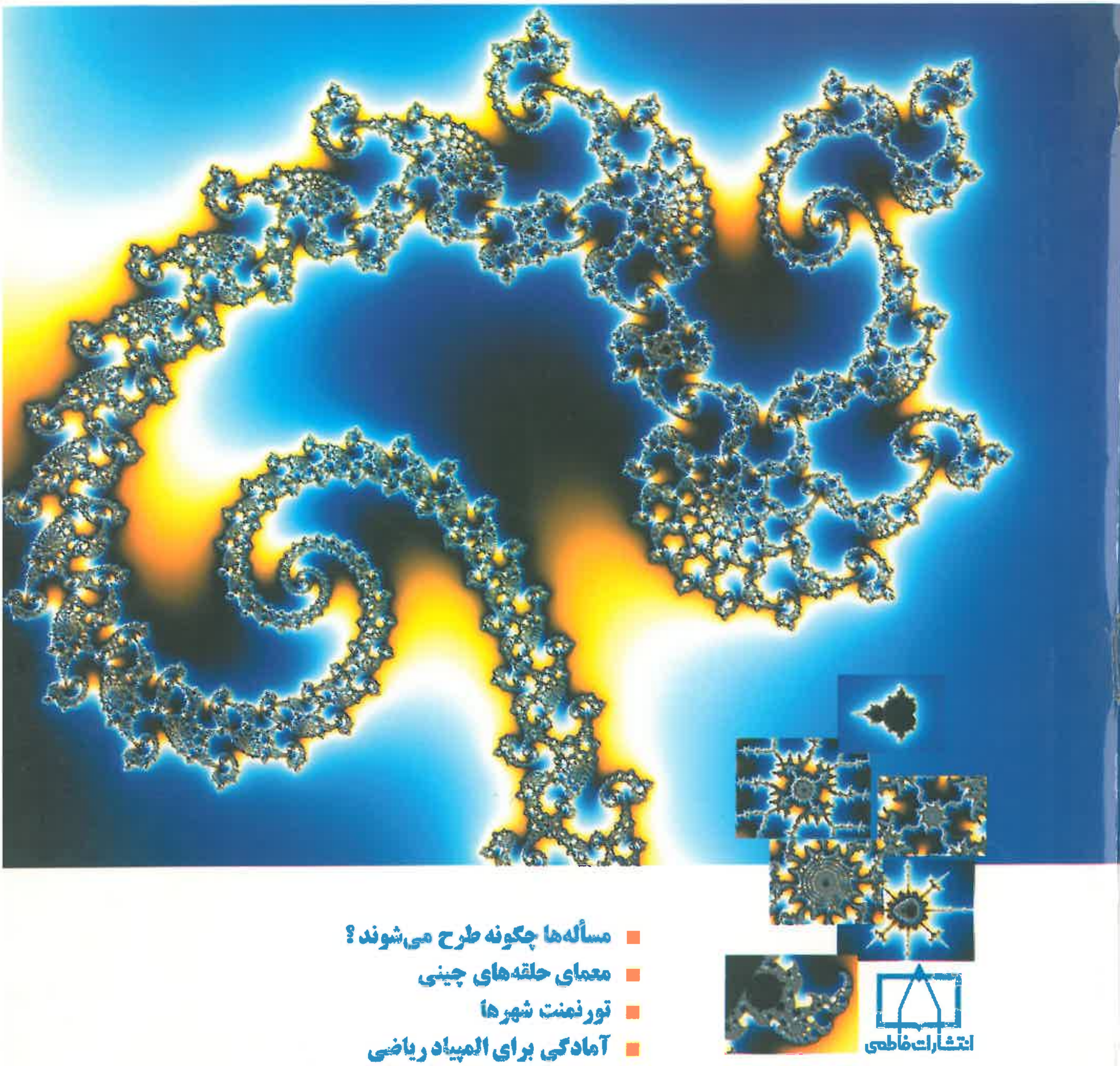
سال سوم
تک شماره
اسفند ۱۳۸۱
قیمت : ۵۰۰ تومان

نشریهٔ ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی



- مسأله‌ها چگونه طرح می‌شوند؟
- معمای حلقه‌های چینی
- تورنمنت شهرها
- آمادگی برای المپیاد ریاضی
- مقاله‌ای از اویلر

انتشارات فاطمی

به نام خدا

نشریهٔ ریاضیات
برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال سوم • تک شماره • اسفند ۱۳۸۱

فهرست:

مقاله‌ها

مسأله‌های درسی

سرگرمی

المپیاد

ازگذشته‌ها

روی جلد: مجموعهٔ مندلبرات، به‌همراه بخش‌هایی بزرگ‌شده از آن (نگاه کنید به «فرکتال چیست؟»)

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش
مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، محمد مهدی عابدی‌نژاد
سردبیر: بردیا حسام
ویراستار: ارشک حمیدی
همکاران این شماره: سپیده چمن‌آرا، رویا درودی، آزاده فرجی، امید نقشینه ارجمند
با حمایت: خانهٔ ریاضیات اصفهان، مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
ناشر: مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
مسؤول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه بندی: زهره امینی
رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ۱۴۱۴۵
تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ۸۹۷۱۵۸۳
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

مسأله‌ها چگونه طرح می‌شوند؟

ایگور شاریگین

زن با عصبانیت کتابها را به زمین گذاشت و رو به شوهرش کرد و گفت: «شعری را که روز ازدواجمان برایم نوشتی به یاد داری؟ این شعر در این کتاب آمده است و نویسنده‌اش پیترارک است!»

می‌خواهم این مقاله را با دو جملهٔ متناقض شروع کنم. از یک طرف، به دانش‌آموزانی که این مقاله را می‌خوانند توصیه می‌کنم که بلافاصله مسأله طرح کردن را شروع نکنند. از طرف دیگر، از شما می‌خواهم که هر چه سریعتر دست به‌کار شوید و مسأله‌هایی را طرح کنید (و از طرح مسأله‌های هندسه شروع کنید) و آنها را برایم بفرستید.

در این مقاله می‌خواهم تجربیات چندین ساله‌ام را در طرح کردن مسأله‌های هندسه در اختیارتان بگذارم، برخی رمز و رازهایم را در این کار برایتان بگویم و چند قاعدهٔ کلی دربارهٔ هنر مسأله طرح کردن و حتی دربارهٔ تشخیص مسألهٔ خوب از مسألهٔ بد بیان کنم.

می‌توانیم مسأله‌ها را به سه دسته تقسیم کنیم: تمرینهایی که در کتابهای درسی می‌آیند، مسأله‌های مسابقه‌ای و مسأله‌های سبْکِ المپیاد. می‌توانیم دسته‌ای دیگر هم به اینها اضافه کنیم، و آن مسأله‌های «ابتکاری» است، که البته چنین چیزی بیشتر «معنا»ست تا ویژگی‌ای مشخص، زیرا «ابتکار» بیشتر مربوط به مسأله حل کردن است تا مسأله طرح کردن.

بگذارید نگاهی گذرا به «انبان شگردها»ی مسأله‌سازان بیندازیم.

صورت‌بندی مجدد

در اینجا نمونه مسأله‌ای می‌آوریم که در طرح آن از روش صورت‌بندی مجدد استفاده شده است.

مسألهٔ ۱ . دایره‌ای بر مثلثی محیط شده و قطری از آن عمود بر یکی از ضلعهای مثلث رسم شده است. سپس این قطر را بر ضلع دیگری از مثلث تصویر کرده‌ایم. ثابت کنید طول قطعهٔ تصویر برابر با طول ضلع سوم مثلث است.

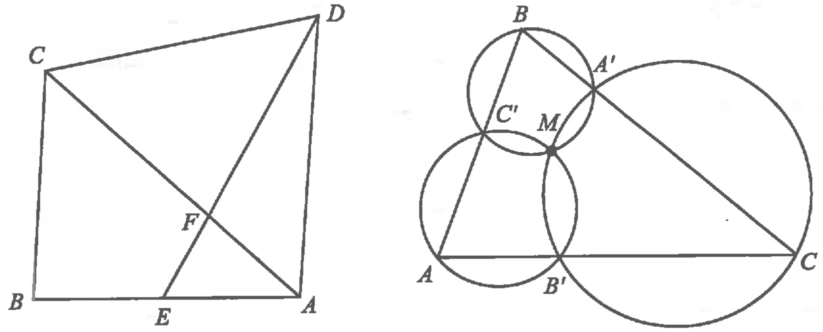
حل این مسأله را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (به یاد بیاورید که طول تصویر پاره‌خطی به طول s بر خطی که با این پاره‌خط زاویه‌ای برابر با θ تشکیل می‌دهد، برابر با $s\cos\theta$ است).

قضیهٔ بعدی قضیه‌ای مشهور است.

قضیهٔ ۱ . اگر نقطه‌های A'، B' و C' را به ترتیب روی ضلعهای AB، BC و CA (و متمایز از رأسهای مثلث ABC) انتخاب کنیم، آنگاه دایره‌هایی که از نقطه‌های A، B و C'، و A'، B' و C می‌گذرند در یک نقطه مشترک‌اند.

این قضیه را معمولاً قضیهٔ میکل، و نقطهٔ مشترک دایره‌ها را نقطهٔ میکل می‌نامند و این نقطه را با M نشان می‌دهند.

اثبات این قضیه چندان پیچیده نیست، و اگر از زاویه‌های جهتدار استفاده نکنیم، تنها مشکل این است که باید حالتهای مختلف وضعیت نقطه‌های A'، B' و C' را نسبت به یکدیگر بررسی کنیم. در حالتی که در شکل ۱ (الف) نشان داده شده است، اگر نقطهٔ برخورد دایره‌ای را که از نقطه‌های A، B' و C' می‌گذرد با دایره‌ای که از نقطه‌های A'، B و C' می‌گذرند M بنامیم، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A'، B'، C' و M روی یک دایره قرار دارند. (مثلاً، با اثبات اینکه زاویه‌های C و $B'MA'$ مکمل‌اند.)



(ب) (الف)

شکل ۱

در اینجا مسأله‌ای را می‌آوریم که در یکی از المپیادهای سراسری اتحاد شوروی پیشنهاد شده است.

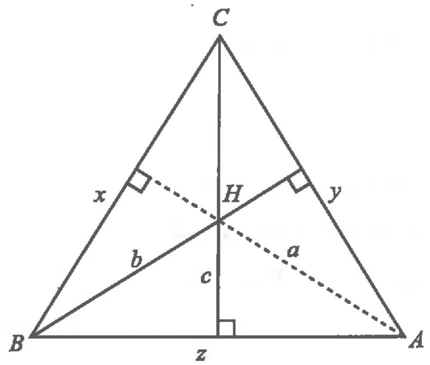
مسألهٔ ۲ . نقطه‌ای مانند E (متمایز از A و B) روی ضلع AB از چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. پاره‌خطهای AC و DE در نقطهٔ F متقاطع‌اند. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای ABC، CDF و BDE در یک نقطه مشترک‌اند.

راه‌حل. از بررسی دقیق شکل ۱ (ب) و صورت مسأله معلوم می‌شود که مسألهٔ ۲ و قضیهٔ قبل یکی‌اند. در حقیقت، کافی است شرطهای مسأله را در مورد مثلث AEF مجدداً صورت‌بندی کنیم، به این ترتیب که نقطه‌ها را مانند زیر مجدداً نامگذاری کنیم: $E \to B$، $B \to C'$، $F \to C$، $C \to B'$ و $D \to A'$. ∎

بی‌شک صورت مسألهٔ ۲ به‌سادگی صورت قضیهٔ قبل تنظیم نشده است و به این ترتیب جذابیت و زیبایی آن را هم ندارد. البته ممکن است دربارهٔ چگونگی طرح این مسأله اشتباه کنم ــ که این هم ضعف برگزارکنندگان این المپیاد را می‌رساند!

ممکن است وقتی که مسأله‌ای هندسی را به صورت جبری بازگو می‌کنیم، مسأله‌ای زیبا و به‌درد بخور به‌دست آید. مثلاً، مسألهٔ معروف ترسیم مثلث با معلوم بودن سه ارتفاعش را درنظر بگیرید. (آیا می‌توانید این مسأله را حل کنید؟) آنچه برای حل این مسأله باید بدانید این است که مثلثی با طول ضلعهای a، b و c با مثلث به طول ضلعهای $\frac{1}{h_a}$، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ متشابه است.

فرض کنید طول ارتفاعهای مثلث a، b و c و طول ضلعهایش x، y و z باشند. اگر مثلث حاده باشد، دستگاه معادله‌هایی برحسب x، y و z به‌دست می‌آوریم. پس مسألهٔ زیر به‌دست می‌آید (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۲

مسألهٔ ۳ . دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \sqrt{x^۲ - c^۲} + \sqrt{y^۲ - c^۲} = z \\ \sqrt{y^۲ - a^۲} + \sqrt{z^۲ - a^۲} = y \\ \sqrt{z^۲ - b^۲} + \sqrt{x^۲ - b^۲} = x \end{cases}$$

اگر بدانیم این مسأله چگونه طرح شده است، به‌سادگی می‌توانیم شرط حلپذیری آن را (که همان شرط حاده بودن مثلث با طول ضلعهای $\frac{۱}{a}$، $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{c}$ است) پیدا و سپس دستگاه معادله‌های موردنظر را حل کنیم. ثابت کنید که هم دستگاه معادله‌های موردنظر و هم مسألهٔ ترسیمی بیشتر از یک جواب ندارند.

