نقطهٔ دیگر از $F$ به‌دست می‌آید (البته احتمال دارد بعضی از این نقاط با هم یا با $x_۰$ مساوی باشند). در قدم بعد ۹ نقطه، در قدم بعد ۲۷، ... به‌دست می‌آید. می‌توان ثابت کرد که اگر این نقاط را مثلاً تا ۶ مرحله رسم کنیم، شکلی به‌دست می‌آید که بسیار نزدیک به $F$ است. البته با زیاد کردن مراحل، شباهت، بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود.

الگوریتمی که مطرح شد حافظهٔ زیادی ازکامپیوتر می‌گیرد. زیرا در قدم $n$-ام، $۳^n$ نقطه باید محاسبه شود و این مقدار با زیاد شدن $n$ با سرعت بسیار بالا افزایش می‌یابد. در الگوریتم بعدی این نقص برطرف شده‌است.

## یک الگوریتم جالب‌تر!

باز هم فرض کنید $x_۰$ نقطه‌ای از $F$ باشد. $n_۱$ را عددی تصادفی در مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ بگیرید و تعریف کنید $x_۱ = T_{n_۱}(x_۰)$. می‌دانیم که $x_۱$ نیز نقطه‌ای از $F$ است. به‌طور مشابه $n_۲$ را نیز عددی تصادفی در مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ بگیرید و تعریف کنید $x_۲ = T_{n_۲}(x_۱)$. به‌همین ترتیب اگر $n_k$ عددی تصادفی در مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ باشد، تعریف کنید $x_k = T_{n_k}(x_{k-۱})$. به این ترتیب $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، ... دنباله‌ای از نقاط $F$ است و جالب اینجاست که با انتخاب تعداد زیادی از جمله‌های این دنباله نمایشی نسبتاً دقیق از $F$ به‌دست می‌آید! به چنین الگوریتمی یک «الگوریتم تصادفی» گفته می‌شود.

## یافتن یک نقطه از $F$

هر دو الگوریتمی که معرفی کردیم بر این پایه بود که نقطه‌ای از $F$ را داشته باشیم. روشی ساده برای یافتن یک نقطه از $F$ وجود دارد. یکی از تبدیلات سازندهٔ $F$ را در نظر بگیرید، مثلاً $T_1$. به‌راحتی می‌توان دید که معادلهٔ $T_1(x) = x$، دقیقاً یک جواب دارد. می‌توان ثابت کرد که این جواب حتماً عضوی از $F$ است و لذا کافی است که $x$ را جواب این معادله بگیریم. البته توجه کنید که معادلهٔ مذکور یک معادلهٔ خطی است که به راحتی قابل حل است.

## آستین‌ها را بالا بزنید!

اگر با برنامه‌نویسی کامپیوتری آشنایی دارید، الگوریتم‌های معرفی شده در این مقاله را پیاده‌سازی کنید و از ساختن فرکتال‌های متنوع لذت ببرید!

ادامه دارد ...

### نامه‌ها...

**جواب‌های رسیده به مسأله‌های جایزه‌دار**

نامبردگان زیر راه‌حل‌های صحیح برای دومین مسألهٔ جایزه‌دار شماره هفتم ارسال کرده‌اند.

**مسأله ۷-۲.**

عباس محرابیان، دبیرستان علامه‌حلی تهران- سعید ملکی، دبیرستان علامه‌حلی تهران- سید محمد احمدی، تهران- امیرحسین استیری، دبیرستان کمال تهران- اکبر عنبرجعفری، دبیرستان شهید سلطانی کرج.

هدایایی برای این دانش‌آموزان ارسال می‌گردد. مسألهٔ ۷-۱ دارای اشتباهی بود که بعضی از خوانندگان گرامی نیز به آن توجه کردند، در مسألهٔ ۷-۱ «حداقل» باید به «حداکثر» تبدیل شود. با این تغییر اگر حوصله داشتید مسأله را حل کنید و راه حل خود را برای ما بفرستید.

ضمناً نامه‌های دوستان زیر نیز به‌دست ما رسیده است. از آن‌ها متشکریم و از نظرات و انتقادات و مطالبشان استفاده خواهیم کرد.

**آقای کیان میرجلالی (از اصفهان).** از نامهٔ شما و نظراتتان متشکریم، امیدواریم همکاری خود را با ما باز هم ادامه بدهید.

**آقای امیرحسین کدیور (از شیراز).** نامهٔ شما به دستمان رسید، از نظرات و پیشنهاداتتان بسیار متشکریم و سعی می‌کنیم از آن‌ها استفاده کنیم. باز هم منتظر پیشنهادات شما هستیم.

**خانم سمیرا عزیزی (از همدان).** نامهٔ مفصل شما را دریافت کردیم. از صحبت‌های شما واضح است که به ریاضیات بسیار علاقمند هستید و به‌نظر می‌رسد که شما تا حدودی به دلایل مشکلات خودتان در حل مسایل ریاضی، واقف شده‌اید و این گام بزرگی در رفع این مشکل است. پاسخ سؤالات خاصتان را برایتان ارسال خواهیم کرد. امیدواریم موفق باشید.

@ نامه‌های الکترونیکی افراد زیر به دستمان رسیده است، از همگی آن‌ها متشکریم.

سهیلا سالاری، سمیرا افشار، صدف صالح، امیرحسین کدیور، محمدعلی مهرجوفرد، نوربخش منزوی.

# نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

مرتضی بیات، مهدی حسینی

**چکیده**

تفهیم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{۲}$، $e$ و $\pi$، از درک عمیق این که آنها چه نوع اعدادی هستند، به مراتب راحت‌تر است. در این مقاله کوتاه کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اشاره به زمینه‌های تاریخی موضوعی به درک بهتر مطالب کمک خواهد نمود و نیز اثبات گنگ بودن اعداد $\sqrt{۲}$، $e$ و $\pi$، به روش کوتاه و همچنین بررسی قضیهٔ هالموس (صورت ساده مسأله هفتم هیلبرت) و قضیه بیتی پایان بخش این مقاله خواهد بود.

## ملاحظات تاریخی در باب اعداد گنگ و گویا

اعداد گویا و گنگ سابقه‌ای قدیمی دارند. کشف گنگ بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن به فیثاغورسیان منسوب است. تئودوروس (اواخر قرن پنجم قبل از میلاد)، استاد افلاطون در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرده‌است و گنگ بودن جذر ۳ و سایر اعداد طبیعی غیر مجذور کامل را تا ۱۷ به ثبوت رسانید. ائودوکسوس (حدود ۴۰۸ ـ حدود ۳۵۵ قبل از میلاد)، ریاضیدان یونانی و یکی از بزرگ‌ترین ریاضیدان‌های جهان، تئوری نسبت را در مورد مقادیر گنگ تعمیم داد. یونانیان، به‌جای عدد مجرد، عمدتاً به کمیات هندسی نظر داشتند. کارهای آنها در زمینهٔ اعداد گنگ در کتاب اصول هندسه، به اوج می‌رسد. بحث هندسی از کمیات گنگ به‌تدریج منجر به مفهوم عدد گردید، و مبحث اعداد گنگ در اغلب کتاب‌های «حساب نظری» قرن ۱۵ میلادی دیده می‌شود.

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی نسبت محیط دایره به قطر آن است، که از ایام بسیار قدیم مورد توجه بوده و این عدد از زمان اویلر به بعد به نام «$\pi$» خوانده می‌شود. عدد مشهور دیگر، عدد «$e$» است و سابقه‌اش ظاهراً بعد از کشف لگاریتم است. تا اواسط قرن ۱۸ میلادی، کسی نمی‌دانست که این اعداد گویا هستند یا گنگ، تا آنکه لامبرت در ۱۷۶۱ گنگ بودن آنها را ثابت کرد. گنگ بودن $e^{۲}$ در ۱۸۴۰ به‌وسیلهٔ لیوویل به اثبات رسید. امروزه می‌دانیم که همهٔ قوای طبیعی $e$ و $\pi$ و کثیرالجمله‌های صحیح بر حسب $e$ یا $\pi$ با ضرایب گویا اعداد گنگ هستند. گنگ بودن اعداد $۲^{e}$، $\pi^{e}$ و $\pi^{\sqrt{۲}}$ و عدد اویلر،

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} - \ln n)$$

هنوز دانسته نیست، ولی می‌دانیم که اعداد $۲^{\sqrt{۲}}$ و $e^{\pi}$ گنگ‌اند.

مسألهٔ جبری یا متعالی بودن یک عدد خود مسألهٔ دیگری است. در این موضوع سه مسألهٔ متمایز می‌توان مطرح کرد: اول اثبات وجود اعداد متعالی (بدون الزام به عرضه کردن چنین اعدادی)، دوم عرضه کردن عددی متعالی، سوم ـ که به مراتب از هر دو مشکل‌تر است ـ اثبات این‌که عدد معینی (نه عددی که بدین منظور ساخته شده است، بل‌که اعدادی مانند $e$، $\pi$، و اعداد مشخص دیگر متداول در آنالیز) متعالی هست یا نه. نخستین ریاضیدانی که دسته‌ای از اعداد متعالی عرضه کرد لیوویل است (۱۸۸۴)، و سپس، لیندمان متعالی

بودن $\pi$ را ثابت کرد (۱۸۸۲). با اثبات قضیهٔ شگفت‌انگیز کانتور معلوم شد که ـ به عبارت مجازی ـ تقریباً همهٔ اعداد متعالی هستند. در واقع، اعداد متعالی اعداد استثنایی نیستند، بل‌که اعداد غیرمتعالی‌اند که جنبهٔ استثنایی دارند.

در کنگرهٔ پاریس (سال ۱۹۰۰)، هیلبرت توجه ریاضیدانان را به بیست و سه مسألهٔ حل‌نشده جلب کرد. هفتمین آنها در متعالی بودن اعدادی بود به‌صورت $a^b$ با مفروضات او $a \neq ۰$ و $b \neq ۱$، جبری بودن $a$ و $b$، و گنگ بودن $b$. در ۱۹۳۴ ثابت شد که همهٔ این اعداد متعالی هستند.

## عدد و تعبیر هندسی

به‌قول ریاضیدان شهیر آلمانی لئوپولد کرونکر:

**«خداوند اعداد صحیح را آفرید و مابقی کار انسان است».**

به واقع انسان از آن موقعی که تناظر یک به یک اعداد و نقاط روی یک محور را درک نمود، این قدرت آفرینش در انسان شکوفا شد و اندازه‌گیری طول یک قطعه خط شروع این خلاقیت بود. راه طبیعی اندازه‌گیری طول این است که با خط‌کش که ابزار اندازه‌گیری است، شروع کنیم. اگر تکرار اندازهٔ خط‌کش ممکن باشد، آن را به دنبال هم کنار طولی که باید اندازه‌گیری شود قرار می‌دهیم. در صورتی که سنجش کامل با چهار خط‌کش صورت گیرد، گوییم طول برابر ۴ است. اگر سه طول چهار واحدی به‌دنبال هم قرار گیرند، تعداد ۱۲ خط‌کش اندازه‌گیری برای سنجش کامل تمام طول‌ها لازم است. ملاحظه می‌کنیم که این عمل، کلید حل چگونگی انجام کار در حالت کلی که سنجش کامل تعداد صحیحی خط‌کش امکان‌پذیر نیست، نشان می‌دهد. اگر معلوم شود که $m$ واحد اندازه‌گیری برای سنجش $n$ طول مساوی، لازم است در آن صورت طول مطلوب $x$ در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$m = n \times x \tag{۱}$$

متأسفانه اگر بخواهیم اعداد طبیعی را به‌کار بریم باید گفت که معادله (۱)، معمولاً جواب ندارد. یونانیان قدیم از این مسأله دوری می‌کردند و آن را به این ترتیب بیان می‌نمودند: طول واحد اندازه‌گیری به نسبت $\frac{m}{n}$ است. این در واقع نقطهٔ شروع آشنایی آنها با اعداد گویا (مُنطق) بود.

از اعداد می‌توانیم برای اندازه‌گیری طول، یا کمیت‌های دیگر فیزیکی استفاده کنیم، ولی یونانیان می‌دانستند پاره‌خط‌هایی هم وجود دارند که طول آنها را نمی‌توان در «تئوری» دقیقاً با اعداد گویا اندازه گرفت. آنها هندسه‌دانان بزرگی بودند، یکی از قضیه‌های ساده ولی عمیقشان قضیه فیثاغورس بود.

فلاسفهٔ مکتب فیثاغورس البته با قضیهٔ فیثاغورس آشنا بوده‌اند، و از استدلال‌هایی استفاده می‌کردند که در آن مساحت‌های اشکال مختلف به‌کار گرفته می‌شد.

به محض اینکه قضیهٔ فیثاغورس کشف شد، در محدودهٔ کوچکی می‌بایست توافق می‌شد که پاره‌خطی به طول $\sqrt{۲}$، گنگ است. نتیجه با بهت و حیرت پذیرفته شد، حتی سعی گردید تا این «نقض کلی» را مخفی نگه دارند، ارسطو در کتاب طبیعیات خود در باب عقاید فیثاغورس می‌گوید:

«... لیکن فیثاغورس یا اصحاب اولیه او به آسانی ثابت کرده بودند که مجذور هیچ عدد صحیحی نمی‌تواند دو برابر مجذور عدد دیگری باشد و به این جهت طول ضلع یا طول وتر از مقادیر گنگ است؛ یعنی هر واحد طول را هر اندازه کوچك اختیار کنید اگر تعداد دفعاتی که واحد در طول ضلع تکرار می‌شود بدون کسر باشد، در طول وتر بدون کسر نخواهد بود و بالعکس».

همه ما با کار یک پارچه فروش آشنا هستیم، او میله‌ای به اندازهٔ یک متر در اختیار دارد. حال اگر از وی خواسته شود که دقیقاً $\sqrt{۲}$ متر پارچه جدا کند، آیا او قادر به انجام چنین کاری خواهد بود یا نه؟!