با کمی اغراق می‌توان مسأله‌ای را که با تغییر صورت اصلی مسأله به عکس آن به‌دست می‌آید در ردهٔ مسأله‌هایی قرار داد که با صورت‌بندی مجدد به‌دست می‌آیند. باید تأکید کنیم که مرز میان انواع مسأله‌ها چندان مشخص نیست. ممکن است مسأله‌ای در عین حال نمونه‌ای از چندین روش مسأله طرح کردن باشد؛ به‌ویژه به دلیل اینکه صورت نهایی مسأله معمولاً از ترکیب چندین روش به‌دست می‌آید. تغییر مسأله به عکس آن را به روشهای مختلفی می‌توان انجام داد، با این حال، در اینجا فقط یک مسأله می‌آوریم که نشان دهیم چگونه حکمی که اهمیت چندانی ندارد به مسأله‌ای تبدیل می‌شود که محتوای هندسی غنی‌ای دارد. با بررسی مثلثهای قائم‌الزاویهٔ شکل ۲، معلوم می‌شود که اگر مرکز ارتفاعی (یعنی محل برخورد ارتفاعهای) مثلث حادهٔ ABC را با H نشان دهیم،

$$\angle HAB = \angle HCB$$

$$\angle HBA = \angle HCA$$

$$\angle HAC = \angle HBC$$

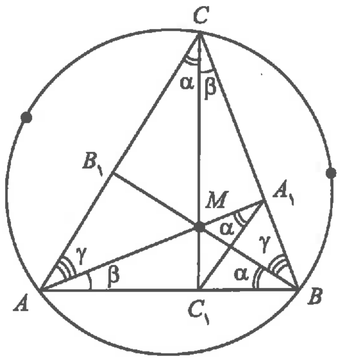
بنابراین، مسألهٔ بعد به‌طور طبیعی مطرح می‌شود.

مسألهٔ ۴ . مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید که

$$\angle MAB = \angle MCB, \qquad \angle MBA = \angle MCA$$

که در اینجا ABC مثلثی حاده است.

راه‌حل. معلوم است که نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث به مکان هندسی موردنظر تعلق دارد. مسألهٔ مهم این است که مشخص کنیم همین یک نقطه با این ویژگی درون مثلث وجود دارد یا نقطه‌های دیگری هم وجود دارند. ثابت می‌کنم که درحقیقت فقط همین یک نقطه این ویژگی را دارد. AM، BM و CM را امتداد می‌دهیم تا ضلعهای مثلث را در نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 قطع کنند (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳

نقطه‌های A، C، A_1 و C_1 روی یک دایره قرار دارند (زیرا $\angle A_1AC_1 = \angle A_1CC_1$). درنتیجه،

$$\angle MA_1C_1 \angle MCA = \angle MBC_1$$

و

$$\angle MAC = \angle MC_1A_1$$

بنابراین نقطه‌های M، B، A_1 و C_1 هم روی یک دایره قرار دارند و

$$\angle MBA_1 = \angle MC_1A_1 = \angle MAC$$

اگر این زاویه‌ها را، مطابق شکل ۳، با α، β و γ نشان دهیم، معلوم می‌شود که $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ و درنتیجه AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث مفروض‌اند. با وجود این، مکان هندسی نقطه‌هایی که به دنبال آنها هستیم، فقط تک نقطهٔ محل برخورد ارتفاعهای مثلث نیست، بلکه کمان AB از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و نقطه‌های وسط کمانهای BC و CA هم به این مکان تعلق دارند (خودتان این حکم را ثابت کنید). ■

مسأله‌هایی که براساس مسأله‌های دیگری طرح می‌شوند

در هندسه، اغلب ساختار مسأله به گونه‌ای است که برای حل آن باید شکلهای دیگری را بررسی کنیم یا از نتیجه‌های دیگری استفاده کنیم. اغلب مسأله‌های هندسهٔ فضایی در امتحانات ورودی دانشگاههای روسیه از این دسته‌اند. وقتی که ساختار چنین مسأله‌هایی پیچیده باشد، معمولاً برای حل کردن آنها باید مرحله به مرحله پیش رفت. با وجود این، لزومی ندارد چنین مسأله‌هایی حتماً ساختاری پیچیده داشته باشند. در اینجا مسأله‌ای ساده می‌آوریم که از دو (یا سه) مسألهٔ فرعی درست شده است.

مسألهٔ ۵ . قطرهای چهارضلعی‌ای محدب آن را به چهار مثلث تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید حاصل ضرب مساحتهای دو مثلث روبه‌رو به هم با حاصل ضرب مساحتهای دو مثلث دیگر برابر است.

مسألهٔ ۶ . ثابت کنید در میان همهٔ چهارضلعیهای محاط در دایره‌ای مفروض، مربع بیشترین مساحت را دارد.

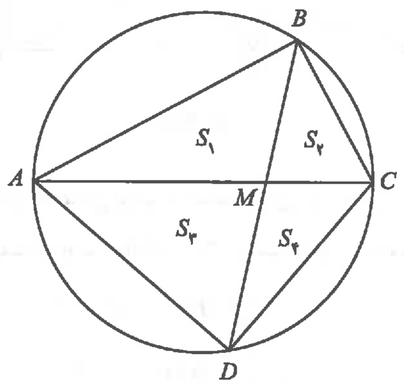
از خواننده می‌خواهیم که این دو مسأله را حل کند، و در عین حال، براساس آنها مسأله‌ای جدید مطرح می‌کنیم.

مسألهٔ ۷ . چهارضلعی $ABCD$ در دایره‌ای به شعاع واحد محاط شده است. قطرهای این چهارضلعی یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. اگر بدانیم حاصل ضرب مساحتهای مثلثهای ABM و CDM برابر با $\frac{۱}{۴}$ است، مساحت چهارضلعی را پیدا کنید.

راه‌حل. برای حل کردن این مسأله کافی است توجه کنیم که (با نمادگذاری شکل ۴ و بنابر مسألهٔ ۵) $S_۱S_۴ = S_۲S_۳ = \frac{۱}{۴}$ و

$$S = S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ \geq ۲\sqrt{S_۱S_۴} + ۲\sqrt{S_۲S_۳} = ۲$$

(از این مطلب استفاده کرده‌ایم که میانگین حسابی از میانگین هندسی بزرگتر یا با آن برابر است).



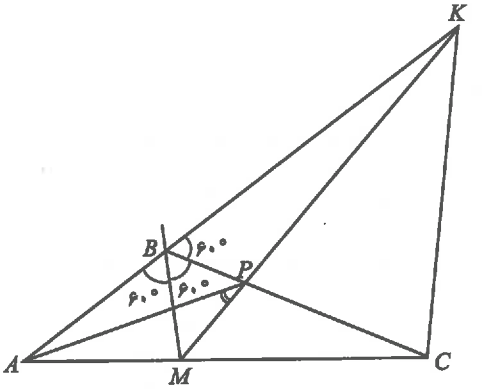
شکل ۴

علاوه‌بر این (بنابر مسألهٔ ۶)، $S_{ABCD} \geq ۲$، زیرا مساحت مربع محاط در دایرهٔ واحد برابر با ۲ است. از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که $ABCD$ مربعی به مساحت ۲ است. ∎

بسیاری مسأله‌ها طوری طرح شده‌اند که باید به روشی خاص حل شوند و اغلب به‌نظر نمی‌رسد که راه‌حل دیگری (حتی گاهی ساده‌تر) دارند. در اینجا مسأله‌ای از این نوع می‌آورم که خودم طرح کرده‌ام. می‌خواستم مسأله‌ای طرح کنم که در آن از اینکه سه نیمساز مثلث در یک نقطه به هم می‌رسند (یا دقیقتر، از اینکه نیمساز هر زاویهٔ مثلث از محل برخورد دو نیمساز دیگر زاویه‌های مثلث می‌گذرد، و لزومی ندارد این نیمسازها داخلی باشند) دو بار استفاده شود. علاوه‌بر این، مرحلهٔ دوم راه‌حل مبتنی‌بر مرحلهٔ اول آن باشد. مطمئن نیستم که این مسأله خیلی خوب از کار در آمده باشد، زیرا براساس یک مسألهٔ ترسیمی معروف طرح شده است. به هر حال، صورت این مسأله چنین است.

مسألهٔ ۸ . اندازهٔ زاویهٔ B از مثلث ABC برابر با ۱۲۰° است. نقطه‌ای مانند M روی ضلع AC و نقطه‌ای مانند K روی خط AB طوری انتخاب شده است که BM نیمساز زاویهٔ ABC و CK نیمساز زاویهٔ مجاور زاویهٔ ACB است. پاره‌خط MK ضلع BC را در نقطهٔ P قطع کرده است. ثابت کنید $\angle APM = ۳۰^\circ$.

راه‌حل. استدلالمان دو مرحله دارد. در مثلث BMC، خطهای BK و CK به ترتیب نیمساز زاویه‌های B و C هستند (شکل ۵ را ببینید).



شکل ۵

درنتیجه، MP نیمساز زاویهٔ BMC و P محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی مجاور زاویه‌های B و M از مثلث ABM است. بنابراین AP نیمساز زاویهٔ BAC است. از همهٔ اینها نتیجه می‌شود

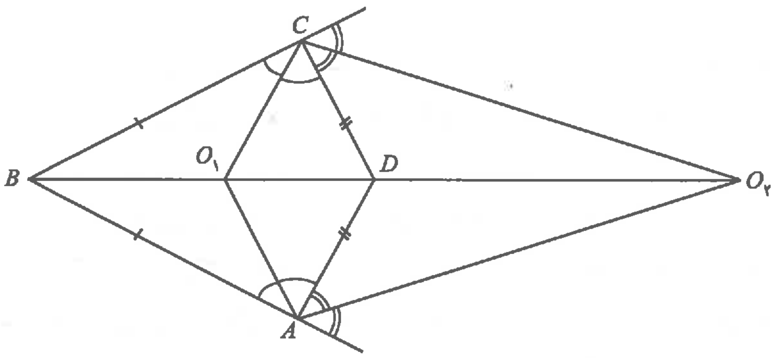
$$\begin{aligned}\angle APM &= \angle PMC - \angle PAM \\ &= \frac{۱}{۲}(\angle BMC - \angle BAM) \\ &= \frac{۱}{۲}\angle ABM = ۳۰^\circ\end{aligned}$$

در اینجا از این نتیجه استفاده کرده‌ایم که اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر با مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی غیرمجاورش است. ■

مطلب آخر اینکه می‌توان مسأله را طوری طرح کرد که به نتیجه‌ای دلخواه منجر شود (معمولاً از این روش در طرح تمرینها استفاده می‌شود). هر چند به‌ندرت به چنین مسأله‌هایی برمی‌خوریم. برای نمونه، در اینجا «کلکی» سر هم می‌کنیم تا مسأله‌ای طرح کنیم. عددها را طوری انتخاب کرده‌ایم که شکل هندسی خاصی به‌وجود آید. با وجود برخی نقصها (چون مجبور شده‌ام در بیان صورت مسأله رو راست نباشم)، باز هم این مسأله را دوست دارم. البته، این مسأله نه از نوع مسأله‌های سبکِ المپیاد است (چون معمولاً در المپیادها مسأله‌های عددی نمی‌دهند) و نه از نوع مسأله‌های مسابقه‌ای (حتی بهترین دانش‌آموزان هم ممکن است در دام طراح بیفتند و این از اهداف برگزاری مسابقه دور است).

مسألهٔ ۹ . چهارضلعی محدبی که طول دو ضلعش ۶ واحد و طول دو ضلع دیگرش ۱۰ واحد است، قاعدهٔ یک هرم است. طول ارتفاع هرم برابر با ۷ واحد است و وجه‌های جانبی آن با صفحهٔ قاعده زاویهٔ 60° ساخته‌اند. حجم هرم را پیدا کنید.

راه‌حل. بنابر آنچه در صورت مسأله گفته شده، اندازهٔ زاویه‌های دووجهی مجاور به قاعدهٔ هرم یا 60° است یا 120° (و لزوماً 60° نیست ـ این همان «نکتهٔ ریز» نامرئی در صورت مسأله است!). تصویر رأس هرم روی صفحهٔ قاعدهٔ آن، از ضلعهای چهارضلعی محدب (یا دقیقتر، از خطهایی که ضلعهای این چهارضلعی روی آنها قرار دارند) به یک فاصله است. درنتیجه، امکان ندارد این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد.