حتی اگر وی با وسیله‌ای طول مترش را به $n$ قسمت مساوی تقسیم کند باز هم نمی‌تواند این کار را به‌طور دقیق با $\frac{1}{n}$ مترش انجام دهد، زیرا اگر $\frac{1}{n}$ مترش را در طول $\sqrt{2}$ متر پارچه بسنجد، به‌طور طبیعی تعداد $m$ تا $\frac{1}{n}$ از طول $\sqrt{2}$ متر پارچه بیشتر یا کمتر خواهد شد و در غیر این‌صورت باید داشته باشیم.

$$\sqrt{2} = m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \tag{2}$$

که البته بعداً ثابت می‌کنیم که این تساوی هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد. از اینجا متوجه می‌شویم که قسمت اضافی یا کسری که در انتهای سنجش $\sqrt{2}$ متر پارچه به‌وجود می‌آید بایستی به‌طریقی صرف شود، این عمل را «**تقریب اعداد گنگ به کمک اعداد گویا**» می‌گویند. هر قدر مقدار اضافی یا کسری کمتر باشد، «**تقریب دقیق‌تر**» خواهد بود و از اینجاست که «**مفهوم حد**» ظاهر می‌شود. حال سعی می‌کنیم، $\sqrt{2}$ را با اعداد گویا تقریب بزنیم. دانش‌آموزان دبیرستانی با محاسبهٔ حد،

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0 \tag{3}$$

آشنا هستند، ولی کاربرد دقیق آن را نمی‌دانند، بگذارید بدون استفاده از ماشین حساب مقدار تقریبی $\sqrt{2}$ را به کمک حد مذکور به‌دست آوریم، هرگاه تعداد مراحل (یعنی $n$) بیشتر شود به تقریب بهتری برای $\sqrt{2}$، می‌رسیم:

$$\begin{array}{llll}
n=1 \to & (\sqrt{2}-1)^1 \approx 0 \to \sqrt{2}\approx 1 & & \\
n=2 \to & (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0 \to & 3-2\sqrt{2}\approx 0 & \to \sqrt{2}\approx 1/5 \\
n=3 \to & (\sqrt{2}-1)^3 \approx 0 \to & -7+5\sqrt{2}\approx 0 & \to \sqrt{2}\approx 1/4 \\
n=4 \to & (\sqrt{2}-1)^4 \approx 0 \to & 17-12\sqrt{2}\approx 0 & \to \sqrt{2}\approx 1/4166 \\
\vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

اثبات گنگ بودن $\sqrt{2}$، به روش‌های مختلفی در مرجع [۶] بیان شده است، اما در اینجا برهان ساده و جدیدی را از [۵] بیان می‌کنیم.

**قضیه ۱.** *$\sqrt{2}$ گنگ است.*

**برهان.** فرض کنیم $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ و $\frac{m}{n}$ کسری با کوچک‌ترین مخرج باشد، از طرفی دیگر داریم $\sqrt{2} = \frac{2n-m}{m-n}$ و $\frac{2n-m}{m-n}$ مخرج کوچک‌تری دارد که این یک تناقض است. ∎

در اثبات قضیهٔ اخیر سه موضوع حایز اهمیت است، صورت و مخرج کسر دوم به‌ترتیب کوچک‌تر از صورت و مخرج کسر اول هستند و نیز هنوز صورت و مخرج کسر دوم مثبت‌اند، در ضمن این دو کسر با هم برابرند.

به همین نحو می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی $k$، که مربع کامل نیست، $\sqrt{k}$ گنگ است. برای این کار فرض کنیم $j$ عدد طبیعی باشد به‌طوری که $j < \sqrt{k} < j+1$. اگر داشته باشیم $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$ و $\frac{m}{n}$ کسری با کوچک‌ترین مخرج باشد به‌طوری که $m,n \in \mathbb{Z}^+$ بنابراین داریم $\sqrt{k} = \frac{kn-jm}{m-jn}$ که مخرج $\frac{kn-jm}{m-jn}$ کوچک‌تر است، که این یک تناقض است، پس $\sqrt{k}$ گنگ است.

## حل چند مسأله به کمک اعداد گنگ

اینک با استفاده از گنگ بودن $\sqrt{2}$ مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم:

**مسأله ۱.** *فرض کنیم نیم‌خطی از مبدأ مختصات رسم شده باشد، اگر این نیم‌خط از نقطهٔ گنگی مانند $(1,\sqrt{2})$ عبور کند، آیا این نیم‌خط از نقطهٔ صحیح دیگری عبور می‌کند؟*

**حل.** فرض کنیم که این نیم‌خط از نقطه‌ای بگذرد که هر دو مؤلفه $x$ و $y$ اعداد صحیح $p$ و $q$ باشند. در این صورت با توجه به مثلث‌های متشابه داریم:

$$\frac{\sqrt{2}}{q} = \frac{1}{p}$$

اما نتیجه اخیر غیرممکن است، چون $\sqrt{2}$ گنگ است. ∎

**مسأله ۲.** *(مسابقهٔ ریاضی دانشجویی ۱۳۵۷).* *در صفحه $XOY$ نقطه‌ای را گویا خوانیم که هر دو مختصاتش گویا باشند. ثابت کنید که اگر دایره‌ای در صفحه داده شده باشد که مرکزش گویا نباشد، در این‌صورت روی آن دایره حداکثر دو نقطهٔ گویا وجود دارد.*

**حل.** مسأله را با برهان خلف حل می‌کنیم، فرض کنیم تعداد نقاط گویا روی محیط دایره بیش از دو نقطه باشد، و فرض کنیم

$$A = (a_1, b_1) \quad B = (a_2, b_2) \quad C = (a_3, b_3)$$

سه نقطهٔ گویای روی محیط دایره باشند. معادلات خطوط عمود منصف وارد بر وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ را با $l_1$ و $l_2$ به شرح زیر نمایش می‌دهیم:

$$l_1: \ y - \tfrac{b_2+c_2}{2} = -\tfrac{b_1-c_1}{b_2-c_2}(x - \tfrac{c_1+b_1}{2})$$
$$l_2: \ y - \tfrac{a_2+b_2}{2} = -\tfrac{b_1-a_1}{b_2-a_2}(x - \tfrac{a_1+b_1}{2})$$

خطوط $l_1$ و $l_2$ همدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند، لذا مرکز دایره دارای مختصات گویا می‌باشد که این مخالف فرض است. ∎

در مسألهٔ زیر نشان می‌دهیم که اعداد گویا و گنگ به‌طور بسیار پیچیده‌ای درهم آمیخته‌اند، و نباید به اشتباه تصور کرد که آنها روی خط حقیقی به‌طور «متناوب» هستند.

اعداد گویا را می‌توان اعدادی دانست که بسط اعشاریشان از جایی به بعد به فواصل منظم تکرار می‌شود (از اثبات این مطلب صرف‌نظر می‌کنیم). با بیان دقیق‌تر، گوییم یک بسط اعشاری تکراری است هرگاه از رقمی به بعد دنبالهٔ ثابتی از ارقام به‌طور نامتناهی تکرار شود. مثلاً،

$$1/543217417417417 4\cdots = 1/5432\overline{174}$$

یک بسط اعشاری تکراری است.

**مسأله ۳.** *(مسابقه ریاضی دانشجویی ۱۳۵۲). ثابت کنید عدد*

$$0/1234567891011121314151617181920\cdots$$

*که در فرم اعشاری ارقامش اعداد طبیعی، پشت سر هم هستند، گنگ است.*

**حل.** فرض کنیم که دورهٔ تناوب وجود داشته باشد و از $n$ رقم تشکیل شود. در رشتهٔ طبیعی عددها، وقتی که به اندازهٔ کافی جلو برویم، می‌توانیم به عددی برسیم که در آن $n$ رقم متوالی مساوی صفر باشد، و بنابراین همهٔ رقم‌های دورهٔ تناوب باید باشند. به‌همین ترتیب می‌توان استدلال کرد که همهٔ رقم‌های دورهٔ تناوب باید یک باشند و این دو نتیجه متناقض یکدیگرند. بنابراین عدد بالا گنگ است. ∎

**مسأله ۴.** *ثابت کنید در صفحهٔ مختصات دکارتی مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود ندارد که طول ضلعش عددی گویا باشد و مختصات سه رأسش هم اعدادی گویا باشند.*

**حل.** فرض کنید مثلثی با ویژگی‌های مورد نظر وجود داشته باشد، طول ضلعش $l$ باشد و مختصات سه رأسش

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

باشند. در این‌صورت مساحت مثلث برابر است با

$$\frac{۱}{۲}[x_۲y_۳ - x_۳y_۲ - x_۱y_۳ + x_۱y_۱ + y_۱x_۳ - y_۱x_۲]$$

که عددی گویاست. از طرف دیگر مساحت مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $l$ برابر با $\frac{l\sqrt{۳}}{۲}$ است، که با توجه به گنگ بودن $\sqrt{۳}$ و گویا بودن $\frac{l}{۲}$، عددی گنگ است (چرا؟). بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و حکم مسأله درست است. ∎

## چند قضیه ساده دربارهٔ اعداد گنگ

همان‌طوری که دیدیم، عدد $\sqrt{۲}$ گنگ است. بسیاری از اعداد دیگر هم گنگ هستند. اثبات گنگ بودن یک عدد همیشه ساده نیست (خواهیم دید برای $e$ نسبتاً ساده است و برای $\pi$ مشکل‌تر، اعداد جالب بسیاری هم وجود دارند که قرن‌هاست ریاضیدانان به گنگ بودنشان متقاعد هستند، ولی هرگز به اثباتشان دست نیافته‌اند). ولی تنها از این واقعیت که $\sqrt{۲}$ گنگ است نتیجه می‌گیریم که بین هر دو عدد گویا عددی گنگ وجود دارند. ابتدا به لم زیر نیاز داریم:

**لم ۱.** *اگر $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ گویا باشند و $\frac{r}{s} \neq ۰$ آنگاه $\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\sqrt{۲}$ گنگ است.*

**برهان.** فرض کنیم $\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\sqrt{۲}$ عددی گویا و برابر با $\frac{p}{q}$ باشد که $p$ و $q$ اعداد صحیح هستند، آنگاه با معادلهٔ زیر برای $\sqrt{۲}$ داریم:

$$\sqrt{۲} = \frac{pn - mq}{qrn}$$

که گویاست و متناقض گنگ بودن $\sqrt{۲}$ است. ∎

**قضیه ۲.** *بین هر دو عدد گویای متمایز عددی گنگ وجود دارد.*

**برهان.** فرض کنیم اعداد گویای مفروض $\frac{m}{n}$ و $\frac{r}{s}$ باشند و $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$ آنگاه

$$\frac{m}{n} < \frac{m}{n} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{r}{s} - \frac{m}{n}\right) < \frac{r}{s}$$

($۱ > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$) و عدد میانی بنا به لم قبل گنگ است. ∎

با تعویض «گویا» و «گنگ» قضیه متناظر به‌دست می‌آید:

**قضیه ۳.** *بین هر دو عدد گنگ متمایز عددی گویا وجود دارد.*

**برهان.** فرض کنیم اعداد گنگ مفروض $a$ و $b$ باشند، و $a < b$. بسط آنها را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $n$ امین رقم اعشاری اولین رقمی باشد که در این دو متفاوت است. آنگاه

$$\begin{aligned} a &= a_۰/a_۱ \ldots\ a_{n-۱}\ a_n \ldots \\ b &= a_۰/a_۱ \ldots\ a_{n-۱}\ b_n \ldots \end{aligned}$$

و $a_n \neq b_n$. فرض کنیم $x = a_۰/a_۱ \ldots a_{n-۱}b_n$، آنگاه $x$ گویاست و باید داشته باشیم $a < x < b$. (واضح است که $a < x < b$، ولی چون $b$ گنگ است، $x \neq b$). ∎

**قضیه ۴.** *عدد $e$ گنگ است.*

برهان. بنا به تعریف،

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

فرض کنیم $e$ گویا باشد؛ بنابراین داریم $e = \frac{a}{b}$ که در آن $a$ و $b$ اعداد صحیح هستند. اگر $k \geq b$، قرار می‌دهیم

$$\alpha = k!(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{k!})$$

چون $b \mid k!$، $\alpha$ عدد صحیح است. اما

$$0 < \alpha = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots = \frac{1}{k}$$

در نتیجه $0 < \alpha < 1$ و این تناقض است. ∎

و برای اثبات گنگ بودن عدد $\pi^2$، ابتدا تابع زیر را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱ .** برای هر عدد صحیح مثبت $n$، تابع $f_n$ را با

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

تعریف می‌کنیم.

برای هر $0 \leq x < 1$ به‌وضوح داریم

$$0 \leq f_n(x) < \frac{1}{n!} \qquad (4)$$

و به‌علاوه،

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m$$

همچنین هرگاه $m < n$ یا $m > 2n$، $f_n(0) = 0$ و $f_n^{(m)}(0) = 0$، اما اگر $n \leq m \leq 2n$ آن‌گاه

$$f_n^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m$$

یک عدد صحیح است. بنابراین $f_n(x)$ و هر مشتق‌اش به ازای $f_n(x)$ مقادیر صحیح هستند. چون $f_n(x) = f_n(1-x)$ این مطلب در نقطهٔ $x = 1$ نیز برقرار است.

**قضیه ۵.** *عدد $\pi^2$ (و در نتیجه $\pi$) گنگ است.*

برهان. فرض کنیم $\pi^2$ گویا باشد، بنابراین $\pi^2 = \frac{a}{b}$، که در آن $a$ و $b$ اعداد صحیح مثبت‌اند، می‌نویسیم:

$$G(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right]$$

در ضمن $G(0)$ و $G(1)$، اعداد صحیح هستند، داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x)\right) = \left(G''(x) + \pi^2 G(x)\right)\sin(\pi x)$$

$$= \pi^2 a^n \sin(\pi x) f_n(x)$$

بنابراین،

$$\pi \int_{\circ}^{۱} a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx = \left[\frac{G'(x)\sin(\pi x)}{\pi} - G(x)\cos(\pi x)\right]_{\circ}^{n} \qquad (۵)$$

یک عدد صحیح است. ولی طبق (۵)،

$$\circ < \pi \int_{\circ}^{۱} a^n f_n(x)\sin(\pi x)dx < \frac{۲a^n}{n!}$$

که تناقض است، زیرا به ازای $n$ های به قدرکافی بزرگ، $۲a^n < n!$. ■

## قضیه هالموس

همان‌طورکه دیدیم $\pi$ و $e$ اعداد گنگ هستند ولی دربارهٔ ماهیت اعدادی چون $۳^{\sqrt{۲}}$ یا $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ و ... اطلاعی نداریم. همواره این حکم به‌طور نادرست در ذهن تداعی می‌شود که اگر «$\alpha$ و $\beta$ اعداد گنگ باشند، آنگاه $\alpha^\beta$ نیزگنگ است». این موضوع در حالت کلی برقرار نیست، قضیهٔ زیرکه دارای اثباتی ساده و ظریف است به این سؤال جواب خواهد داد.

**قضیه ۵ (هالموس)**

۱) عدد گنگ به توان عدد گنگ، ممکن است گویا باشد.

۲) عدد گنگ به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

۳) عدد گویا به توان عدد گنگ، ممکن است گنگ باشد.

**اثبات(۱).** اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = ۲$$

اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$، گویا باشد حکم تمام است و در غیر این‌صورت از اتحاد بالا استفاده کنید.

(۲). اتحاد $۲\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\sqrt{۲} = \sqrt{۲}^{\sqrt{۲}+۱}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گنگ باشد برهان تمام است در غیر این‌صورت $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویاست، پس $۲\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}\sqrt{۲}$ گنگ است و در نتیجه $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}+۱}$، مثالی از حالت مورد بحث است.

(۳) اگر $۲^{\sqrt{۲}}$ گنگ باشد حکم تمام است و اگر گویا باشد عدد $\left(۲^{\sqrt{۲}}\right)^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$، را در نظر می‌گیریم، با توجه به اینکه

$$\left(\sqrt{۲}\right)^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}} = \sqrt{۲}$$

پس $\left(۲^{\sqrt{۲}}\right)^{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$، گنگ است.

## قضیه بیتی

در سال ۱۹۲۶ سام بیتی از دانگاه تورنتو کشف مهمی در مورد دنبالهٔ اعداد گنگ کرد. فرض کنیم $X$ یک عدد گنگ مثبت، مثلاً $\sqrt{۲}$، باشد. عکس $X$ را $Y$ می‌نامیم، در این‌صورت $Y = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \approx ۰/۷$ با افزودن ۱ به هر یک از $X$ و $Y$ به‌دست می‌آوریم

$$۱ + X \approx ۲/۴ \qquad ۱ + Y \approx ۱/۷$$

حال جدولی از مضرب‌های تقریبی $X + ۱$ و $Y + ۱$ تشکیل می‌دهیم و این مضرب‌ها را در جدولی مطابق زیر مشخص می‌کنیم. اکنون می‌بینیم که در هر بازهٔ $(n, n + ۱)$ یعنی بین هر جفت از اعداد صحیح مثبت متوالی دقیقاً یکی از اعداد جدول وجود دارد.

| $n$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n(۱ + X)$ | ۲/۴ | ۴/۸ | ۷/۲ | ۹/۶ | ۱۲ | ۱۴/۴ | ۱۶/۸ | $\cdots$ |
| $n(۱ + Y)$ | ۱/۷ | ۳/۴ | ۵/۱ | ۶/۸ | ۸/۵ | ۱۰/۲ | ۱۱/۹ | $\cdots$ |

به‌طور کلی، قضیه زیر برقرار است.

**قضیه ۶.** *فرض کنید $X$ عددگنگ مثبت و $Y$ عکس آن باشد در این‌صورت در هر یک از بازه‌های $(n, n + ۱)$ که $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$ دقیقاً یک عدد از دو دنبالهٔ*

$$۱ + X,\ ۲(۱ + X),\ ۳(۱ + X),\ \ldots$$

$$۱ + Y,\ ۲(۱ + Y),\ ۳(۱ + Y),\ \ldots$$

*وجود دارد.*

در سال ۱۹۲۷ اثبات زیبایی از این قضیه را اوستروسکی و آتیکن انتشار دادند.

**برهان.** ابتدا توجه می‌کنیم که، چون $X$ و $Y$ گنگ هستند، هر یک از جملات دنباله‌های مورد نظر گنگ است. این مطلب مخصوصاً به این معنی است که هیچ جمله‌ای عدد صحیح نیست.

اکنون، تعداد مضرب‌هایی از $۱ + X$ که کوچک‌تر از یک عدد صحیح مثبت مفروض $n$ هستند، برابر است با $\left[\frac{n}{۱+X}\right]$ که در آن $[z]$ نشان دهندهٔ بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیشتر از $z$ است. همین‌طور تعداد جملاتی از دنبالهٔ دوم (مضرب‌های $Y + ۱$) که بین ۱ و $n$ واقع‌اند برابر است با $\left[\frac{n}{۱+Y}\right]$. پس روی هم رفته، $\left[\frac{n}{۱+X}\right] + \left[\frac{n}{۱+Y}\right]$ جمله از دنباله‌ها بین ۱ و $n$ قرار دارند. چون $\frac{n}{۱+X}$ و $\frac{n}{۱+Y}$ اعددی صحیح نیستند، داریم:

$$\frac{n}{۱ + X} - ۱ < \left[\frac{n}{۱ + X}\right] < \frac{n}{۱ + X}$$

و

$$\frac{n}{۱ + Y} - ۱ < \left[\frac{n}{۱ + Y}\right] < \frac{n}{۱ + Y}$$

با جمع کردن طرفین نابرابری‌ها و ملاحظه این‌که،

$$\frac{۱}{۱ + X} + \frac{۱}{۱ + Y} = \frac{۱}{۱ + X} + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{X}} = ۱$$

به‌دست می‌آوریم

$$n - ۲ < \left[\frac{n}{۱ + X}\right] + \left[\frac{n}{۱ + Y}\right] < n$$

چون $\left[\frac{n}{۱+X}\right] + \left[\frac{n}{۱+Y}\right]$ عدد صحیح است، نتیجه می‌گیریم:

$$\left[\frac{n}{۱ + X}\right] + \left[\frac{n}{۱ + Y}\right] = n - ۱$$

این مطلب بدین معنی است که تعداد کل جمله‌هایی که کوچک‌تر از عدد صحیح $n$ هستند، $n - ۱$ است. همین‌طور، تعداد کل جمله‌ها تا $n - ۱$ برابر با $n$ است؛ یعنی اگر $n$ را به اندازهٔ ۱ افزایش دهیم جملهٔ دیگری از یکی از دنباله‌ها پذیرفته می‌شود و در نتیجه، دقیقاً یک جمله بین $n$ و $n + ۱$ واقع است.

از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر قسمت‌های اعشاری جملات این دنباله‌ها را کنار بگذاریم، هر جمله عدد صحیحی به‌دست می‌دهد و هر عدد طبیعی دقیقاً یک بار ظاهر می‌شود.

**نتیجه.** دنباله‌های $\{n(۱+X)\}$ و $\{n(۱+Y)\}$، که به دنباله‌های بیتی متناظر با عدد گنگ $X$ موسوم‌اند، همراه با هم هر عدد طبیعی را دقیقاً یک بار دربردارند.

**مراجع.**


[1] J.P. Toporowiskis, Irrational Numbers, Amer. Math. Monthly, 50(1973)423-424.

[2] I. Stewart, D. Tall,The, The Foundations of Mathematics, Oxford University Press, 1997.

[3] G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition, Clarandoon Press, Oxford 1960.

[4] I. Niven, A Simple Proof of the Irrationality of $\pi$, Bulletin of the Amer. Math. Society, 53(1947)509.

[5] D.M. Bloom, A *One-Sentence Proof That $\sqrt{2}$ Is Irrational, Mat. Magazine 68(1995)286.*

[۶] آدینه محمد نارنجانی، برهان‌هایی از اصمیت $\sqrt{۲}$، مجله رشد ریاضی، ۴(۱۳۶۳)۴۳-۴۱.

[۷] ایران نیون، اعداد گنگ و گویا، ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۶۷).

[۸] بیژن کاووس، محاسبه عدد $\pi$، مجله آشنایی با ریاضیات، ۱۱(۱۳۶۵)۴۷۰-۴۶۹.

[۹] کی. جی. بین‌مور، مبانی ریاضی، ترجمهٔ اسداله نیکنام و ابوالقاسم بزرگ‌نیا، انتشارات بنیاد فرهنگی رضوی (۱۳۷۰).

[۱۰] غلامحسین مصاحب، آنالیز ریاضی جلد اول، چاپ ششم، مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر تهران (۱۳۶۳).

[۱۱] فریبرز آذرپناه و علی رضایی، برآورد گنگ با گویا، مجله فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ۱۸(۱۳۷۶)۲۸-۲۱.

[۱۲] راس هانسبرگر، ابتکارهایی در ریاضیات، ترجمهٔ سیامک کاظمی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۷۱).


• مرتضی بیات و مهدی حسینی، مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان (این مقاله در سومین کنفرانس آموزش ریاضی ۱۳۷۷ (کرمان) توسط مؤلفین ارایه شده‌است.)

# مسأله‌های درسی

رویا درودی

- ریاضی ۱

۱) اگر $OP = 4$ و $\theta$ زاویهٔ بین $OP$ با جهت مثبت محور $x$ ها باشد که $\tan\theta = -1$ و اگر مختصات $P$ به‌صورت $(x,y)$ باشد، حاصل $2x+y$ چیست؟ ($\theta$ در ناحیهٔ چهارم)

۲) در دستگاه
$$\begin{cases}(x^2-1)^2 = 0\\ 2x+3y = 6\end{cases}$$
نسبت $\frac{x}{y}$ را به‌دست آورید.

۳) اگر $\theta = 225^\circ$ و $r = \sqrt{2}$ (شعاع دایره)، مقدار $\sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}$ را به‌دست آورید.

۴) مجموع دو عدد ۴۰ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آنها ۸۴ است. آن دو عدد را بیابید.

- ریاضی ۲

۱) در مثلث $ABC$ رابطهٔ $\tan A\tan B - (\tan A + \tan B) = 1$ برقرار است. اندازهٔ زاویهٔ $C$ را به‌دست آورید.

۲) اگر $\frac{\pi}{4} < a < \frac{3\pi}{4}$ و $\cos 2a = \frac{1}{1-m}$ باشد، حدود تغییرات $m$ را بیابید.

۳) با فرض $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$، عبارت زیر را ساده کنید:
$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x}}}$$

۴) اگر $\sin x = k$ و $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$، آنگاه $\tan(\frac{\pi}{2}+x)$ را بر حسب $k$ به‌دست آورید.

- حسابان

۱) مقدار $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{|x+1|-|x|}\,dx$ را بیابید.

۲) تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x) = \int_1^{x^2}(t-1)\sin\frac{1}{t-1}\,dt$ مفروض است. مقدار $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$ را به‌دست آورید.

۳) مقدار $\int_0^{\sqrt{2}}[x]\sin x\,dx$ را به‌دست آورید.

۴) مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[x]x\cos[x]\,dx$ را به‌دست آورید.

- جبر و احتمال

۱) $n$ نفر را در نظر می‌گیریم. احتمال آنکه روز تولد هیچ‌یک از آنها مثل هم نباشد چیست؟

۲) می‌خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۵ دونده یک تیم چهار نفره انتخاب کنیم. احتمال آنکه در این تیم لااقل یک فوتبالیست حضور داشته باشد، چقدر است؟

۳) دو عدد حقیقی را از بازهٔ $[0,2]$ انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه مجموع این دو عدد کوچک‌تر از ۳ و بزرگ‌تر از ۱ باشد چیست؟

۴) سکه‌ای به شعاع ۳ روی صفحه‌ای دایره شکل به شعاع ۸ انداخته می‌شود. احتمال آنکه سکه محیط دایره را قطع نکند و مماس با آن هم نباشد، چقدر است؟

- حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱) کران بالا و پایین انتگرال روبه‌رو را بیابید:
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\sin x}\;dx$$

۲) هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\text{(الف)}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n^2}} \qquad \text{(ب)}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{5i}{n^2}$$

۳) تابع $f$ را چنان بیابید که به ازای هر $x > 1$،

$$x^2 = 1 + \int_1^x \sqrt{1+(f(t))^2}\ dt$$

۴) مشتق تابع زیر را در کلیهٔ نقاط در صورت وجود بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_1^x \sin t^2\ dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱) فرض کنید $A$ یک ماتریس $m \times n$ باشد. اگر به‌ازای هر بردار $X$ (منظور از بردار، ماتریس $n \times 1$ می‌باشد) داشته باشیم $AX = O$، نشان دهید $A$ ماتریس صفر است.

۲) فرض کنید $A$ و $B$ دو ماتریس $2 \times 2$ باشند. اگر $A$ و $B$ با $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ جابه‌جا شوند، نشان دهید که $A$ با $B$ جابه‌جا می‌شود.

۳) اگر $a \neq 0$، وارون ماتریس زیر را بیابید:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

۴) با استفاده از استقرا ثابت کنید:

$$\begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{bmatrix}^n = \frac{1}{a+b}\begin{bmatrix} b & b \\ a & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{bmatrix} a & -b \\ -a & b \end{bmatrix}$$

- ریاضیات گسسته

۱) $a$ و $b$ دو عدد طبیعی‌اند که $[a,b] - (a,b) = 33$. اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک $a$ و $b$ بین ۱ و ۱۰ باشد، آنگاه $ab$ را به‌دست آورید.

۲) اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $a$ و $b$ برابر $7 \times 3 \times 2^3$ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آنها ۴۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترکشان باشد، توان ۲ در تجزیهٔ $ab$ چیست؟

۳) اگر باقی‌ماندهٔ $\overline{548xy}$ بر ۲۵ مساوی ۲ باشد، $y$ چه ارقامی می‌تواند باشد؟

۴) کوچک‌ترین عددی که ۱۲ شمارندهٔ مثبت دارد را به‌دست آورید.