شکل ۶

طول دو تا از ضلعهای مجاور این چهارضلعی ۶ واحد و طول دو ضلع دیگر، که آنها هم مجاورند، ۱۰ واحد است. پس اگر $AB = BC = 10$ و $AD = DC = 6$ (شکل ۶ را ببینید)، دو نقطه (O_1 و O_2) وجود دارند که از ضلعهای چهارضلعی به یک فاصله‌اند. از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که فاصلهٔ تصویر رأس هرم تا ضلعهای چهارضلعی برابر با $\frac{7}{\sqrt{3}}$ است. اگر رأس هرم به نقطهٔ O_1، که مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی $ABCD$ است، تصویر شود، مساحت چهارضلعی $ABCD$ باید برابر با $\frac{7}{\sqrt{3}} \times 16$ باشد. با وجود این، مساحت این چهارضلعی ممکن نیست از ۶۰ بیشتر

باشد (و وقتی برابر با ۶۰ است که زاویه‌های A و C برابر با ۹۰° باشند) و $۶۰ < \frac{۷}{\sqrt{۳}} \times ۱۶$. پس رأس هرم به نقطهٔ $O_۲$ تصویر شده است و فاصلهٔ این نقطه تا ضلعهای چهارضلعی $ABCD$ برابر با $\frac{۷}{\sqrt{۳}}$ است. اکنون به سادگی می‌توانیم مساحت چهارضلعی را حساب کنیم، که برابر است با

$$(۱۰ - ۶)\frac{۷}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۸}{\sqrt{۳}}$$

و حجم هرم موردنظر برابر است با $\frac{۶۴}{\sqrt{۳}}$. ■

حالت خاص

برای مسأله طرح کردن، می‌توان از برخی قضیه‌های کلی که ابزاری قدرتمند برای مسأله حل کردن هستند، مانند قضیهٔ سِوا در هندسه یا نابرابریهای مربوط به میانگینهای مختلف در جبر، استفاده کرد. مثلاً، قضیهٔ پاسکال را در نظر بگیرید: اگر شش نقطهٔ A، B، C، D، E و F روی یک دایره قرار داشته باشند، آن وقت سه نقطه‌ای که خطهای AB و DE، BC و EF، و FA و CD یکدیگر را در آنها قطع می‌کنند روی یک خط قرار دارند. در اینجا مسأله‌ای می‌آوریم که مربوط به قضیهٔ پاسکال است.

مسألهٔ ۱۰ . فرض کنید ضلعهای AB و DE از چهارضلعی محاطی $ABDE$ یکدیگر را در نقطهٔ M و ضلعهای BD و AE یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کنند. ثابت کنید مماسهای بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی در نقطه‌های B و E روی خط KM به یکدیگر می‌رسند.

به‌سادگی معلوم می‌شود که این مسأله حالتی خاص (یا دقیقتر، حالتی حدی) از قضیهٔ پاسکال است، به این ترتیب که نقطه‌های B و C، و همین‌طور نقطه‌های E و F بر یکدیگر منطبق شده‌اند. دو ضلع شش ضلعی مربوط در قضیهٔ پاسکال، در حالت حدی آن، مماس بر دایره‌اند.

ریاضیدانان حرفه‌ای که به برگزاری المپیادهای ریاضی کمک می‌کنند، اغلب از میان تحقیقات علمی خود مسأله‌هایی زیبا و جالب استخراج می‌کنند. اغلب می‌توان حالتهای خاص قضیه‌های اصلی و یا لمهای متعددی را که برای اثبات قضیه‌ها مطرح می‌شوند به شکل مسأله‌ای برای دانش‌آموزان دبیرستانی درآورد. چنین مواردی در هندسه به‌ندرت پیش می‌آید، زیرا رویکردهای جدید به هندسه، با شکلی از آن که در دبیرستان تدریس می‌شود تفاوتهای نسبتاً زیادی دارد (البته، منظورم از این حرف، تحقیر هندسهٔ دبیرستانی نیست). در این مقاله فقط یک مثال از این نوع می‌آورم، هر چند شاید نمونه‌ای شاخص و عالی نباشد.

قضیهٔ «زیگزاگی» چنین است: دو دایره مفروض‌اند (ممکن است دایره‌ها در فضا باشند). معلوم شده است که مجموعه‌ای از $۲n$ نقطه مانند $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{۲n}$ وجود دارند که نقطه‌هایی که شمارهٔ آنها فرد است روی یک دایره و نقطه‌هایی که شمارهٔ آنها زوج است روی یک دایرهٔ دیگر قرار دارند، و

$$A_۱A_۲ = A_۲A_۳ = \cdots = A_{۲n}A_۱$$

با این مفروضات، تعدادی نامتناهی مجموعهٔ $2n$ نقطه‌ای با این ویژگیها وجود دارد، هر نقطه از دایرهٔ اول را می‌توان به جای نقطهٔ A_1 انتخاب کرد و فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی در این مجموعه‌ها با فاصله‌های نقطه‌های نظیرشان در مجموعهٔ ابتدایی یکسان است.

من هیچ اثبات مقدماتی برای این قضیه نمی‌شناسم. با این وجود، حالتهای خاصی از آن را می‌توان به عنوان مسأله‌هایی مقدماتی مطرح کرد. در اینجا یکی از آنها را می‌آورم.

مسألهٔ ۱۱ . دو دایره به شعاعهای R و r در صفحه مفروض‌اند و فاصلهٔ میان مرکزهای آنها برابر با a است. طول ضلع لوزی‌ای را پیدا کنید که دو رأسش روی یکی از دایره‌ها و دو رأس دیگرش روی دایره دیگر قرار دارند.

حل این مسأله را به عنوان مسأله‌ای پیکارجو به عهدهٔ خواننده می‌گذارم. در اینجا فقط جواب آن را می‌گویم: $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$.

تغییر دادن صورت مسأله

مجموعهٔ مسأله‌هایی که در زیر می‌آید روشن می‌کند که حتی با تغییر کوچکی در صورت مسأله چه ممکن است پیش بیاید: مثلثی را رسم کنید که از آن (الف) طول سه ضلعش، (ب) طول سه میانه‌اش، (ج) طول سه ارتفاعش، (د) طول سه نیمسازش معلوم است. از این مثالها معلوم می‌شود که چگونه تغییر کوچکی در صورت مسأله ممکن است میزان دشواری آن را به اندازهٔ زیادی تغییر دهد. مسألهٔ (الف) تمرینی معمولی در کتابهای درسی است، مسألهٔ (ب) فقط کمی دشوارتر است (هر چند که از اولی جالبتر است)، مسألهٔ (ج) بسیار دشوارتر است و مسألهٔ (د) را نمی‌توان با خطکش و پرگار حل کرد.

روش جالبی برای طرح مجموعه‌ای از مسأله‌ها را و. کوتسنوک، معلم دبیرستانها، پیشنهاد کرده است. رابطه‌ای هندسی، مثلاً تساوی

$$ah_a = bh_b \qquad (1)$$

را درنظر بگیرید و این سؤال را مطرح کنید: اگر در تساوی (۱) به جای ارتفاعها، میانه یا نیمساز بگذاریم، مثلثی که رابطهٔ جدید در آن درست است چه ویژگیهایی دارد؟ به این ترتیب، مسألهٔ زیر به‌دست می‌آید.

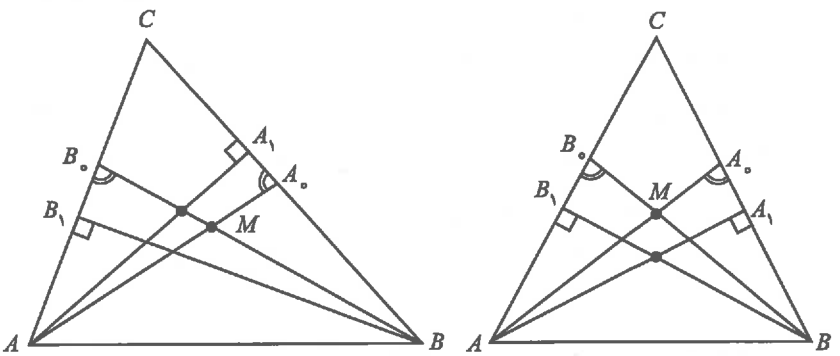
مسألهٔ ۱۲ . دو نقطهٔ، A و B، در صفحه مفروض‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند C را در صفحه پیدا کنید که تساوی زیر در مثلث ABC درست باشد.

الف) $am_a = bm_b$ (m_a و m_b میانه‌های مثلث ABCاند).

ب) $ad_a = bd_b$ (d_a و d_b نیمسازهای مثلث ABCاند).

راه‌حل هر دو قسمت شبیه یکدیگر است. قسمت (الف) را درنظر بگیرید.

فرض کنید AA_1 و BB_1 ارتفاعهای مثلث و AA_0 و BB_0 میانه‌های آن باشند. از صورت مسأله نتیجه می‌شود که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AA_0A_1 و BB_0B_1 متشابه‌اند. دو حالت ممکن برای ترتیب قرارگرفتن نقطه‌های A_0، A_1، B_0 و B_1 روی ضلعهای مثلث ABC در شکل ۷ نشان داده شده است. در حالت اول، نقطه‌های A، B، A_0 و B_0 روی یک دایره قرار دارند. چون A_0B_0 با AB موازی است، از آنچه گفتیم نتیجه می‌شود که ذوزنقه ABA_0B_0 متساوی‌الساقین است و درنتیجه، $AC = BC$. در این حالت C روی عمودمنصف AB است. در حالت دوم، نقطه‌های C، M، A_0 و B_0 روی یک دایره قرار دارند. در چهارضلعی محاطی CA_0MB_0، قطر A_0B_0 نصف AB است و قطر CM آن را نصف می‌کند. قطر CM برابر با $\frac{2}{3}m_c$ است و درنتیجه، قطر A_0B_0، CM را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کند. اکنون از این نتیجه استفاده می‌کنیم که اگر چهارضلعی‌ای محاطی باشد، حاصل‌ضرب پاره‌خطهایی که روی یک قطرش جدا شده‌اند با حاصل‌ضرب پاره‌خطهایی که روی قطر دیگرش جدا شده‌اند برابر است. در این صورت، $m_c^2 = 3AB^2$، پس m_c عددی ثابت است. پس مکان هندسی موردنظر از عمودمنصف پاره‌خط AB و دایرهٔ به مرکز وسط پاره‌خط AB و به شعاع $AB\sqrt{3}$ تشکیل شده است.



(ب) (الف)

شکل ۷

در قسمت (ب)، نقطهٔ C باید روی عمودمنصف AB یا روی کمانی از دایره‌ای قرار داشته باشد که از هر نقطهٔ آن AB روبه‌رو به زاویهٔ $60°$ باشد.

گاهی می‌توان با تغییر دادن نتیجه‌ای معروف مسأله‌هایی به‌دست آورد. در اینجا دو نمونه از این مسأله‌ها می‌آورم. قضیهٔ معروف اشتینر ـ لموس این است که اگر دو نیمساز مثلثی همنهشت باشند، مثلث متساوی‌الساقین است. حکم این قضیه کاملاً عادی به‌نظر می‌رسد، هر چند که اثباتش (در مقایسه با قضیه‌های نظیرش دربارهٔ میانه‌ها و ارتفاعهای مثلث، که به‌سادگی ثابت می‌شوند) کمی پیچیده است. در مسألهٔ بعد «بدقِلِقی» نیمسازها به بهترین نحو ممکن معلوم می‌شود.

مسألهٔ ۱۳ . در مثلث ABC، AA_1، BB_1 و CC_1 نیمسازند. در هر یک از حالتهای زیر، آیا می‌توان نتیجه گرفت که مثلث متساوی‌الساقین است؟

الف) نیمسازهای زاویه‌های خارجی A و B همنهشت‌اند.

ب) پاره‌خطهای KA_1 و KB_1 همنهشت‌اند، که در اینجا AA_1 و BB_1 نیمسازهای داخلی‌اند و K نقطهٔ برخورد آنهاست.

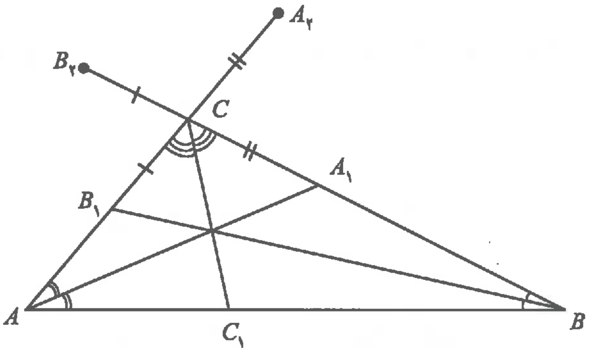
ج) فاصلهٔ C_1 تا وسط ضلعهای CA و CB برابر است.

د) $C_1A_1 = C_1B_1$.

ه) دایره‌ای که از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 می‌گذرد بر ضلع AB مثلث مماس است.

در هر پنج قسمت پاسخ منفی است. قسمتهای (د) و (ه) دشوارترند. در این مقاله فقط قسمت (ه) را که آن را ضمن گپهای دوستانه در محافل ریاضی یاد گرفته‌ام بررسی می‌کنیم. در اینجا توضیح می‌دهم که چگونه می‌توان مثلثی غیر متساوی‌الساقین رسم کرد که ویژگیهای موردنظر را داشته باشد، اما چگونگی سر هم کردن این راه‌حل را بازگو نمی‌کنم.

فرض کنید AA_1، CC_1 نیمسازهای مثلث ABC باشند (شکل ۸ را ببینید).



شکل ۸

نقطه‌های A_2 و B_2 را روی امتداد ضلعهای AC و BC طوری انتخاب کنید که $CA_2 = CA_1$ و $CB_2 = CB_1$. معلوم است که نقطه‌های A_1، A_2، B_1 و B_2 روی یک دایره قرار دارند (تحقیق کنید که زاویه‌های $B_2A_1A_2$ و $A_2B_1B_2$ برابرند). اگر AC_1 و BC_1 با مماسهای بر این دایره در نقطه‌های A و B برابر باشند، آن وقت این دایره در نقطهٔ C_1 بر AB مماس است. اگر طول پاره‌خطی با مجموع طولهای مماسهای مرسوم از دو سر پاره‌خط بر یک دایره برابر باشد، آن وقت این پاره‌خط بر دایره مماس است. اثبات این حکم را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. بنابراین، تساویهای زیر درست‌اند:

$$AC_1^2 = AB_1 \times AA_2, \qquad BC_1^2 = BA_1 \times BB_2$$

می‌دانیم که نیمساز هر زاویهٔ مثلث ضلع روبه‌رو به آن را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند که نسبت آنها با نسبت دو ضلع دیگر مثلث برابر است. با استفاده از این نتیجه می‌توانیم طول هر یک از پاره‌خطها را برحسب طول سه ضلع مثلث

حساب کنیم. به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم $AB_1 = \frac{bc}{c+a}$، و همین‌طور در مورد بقیهٔ پاره‌خطها. بنابراین، معلوم می‌شود که هر یک از دو تساوی بالا با تساوی

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b)$$

هم‌ارزند.

فقط مانده است که ثابت کنیم مثلثی غیرمتساوی‌الساقین وجود دارد که طول ضلعهایش در این رابطه صدق می‌کنند. پیدا کردن مثالی عددی ساده است. فرض کنید $c = 1$ و $a + b = 1 + \lambda$. دراین صورت، با بازنویسی معادلهٔ قبلی برحسب λ، به‌دست می‌آید $ab = \lambda(2+\lambda)^2$. اگر λ به اندازهٔ کافی کوچک باشد، می‌توانیم عددهای a و b را طوری پیدا کنیم که در این معادله‌ها صدق کنند و $a \neq b$.

مجموعهٔ جالب دیگری از مسأله‌ها به چهاروجهی‌ای که وجه‌هایش همنهشت‌اند مربوط‌اند. چندین شرط لازم و کافی برای همنهشت بودن وجه‌های چهاروجهی می‌شناسیم. با آوردن مسألهٔ بعدی، قصدم این نیست که فهرستی کامل از این شرطها بیان کنم.

مسألهٔ ۱۴ . کدام‌یک از شرطهای زیر برای اینکه وجه‌های چهاروجهی $ABCD$ همنهشت باشند لازم و کافی است؟

الف) یالهای هر دو وجه روبه‌رو به هم برابر باشند.

ب) محیط همهٔ وجه‌ها با هم برابر باشد.

ج) مجموع زاویه‌های مسطحهٔ مجاور به همهٔ رأسها برابر با 180° باشد.

د) تساویهای زیر درست باشند

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC$$

ه) تساویهای زیر درست باشند

$$\angle BAC = \angle BDC, \qquad \angle ABD = \angle ACD, \qquad \angle BAD = \angle BCD$$

و) شعاع دایرهٔ محیطی همهٔ وجه‌ها برابر باشد.

ز) شعاع دایرهٔ محاطی همهٔ وجه‌ها برابر باشد.

ح) مساحت همهٔ وجه‌ها با هم برابر باشد.

ط) هر دو تا از پاره‌خطهایی که وسط یالهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند بر هم عمود باشند.

ی) مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی بر مرکز ثقل آن منطبق باشد.

ک) مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی بر مرکز کرهٔ محاطی آن منطبق باشد.

ل) مجموع کسینوسهای زاویه‌های چهاروجهی برابر با -2 باشد.

م) چهار کره وجود داشته باشند که مرکزهایشان روی کرهٔ محیطی چهارضلعی باشند و هر یک از این چهار کره بر یک وجه در یک نقطهٔ درونی آن و بر صفحه‌هایی که سه وجه دیگر روی آنها قرار دارند مماس باشد.

کافی است! به‌طورکلی، می‌توان چندین شرط از چنین شرطهایی، به‌خصوص اگر درنظر بگیریم که برخی از این شرطها را می‌توان با هم درآمیخت، بیان کرد. مثلاً، شرطهای هشت قسمت نخست، از ترکیب سه تساوی به‌وجود آمده‌اند. می‌توانیم آنها را به طریقی دیگر ترکیب کنیم، مثلاً، یک تساوی از قسمت (الف) (دو یال روبه‌رو برابر باشند) را با دو تساوی از قسمت (ج) (مجموع زاویه‌های مسطحهٔ مجاور به دو تا از رأسها برابر با 180° باشد) ترکیب کنیم.

در این مسأله، تقریباً همه شرطها برای همنهشت بودن وجه‌های چهاروجهی لازم و کافی‌اند. ممکن است حدس زده باشید که قسمت (ز) استثناست (باز هم نیمسازها کار را خراب کرده‌اند)، و این حدس درست است. سعی کنید مثال نقضی پیدا کنید. (باید دو جفت مثلث متساوی‌الساقین غیرهمنهشت پیدا کنید که ویژگی موردنظر را داشته باشند.) اثبات قسمت (م) بسیار دشوار است، دست‌کم، من اثباتی مقدماتی برای آن سراغ ندارم. راستی، قسمت (ه) هنگام نوشتن این مقاله به ذهنم رسید. خوب است در اینجا اشاره کنم که در اینجا فضایی بودن چهاروجهی لازم است: اگر A، B، C و D روی یک صفحه قرار داشته باشند، خاصیت اشاره شده در قسمت (ه) برای همنهشت بودن مثلثها کافی نیست.

تعمیم

گسترش ریاضیات درگرو تعمیم دادنهای پیاپی بوده است. وقتی از تعمیم دادن مسأله‌ای برای طرح کردن مسأله‌های مقدماتی استفاده می‌کنیم، نباید انتظار داشته باشیم که نتیجه‌هایی اساسی به‌دست بیاوریم. با این وجود، پی بردن به اهمیت این روش مهم است.

می‌توان تعمیم را به راههای مختلف انجام داد. گاهی می‌توان برخی شرطهای مسأله را حذف کرد و موارد بیشتری به‌دست آورد که حکم در مورد آنها درست است. مثلاً، یک بار در یک مجلهٔ ریاضی قدیمی به مسألهٔ زیر برخوردم.

مسألهٔ ۱۵ . ضلع AD از چهارضلعی محاطی $ABCD$ قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی است و نیمساز زاویه‌های B و C روی ضلع AD به یکدیگر رسیده‌اند. ثابت کنید $AB + CD = AD$.

از راه‌حل این مسأله که در این مجله چاپ شده بود خوشم نیامد. پس از مدتی فکر کردن، راه‌حل دیگری پیدا کردم که در آن از این شرط که AD قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی است استفاده نشده بود: معلوم شد که این شرط زیادی است. درنتیجه، مسأله‌ای جدید متولد شده بود.

مسألهٔ ′۱۵ . نیمساز زاویه‌های B و C از چهارضلعی محاطی $ABCD$ روی ضلع AD به یکدیگر رسیده‌اند. ثابت کنید $AB + CD = AD$.

چندین راه‌حل برای این مسأله وجود دارد. راه‌حل من چنین است: فرض کنید نقطهٔ P محل برخورد نیمساز زاویه‌های B و C باشد. دایرهٔ محیطی مثلث BCP را رسم کنید و دومین نقطهٔ برخورد این دایره با AD را با M نشان دهید. با درنظر گرفتن برابری چند زاویه در چهارضلعیهای محاطی $ABCD$ و $BCPM$، می‌توانیم ثابت کنیم که مثلثهای ABM و CDM متساوی‌الساقین‌اند (در آنها، به ترتیب، $AB = AM$ و $CD = CM$). از خواننده می‌خواهم که راه‌حل مسأله را کامل کند.

از این مثال همچنین نتیجه می‌شود که هنگام مسأله حل کردن، امتحان کردن روشهای مختلف بسیار ثمربخش است. علاوه‌براین، باید به روشهای هندسی‌تر بیشتر توجه کرد، زیرا موجب درک عمیقتر ویژگیهای شکلها می‌شوند و تشخیص اصل و فرع را ساده‌تر می‌کنند. مثالی دیگر را بررسی می‌کنیم. مسألهٔ بعد، در سال ۱۹۹۰ در المپیاد ریاضی سراسری اتحاد شوروی مطرح شده بود.

مسألهٔ ۱۶ . نقطه‌های D و E به ترتیب روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC قرار دارند. نقطه‌های K و M پاره‌خط DE را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. خطهای BK و BM ضلع AC را به ترتیب در نقطه‌های T و P قطع می‌کنند. ثابت کنید $TP \leq \frac{۱}{۳}AC$.

خود صورت مسأله که جذاب نیست، چون هم خیلی بی‌روح است و هم از حروف مختلفی در آن استفاده شده است. از راه‌حل مسأله هم خوشم نیامد، چون با قاعده‌هایی که از قبل می‌شناختم همخوانی نداشت. در جستجوی راه‌حل بهتری برای این مسأله، توانستم صورت آن را تغییر و اندکی آن را تعمیم دهم.

مسألهٔ ′۱۶ . دو نیمخط از رأس زاویه‌ای گذشته‌اند و درون این زاویه قرار دارند. خطی ضلعهای زاویه را در نقطه‌های D و E و نیمخطها را در نقطه‌های K و M قطع کرده است. ثابت کنید نسبت $\frac{KM}{DE}$ وقتی بیشترین مقدار است که $DK = ME$.

برای اثبات این حکم، خط دیگری را درنظر می‌گیریم که ضلعهای زاویه را در نقطه‌های E و $D_۱$ و نیمخطها را در نقطه‌های $K_۱$ و $M_۱$ قطع کند (شکل ۹ را ببینید). فرض کنید $DK = ME = a$، $KM = b$ و $OD_۱ = \lambda OD$. از نقطهٔ $D_۱$، خط $DM_۲$ را موازی DE رسم کنید. دراین صورت،

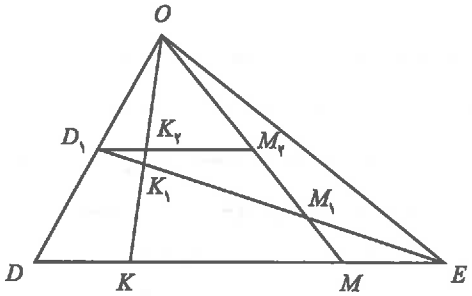
$$D_۱K_۲ = \lambda a, \qquad K_۲M_۲ = \lambda b, \qquad \frac{D_۱M_۱}{M_۱E} = \frac{\lambda(a+b)}{a}$$

(در آخرین تساوی از تشابه مثلثهای $D_۱M_۲M_۱$ و $EMM_۱$ استفاده کرده‌ایم). تساوی آخر با تساویهای زیر هم‌ارز است:

$$D_۱M_۱ = \frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} \cdot D_۱E$$

$$K_۱M_۱ = \left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a} - \frac{\lambda}{\lambda a+b+a}\right) D_۱E$$

در اینجا از تشابه چند جفت مثلث مختلف و ویژگیهای معروف نسبتها استفاده کرده‌ایم.



شکل ۹

بالاخره، مسأله تبدیل می‌شود به اثبات نابرابری جبری سادهٔ زیر

$$\frac{\lambda(b^{2} + 2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a + a + b)} \leq \frac{b}{2a+b}$$

که می‌توان آن را چنین نوشت

$$(\lambda - 1)^{2} a(a+b) \geq 0$$

راه دیگری برای تعمیم دادن، بازگو کردن نتیجه‌ای هندسی از یک مبحث به مبحثی دیگر است، به‌ویژه تعمیم خواص هندسی شکلهای صفحه به شکلهای فضایی. چنین کاری در مسألهٔ بعد انجام شده است.

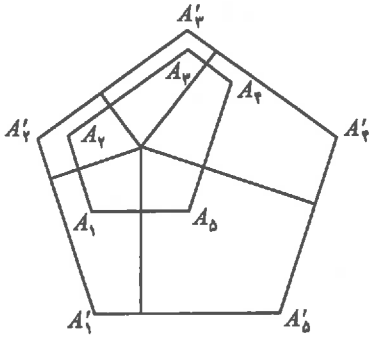
مسألهٔ ۱۷ . دو مماس AB و CD بر دوکره طوری رسم شده‌اند که نقطه‌های A و C روی یکی از کره‌ها و نقطه‌های B و D روی کرهٔ دیگر قرار دارند. ثابت کنید تصویر AC و BD روی خطی که مرکز کره‌ها را به هم وصل می‌کند برابر است.