- هندسه

۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه نیمساز زاویهٔ قائمه، نیم‌ساز زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ نظیر وتر است.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی است به طول ۳ سانتی‌متر. دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. مساحت قطعه‌ای از دایره محدود به یک ضلع مثلث را به‌دست آورید.

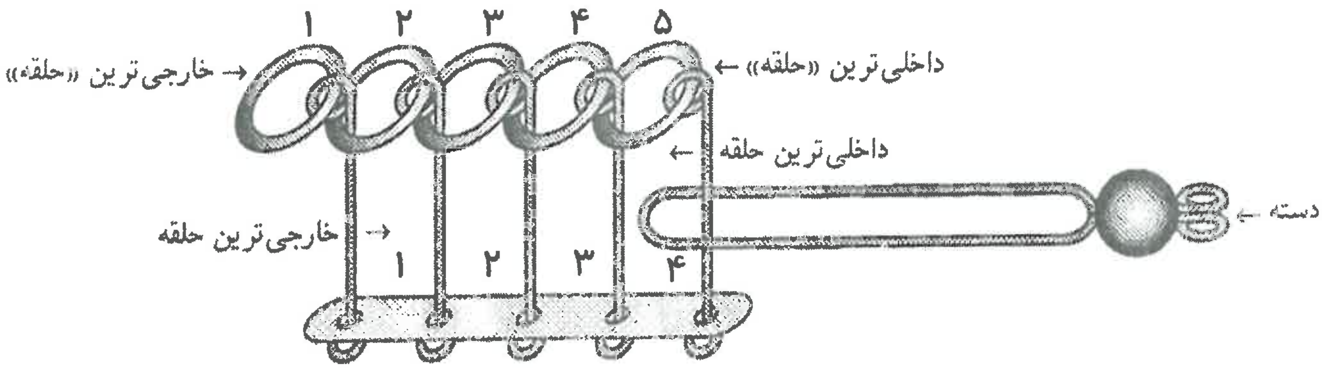
۳) در مثلث $ABC$ روی اضلاع $AB$ و $AC$ مربع‌های $ABDE$ و $ACNF$ را بنا می‌کنیم. اگر $AM$ میانهٔ نظیر ضلع $BC$ باشد ثابت کنید $EF = 2AM$.

۴) روی اضلاع مثلث $ABC$ و در خارج از آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع $MAB$ و $NBC$ و $PAC$ را می‌سازیم. ثابت کنید $MC = NA = PB$.

# توپولوژی و معما (قسمت دوم)

سپیده چمن‌آرا

در شمارهٔ گذشتهٔ ماهنامهٔ ریاضیات، معماهای نخ و حلقه را معرفی کردیم و آخرین معمایی که دربارهٔ آن صحبت کردیم، معمای حلقه‌های چینی بود که از تعدادی حلقه و «حلقه» تشکیل شده است و دسته‌ای درون آن گیر کرده است که دارای شیار به اندازه کافی بلند و انتهای به اندازهٔ کافی نازکی است و هدف معما، آزاد کردن این دسته از درون حلقه‌های تو در تو است. (شکل زیر)

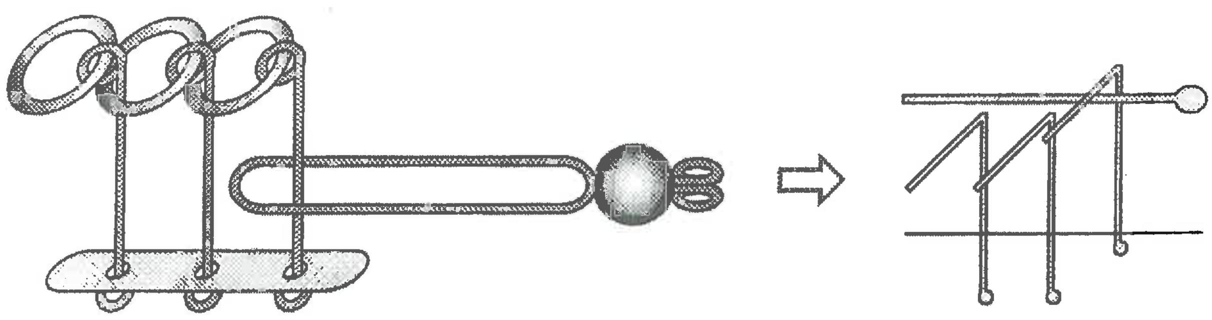



برای حل این معما، باید آن را بسازید و دست به‌کار شوید. احتمالاً بسیاری از شما تاکنون این کار را کرده‌اید، و احتمالاً در جریان حل معما، قوانینی نیز کشف کرده‌اید. قصد داریم در این قسمت از «توپولوژی و معما»، حل معمای حلقه‌های چینی را شرح دهیم.

بد نیست که برای تعقیب مراحل حل این معما، با اصطلاحاتی که به‌کار خواهیم برد، آشنا شوید:

یک «حلقه» از حلقه‌های این معما، نسبت به دسته، دارای دو وضعیت است؛ (۱) یا میلهٔ متصل به «حلقه» از درون شیار دسته گذشته و «حلقه» دورِ دسته است (یا می‌تواند دور دسته قرار گیرد)؛ (۲) یا این‌که میلهٔ متصل به «حلقه» از شیار دسته رد نشده است، یا اگر رد شده است، «حلقه» را نمی‌توان دورِ دسته قرار داد. وضعیت اول را وضعیت روشن و وضعیت دوم را وضعیت خاموش می‌نامیم.
در شکل بالا، که حلِقه‌ها و «حلقه»ها، به‌ترتیب از خارج به داخل شماره‌گذاری شده‌اند، «حلقه»های سوم و چهارم، در وضعیت روشن و «حلقه»های اول و دوم و پنجم، در وضعیت خاموش هستند.

با استفاده از وضعیت‌های روشن و خاموش می‌توانیم دنباله‌ای از حرکت‌ها را که منجر به قرارگرفتن یک «حلقه» در وضعیت روشن یا خاموش نسبت به دسته می‌شوند، توصیف کنیم. همچنین شکلِ معما را، مانند شکل زیر، کمی ساده‌تر خواهیم کشید.



ریاضیات شمارهٔ ۱۰
(اردیبهشت ۱۳۸۱) صص ۳۴ـ۳۲

شکل سمت راست، ساده شدهٔ شکل معمای حلقهٔ چینی سه تایی (سمت چپ) است که وضعیت آغازین بازی را نشان می‌دهد.

اگر بخواهیم اولین «حلقه» را در وضعیت روشن قرار دهیم، کافی است آن را از وسط شیار دسته به سمت بالا بلغزانیم، و برای قرار دادن آن در وضعیت خاموش، با عملکرد برعکس، آن را از میان شیار به‌طرف پایین می‌لغزانیم. اما اگر بخواهیم فقط «حلقهٔ» دوم در وضعیت روشن باشد، باید اول «حلقهٔ» اول را در وضعیت روشن قرار دهیم بعد «حلقهٔ» دوم را در وضعیت روشن، و سپس «حلقهٔ» اول را در وضعیت خاموش قرار می‌دهیم. بالطبع برای آزاد کردن دسته از دومین «حلقه»، باید مراحل فوق را بر عکس طی کنیم: «حلقه» اول در وضعیت روشن، «حلقهٔ» دوم در وضعیت خاموش، «حلقهٔ» اول در وضعیت خاموش. به‌نظر می‌رسد که برای تغییر وضعیت هر یک از «حلقه»ها به جز «حلقهٔ» اول، باید «حلقهٔ» قبل از آن در وضعیت روشن باشد. (حتماً درستی این موضوع را روی معمای خودتان امتحان کنید!)

یعنی داریم[1]

$$\text{«حلقهٔ» } n \text{ در وضعیت روشن قرار گیرد} = \begin{cases} \text{خاموش کردن } n\text{؛} & \text{وقتی } n = 1 \\ \text{روشن کردن } n-1\text{، روشن کردن } n\text{، خاموش کردن } n-1\text{؛} & \text{وقتی } n > 1 \end{cases}$$

و به‌همین ترتیب:

$$\text{«حلقهٔ» } n \text{ در وضعیت خاموش قرار گیرد} = \begin{cases} \text{خاموش کردن } n\text{؛} & \text{وقتی } n = 1 \\ \text{روشن کردن } n-1\text{، خاموش کردن } n\text{، خاموش کردن } n-1\text{؛} & \text{وقتی } n > 1 \end{cases}$$

خوب، پس اگر بخواهیم در معمای حلقه‌های چینی سه تایی، دسته را از «حلقهٔ» سوم خارج کنیم، باید مراحل زیر طی شود:

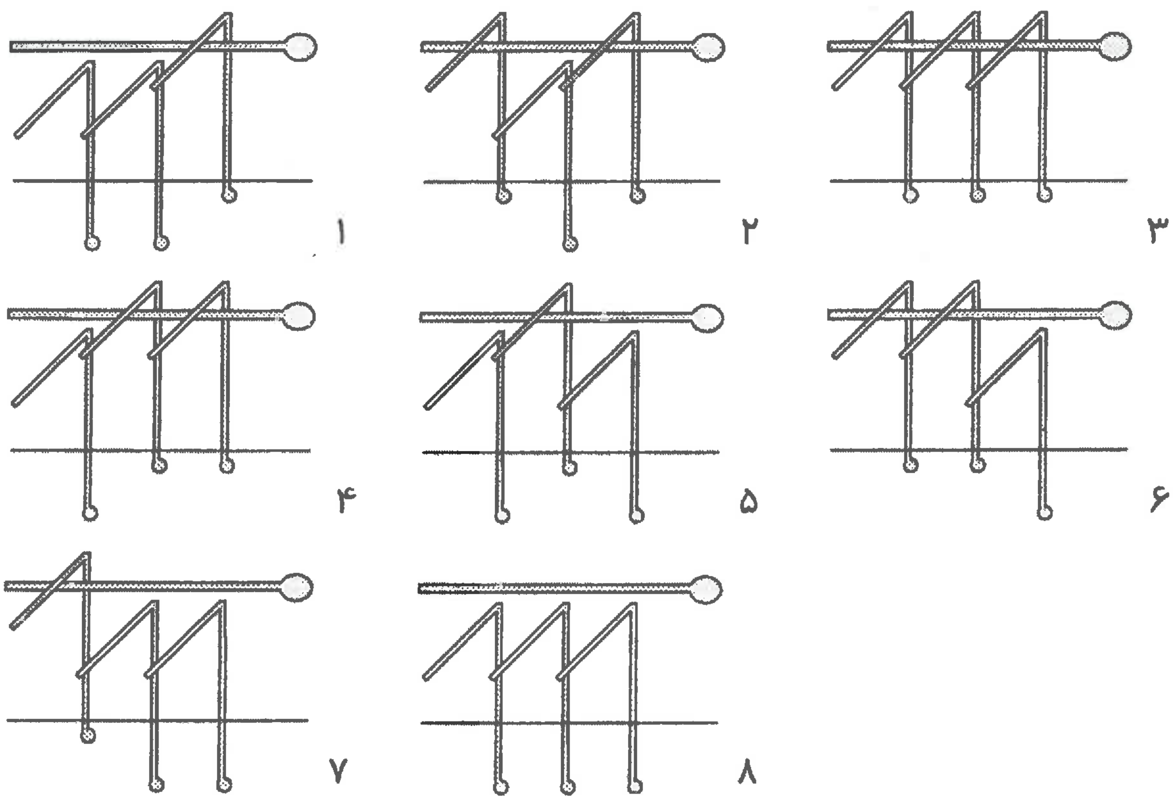
خاموش کردنِ ۳ = روشن کردن ۲، خاموش کردن ۳، خاموش کردن ۲،

= روشن کردن ۱، روشن کردن ۲، خاموش کردن ۱، خاموش کردن ۳، روشن کردن ۱، خاموش کردن ۲، خاموش کردن ۱.

---

۱) توجه کنید که در «فرمول» فوق، روشن کردن $n$ یعنی روشن کردن «حلقهٔ» $n$، به‌همین ترتیب خاموش کردن $n$ یعنی خاموش کردن «حلقهٔ» $n$.

که شکل زیر حاصل می‌شود:




حال اگر خواستید دوباره دسته را داخل «حلقهٔ» سوم قرار دهید و معما را به وضعیت اولیه برگردانید، دارید:

روشن کردن ۳ = روشن کردن ۲، روشن کردن ۳، خاموش کردن ۲،

= روشن کردن ۱، روشن کردن ۲، خاموش کردن ۱، روشن کردن ۳، روشن کردن ۱، خاموش کردن ۲، خاموش کردن ۱.

که دقیقاً برعکس مراحلِ خارج کردنِ دسته از معما است.

به‌نظر می‌رسد دیگر معمای حلقه‌های چینی با هر تعداد «حلقه» حل شد! اما موضوع مهمی است که نباید فراموش کرد: زمانی که برای حل یک معما باید صرف کنیم تا بالاخره دسته از «حلقه» ها آزاد شود. بالاخره بشر یک عمری دارد و نمی‌تواند تا ابد زنده باشد! پس مسأله‌ای که در پیش داریم، مسألهٔ شمارش تعداد حرکت‌های لازم برای خارج کردنِ دسته از معمای حلقهٔ چینی با $n$ «حلقه» است. در شماره‌های آینده به این مسأله خواهیم پرداخت. پیش از آن، خودتان قدری روی آن کار کنید.

# آمادگی برای المپیاد ریاضی (۱۰)

هادی سلماسیان

۱۶. بعد از چاپ شدن بند ۱۵ در شمارهٔ نوروز، به این نتیجه رسیدیم که قدری زیاده‌روی کرده‌ام! شاید عیدی چندان خوبی به شما خوانندگان عزیزم ندادم! به هر حال این بار سعی می‌کنم قدری فتیلهٔ دشواری مطلب را پایین بکشم! به این انگیزه، چند قرنی به عقب برمی‌گردم (!)