حالت مسطحهٔ این مسأله ساده است (در این حالت، AB و CD به ترتیب مماسهای مشترک خارجی و داخلی بر دو دایره‌اند). حالت فضایی هم چندان دشوار نیست. در راه‌حل این مسأله از این نتیجه استفاده می‌شود که وسطهای مماسهای بر دو کره، روی صفحه‌ای قرار دارند که بر خطی که مرکز کره‌ها را به هم وصل می‌کند عمود است (اثبات این نتیجه را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم). به اعتقاد من، این مسأله فوق‌العاده است، زیرا نشان می‌دهد که نظیر سه‌بعدی حکمی دربارهٔ شکلهای مسطحه درست باقی می‌ماند، و چنین چیزی به‌ندرت پیش می‌آید. خیلی وقتها باید برای رد حکمی که تعمیم حکم دیگری است، مثالی نقض پیدا کنیم. مثلاً، این قضیه ساده در هندسهٔ مسطحه که «پای دست‌کم یکی از ارتفاعهای مثلث روی ضلع نظیرش (و نه بر امتداد آن) قرار دارد» در حالت سه بعدی به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود:

مسألهٔ ۱۸ . آیا درست است که پای دست‌کم یکی از ارتفاعهای هر چهاروجهی روی وجه نظیرش قرار دارد؟

پاسخ منفی است. مثالی نقض برای این حکم، چهاروجهی‌ای است که در آن دو زاویهٔ دووجهی نظیر دو یال متنافر منفرجه باشند.

اگر بتوان مسأله‌ای را از راههای گوناگون تعمیم داد، مجموعه‌ای از مسأله‌ها به‌دست می‌آید. این قضیهٔ معروف را درنظر بگیرید: مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا ضلعهای آن ثابت است. (برای کسانی که با این حکم آشنا نیستند، ایدهٔ اثبات آن را می‌آورم: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع موردنظر برابر است با مجموع مساحتهای سه مثلثی که قاعده‌هایشان ضلعهای مثلث مفروض‌اند و نقطهٔ درون مثلث متساوی‌الاضلاع رأس مشترک آنهاست.) به‌سادگی می‌توان حکم این قضیه را به هر چندضلعی محدبی که طول ضلعهایش برابر است تعمیم داد، اما آنچه کمتر واضح است این است که می‌توان این حکم را به هر چندضلعی که زاویه‌هایش برابرند نیز تعمیم داد. در حقیقت، فرض کنید $A_1A_2\ldots A_n$ چندضلعی‌ای باشد که زاویه‌هایش برابرند (شکل ۱۰ را ببینید، که در آن n را برابر با ۵ گرفته‌ایم).



شکل ۱۰

nضلعی منتظم $A'_1A'_2\ldots A'_n$ را درنظر بگیرید که ضلعهایش با ضلعهای nضلعی موردنظر موازی‌اند و آن را در بر دارد. اگر M نقطه‌ای درون $A_1A_2\ldots A_n$ باشد، مجموع فاصله‌هایش از ضلعهای $A'_1A'_2\ldots A'_n$ ثابت است. فاصلهٔ نقطهٔ M تا هر ضلع چندضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ به اندازهٔ مقدار ثابتی از فاصلهٔ نقطهٔ M تا ضلع موازی این ضلع از چندضلعی $A'_1A'_2\ldots A'_n$ کمتر است. بنابراین، مجموع فاصله‌های نقطهٔ M تا ضلعهای $A_1A_2\ldots A_n$، به اندازهٔ مقدار ثابتی با مجموع فاصله‌های نقطهٔ M تا ضلعهای $A'_1A'_2\ldots A'_n$ فرق دارد و درنتیجه، این مجموع هم ثابت است.

می‌توانیم مسأله‌های قبلی را تلفیق کنیم و قضیهٔ قبل را کمی بیشتر تعمیم دهیم.

مسألهٔ ۱۹ . n بردار واحد مختلف در صفحه مفروض‌اند که مجموعشان صفر است. nضلعی محدبی را درنظر بگیرید که ضلعهایش بر این بردارها عمودند. دراین صورت، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون این nضلعی تا ضلعهای آن یکسان است.

راههای دیگر هم برای تعمیم قضیهٔ قبل دربارهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع وجود دارد. مثلاً می‌توانیم حالت سه‌بعدی آن را درنظر بگیریم. دانستن درستی صورت سه بعدی مسألهٔ ۱۹ هم باید جالب باشد.

کشفیات و مسأله‌ها

مثالهایی که در بخشهای قبل آوردیم، نمونه‌هایی از برخی فنون مسأله طرح کردن‌اند. با وجود این، منبع اصلی خلق مسأله‌های جدید، کنکاش، شوق نشان دادن گوهر درون یک مسأله و توانایی بررسی کردن نتیجه‌ای معروف با دیدی غیرمعمول است. در این هنگام است که جالبترین مسأله‌های هندسی به‌وجود می‌آیند و می‌توان آنها را کشفیات نامید. در اینجا یکی از زیباترین مسأله‌های سبکِ المپیاد سالهای اخیر را می‌آوریم.

مسألهٔ ۲۰ . آیا می‌توان از مکعب واحد چوبی، سه چهاروجهی منتظم با یالهای به طول واحد برید؟

این مسأله در المپیاد سراسری اتحاد شوروی در سال ۱۹۸۹ پیشنهاد شده است. جالب اینجاست که مسألهٔ بریدن دو چهاروجهی با یالهای به طول واحد از مکعب واحد، در چندین کتاب از مجموعه مسأله‌های المپیادی بررسی شده است، و معلوم شده است که سه تا چهاروجهی هم می‌توان برید! سه یال از مکعب که هر دو تا از آنها یکدیگر را قطع می‌کنند درنظر بگیرید. هر یک از این یالها، یالی از یکی از چهاروجهیها خواهد بود. وسط یالهای هر یک از چهاروجهیها بر مرکز مکعب منطبق است. می‌ماند اینکه ثابت کنید این چهاروجهیها نقطهٔ مشترک دیگری ندارند.

اینکه نتیجهٔ زیبایی که کشف کرده‌اید قبلاً شناخته شده است یا نه، خیلی مهم نیست. گاهی پیش می‌آید که یک قضیهٔ هندسی قدیمی موجب شگفتی متخصصان هندسه می‌شود. متأسفانه بسیاری از چیزها در هندسه طی هزاران سال گذشته از بین رفته‌اند.

مسألهٔ بعد را یکی از بهترین کشفیات هندسی‌ام می‌دانم.

مسألهٔ ۲۱ . از یک نقطه در فضای سه بعدی، حداکثر چند خط می‌توان رسم کرد که زاویهٔ میان هر جفت از آنها برابر باشد؟

جواب، شش‌تاست. شک ندارم که این نتیجه در زمانهای قدیم کشف شده است، و مثلاً ارشمیدس از آن آگاه بوده است.

اثبات اینکه تعداد چنین خطهایی از شش‌تا بیشتر نیست دشوار نیست: فرض کنید $l_۱$ و $l_۲$ دو خط از مجموعهٔ خطهای موردنظر باشند که از نقطهٔ O می‌گذرند. دراین صورت، خطهای دیگر این مجموعه همگی متعلق به دو رویهٔ مخروطی شکل‌اند: $l_۱$ محور و $l_۲$ خط مولد مخروط اول و $l_۲$ محور و $l_۱$ خط مولد مخروط دوم است. ممکن نیست چنین رویه‌های مخروطی شکلی یکدیگر را در بیش از چهار خط قطع کنند.

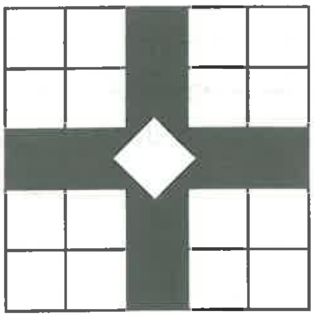
مثالی از شش خط موردنظر، قطرهای یک ۲۰ وجهی منتظم است که ۱۲ رأس دارد. اگر مجسم کردن این نوع چندوجهی برایتان دشوار است، می‌توانید مثال زیر را درنظر بگیرید. شش بردار $(a, \pm b, ۰)$، $(\pm b, ۰, a)$ و $(۰, a, \pm b)$ را به عنوان بردارهای هادی خطهایی که باید رسم شوند درنظر بگیرید. چون طول همهٔ این بردارها یکسان است، قدرمطلق حاصل ضرب داخلی آنها هم باید برابر باشد. اگر فرض کنیم $a \geq b > ۰$، معادلهٔ $a^۲ - ab - b^۲ = ۰$ به‌دست می‌آید، مثلاً می‌توانیم فرض کنیم $b = ۱$ و $a = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$.

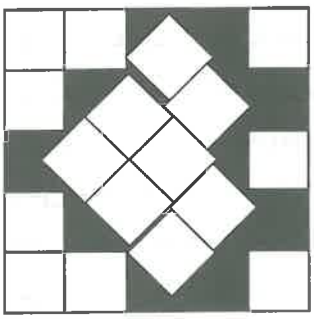
در هندسه، برخلاف بقیهٔ رشته‌های ریاضیات، ممکن است اختلاف میان صورت مسأله‌های کتابهای درسی و مسأله‌ای حل نشده ناچیز باشد. مثلاً، به نظر نمی‌رسد صورت مسأله‌های زیر فرق چندانی داشته باشند: کمترین مساحت مثلثی را پیدا کنید که دایرهٔ واحد را در بردارد و شکلی با کمترین مساحت پیدا کنید که بتوان با آن هر شکل مسطحه به قطر واحد را پوشاند. با این حال، مسألهٔ اول تمرینی ساده و مسألهٔ دوم، مسألهٔ حل‌نشدهٔ لُبگ دربارهٔ پوشش مینیمم است. برای بیان چنین مسألهٔ جالب و با ارزشی باید درک عمیقی از ریاضیات داشت. باید این ضرب‌المثل را به خاطر سپرد که دیوانه‌ای سنگی را در چاه می‌اندازد که صد عاقل نمی‌توانند آن را بیرون بیاورند.

همچنین، باز هم برخلاف بسیاری از رشته‌های ریاضیات، در هندسه می‌توان دست به تجربه (به معنای فیزیکی کلمه) زد. بسیاری از کشفیات هندسی عهد قدیم نتیجهٔ مشاهدات و آزمایشات بوده‌اند، و شاید کانِلی، هندسه‌دان برجستهٔ معاصر که n وجهی تغییر شکل‌پذیر (یعنی n وجهی‌ای که می‌توان شکل آن را تغییر داد، بدون اینکه هیچ‌یک از وجه‌هایش تغییر کند) ساخته است، برای انجام این کار آزمایشهایی کرده است، یعنی مدلهای فیزیکی‌ای ساخته است. n وجهی کانِلی یکی از قدیمی‌ترین مسأله‌های ریاضیات را حل کرده است. با درنظرگرفتن سطح پیشرفت ریاضیات امروزی، اینکه این راه‌حل کاملاً مقدماتی است باور نکردنی است. چنین چیزی به ندرت، و شاید فقط در هندسه پیش می‌آید.

می‌خواهم مثالی از کشف کوچکی بیاورم که از راه آزمایش کردن به‌دست آمده است. مسأله این است: حداکثر چند مربع واحد می‌توان از مربعی به طول ضلع $\alpha + ۴$، که در آن $۱ > \alpha > ۰$، برید؟ این مسأله توجه ریاضیدانان برجسته‌ای، از جمله پال اردوش مجاری، را به خود جلب کرده است. این مسأله منشأ مسألهٔ دیگری است که در مجلهٔ ریاضیات در مدرسه پیشنهاد شده است: می‌دانیم که می‌توان ۱۷ مربع واحد از مربعی به طول ضلع $\alpha + ۴$ برید. کمترین مقدار ممکن α را پیدا کنید که بتوان چنین کاری را کرد.

شاید این مسأله خیلی زیبا نباشد، اما به هر حال سؤال معقولی است. مسلماً انتظار نداشتیم خوانندگانمان جواب دقیق را پیدا کنند. اکثریت آنها جوابی را دادند که در شکل ۱۱ (الف) نشان داده شده است، و در آن $\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.


(الف)


(ب)

شکل ۱۱

راه‌حلی غیرمنتظره را اعضای باشگاه ریاضیات مدرسهٔ شمارهٔ ۵۱ کی‌یف (به سرپرستی و.ن. اِشکولنیک) فرستاده بودند. نامهٔ همراه این راه‌حل نشان می‌داد که اعضای این باشگاه از راه آزمایش کردن دریافته‌اند که کمترین مقدار α به‌ازای آرایشی که در شکل ۱۱ (ب) نشان داده شده است به‌دست می‌آید. خودتان می‌توانید تحقیق کنید که در این آرایش، α صدها برابر کوچکتر از مقدار α برای آرایشی است که در شکل ۱۱ (الف) نشان داده شده است. چون نحوهٔ انجام دقیق این آزمایش را نمی‌دانم، قضاوت دربارهٔ درستی این حکم برایم دشوار است. علاوه‌بر این، نحوهٔ آموزش ریاضی که من دیده‌ام، مانع از این است که چنین «اثبات»ی را بپذیرم. می‌توانید بپرسید «چرا چنین است؟»، و این هم مجادله‌ای بیهوده است. کاملاً ممکن است که در آرایش نشان داده شده، واقعاً کمترین مقدار α به‌دست آید. اصل مطلب این است که لازم نیست استعداد ریاضی فوق‌العاده‌ای داشته باشید تا در هندسه کشفی بکنید: این مسأله نشان می‌دهد که هر دانش‌آموزی می‌تواند چنین کاری بکند، و شما هم دانش‌آموزید!