تا به حال چند باری از فرما[1]، ریاضیدان فرانسوی قرن هفدهم که آخرین مسألهاش زندگی خیلی از مردم دنیا را تباه کرده است، نوشته‌ام. به‌ویژه، در بند ۱۴ صحبت از «قضیهٔ کوچک فرما» کردم. بد نیست در اینجا دوباره آن را به شما (دوستان فراموش‌کار!) یادآوری کنم، و اثباتی هم برای آن بیاورم.

**گزاره ۱.** *فرض کنید $p$ عددی اول باشد و $a$ هم عددی صحیح، که نسبت به $p$ اول است. در این‌صورت* $p \mid a^{p-1} - 1$.

**برهان.** عددهای $a$، $2a$، ...، $(p-1)a$ را در نظر بگیرید. هیچ دو تای آن‌ها، در تقسیم بر $p$، به باقی‌مانده‌های یک‌سان نمی‌رسند: اگر $i \neq j$ و $p \mid ia - ja$، آنگاه $p \mid a(i-j)$ و چون $(a,p) = 1$، $p \mid i - j$ در حالی‌که $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$ پس $p > |i-j| > 0$ و بنابراین $i - j$ نمی‌تواند بر $p$ بخش‌پذیر باشد.

از طرف دیگر، هیچ‌کدام از عددهای ذکر شده، بر $p$ قابل قسمت نیست. پس باقی‌مانده‌های آن‌ها، در تقسیم بر $p$، همان عددهای $1, 2, \ldots, p-1$ هستند (هر کدام درست یک‌بار)، منتها احتمالاً با ترتیبی دیگر. بنابراین باقی‌ماندهٔ $a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a$ در تقسیم بر $p$، با باقی‌ماندهٔ تقسیم $1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$ بر $p$ برابر است؛ یعنی $p \mid (a \times 2a \times \cdots \times (p-1)a - 1 \times \cdots \times (p-1))$. پس $p \mid 1 \times \cdots \times (p-1) \times (a^{p-1} - 1)$ ولی عددهای ۱، ۲، ...، $p-1$، چون $p$ اول است، نسبت به $p$ اولند؛ یعنی $p \mid a^{p-1} - 1$.

∎

فرما در میان یادداشت‌هایش چندین حدس به‌جای گذاشت که یکی از آن‌ها حدس زیر بود:

حدس. همهٔ عددهای به شکل $2^{2^m} + 1$، $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$، اول هستند.

این حدس فرما، بر پایهٔ محاسباتی بود که نشان می‌داد ادعایش برای $m \leq 4$ صحیح است. در واقع، حتی برای $m = 4$، به محاسبات چندان پیچیده‌ای برنمی‌خوریم: $2^{2^4} + 1 = 65537$.

البته شاید بشود حدس زد که چرا فرما به چنین مسأله‌ای فکر می‌کرده است. فرما از حقیقت زیر آگاه بود (که من آن را در قالب تمرینی می‌آورم):

**تمرین ۱.** *فرض کنید $k$ عددی صحیح و مثبت باشد، و $2^k + 1$ عددی اول باشد. در این‌صورت $k$ توانی از ۲ است (یعنی $k = 2^r$ که $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$).*

*(راهنمایی. ابتدا نشان دهید اگر عدد $m$ عددی فرد باشد، برای هر $a$ و $b$ دل‌خواه رابطهٔ*

$$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \cdots + b^{m-1})$$

1) Fermat

برقرار است)

اویلر[1] نخستین کسی بود که برای حدس بالا مثال نقض یافت. در حقیقت وی نشان داد که

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$$

و بنابراین حدس، صحیح نیست. جالب است بدانید که وی این کشف را ۶۷ سال پس از مرگ فرما انجام داد! کاری که امروزه شما خودتان هم می‌توانید با نوشتن یک برنامه، توسط یک کامپیوتر، در چند ثانیه انجام دهید! بگذریم ...

با این وجود، عددهای به شکل $2^{2^n} + 1$، که از این به بعد اسمشان را «عددهای فرما» می‌گذاریم و با نمادگذاری $F_n = 2^{2^n} + 1$ نشانشان می‌دهیم، هنوز هم خاصیت‌های جالبی دارند! احتمالاً ساده‌ترین سؤالی که به ذهن شما می‌رسد این است: آیا بی‌نهایت عدد فرمای اول وجود دارد؟ پاسخ این سؤال هنوز معلوم نیست[2] ولی به نظر می‌رسد منفی باشد.[3] با این حال، در مورد عامل‌های اول عددهای فرما، نتایجی وجود دارد. بگذارید با یک تمرین ادامه دهیم. تمرین بعد، در واقع منسوب به گلدباخ[4] است؛ کسی که در بند ۱۵ هم سخن از او به میان آمد.

**تمرین ۲.** *هیچ دو تای متمایز از عددهای فرما، مقسوم علیه مشترکی ندارند. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید اگر $m > n$، $F_m - 2$ بر $F_n$ بخش‌پذیر است.)*

اگر چه ممکن است تنها تعدادی متناهی از $F_n$ ها اول باشند، با این وجود عامل‌های اول $F_n$ها باید عددهای اول بزرگی باشند. قبل از این‌که بیان دقیقی از این مطلب را (باز هم به شکل یک تمرین!) ارائه کنم، لازم است یک نمادگذاری را توضیح دهم.

فرض کنید $m$ و $a$ دو عدد صحیح باشند که $m > 1$ و $(a, m) = 1$. در این صورت مرتبهٔ $a$ به هنگ $m$ که با $ord_m a$ نمایش داده می‌شود، برابر است با کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت $r$، که $m | a^r - 1$. به عنوان مثال، $ord_7 2 = 3$ و $ord_5 3 = 4$.

البته یک مطلب باید روشن شود، و آن این‌که اصلاً چرا عدد صحیح و مثبت $r$ ای وجود دارد که $m | a^r - 1$؟ (اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، طبیعتاً صحبت از $ord_m a$ بی‌معناست!) [5]

اما وجود چنین $r$ ای، دلیل ساده‌ای دارد. کافی است دقت کنیم که در بین عددهای $a$، $a^2$، ...، $a^{m+1}$ دست‌کم دو تا هستند که در تقسیم بر $m$ به باقی‌مانده‌های مشابهی می‌رسند (زیرا $m + 1$ عدد داریم که هرکدام، در تقسیم بر $m$، به یکی از $m$ باقی‌ماندهٔ ممکن خواهند رسید). پس اگر $a^k$ و $a^l$ چنین جفتی از اعداد باشند، و فرض کنیم $k > l$، آنگاه $m | a^k - a^l$. پس $m | a^l(a^{k-l} - 1)$ و چون $(a, m) = 1$، باید $m | a^{k-l} - 1$. یعنی $r$ را می‌توان $k - l$ در نظر گرفت.

روشن است که وقتی $p$ عددی اول باشد و $(a, p) = 1$، $p | a^{p-1} - 1$. فرض کنید $ord_p a = r$. طبق شیوهٔ تعریف، $r \leq p - 1$. فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم $p - 1$ بر $r$، مساوی با $r_1$ باشد. پس $p - 1 = rq + r_1$ که $q$ عددی صحیح و مثبت است و $0 \leq r_1 < r$. ولی از سوی دیگر، برای $x$ و $y$ دل‌خواه، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$x^q - y^q = (x - y)(x^{q-1} + x^{q-2}y + \cdots + xy^{q-2} + y^{q-1})$$

(خودتان بگویید چرا این رابطه درست است!)

اگر به جای $x$ و $y$، به ترتیب $a^r$ و ۱ قرار دهیم، به این نتیجه می‌رسیم که $a^{rq} - 1$ بر $a^r - 1$ بخش‌پذیر است. بنابراین، $p | a^{rq} - 1$. پس

$$p \mid (a^{p-1} - 1) - (a^{rq} - 1) \Longrightarrow p \mid a^{rq}(a^{r_1} - 1)$$

۱) Euler ریاضیدان آلمانی قرن ۱۸

۲) فراموش نکنید که مقاله، مدتی قبل از آن‌که چاپ شود نوشته می‌شود (!)، و «هنوز» به زمان نگارش اشاره دارد!!

۳) اگر چه، حتی معلوم نیست بی‌نهایت عدد فرمای مرکب وجود دارد یا خیر!

۴) Goldbach

۵) امان از دست شما دوستان فراموش‌کار! اگر $a$ و $b$ دو عدد صحیح باشند، $a | b$ یعنی $b$ بر $a$ بخش‌پذیر است. $(a, b) = 1$ هم یعنی $a$ و $b$ نسبت به هم اولند به عبارتی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها، ۱ است.

ولی $(a,p) = 1$، در نتیجه $p \mid a^{r_1} - 1$، یعنی $r_1$ نمی‌تواند مثبت باشد، زیرا $r$ کوچک‌ترین عدد مثبتی است که $p \mid a^r - 1$، و $r_1 < r$. بنابراین $r_1 = 0$، یعنی $p - 1$ بر $r$ بخش‌پذیر است. بنابراین، ثابت کرده‌ایم:

**گزاره ۲.** *$ord_p a$، وقتی $p$ اول است، مقسوم‌علیه $p - 1$ است.*

**تمرین ۳.** *اگر $p$ عدد اولی باشد که $p \mid F_n$، در این صورت $p = k2^{n+1} + 1$ که $k$ عددی صحیح و مثبت است.*

جالب است بدانید که این حقیقت، منسوب به اویلر است.

تمرین ۳ نشان می‌دهد که مقسوم‌علیه‌های اول $F_n$، از $2^{n+1}$ بزرگ‌تر هستند. اگر از ابتدا برای گم‌راه کردن شما، مثلاً می‌گفتم ثابت کنید $(F_n, n) = 1$، احتمالاً پیدا کردن کلید اثبات وقت زیادی از شما می‌گرفت. یک بخش عمده در حل مسأله‌های ریاضی، یافتن گزارهٔ صحیحی است که باید ثابتش کرد! استدلال تمرین بالا را می‌توان قدری تغییر داد و به نتیجه‌ای که اندکی قوی‌تر است رسید. اولین بار لوکا[1] بود که به این نتیجه دست یافت. توصیه می‌کنم اگر هنوز تمرین ۳ را حل نکرده‌اید، همین جا متوقف شوید، به قدر کافی روی آن فکر کنید و بعد ادامه دهید؛ چون در سطر زیر، تقریباً نکتهٔ موجود در تمرین ۳ فاش می‌شود!

ایدهٔ موجود در پشت تمرین ۳ چیست؟ این است که $ord_p 2$، که $p$ عامل اولی از $F_n$ است، برابر است با $2^{n+1}$. فرض کنید عدد صحیح $b$ را چنان بیابیم که $p \mid b^2 - 2$ (یا به عبارتی، $b$، به عنوان باقی‌مانده‌ای در تقسیم بر $p$، به نوعی «جذر» ۲ است، اگر چه $b$ صحیح است و لذا $b \neq \sqrt{2}$!) در این صورت $ord_p b = 2^{n+2}$: شبیه استدلالی که برای گزارهٔ ۲ آوردم، می‌توان به کار برد و نتیجه گرفت که چون $p \mid b^{2^{n+2}} - 1$ (خودتان بگویید که چرا این نتیجه از $p \mid b^2 - 2$ و $b \mid 2^{2^{n+1}} - 1$ گرفته می‌شود.)، باید $ord_p b \mid 2^{n+2}$. نشان دهید که اگر $ord_p b = 2^r$، آن وقت $ord_p 2 = 2^{r-1}$، و در نتیجه $r - 1 \geq n + 1$.

**تمرین ۴.** *با تکمیل استدلال بالا (با فرض وجود $b$)، نشان دهید که هر عامل اول از $F_n$، به شکل $k2^{n+2} + 1$ است که $k$ عددی صحیح و مثبت می‌باشد.*

ولی چرا $b$ وجود دارد؟ در این حالت خاص، حتی می‌توان صریحاً آن را معرفی کرد: خودتان نشان دهید که می‌توان $b = 2^{2^{n-2}}(2^{2^{n-1}} - 1)$ را در نظر گرفت.

خوب، هر چه بیش‌تر بدانیم می‌توانیم بیش‌تر هم بپرسیم! مثلاً می‌شود به این سؤال فکر کرد که چه عددهای اولی که به‌صورت $k2^m + 1$ هستند می‌توانند مقسوم‌علیه یک عدد فرما باشند؟ تمرین بعدی، یک نتیجهٔ جزئی در این راستا است.

**تمرین ۵.** *اگر $F_m$ بر $2^n + 1$ بخش‌پذیر باشد (که $m$ و $n$ عددهای صحیح و مثبت هستند)، $F_m = 2^n + 1$. (راهنمایی: از تمرین ۲ استفاده کنید.)*

*بنابراین، اگر $k2^m + 1$ مقسوم‌علیه $F_n$ باشد و $k$ فرد باشد، $k \geq 3$. پس به این شیوه تخمینی بهتر از تخمین لوکا نیز به‌دست می‌آید.*

اجازه دهید قدری از مسیر بالا منحرف شویم و به مسأله‌هایی از نوع دیگر بپردازیم! مثلاً فکر می‌کنید کدام یک از اعداد فرما مربع کامل هستند؟ خوب، پاسخ ساده است: اگر $n \geq 1$، $F_n = (2^{2^{n-1}})^2 + 1$ یعنی $F_n = X^2 + 1$ که $X$ یک عدد صحیح و مثبت است. پرسش «چه وقت $F_n = Y^2$ که $Y$ صحیح است» منجر به مسألهٔ $X^2 - Y^2 = 1$ می‌شود، که در بند ۹ یادتان داده‌ام چطور باید حلش کنید! پاسخ، کوتاه است، هرگز!

پرسشِ «چه وقت عدد فرمای $F_m$، توان $k$ام یک عدد صحیح و مثبت است؟» به روش بالا به معادلهٔ دیوفانتی $x^k - y^2 = 1$ منجر می‌شود. اگر $k$ زوج باشد که این معادله حالت خاصی از معادلهٔ قبلی است! اویلر توانست نشان دهد که این معادله برای $k = 3$ هیچ جوابی ندارد. نهایتاً در سال ۱۸۵۰، لبگ[2] این ادعا را برای $k > 3$ نیز ثابت کرد. این معادله، به معادلهٔ کاتالان[3] معروف است. ولی در حالت خاصی که مورد نظر ماست، راه حل ساده‌ای وجود دارد.