• ترجمهٔ اِرشک حمیدی

I. Sharygin, Where do Problems come from?, *Quantom*, Jan./Feb.2001

فرکتال چیست؟ (قسمت سوم)

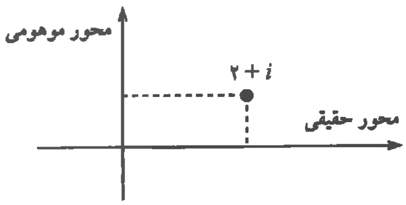
امید نقشینه ارجمند

ریاضیات مملو از نکات زیبا و جذاب است، ولی اکثر این زیباییها را تنها کسانی می‌توانند درک کنند که خود بهره‌ای از علم ریاضی برده باشند. ریاضیات به‌ندرت نمودهایی دارد که بتواند افراد عادی را به خود جذب کند. در این قسمت، می‌خواهم دربارهٔ دسته‌ای از فرکتالها صحبت کنم که زیبایی حیرت‌انگیز آنها توجه هر انسانی را، که بتواند از زیبایی گل لذت ببرد، به خود جلب می‌کند.

درک مطالب این قسمت احتیاج به آشنایی اولیه‌ای با مجموعه اعداد مختلط دارد. امیدوارم اگر با اعداد مختلط آشنا نیستید از ادامه دادن کار منصرف نشوید. با نیم ساعت مطالعه در این مورد می‌توانید پیش‌نیازهای این مقاله را فرا بگیرید.[۱]

چند کلمه در مورد اعداد مختلط

مجموعهٔ اعداد مختلط، که آن را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهند، از لحاظ هندسی همان صفحه (یعنی $\mathbb{R}^۲$) است.



شکل ۱

به دلایلی، نقطهٔ (a,b) از صفحهٔ مختلط را به صورت $a+bi$ یا $a+ib$ نمایش می‌دهند، که در این نمایش «i» نماد است. اعداد مختلط را می‌توان در هم ضرب کرد، به این صورت که به جای $i^۲$، ۱− می‌گذاریم، یعنی

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^۲=ac-bd+i(ad+bc)$$

فرض کنید $\{z_n\}$ دنباله‌ای از نقاط $\mathbb{C}$ باشد. می‌گوییم این دنباله کران‌دار است اگر دایره‌ای به مرکز مبدأ وجود داشته باشد که همهٔ اعضای دنباله در آن باشند و در غیر این صورت می‌گوییم دنباله بی‌کران است. می‌گوییم دنبالهٔ $\{z_n\}$ به بینهایت میل می‌کند هرگاه به‌ازای هر عدد مثبت مانند R، فاصلهٔ اعضای دنباله تا مبدأ (یعنی $|z_n|$) از جایی به بعد از R بیشتر شود.

۱. می‌توانید به کتاب جبر و احتمال سال سوم دبیرستان مراجعه کنید.

همهٔ ماجرا با یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم آغاز می‌شود!

فرض کنید c عددی مختلط باشد. تابع f_c را به‌صورت

$$f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f_c(z) = z^۲ + c$$

تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال، $f_۰(z) = z^۲$، $f_۱(z) = z^۲ + ۱$ و $f_{۱-i}(z) = z^۲ + ۱ - i$. پس اگر c ثابت باشد، f_c، هر نقطه از صفحه را به نقطه دیگری تبدیل می‌کند. این نقطه را نیز می‌توان با اِعمال f_c به نقطهٔ دیگری تبدیل کرد و به این ترتیب دنباله‌ای به‌دست می‌آید. تعریف دقیق این دنباله چنین است:

$$\begin{cases} z_۰ \in \mathbb{C} \\ z_{n+۱} = f_c(z_n) = z_n^۲ + c \qquad n \geq ۰ \end{cases}$$

مثال ۱ . فرض کنید $c = ۱ + i$. پس $f_c(z) = z^۲ + ۱ + i$. اگر $z_۰$ را برابر صفر بگیریم، چند جملهٔ اول دنباله چنین است:

$$z_۰ = ۰, \quad z_۱ = f_c(z_۰) = ۱ + i, \quad z_۲ = f_c(z_۱) = (۱ + i)^۲ + ۱ + i = ۲i + ۱ + i = ۱ + ۳i$$

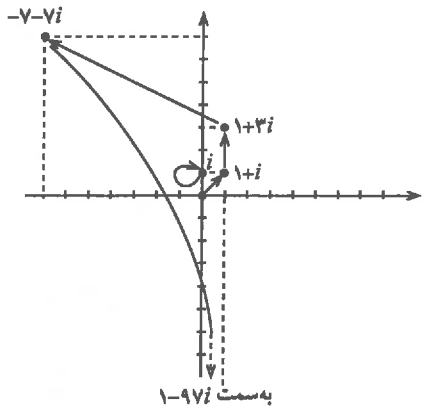
$$z_۳ = f_c(z_۲) = (۱ + ۳i)^۲ + ۱ + i = ۱ + ۶i - ۹ + ۱ + i = -۷ + ۷i$$

$$z_۴ = f_c(z_۳) = (-۷ + ۷i)^۲ + ۱ + i = -۹۸i + ۱ + i = ۱ - ۹۷i$$

و اگر $z_۰$ را برابر i بگیریم،

$$z_۰ = i, \quad z_۱ = f_c(z_۰) = i^۲ + ۱ + i = i$$

و درنتیجه $f_c(i) = i$ (دراین صورت می‌گوییم i نقطهٔ ثابت تابع f_c است)، پس به‌ازای هر $n \geq ۰$، $z_n = i$.



شکل ۲

به‌نظر می‌رسد که با آغاز از نقطهٔ صفر، دنباله به سمت بینهایت می‌رود، درحالی که با آغاز از نقطه i، دنباله کران‌دار شده است.

مجموعه‌های ژولیا

با آغاز از نقطهٔ $z_\circ$ و ساختن دنبالهٔ $\{z_n\}$ دو حالت می‌توان تصورکرد:

حالت اول. دنبالهٔ $\{z_n\}$ به بینهایت میل کند.

حالت دوم. دنبالهٔ $\{z_n\}$ به بینهایت میل نکند.

با این دیدگاه، نقاط صفحه به دو مجموعهٔ متمایز تقسیم می‌شوند. مجموعهٔ نقاطی که حالت اول را دارند حوزهٔ بینهایت می‌نامیم. بینهایت مانند چاهی است که این نقاط را به درون خود می‌کشد. به‌طور خلاصه،

$$f_c \text{ حوزهٔ بینهایت } = H_\infty(f_c) = \{z_\circ \in \mathbb{C} \mid z_n \to \infty\}$$

توجه کنید که این مجموعه با تغییر c احتمالاً تغییر می‌کند.

قضیهٔ ۱. $\mathbb{C} \neq H_\infty(f_c)$ و در ضمن اگر $|z| > \frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$ آنگاه $z \in H_\infty(f_c)$ (یعنی نقاطی در صفحه وجود دارند که جذب چاه بینهایت نمی‌شوند و اگر به اندازه کافی از مبدأ دور شویم به درون چاه بینهایت کشیده خواهیم شد!)

برهان.* معادلهٔ $z^2 + c = z$ را درنظر بگیرید. این معادلهٔ درجهٔ دو در $\mathbb{C}$ ریشه دارد (ریشه‌های آن برابر $\frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ هستند). اگر $z_\circ$ را برابر جواب این معادله بگیریم، $f_c(z_\circ) = z_\circ^2 + c = z_\circ$ و درنتیجه دنبالهٔ آغاز شده از $z_\circ$ همواره برابر $z_\circ$ خواهد بود و بنا براین به بینهایت میل نمی‌کند، پس $z_\circ \notin H_\infty(f_c)$ و در نتیجه $\mathbb{C} \neq H_\infty(f_c)$.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید a عددی حقیقی و بزرگتر از ۱ باشد. چندجمله‌ای حقیقی $x^2 - ax - |c|$ را درنظر بگیرید. این چندجمله‌ای دو ریشه در $\mathbb{R}$ دارد که یکی مثبت و دیگری منفی است. ریشهٔ مثبت آن برابر است با $\frac{a+\sqrt{a^2+4|c|}}{2}$. اگر x بزرگتر از این ریشه باشد، $x^2 - ax - |c| > 0$، یعنی $x^2 - |c| > ax$. اکنون فرض کنید

$$|z_\circ| > \frac{a+\sqrt{a^2+4|c|}}{2}$$

دراین صورت

$$|f_c(z_\circ)| = |z_\circ^2 + c| \geq |z_\circ^2| - |c| = |z_\circ|^2 - |c| > a|z_\circ|$$

یعنی

$$|f_c(z_\circ)| > a|z_\circ| > \frac{a+\sqrt{a^2+4|c|}}{2}$$

(زیرا $a > 1$). پس فاصلهٔ z_1 تا مبدأ دست‌کم a برابر فاصلهٔ $z_\circ$ تا مبدأ است. به استقرا ثابت می‌شود که $|z_n| > a^n|z_\circ|$

*. می‌توانید فعلاً از خواندن برهان این قضیه صرف‌نظر کنید و اگر خواستید، پس از اتمام مقاله این قسمت را بخوانید.

و چون $a > 1$، پس $z_n \to \infty$ و در نتیجه $z_0 \in H_\infty(f_c)$. اکنون اگر

$$|z_0| > \frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$$

می‌توان a را آن‌قدر نزدیک به ۱ انتخاب کرد که $|z_0| > \frac{a+\sqrt{a+4|c|}}{2}$ و درنتیجه $z_0 \in H_\infty(f_c)$. ■

اکنون توضیح می‌دهم که این گزاره به چه درد می‌خورد. بسیار علاقه‌مندیم (و شما نیز سعی کنید علاقه‌مند باشید!) که برای c داده شده $H_\infty(f_c)$ را شناسایی کنیم. چرا علاقه‌مندیم؟ برای اینکه خواهیم دید که مرز این مجموعه فرکتال است. این فرکتال، مجموعه ژولیای f_c نامیده می‌شود.

$$f_c \text{ مجموعه ژولیای} = J(f_c) := H_\infty(f_c) \text{ مرز}$$

اگر z_0ای به شما داده شود، چطور می‌توانید بررسی کنید که z_0 عضو $H_\infty(f_c)$ هست یا نه؟ دنبالهٔ $\{z_n\}$ را تشکیل می‌دهید؟ همهٔ جملات آن را؟ تعدادی از جملات آن را؟ بعد چه می‌کنید؟ نکتهٔ مهم اینجاست که با داشتن متناهی جمله از اعضای یک دنباله، نمی‌توان قضاوت کرد که این دنباله به بینهایت میل می‌کند یا میل نمی‌کند. حتی اگر فاصلهٔ هزار جملهٔ اول یک دنباله از مبدأ کمتر از یک باشد، نمی‌توان گفت که این دنباله کران‌دار است. پس چطور می‌توان در مورد اینکه z_0 عضو $H_\infty(f_c)$ است یا نه قضاوت کرد؟ اینجاست که گزاره‌ای که ثابت کردیم به‌کار می‌آید. برای سادگی کار، فرض کنید $R_c = \frac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2}$. پس اگر $|z_0| > R_c$، $z_0 \in H_\infty(f_c)$ و درنتیجه قسمت عمده‌ای از اعضای $H_\infty(f_c)$ مشخص می‌شود. به‌علاوه، اگر به‌ازای z_0ای $|f_c(z_0)| > R_c$، $f_c(z_0) \in H_\infty(f_c)$، یعنی با آغاز از $f_c(z_0)$، دنبالهٔ ساخته شده به بینهایت میل می‌کند. اکنون توجه کنید که دنباله‌ای که با $f_c(z_0)$ شروع می‌شود، همان دنباله‌ای است که با z_0 شروع می‌شود، با این تغییر که جملهٔ آغازین آن (یعنی z_0) حذف شده است، پس $z_0 \in H_\infty(f_c)$. با استدلالی کاملاً مشابه، اگر به‌ازای n ای، $|f_c^n(z_0)| > R_c$، $z_0 \in H_\infty(f_c)$ (منظور از $f_c^n(z_0)$، $f_c(f_c(\dots(f_c(z))))$ است). پس به‌این ترتیب اعضایی از $H_\infty(f_c)$ شناسایی می‌شوند.

در بالا تلویحاً به مطلبی اشاره شد که آن را در قالب یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲ . $z \in H_\infty(f_c)$ اگر و فقط اگر $f_c(z) \in H_\infty(f_c)$.

برهان. به عهدهٔ خواننده. ■

قضیهٔ کلیدی زیر، روش رسم مجموعهٔ ژولیا (یا همان $J(f_c)$) را مشخص خواهد کرد.

قضیهٔ ۳ . $H_\infty(f_c) = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid |z_n| > R$ دست‌کم به‌ازای یک n، $\}$، که در آن z_n همان جملهٔ nام دنبالهٔ با جمله آغازی z_0 است، یعنی $f_c^n(z_0)$.

برهان. ابتدا فرض کنید به‌ازای nای، $|z_n| > R_c$. پس بنابر قضیهٔ ۱، $z_n \in H_\infty(f_c)$ و بنابر قضیهٔ ۲، $z_{n-1} \in H_\infty(f_c)$. پس اگر به‌طور متوالی از قضیهٔ ۲ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که $z_0 \in H_\infty(f_c)$. ■

اکنون فرض کنید $z_0 \in H_\infty(f_c)$. دراین صورت طبق تعریف $H_\infty(f_c)$، دنبالهٔ $\{z_n\}$ به بینهایت میل می‌کند، پس از جایی به بعد فاصلهٔ اعضای آن تا مبدأ از R_c تجاوز می‌کند و در نتیجه به‌ازای n ای $|z_n| > R_c$.