۱) Lucas که به علت فرانسوی بودنش ظاهراً $s$ آخر آن خوانده نمی‌شود!

۲) Lebesgue که اوهم فرانسوی است!

۳) Catalan که ایتالیایی است.

**تمرین ۶.** *این راه حل ساده را بیابید! به عبارتی، ثابت کنید هیچ کدام از عددهای فرما، توان $k$ ام یک عدد صحیح و مثبت نیستند (که البته $k > 1$!!)*

البته احتمالاً پاره‌ای از شما خوانندگان ایرادگیر خواهید اندیشید که وقت گران‌بهای این همه آدم چرا باید صرف بررسی حدس از فرما شود که تازه با آن وضع مفتضح (یعنی برای $n = 5$) غلط از آب درآمده است؟! به هر حال هر آدم بیکاری می‌تواند به انواع فرمول‌های عجیب و غریب مثل $2^{2^{n^2-3}} + 3n^2 - 1$ یا $2^{2^n} + n^2$ یا ... فکر کند و از زور بیکاری به بررسی این سؤال بپردازد که آیا بین آن عددها، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد یا نه؟! و احتمالاً در اکثر موارد هم به نتیجه‌ای نخواهد رسید!

این که چرا فرما خودش به عددهای فرما فکر می‌کرد را، واقعاً من نمی‌دانم؛ ولی جالب است بدانید که حدوداً دو قرن بعد از فرما، عددهای فرما دوباره مهم شدند! در حقیقت در این زمان گاوس[1]، ریاضیدان آلمانی، که در بند ۳ هم صحبت از او به میان آمد، موفق شد مسأله ترسیم چند ضلعی‌های منتظم با خط‌کش و پرگار را حل کند. پرسش این است: چه وقت می‌توان $n$ ضلعی منتظم را تنها به کمک خط‌کش و پرگار رسم کرد؟ در اینجا، پرگار به موجودی اطلاق می‌شود که با داشتن مرکز دایره و یک نقطه روی دایره، می‌تواند تمام آن دایره را ترسیم کند. خط‌کش هم، موجودی است که با داشتن دو نقطه، خط گذرنده از آن دو را رسم می‌کند (به عبارتی، مدرج نیست و نمی‌تواند طول را اندازه بگیرد.)

گاوس توانست گزارهٔ زیر را ثابت کند:

**گزاره ۳.** *$n$ ضلعی منتظم، به کمک خط‌کش و پرگار قابل ترسیم است اگر و تنها اگر $n = 2^r \times p_1 \times \cdots \times p_s$، که $r$ عددی صحیح و نامنفی است و $p_1$، $\cdots$، $p_s$ عددهای فرما هستند که اولند.*

البته اثبات که چه عرض کنم! مقالهٔ گاوس مشتمل بر حدود ۵۰ صفحه بود و تازه اثبات وی برای لزوم شرط بالا هم نقص داشت! البته این اثبات را امروزه می‌توان در سه - چهار صفحه برای یک خوانندهٔ مبتدی (و البته باهوش!) بیان کرد؛ و برای یک دانشجوی ریاضی هم احتمالاً بیست دقیقه توضیح کافی است؟[2]

بنابراین برای این‌که بدانیم برای چه $n$ هایی می‌توانیم $n$ ضلعی منتظم را با خط‌کش و پرگار ترسیم کنیم، باید همهٔ عددهای اول فرما را بشناسیم.

حسن ختام این قسمت، یادآوری این نکته است که تمرین ۲، فوراً نتیجه می‌دهد که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد (زیرا بی‌نهایت عدد فرما وجود دارد!). یعنی اثبات جدیدی از آن قضیهٔ اقلیدس!

قدردانی: از دوست عزیزم کیوان ملاحی، که «حسن ختام» را موقع صبحانه به من پیشنهاد کرد ممنونم.[3]

---

1) Gauss

۲) با این حال، نکند دوستان این مسأله را از نوع تثلیث زاویه و قضیه آخر فرما و ... بپندارند و خیال کنند حل نشده است و بشریت برای حل آن لحظه شماری می‌کند! نخیر! (اگر چه، آن دو تای اولی هم از این سنخ اخیر نیستند!)

۳) در نگارش این متن، از کتاب 17 lectures on Fermat Numbers، نوشتهٔ Křížek، Luca و Somer که اسم هیچ‌کدامشان را نمی‌دانم چطور باید تلفظ کرد، استفاده کردم!

# تابع‌های جمعی

محسن بهرامگیری

اگر تا حالا به چیزی به اسم «تابع» برخورد کرده باشید، بعید نیست اسم «معادلهٔ تابعی» هم به گوش شما آشنا باشد. قبلاً مفهوم معادله را دیده‌اید؛ مثلاً $x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$ یک معادله است که جواب آن $x = -۱, -۲$ است. می‌توانید حدس بزنید «معادلهٔ تابعی» به چه چیزی گفته می‌شود. مثلاً فرض کنید $f$ یک تابع باشد که اعداد حقیقی را به اعداد حقیقی می‌برد. (یعنی $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$) یک معادلهٔ تابعی یعنی عبارتی بر حسب $f$. مثلاً

$$\begin{cases} f(۲x) + f(x) = ۲ \quad \text{برای عدد حقیقی } x \\ \\ f(۱) = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

(یا هر چیز دیگری که در مورد $f$ برقرار باشد) یک معادله تابعی است. به همان دلیل که علاقمند بودیم معادلات معمولی را حل کنیم، علاقمندیم معادلات تابعی را هم حل کنیم! همهٔ تابع‌هایی را پیدا کنیم که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند. ساختن یک معادلهٔ تابعی کار بسیار ساده‌ای است و فقط یک مداد و یک کاغذ نیاز دارید: تعدادی $f$ و $x$ و $y$ و عدد روی کاغذ بنویسید و بین آن‌ها چند تا عمل و (+)، (−) و (=) هم بگذارید! اما حل معادلات، غالباً به این راحتی نیستند. در واقع حل معادلات تابعی از جالب‌ترین کارهایی است که در ریاضیات مقدماتی انجام می‌گیرد. حل بعضی از آن‌ها، فقط یک سرگرمی ریاضی است، در حالی که بعضی مواقع، مفاهیم واقعاً عمیقی پشت معادلات خوابیده است. مثلاً معادلهٔ زیر - که به معادلهٔ «کوشی» معروف است - را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{برای عدد حقیقی } y, x \\ \\ f(۱) = ۱ \end{cases} \qquad (۲)$$

به $f$ ای که در (۲) صدق کند، تابع «جمعی» می‌گوییم (چرا؟!). بیایید کمی توابع جمعی را شناسایی کنیم. اصلاً تابع جمعی وجود دارد؟ بله، تابع همانی (یعنی تابع «برای هر $x$، $f(x) = x$») در (۲) صدق می‌کند. پس تابع همانی، جمعی است. تابع $f(x) = x^۲$ چطور؟ تابع $f(x) = x^۳$ چطور؟ نه! این‌ها جمعی نیستند. به نظر می‌رسد هیچ‌کدام از توابع دیگری که به طور روزمره (!) با آن سروکار داریم جمعی نیستند. یعنی (۲) جواب دیگری ندارد؟ حدس آن فعلاً زود است.

سعی می‌کنیم معادلهٔ (۲) را حل کنیم. اولین قدم برای حل هر مسأله، در صورت سؤال نهفته است. همیشه قبل از حل مسأله بهتر است که در صورت سؤال دقت کنیم. در اینجا صورت سؤال «فریاد» می‌زند که به جای $x$ و $y$ عدد خاص بگذارید، و چه عددی بهتر از صفر! در (۲) قرار دهیم $x = y = ۰$؛ در نتیجه $f(۰) = f(۰) + f(۰)$ که یعنی $f(۰) = ۰$. یعنی برای هر $f$ جمعی، $f(۰)$ برابر صفر است. جلوتر می‌رویم. $f(۰) = ۰$ را می‌دانیم. پس چه خوب است در (۲) قرار دهیم $y = -x$ :

$$۰ = f(۰) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

پس برای هر $x$ حقیقی $f(-x) = -f(x)$. از طرف دیگر مقدار $f(۱)$ را هم می‌دانیم. حالا اگر قرار دهیم $x = y = ۱$. داریم

$$f(۲) = f(۱) + f(۱) = ۲$$

شمارهٔ ۱۰
(اردی‌بهشت ۱۳۸۱) صص ۴۱ـ۲۹

پس $f(۲) = ۲$. حالا می‌گذاریم $x = ۲$، $y = ۱$؛ پس

$$f(۳) = f(۲) + f(۱) = ۲ + ۱ = ۳$$

پس $f(۳) = ۳$. به همین روش $f(۴) = ۴$ و $f(۵) = ۵$ و ... و در واقع $f(m) = m$ برای هر $m$ «طبیعی» برقرار است. چون $f(-x) = -f(x)$، پس $f(-۱) = -۱$ و به همین دلیل $f(m) = m$ برای هر $m$ «صحیح» هم برقرار است.

تا این‌جا با اندکی محاسبه نشان دادیم که $f$ تمام اعداد صحیح را به خودشان می‌برد. اما بقیهٔ اعداد حقیقی چطور؟ کمی دیگر هم محاسبه کنیم و بعد برگردیم به بحث خودمان. فرض کنید $x$ عدد حقیقی دل‌خواه باشد. اگر بگذاریم $y = x$ داریم

$$f(۲x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = ۲f(x)$$

اگر بگذاریم $y = ۲x$ داریم

$$f(۳x) = f(۲x + x) = f(۲x) + f(x) = ۳f(x)$$

و اگر همین روش را ادامه دهیم $f(nx) = nf(x)$ برای هر $n$ طبیعی و حتی صحیح برقرار است (به $f(-nx) = -f(nx)$ دقت کنید). فرض کنید $q = \frac{m}{n}$ ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$) عدد گویایی باشد. پس داریم که

$$nf(q) = nf(\frac{m}{n}) = f(n \cdot \frac{m}{n}) = f(m) = m$$

$$f(q) = \frac{m}{n} = q \quad \text{برای هر عدد گویای } q \tag{۳}$$

یعنی $f$ اعداد گویا را هم به خودشان می‌برد! اما باز هم کم است. اعداد حقیقی خیلی بیشتر از اعداد گویا هستند!

از این به بعد سعی می‌کنیم بیشتر صحبت کنیم و کمتر محاسبه.

به (۳) دقت کنید که برای هر عدد گویای $q$ برقرار است. با این کارهایی که با عدد ۱ کردیم (تعدادی از آن‌ها را با هم جمع کردیم و تقسیم به یک عدد صحیح کردیم و توانستیم تمام اعداد گویای $q$ را تولید کنیم و نشان دهیم $f(q) = q$) یک سؤال مطرح می‌شود. آیا با این گونه اعمال، می‌توانیم عدد حقیقی دل‌خواه $\alpha$ را تولید کنیم و نتیجه بگیریم $f(\alpha) = \alpha$؟

نه، اینطور نیست! در واقع واضح‌ترین جواب برای سؤال این است: معادلهٔ (۲) جوابی غیر از تابع همانی دارد! البته اگر سعی کنید پیدایش کنید، احتمالاً موفق نخواهید شد؛ چون جواب‌های دیگر (۳) خواص واقعاً عجیبی دارند و توابع معمولی نیستند. بعداً به این خواص جالب اشاره خواهیم کرد.

حالا به بحث قبلی برمی‌گردیم. دیدیم که چون تابع دیگری غیر از تابع $f(x) = x$ (یعنی همانی) در (۳) صدق می‌کند، نمی‌توانیم همان‌طورکه اعداد گویا را از ۱ تولید کردیم و نتیجه گرفتیم $f(q) = q$ اعداد حقیقی دل‌خواه را تولید کنیم. حالا فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ دل‌خواه باشد. اگر این بازی‌ها را بر سر عدد $a$ اجرا کنیم (یعنی تعدادی از آن‌ها را با هم جمع کنیم و تقسیم بر یک عدد صحیح بکنیم) باز می‌توانیم مضارب گویای $a$ را تولید کنیم؛ ولی چیز دیگری نمی‌توانیم تولید کنیم. آیا همهٔ اعداد حقیقی تولید شده‌اند؟ نه. اگر هم از ۱ استفاده کنیم و هم از $a$، فقط می‌توانیم اعدادی به‌صورت $q \times ۱ + q' \times a$ را تولید کنیم که $q$ و $q'$ اعدادی گویا هستند. آیا همهٔ اعداد حقیقی این گونه‌اند؟ باز هم نه. اگر از عدد دل‌خواه دیگر $b \in \mathbb{R}$ هم استفاده کنیم باز هم جواب منفی است. یعنی سه عضو برای تولید $\mathbb{R}$ کافی نیست. چهار عضو هم همین‌طور. فکر می‌کنید یک مجموعهٔ کافی باید چند تا عضو داشته باشد؟ احتمالاً احساس می‌کنید «خیلی» و این «خیلی» واقعاً معنی دارد. مثلاً «تعداد اعداد حقیقی «خیلی» بیشتر از اعداد گویاست.» (هر چند هر دوتایشان بی‌نهایت عضو هستند) شاید عجیب باشد؛ ولی در ریاضی، بی‌نهایت داریم تا بی‌نهایت!

به مجموعه «کافی» برگردیم. احتمالاً با صحبت‌های بالا می‌توانید تعریف دقیق این مجموعه را حدس بزنید. در واقع به $A$، زیر مجموعه $\mathbb{R}$، کافی می‌گوییم اگر هر عدد حقیقی $\alpha \in \mathbb{R}$ را بتوانیم به‌صورت جمع عناصری از $A$ (با ضرایب گویا) بنویسیم. یعنی $a_۱, \dots, a_n \in A$ و اعداد گویای $q_۱, \dots, q_n$ موجود باشند که $\alpha = q_۱a_۱ + \dots + q_na_n$.