الگوریتم رسم مجموعهٔ ژولیای f_c

اگر بتوانیم با تقریب خوبی نقاط $H_\infty(f_c)$ را تشخیص دهیم و آنها را رسم کنیم، در شکل حاصل $J(f_c)$ دیده می‌شود. D_R را دایرهٔ توپر به شعاع R به مرکز مبدأ بگیرید، یعنی $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$. طبق قضیهٔ ۱، وضعیت برای خارج D_{R_c} مشخص است و درنتیجه باید نقاط داخل D_{R_c} بررسی شوند. الگوریتم زیر با مقداری خطا مشخص می‌کند که z در $H_\infty(f_c)$ هست یا نه.

قدم اول. c، z و N را از ورودی بگیر (N عددی طبیعی است که هر چه بیشتر باشد دقت بیشتر است).

قدم دوم. $R_c \leftarrow \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۱ + ۴|c|})$، $\quad z_0 \leftarrow z$.

قدم سوم. برای $n = ۰$ تا $n = N$ حلقه زیر را اجرا کن. (آغاز حلقه)

قدم چهارم. اگر $|z| > R_c$، پیغام بده «$z \in H_\infty(f_c)$» و به قدم هشتم برو.

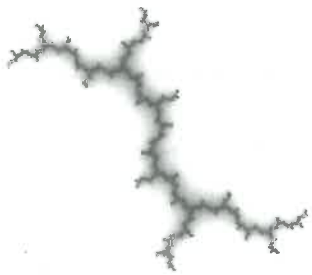
قدم پنجم. $z_0 \leftarrow z_0^۲ + c$.

قدم ششم. مادامی که $n \geq N$، به قدم چهارم برگرد. (پایان حلقه)

قدم هفتم. پیغام بده «با N مرتبه تکرار تابع f_c، دنباله داخل D_{R_c} ماند، پس می‌توان گفت با تقریب خوبی $z \notin H_\infty(f_c)$.»

قدم هشتم. پایان.

در الگوریتم بالا قدم هفتم تنها درصورتی اجرا می‌شود که در هیچ مرحله‌ای شرط ذکر شده در قدم چهارم رخ ندهد. این الگوریتم را می‌توان طوری تکمیل کرد که نقطهٔ z را با توجه به این که با چند بار تکرار تابع f_c روی آن خارج D_{R_c} افتاده رنگ کند. دراین صورت $H_\infty(f_c)$ به صورت لایه‌های رنگی مشخص خواهد شد. تعداد لایه‌ها همان N است. اگر با برنامه‌نویسی کامپیوتری آشنایی دارید دست به‌کار شوید و الگوریتم بیان شده را پیاده کنید. در زیر به‌ازای چند c، $J(f_c)$ رسم شده است.


$c = i$

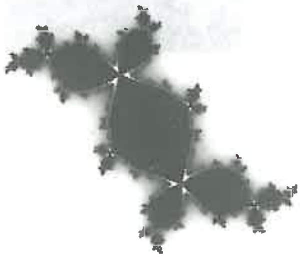

$c = -۱/۷۵۴$

$c = ۰/۴۲۴ + ۰/۲۰۷i$

$c = ۰/۷۴۴ + ۰/۱۲۱i$

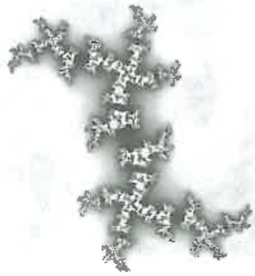
$c = -۱/۵$

$c = ۰/۲۵$

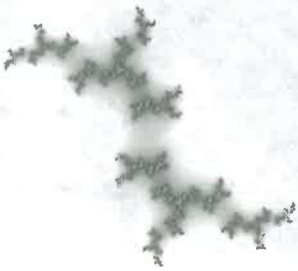


$c = -۰/۱۲۲ + ۰/۷۴۵i$

$c = -۱ + ۰/۵i$



$c = ۰/۳ + ۰/۶i$



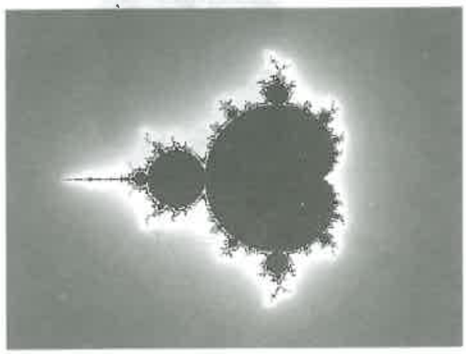
$c = ۰/۹i$

مجموعهٔ مندلبرات

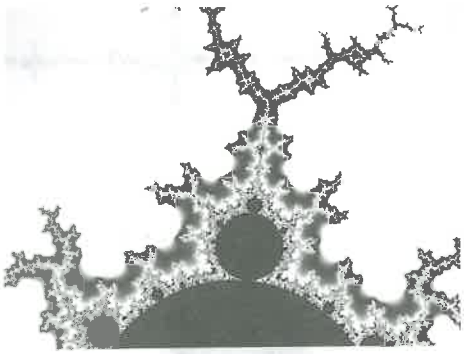
با دیدن تعدادی از مجموعه‌های ژولیا، می‌توان مشاهده کرد که این شکلها به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند. بعضی از $J(f_c)$ها «یک تکه» (یا به اصطلاح ریاضیدانها، «همبند») هستند و بعضی از آنها این‌طور نیستند. مجموعهٔ مندلبرات با توجه به این نکته تعریف می‌شود:

$$\text{مجموعه مندلبرات} = M := \{c \in \mathbb{C} \mid \text{همبند است } J(f_c)\}$$

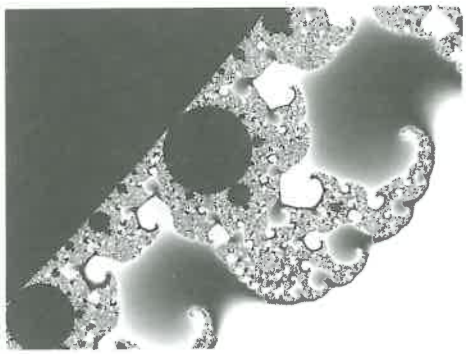
این مجموعه معروف‌ترین فرکتال دنیاست! اگر بتوانید با یک نرم‌افزار خوب در نقاط مختلف آن گردش کنید هیچ‌گاه نمی‌توانید تمام نقاط دیدنی آن را ببینید. هر یک از تصویرهای زیرگوشه‌ای از مجموعهٔ مندلبرات را نشان می‌دهند.



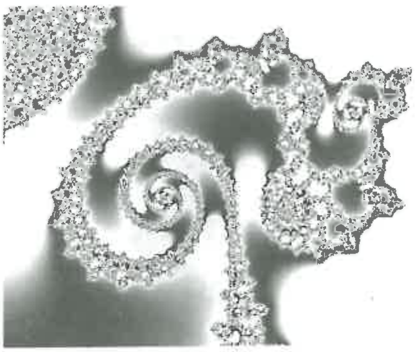
مرکز = $-۰٫۵ + ۰i$



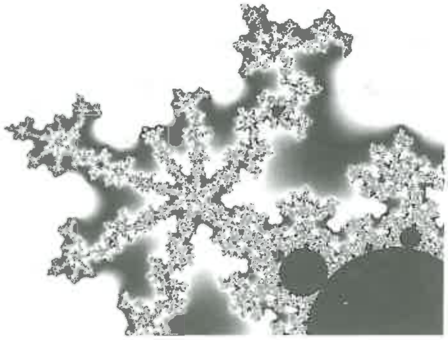
مرکز = $-۰٫۱۲۵ + ۰٫۹۰۶i$



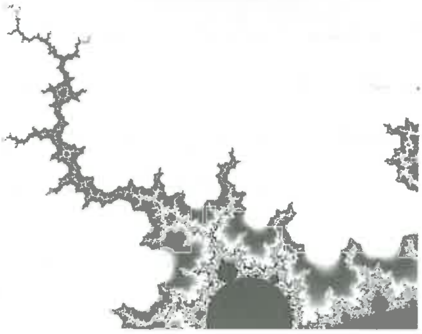
مرکز = $۰٫۳۲ + ۰٫۴i$



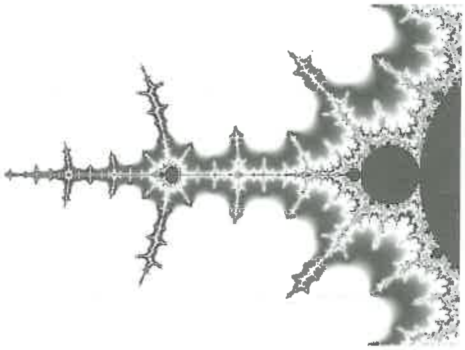
مرکز = $-۰٫۷۶۸ + ۰٫۱۰۸i$



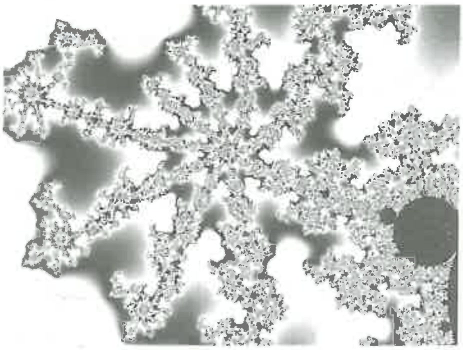
مرکز $= -۰/۶۶۴ + ۰/۴۶۵i$



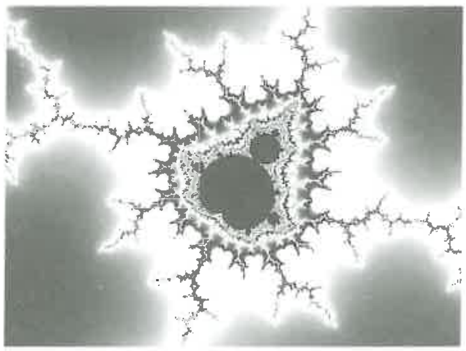
مرکز $= -۱/۱۷۵ + ۰/۳۴i$



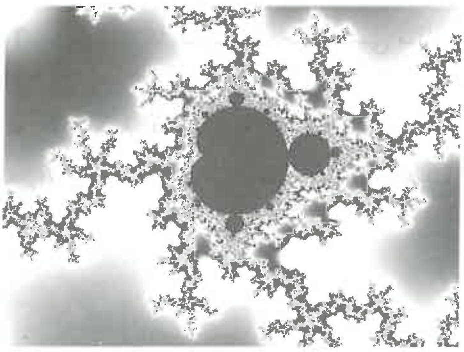
مرکز $= -۱/۴۵ + ۰i$



مرکز $= -۰/۷۰۷ + ۰/۳۵i$



مرکز $= -۱/۴۰۸ + ۰/۱۳۶i$



مرکز $= -۰/۵۳ + ۰/۶۶۷i$

چگونه می‌توان مجموعهٔ مندلبرات را رسم کرد؟

فرض کنید عدد مختلط c داده شده است. چگونه می‌توان فهمید که c در M هست یا نه؟ باید دید که $J(f_c)$ همبند است یا نه؟ یعنی ابتدا باید $J(f_c)$ را رسم کرد؟ واقعیت این است که این روش اصلاً روش خوبی نیست. هم رسم $J(f_c)$ زمان‌گیر است و هم بررسی همبند بودن یک مجموعه به‌وسیله کامپیوتر کار پیچیده‌ای است. پس چه‌کار باید کرد؟ قضیهٔ زیبای زیر معما را حل خواهد کرد.

قضیهٔ ۴ . c عضو M است اگر و فقط اگر مبدأ در $H_\infty(f_c)$ نباشد، یعنی

$$M = \{c \in \mathbb{C} | \circ \notin H_\infty(f_c)\}$$

برهان؟ شرمنده‌ام! فکر نمی‌کنم بتوانم حتی گوشه‌هایی از اثبات این قضیه را بیان کنم. پس دو راه وجود دارد. می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که با گرفتن c، $J(f_c)$ را رسم کند و «ببینید» $J(f_c)$ دقیقاً وقتی ناهمبند می‌شود که مبدأ را از دست می‌دهد. راه دوم ساده‌تر است: به صداقت من اعتماد کنید!

با استفاده از قضیهٔ ۴ الگوریتمی برای رسم M طراحی کنید و سپس آن را با نوشتن یک برنامه کامپیوتری اجرا کنید. سعی کنید مسأله‌های زیر را حل کنید.

مسألهٔ ۱ . $H_\infty(f_\circ)$ و $J(f_\circ)$ را به‌دست آورید.

مسألهٔ ۲ . ثابت کنید اگر برای هر $c \in \mathbb{C}$، $H_\infty(f_c)$ (و درنتیجه $J(f_c)$) نسبت به مبدأ متقارن است، یعنی اگر $z \in H_\infty(f_c)$ (یا $z \in J(f_c)$) آنگاه $-z \in H_\infty(f_c)$ (یا $-z \in J(f_c)$).

مسألهٔ ۳ . ثابت کنید اگر c عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۰٫۲۵ باشد آنگاه $c \notin M$.