اصلاً مجموعه «کافی» وجود دارد؟ بله، مثلاً واضح است که خود $\mathbb{R}$، «کافی» است. کافی است بگیرید $\alpha = a_1$ و $q_1 = 1$ و دقت کنید که $\alpha = 1\alpha$. اما برای این منظور، $\mathbb{R}$، عناصر اضافه هم دارد. مثلاً $\mathbb{R} - \{2\}$ هم کافی است زیرا $1 + 1 = 2$ و $1 \in \mathbb{R} - \{2\}$. حتی ۳ را هم می‌توانیم از $\mathbb{R} - \{2\}$ برداریم چون مثلاً $1 + 1 + 1 = 3$ و $1 \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$. خیلی چیزهای دیگر هم «اضافه» هستند.

حالا بیایید مفهوم «اضافه» را تعریف کنیم. فرض کنید $A$ یک مجموعهٔ کافی باشد. به عنصر $x \in A$ «اضافه» می‌گوییم اگر $A - \{x\}$ هم کافی باشد. در واقع یک عنصر اضافه را می‌شود برداشت، به‌طوری که باز هم مجموعه برای تولید $\mathbb{R}$ کافی باشد.

حالا یک مجموعهٔ کافی $A$ را در نظر بگیرید که تمام عناصر «اضافهٔ» آن را دور ریخته باشیم یعنی $A$ هیچ عنصر اضافه‌ای نداشته باشد. در این‌صورت به $A$ یک مجموعهٔ «پایه» می‌گویند. شاید کم‌کم اهمیت این مجموعهٔ پایه برای شما روشن شده باشد. در واقع این مفهوم یکی از مهم‌ترین مفاهیم موجود در ریاضیات است که شما تا حدی با آن آشنا شده‌اید. به این مباحث «جبر خطی» می‌گویند و شما تا این‌جا، مقدار قابل توجهی از مفاهیم این شاخه را یاد گرفته‌اید! جبر خطی، که بی‌شک از مهم‌ترین ابزارهای ریاضیات پیشرفته است، کاربرد وسیعی در تمام ریاضیات دارد. مثلاً مسألهٔ (۳) خودمان! فکر می‌کنید یک مجموعه «پایه» چگونه می‌تواند به حل معادله تابعی (۳) کمک کند؟ می‌توانید حدس بزنید چرا مجموعهٔ «کافی» برای حل معادلهٔ (۳) مفید است؟ چرا «اضافه» ها را دور ریختیم؟

اکنون شما ابزار لازم را برای حل معادلهٔ (۳) را در اختیار دارید، یعنی مفاهیم «جبر خطی».

در قسمت دوم این مقاله، سعی می‌کنیم با دقیق کردن تمام تعاریف بالا، تمام توابع جمعی را شناسایی کنیم و مقداری از خواص عجیب آن‌ها را بررسی کنیم.

## غلط‌نامهٔ شماره ۹

صفحهٔ ۲: آن مرد گفته بود گورش جایی باشد که هر بهار شکوفه‌های گلابی بر آن ریزد. در کوچه باغ‌های نیشابور که بگردیم و دنبال بهار باشیم به باغ خیام می‌رسیم و شکوفه‌های گلابی که بر مزار او می‌ریزند، انگار اصلاً حکیم آنجا حضور دارد و تقویم جلالی را زیر و رو می‌کند تا حلول سال نو را نوید دهد و بعد می‌نشیند و به کمک مقاطع مخروطی و روش‌های هندسی معادلات پیچیدهٔ جبری را حل می‌کند، اما هراس به دل می‌افتد؛ صدای سم اسب سواران مغول می‌آید که نیزه به‌دست کوچه باغ‌های نیشابور را در می‌نوردند و کتابخانه‌ها را به آتش می‌کشند. سال‌ها بر تل خاکستر کتاب‌ها نشستیم وقتی شکوفه‌های گلابی نیز تسلایمان نداد که حکیم در خاک خفته بود و آن شور علمی رهایی‌بخش ما را وانهاده بود. ولی کوچه باغ‌های نیشابور بوی عطر بهار را دارد، بهاری که ما را بر سپهر اطلاعاتی فرا می‌خواند تا با عشق و امید با ابزارهای توان‌مند کننده‌ای که پیش رویمان قرار داده است پرواز کنیم و اوج گیریم. شکوفه‌های گلابی را بر مزار آن حکیم می‌ریزیم. صفحه ۷، سطر پانزدهم: داشتم به گذاشتم تبدیل شود. صفحه ۱۵، پاراگراف آخر: همان‌طور که ذکر کردیم

دو فضای توپولوژیک، هم ارز توپولوژیک‌اند اگر بتوان به طور پیوسته یکی را به دیگری تبدیل کرد و نیز به‌طور پیوسته به وضع اول برگشت. این ضرب‌المثل معروف که برای یک توپولوژیست، دُنات و فنجان قهوه با یکدیگر فرقی ندارند، مثال خوبی برای این هم‌ارزی است!

صفحه ۲۵، شکل ۲: عدد ۴ به ۶، ۶ به ۷ و ۵ به ۸ تبدیل شود. صفحهٔ ۳۱، پاورقی ۲: جرج کانتور به گئورگ کانتور تبدیل شود.

صفحه ۳۹، سطر یازدهم: $\frac{x_1^{\lambda+1}}{x_n^{\lambda}}$ به $\frac{x_1^{\lambda+1}}{x_2^{\lambda}}$ تبدیل شود.

# مسایل المپیادی سری ۱۰

علی شوریده

۱۰ -۱) ۱۹۹۷ عدد طبیعی متمایز در اختیار داریم که هر ۱۰ تای آن‌ها دارای کوچکترین مضرب مشترک یکسانی هستند. بیشترین تعداد آن‌ها را به‌دست آورید که دو به دو نسبت به‌هم اول باشند.

۱۰ -۲) همهٔ اعداد اول $p$ را به‌دست آورید که دستگاه زیر برای اعداد صحیح $x$ و $y$ جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} p+1=2x^2 \\ \\ p^2+1=2y^2 \end{cases}$$

۱۰ -۳) ثابت کنید

$$\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$$

۱۰ -۴) در یک پنج ضلعی محدب $ABCDE$، $AB=BC$، $\widehat{EBD}=\widehat{ABE}+\widehat{DBC}$ و $\widehat{AEB}+\widehat{BDC}=\pi$. ثابت کنید ارتفاعات مثلث $BDE$ روی $AC$ همدیگر را قطع می‌کنند.

شمارهٔ ۱۰
(اردیبهشت ۱۳۸۱) صص ۴۲_۴۶

# حل مسائل المپیادی سری ۸

علی شوریده

۸-۱) اگر $n = \overline{a_1 \dots a_k}$ و $t$ تعداد $a_i$هایی باشد که از ۴ بزرگ‌ترند. آن‌گاه به‌راحتی بدست می‌آید که

$$S(2n) = 2(a_1 + \cdots + a_4) - 9t \text{ چرا؟}$$

لذا چون $t$ عدد بزرگ‌تر از ۴ در میان $a_i$ها وجود دارند لذا $a_1 + \cdots + a_k$ از $5t$ ناکوچک‌تر است یعنی $a_1 + \cdots + a_k \geq 5t$ یا به عبارتی $\frac{9}{5}(a_1 + \cdots + a_k) \geq 9t$. درنتیجه $2(a_1 + \cdots + a_k) - 9t \geq \frac{1}{5}(a_1 + \cdots + a_k)$ و سمت چپ نامساوی مورد نظر حاصل می‌شود.

اما چون $t$ یک عدد نامنفی است لذا نامساوی سمت راست هم به‌راحتی از عبارت $S(2n)$ در بالا نتیجه خواهد شد.

۸-۲) مسلماً $[r_k n]$ از $r_k n$ بزرگ‌تر نیست و در نتیجه $f(n) \geq 0$ و تساوی برای $n = 0$ حاصل می‌شود، لذا کمترین مقدار $f(n)$ صفر است. از طرف دیگر $r_k n - [r_k n]$ از ۱ کوچک‌تر است و در نتیجه $f(n)$ از $m - 1$ بزرگ‌تر نخواهد بود. (چرا؟) و تساوی برای $n = t - 1$ رخ خواهد داد که در آن $t$ کوچکترینِ مخرج مشترک $r_k$ است.

۸-۳) الف) با استقراء قوی نشان می‌دهیم $G(n) - G(n-1)$ یا صفر است یا یک. اگر برای $n$ درست باشد آن‌گاه

$$G(n+1) - G(n) = 1 + G(G(n+1)) - G(G(n))$$

اگر $G(n-1) = G(n)$ آنگاه $G(n+1) - G(n) = 1$ در غیر این‌صورت $G(n)$ و $G(n-1)$ اعداد متوالی هستند که از $n$ بزرگ‌تر نیستند. لذا $G(G(n)) - G(Gn-1))$ یا صفر است یا یک و در نتیجه $G(n+1) - G(n)$ نیز چنین است. (پایه استقراء را خودتان نشان دهید!!!)

ب) فرض کنید $A = G(k-1) = G(k) = G(k+1)$.

آن‌گاه $A = G(k+1) = k + 1 - G(G(k)) = k + 1 - G(A)$ و به‌طور مشابه $A = k - G(A)$ که تناقض است.

۸-۴) فرض کنیم $A_1, \dots, A_6$ زیر مجموعه‌ها باشند. ما روی تعداد اعضای $X$ یعنی $n$. استقراء می‌زنیم و هیچ ازکلیت نخواهد کاست اگر فرض کنیم $n \geq 6$. (چرا؟) اگر $n = 6$، چون $20 = \binom{6}{3} > 6 \times 2$ لذا زیر مجموعه ۳ عضوی $Y$ از $X$ هست که مساوی $A_1, \dots, A_6$ و مکمل‌های آن‌ها نیست اگر اعضای $Y$ را با یک رنگ و اعضای $X - Y$ را با رنگ دیگری رنگ‌آمیزی کنیم شرط مورد نظر برآورده شده است.

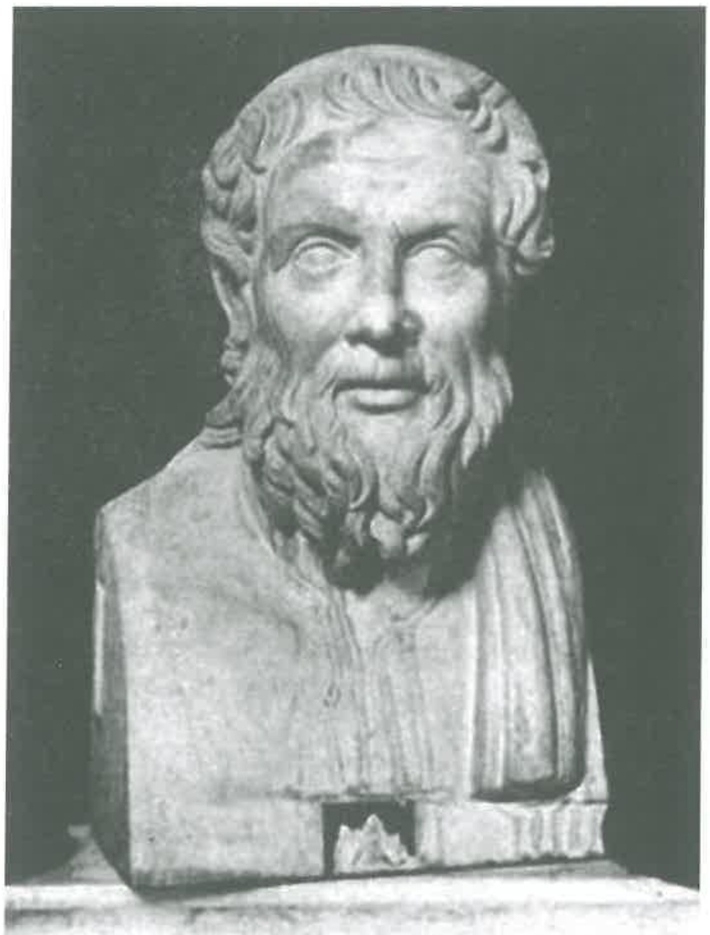
حال فرض کنیم $n > 6$. دو عضو $u$ و $v$ از $x$ وجود خواهند داشت که $\{u, v\}$ زیرمجموعهٔ هیچ‌کدام از $A_i$ها نباشد. چراکه لااقل $\binom{7}{2} = 21$ زیرمجموعهٔ دو عضوی داریم و حداکثر $18 = 3 \times 6$ عضو در همهٔ $A_i$ها وجود دارند. همه جا $u$ و $v$ را با $w$ جایگزین می‌کنیم و با فرض استقراء اعضای $x$ را به‌طور خواسته شده رنگ‌آمیزی می‌کنیم. حال $x$ اولیه را با دادن رنگ $w$ به هر دوی $u$ و $v$ رنگ‌آمیزی کنید.

شمارهٔ ۵ ،
(اردیبهشت ۱۳۸۱) صص ۴۳_۴۴

# تاریخ هندسه از مصر و بابل تا ویتن (۶)

رامین دانشی

مرگ ارشمیدس در جریان سلسله تصرفاتی روی داد که یونان را به یکی از مناطق تحت سلطهٔ امپراطوری روم تبدیل کرد. پس از سقوط سیراکوز[1]، امپراطوری کارتاژ[2] نیز تاب تحمل در برابر رومیان را نیاورد و این امپراطوری نیز تسلیم ارتش روم شد. در همان سال که کارتاژ به دست رومیان فتح شد، کورنتا[3] آخرین شهر یونان نیز سقوط کرد و یونان به استانی از امپراطوری روم تبدیل شد. پس از آن رومیان با لشکرکشی به بین‌النهرین و مصر این دو منطقه را هم به امپراطوری خود ضمیمه کردند.



آپولونیوس

در سال ۳۳۰ ق.م، کنستانتین[4]، اولین امپراطور روم که به مسیحیت گروید، پایتخت خود را از رم به بیزانس[5] منتقل کرد که باعث

1) Syracuse 2) Carthage 3) Cornith 4) Constantine 5) Byzantium

سطرنج ریاضیات شمارهٔ ۱۰
(اردی‌بهشت ۱۳۸۱) صص ۴۶ــ۴۴

شد در سال ۳۹۵ ب.م این امپراطوری به دو قسمت شرقی و غربی تقسیم شود که یونان از مناطق شرقی آن محسوب می‌شد. هر دو امپراطوری غربی و شرقی وابستگی زیادی به نیروی برده‌ها داشتند و برده‌داری به شکل گسترده‌ای مورد توجه قرار گرفته بود. افول بازار برده، تأثیر زیادی بر اقتصاد روم گذاشت و این تأثیر باعث شد که سطح فراگیری علم نیز به میزان قابل توجهی سقوط کند؛ به‌طوری که خلاقیت علمی جای خود را به تغییر و بررسی آثار گذشتگان داد. مدرسه اسکندریه تبدیل به مکانی شد که فضلایش بیش از هر چیز به‌دنبال یافتن تضادهایی در آثار گذشتگان و کتاب مقدس بودند و طلاب، به‌جای فراگیری علم، وقت خود را به بحث و جدل‌های بیهوده گذراندند و بالاخره اسکندریه توسط مسلمانان در سال ۶۴۱ ب.م سقوط کرد.

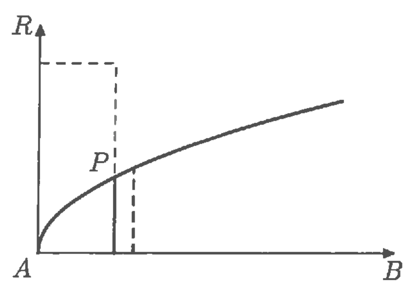
**آپولونیوس[1]:**

آپولونیوس در سال ۲۶۲ ق.م در پرگا[2] واقع در آسیای صغیر متولد شد. آپولونیوس را به همراه اقلیدس و ارشمیدس، سه ریاضیدان بزرگ قرن سوم قبل از میلاد نامیده‌اند. آپولونیوس در جوانی به اسکندریه رفت و زیر نظر جانشینان اقلیدس درس خواند.

آپولونیوس منجمی برجسته و ریاضیدانی خلاق بود، ولی مهم‌ترین دلیل شهرت وی اثر برجسته‌اش به نام مقاطع مخروطی[3] است، به‌طوری‌که به‌واسطهٔ این اثر، لقب هندسه‌دان بزرگ را بین معاصرینش کسب نمود.

پیش از این، یونانیان مقاطع مخروطی را از سه نوع مخروط دوار، بسته به این‌که زاویه رأس کوچک‌تر از قائمه، مساوی با آن یا بزرگ‌تر باشد، استخراج می‌کردند. با قطع دادن هر یک از این مخروط‌ها با صفحه‌ای عمود بر مولد مخروط، به ترتیب بیضی، سهمی و هذلولی نتیجه می‌شود. اما آپولونیوس به طریق معمول امروزی آن را از یک مخروط دو پارچه، مستدیر قائم یا مایل به‌دست آورد.

نام‌های یونانی بیضی[4]، سهمی[5] و هذلولی[6] به‌وسیلهٔ آپولونیوس تعریف شد و از اصطلاحات قدیم فیثاغورسی مربوط به اضافه کردن مساحت‌ها اخذ شده است. وقتی فیثاغورسیان مستطیلی را بر پاره‌خطی قرار می‌دادند (یعنی قاعدهٔ آن را بر پاره‌خط منطبق می‌ساختند) به‌طوری‌که یک قاعدهٔ مستطیل بر یکی از دو سر پاره خط منطبق گردد بسته به این‌که طول پاره‌خط از قاعده بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساوی باشد، سه حالت ناقص[7]، زاید[8] و کافی[9] پدید می‌آمد. فرض کنید که $AB$ محور اصلی مقاطع مخروطی، $P$ نقطهٔ دل‌خواهی بر مقطع مخروطی و $Q$ پای عمور بر $AB$ از $P$ باشد.




در $A$ که یکی از رأس‌های مقطع مخروطی است، عمودی بر $AB$ رسم کرده و بر آن طولی مانند $AR$ برابر آنچه امروز پارامتر $p$ مقطع مخروطی می‌نامیم جدا کنید. بر پاره‌خط $AR$ مستطیلی اضافه کنید که $AG$ یک ضلع آن و $|PQ|^2$ مساحت آن باشد. بسته به اینکه این مستطیل اضافه شده کوتاهتر از پاره‌خط $AR$ منطبق بر آن و یا بزرگتر از آن باشد، آپولونیوس مقطع مخروطی را یک $ellipse$ «بیضی»، یک $Parabola$ «سهمی» و یا یک $Hyperbola$ «هذلولی» نامید.

مقاطع مخروطی رسالهٔ بزرگی است ولی به‌علت وسعت و وسواس در بیان و غیرعادی بودن بسیاری از قضایای پیچیدهٔ آن مطالعهٔ آن تا حدی مشکل است. این اثر در هشت مقاله تدوین شده که بالغ بر ۴۰۰ قضیه را شامل می‌شود، در حال حاضر فقط هفت مقاله از هشت مقالهٔ آن موجود است که چهار تای آن از متن یونانی و سه تای آن از ترجمهٔ متن عربی آن باقی‌مانده است.

به‌جز مقاطع مخروطی، آپولونیوس صاحب آثار دیگری در هندسه است که پاپوس نشانه‌های مختصری از آن‌ها را داده است. اثر سوم

1) Apollonius 2) Perga 3) Conic sections 4) Elipse 5) Parabola 6) Hypeobola 7) Ellipsis 8) Hyperbole 9) Parabole

به مسألهٔ آپولونیوس معروف است که ریاضیدانان زیادی از جمله اویلر و نیوتن و ژوزف دیه‌ژرگون[1] را به‌خود جلب کرده است. این سه مسأله به رسم دایره‌ای مماس به سه دایرهٔ مفروض می‌پردازد که در آن دایره‌های مفروضی می‌توانند به طول مستقل به خطوط مستقیم یا به نقاط تبدیل شوند. از بین راه حل‌های ارائه شده برای این مسأله، راه حل دیه‌ژرگون زیباترین راه حل ارائه شده است.

**پاپوس[2]:**

جانشینان اقلیدس، ارشمیدس و پاپوس تا مدتی بر نسبت هندسهٔ یونانی پای‌بند بودند؛ ولی این نسبت رو به افول نهاد تا این‌که ۵۰۰ سال بعد از آن آپولونیوس، پاپوس اسکندرانی در حدود اواخر قرن سوم پس از میلاد پا به عرصه نهاد و سعی کرد تا سنت والای هندسهٔ یونانی را احیا کند. اثر عظیم پاپوس مجموعهٔ ریاضی وی است که ترکیبی از شرح و راهنمای آثار هندسی موجود در زمان او و تذکرات تاریخی است. این اثر در هشت مقاله تألیف گردیده که اکنون بجز مقالهٔ اول و قسمتی از مقالهٔ دوم، بقیه اثر موجود است.

مجموعه ریاضی[3] پاپوس منبعی است غنی از قطعات هندسی. مقایسه‌هایی که پاپوس در اثر خود انجام داده این مطالب را که شرح‌های تاریخی اثر موفق هستند را تأیید می‌کند. در واقع تاریخ‌نویسان هندسه یونانی قسمت عمدهٔ دانش و اطلاعات خود را مدیون این اثر گران‌بها هستند که در آن از آثار بیش از ۳۰ ریاضیدان مختلف یونانی شاهد می‌آورد و یا به آن ارجاع می‌دهد.

پاپوس همچنین شروحی بر اصول و نظرات اقلیدس در باب المجسطی و تسطیح کرهٔ بطلمیوس نگاشته است ولی این شروح نسبت به شروحی که اخلاف وی بر این آثار نوشتند از اهمیت کمتری برخوردار است.

**شماره بعدی مهر ماه ۱۳۸۱ منتشر می‌شود**

1) Joseph - Diez Gergonne 2) Pappus 3) Mathematical Collection

## تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۲۴۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹— ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ..........................................................................

نشانی پستی: ..........................................................................

..........................................................................


## تقاضای اشتراک

هزینهٔ اشتراک برای شش شماره، ۲۴۰۰ تومان است که باید به حساب شمارهٔ ۵۵۵۱ بانک ملی ایران شعبهٔ دانشگاه صنعتی شریف به نام «ماهنامهٔ ریاضیات» واریز شود و اصل فیش بانکی به ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «ماهنامهٔ ریاضیات، صندوق پستی ۳۸۹ — ۱۳۴۴۵ ارسال گردد.

نام متقاضی اشتراک: ..........................................................................

نشانی پستی: ..........................................................................

..........................................................................


## مسأله‌های جایزه‌دار!

در این شماره دو مسأله جایزه‌دار مطرح می‌کنیم. منتظر دریافت راه‌حل‌های شما هستیم تا به راه‌حل‌های برگزیده جوایز ارزنده‌ای اهدا شود.

۱. مجموعه $A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ مفروض است، نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۸ عضوی $A$، مانند $B$ دارای دو عضو متمایز $x$ و $y$ است که $x + y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۲. فرض کنید یک ماتریس $۲n \times ۲n$ با درایه‌های ۰ و ۱ داریم. اگر تعداد صفرها دقیقاً $۳n$تا باشد، ثابت کنید که $n$ سطر و $n$ ستون وجود دارند که با حذف آنها تمامی صفرها حذف می‌شوند.

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد ................ محل تولد ................ دانش‌آموز سال ................ رشته ................

نام و نشانی محل تحصیل: ........................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

شمارهٔ تلفن تماس:

---

دانش‌آموزان محترمی که مشترک ماهنامه می‌شوند، لطفاً اطلاعات زیر را تکمیل فرمایند:

تاریخ تولد ................ محل تولد ................ دانش‌آموز سال ................ رشته ................

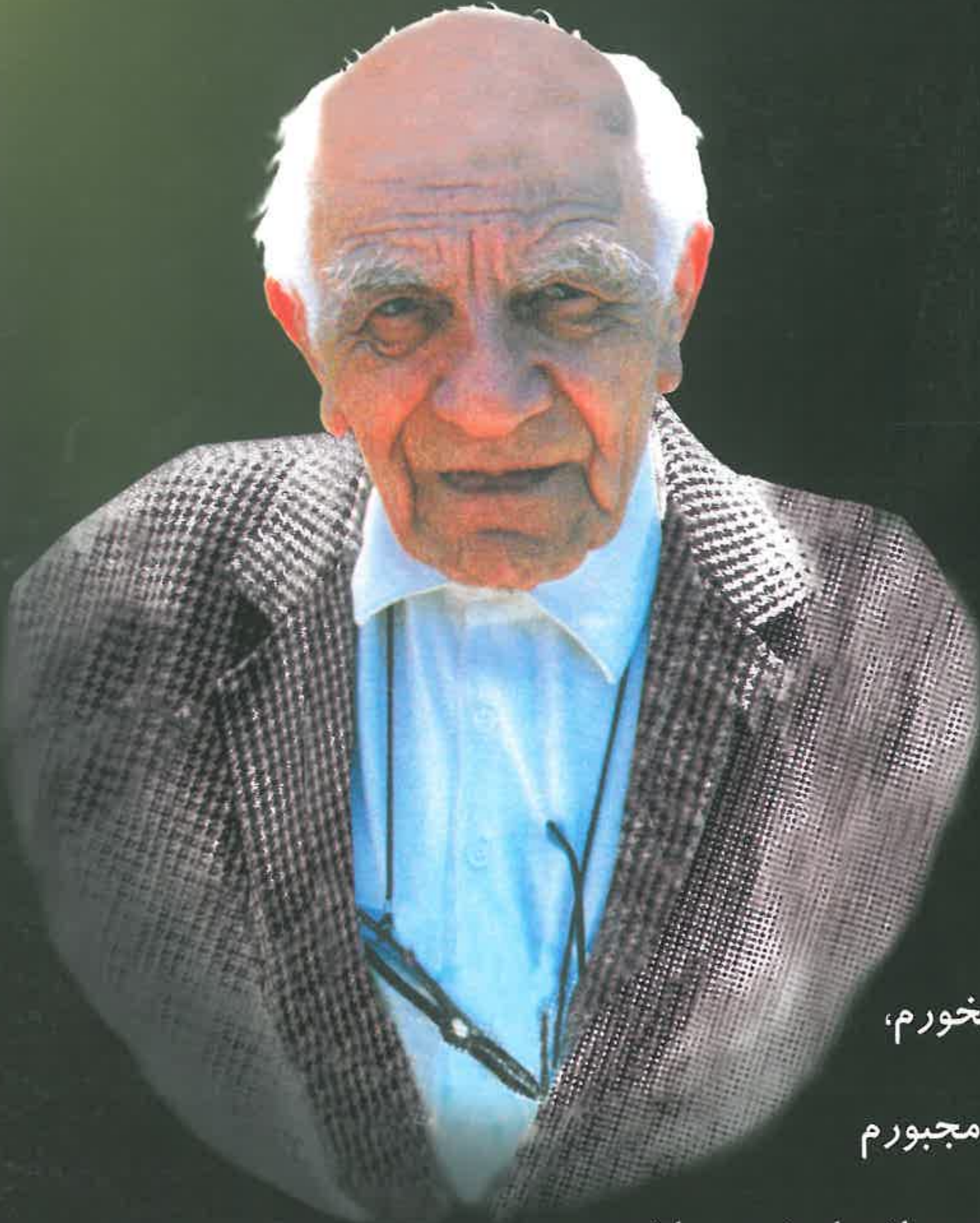
نام و نشانی محل تحصیل: ........................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

شمارهٔ تلفن تماس:

---



اگر مطالعه نکنم، مثل این
می‌ماند که غذا نخورده
باشم. همان طور که برای
زندگی کردن مجبورم غذا بخورم،
برای این زندگی معنوی هم مجبورم
مطالعه کنم. کاری نیست که به اختیار خودم باشد
و بگویم نه، این کار را نمی‌کنم.

استاد احمد بیرشک