مسألهٔ ۴ . ثابت کنید M نسبت به محور حقیقی متقارن است، یعنی اگر $z \in M$ آنگاه $\overline{z} \in M$.

مسألهٔ ۵ . ثابت کنید اگر $c \in M$ آنگاه $|c| \leq ۲$. (راهنمایی. از $c \in M$ نتیجه می‌شود که $c = f_c(c) \notin H_\infty(f_c)$ و درنتیجه $|c| \leq R_c$. به جای R_c مقدار آن را قرار دهید و محاسبه کنید.)

مسأله‌های درسی

• ریاضیات ۱

۱. بردار $\overrightarrow{AB}$ به‌طوری‌که $\overline{AB}=-۷$ مفروض است. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد و $x_M=\frac{۳}{۲}$، طول نقطه‌های A و B را حساب کنید.

۲. اگر O مبدأ محور، A، B و C سه نقطه روی محور و N وسط پاره‌خط AB باشد و $x_A=۲$، $\overline{OB}=-۳$ و $x_C=۱$، نقطهٔ M را چنان بیابید که در رابطهٔ $\overline{MN}+۲\overline{MC}=۵$ صدق کند.

۳. اگر $A(۱,-۲)$، $B(-۲,۳)$ و $C(a+۱,-۴)$ سه رأس مثلث ABC باشند، a را طوری بیابید که ضلع AB بر ضلع BC عمود باشد.

۴. نقطهٔ A روی قسمت مثبت محور طولها، نقطهٔ B روی محور عرضها، و طول نقطهٔ A دو برابر عرض نقطهٔ B است. اگر مساحت مثلث OAB (O مبدأ مختصات است) برابر ۹ واحد سطح باشد، معادلهٔ خطی راکه از A و B می‌گذرد بنویسید.

۵. اگر $A(۲,-۱)$ یک رأس مستطیل $ABCD$ باشد، رأس B روی محور y و یک ضلع مستطیل روی خط $۲y=۳x-۱$ باشد، معادلهٔ ضلعهای دیگر مستطیل را بنویسید.

• ریاضیات ۲

۱. اگر $۳x+۳y$، $۴x+۳$، $۲x+y$ و $۳x-y$ جمله‌های متوالی یک تصاعد عددی باشند، مقادیر x و y را بیابید.

۲. مجموع چهار جملهٔ تصاعدی عددی ۶۶ است. مجموع مربعهای این جمله‌ها ۱۲۱۴ است. جمله‌های موردنظر را بیابید.

۳. ثابت کنید که اگر x، y و z سه عدد باشند به‌طوری که $\frac{۱}{y-z}$، $\frac{۱}{۲y}$ و $\frac{۱}{y-x}$ تصاعدی عددی باشد، آنگاه x، y و z تصاعدی هندسی تشکیل می‌دهند.

۴. مجموع n جملهٔ دنبالهٔ $\left\{\left(۱+\frac{۱}{r^{۲n-۱}}\right)^{۲}\right\}$ را حساب کنید.

۵. اگر a، b، c، d تصاعدی هندسی باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{c^۳+d^۳}$، $\frac{۱}{b^۳+c^۳}$ و $\frac{۱}{a^۳+b^۳}$ نیز تصاعدی هندسی است.

• حسابان

۱. معادلهٔ خطی را بنویسید که بر منحنی $y=x^۳+۳x^۲-۵$ مماس و بر خط $۲x-۶y+۱=۰$ عمود باشد.

۲. a را طوری پیداکنید که خط مماس بر سهمی $y=۴x-x^۲$ در نقطهٔ $(۱,۳)$ بر سهمی $y=x^۲-۶x+a$ هم مماس باشد.

۳. در مورد تابع $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ می‌دانیم $|f(x)-f(y)|<|x-y|^۲\quad (x,y\in\mathbb{R})$. ثابت کنید f در هر نقطه مشتق‌پذیر است.

۴. مقدارهای a، b، c و d را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ از مبدأ مختصات بگذرد و در نقطهٔ $\left(۱,\frac{۵}{۶}\right)$ ماکسیمم نسبی و در نقطه‌ای به‌طول ۲ مینیمم نسبی داشته باشد.

۵. فرض کنید x عددی حقیقی و غیرصفر باشد. ثابت کنید $\cos x>۱-\frac{x^۲}{۲}$.

• جبر و احتمال

۱. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مثل n، $۳^n \times ۱۰ + ۳۶^n$ بر ۶۶ بخشپذیر است.

۲. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مثل n، $۱ \times ۲^۱ + ۲ \times ۲^۲ + \cdots + n \times ۲^n = (n-۱)۲^{n+۱} + ۲$.

۳. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \geq \frac{۹}{a+b+c}$.

۴. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۶ را طوری در یک سطر نوشت که مجموع هر دو عدد کنار هم مربع کامل باشد؟ روی دایره چطور؟

۵. عددهای ۰، ۱، ... و ۹ را به ترتیب دلخواهی روی یک دایره نوشته‌ایم. ثابت کنید می‌توان سه عدد متوالی روی این دایره پیدا کرد که مجموعشان دست‌کم ۱۵ باشد.

• ریاضیات گسسته

۱. در مورد گرافی می‌دانیم $p = ۶$، $q = ۱۱$، $\delta = ۲$ و $\Delta = ۴$. دنبالهٔ درجه‌های این گراف را به‌دست آورید.

۲. درگرافی با مرتبهٔ ۶ رأسهایی با درجه‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ وجود دارند. درجهٔ رأس ششم را تعیین کنید.

۳. فرض کنید طول کوتاهترین دور درگرافی rـ منتظم برابر با ۵ باشد. ثابت کنید این گراف حداقل $r^۲ + ۱$ رأس دارد.

۴. ازگراف کامل $K_n (n \geq ۳)$ نیمی از یالها را حذف کرده‌ایم. گراف حاصل درخت شده است. n را پیدا کنید.

۵. تعداد درایه‌های صفر ماتریس مجاورت گرافی ۸ رأسی برابر با ۴۸ است، تعداد یالهای این گراف چند است؟

• هندسهٔ تحلیلی

۱. ثابت کنید مثلثی که رأسهایش $A = (۳, -۱, ۶)$، $B = (-۱, ۷, -۲)$ و $C = (۱, -۳, ۲)$ هستند قائم‌الزاویه است.

۲. رأسهای مثلث ABC عبارت‌اند از $A = (۴, -۱, ۴)$، $B = (۰, ۷, -۴)$ و $C = (۳, ۱, ۲)$. می‌دانیم یکی از زاویه‌های این مثلث منفرجه است. این زاویه کدام است؟

۳. مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است ($\angle A = ۹۰^\circ$). زاویهٔ منفرجهٔ بین میانه‌های نظیر ضلعهای زاویهٔ قائمه را بیابید.

۴. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که با صفحه‌های

$$\Gamma_۱ : ۳x + ۱۲y - ۳z - ۵ = ۰, \quad \Gamma_۲ : ۳x - ۴y + ۹z + ۷ = ۰$$

موازی باشد و خطهای

$$l_۱ : \frac{x+۵}{۲} = \frac{y-۳}{-۴} = \frac{z+۱}{۳}, \quad l_۲ : \frac{x-۳}{-۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۲}{۴}$$

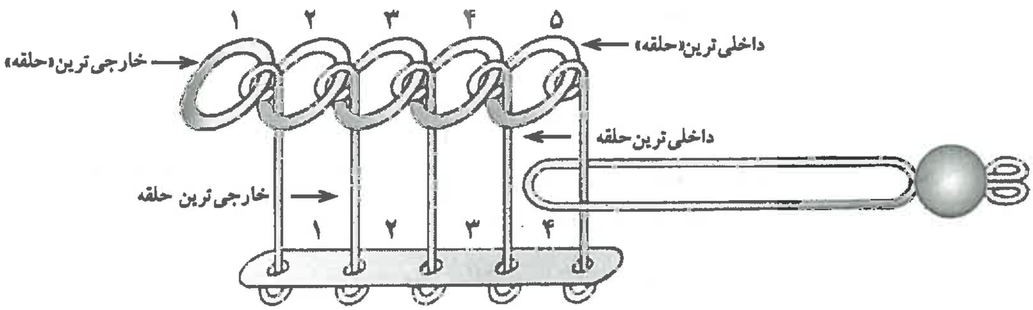
را قطع کند.

۵. ثابت کنید اگر صفحه‌ای قسمتهای مثبت محورهای مختصات را در نقطه‌های $A = (a, ۰, ۰)$، $B = (۰, b, ۰)$ و $C = (۰, ۰, c)$ قطع کرده باشد و فاصلهٔ مبدأ از این صفحه d باشد، آنگاه $\frac{۱}{d^۲} = \frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}$.

توپولوژی و معما (قسمت سوم)

سپیده چمن‌آرا

پیش از این، چند معمای توپولوژیکی مطرح کردیم و آخرینِ آنها، معمای حلقه‌های چینی بود که حل آن را نیز گفتیم. یادآوری می‌کنیم که در این معما، چند «حلقه» داشتیم که تعدادی حلقه تشکیل می‌دادند و یک دسته درون داخلی‌ترین حلقه گیر کرده بود و هدف، خارج کردن این دسته از درون حلقه‌های تودرتو بود (شکل زیر را ببینید).



شکل ۱

برای بیان چگونگی حل این معما، دو وضعیتِ روشن و خاموش برای هر «حلقه» تعریف کردیم و دیدیم که برای خارج‌کردن دسته از معمایی با n «حلقه»، باید «حلقهٔ» nاُم در وضعیت خاموش قرار گیرد و برای این منظور، وقتی $n > ۱$، باید کارهای زیر را به ترتیب انجام دهیم: روشن کردن «حلقهٔ» $n - ۱$، خاموش کردن «حلقهٔ» n و خاموش کردن «حلقهٔ» $n - ۱$.

البته، مثلاً برای روشن کردنِ «حلقهٔ» kاُم، اگر $k = ۱$، باید دسته را داخل حلقهٔ اول قرار بدهیم و اگر $k > ۱$، به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم: روشن کردن «حلقهٔ» $k - ۱$، روشن کردن «حلقهٔ» k و خاموش کردن «حلقهٔ» $k - ۱$.

باز هم اگر به خاطر داشته باشید، در پایان مطالب شمارهٔ قبل، مسألهٔ شمارش تعداد حرکتهای لازم برای حل معمای چینی با n «حلقه» را مطرح کردیم و قرار بود دربارهٔ آن فکر کنید! اکنون، پاسخ این مسأله را می‌آوریم. (اگر احساس می‌کنید هیچ‌چیز از حرفهای ما برایتان آشنا نیست، برای این است که باید معما را بسازید و دست به‌کار حل آن شوید، در غیراین صورت این حرفها برایتان ناآشنا خواهند بود.)

اگر ۲ «حلقه» داشته باشیم، تعداد حرکتهای لازم برای خارج کردن دسته از معما، ۳ است:

خاموش کردنِ «حلقهٔ» ۲ = روشن کردن «حلقهٔ» ۱، خاموش کردن «حلقهٔ» ۲ و خاموش کردن «حلقهٔ» ۱.

و اگر ۳ «حلقه» داشته باشیم، تعداد حرکتهای لازم برای حل معما، ۷ است:

خاموش کردن «حلقهٔ» ۳ = روشن کردن ۲، خاموش کردن ۳، خاموش کردن ۲

= ۳حرکت + ۱حرکت + ۳حرکت

به نظر شما چه رابطه‌ای بین تعداد حرکتها و n وجود دارد؟ از آنجا که هر روشن کردن یا خاموش کردن، یک حرکت محسوب می‌شود، می‌توان تابعهای زیر را به‌دست آورد:

تعداد حرکتهای روشن کردن «حلقهٔ» n =
- ۱، اگر $n = 1$
- (تعداد حرکتهای روشن کردن «حلقهٔ» $(n-1)$) +۱+ (تعداد حرکتهای خاموش کردن «حلقهٔ» $(n-1)$)، اگر $n > 1$

و به همین ترتیب

تعداد حرکتهای خاموش کردن «حلقه» n =
- ۱، اگر $n = 1$
- (تعداد حرکت‌های روشن کردن «حلقه» $(n-1)$) +۱+ (تعداد حرکتهای خاموش کردن «حلقهٔ» $(n-1)$)، اگر $n > 1$

می‌بینید که هر دو تابع مثل هم هستند، پس به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

تعداد حرکتهای معمای nحلقه‌ای =
- ۱، اگر $n = 1$
- (تعداد حرکتهای معمای $n - 1$ حلقه‌ای) +۱+ (تعداد حرکتهای معمای $n - 1$ حلقه‌ای)، اگر $n > 1$

یعنی

تعداد حرکتهای معمای n حلقه‌ای =
- ۱، اگر $n = 1$
- ۲× (تعداد حرکتهای معمای $(n-1)$ حلقه‌ای) +۱، اگر $n > 1$

بیایید در مورد حلقه‌های چینی با ۳ «حلقه»، این فرمول را امتحان کنیم:

تعداد حرکتهای معمای ۳ حلقه‌ای = ۲(تعداد حرکتهای معمای ۲ حلقه‌ای) + ۱

= ۲(۲(تعداد حرکتهای معمای ۱ حلقه‌ای) + ۱) + ۱

$= 2(2 \times 1 + 1) + 1$

$= 2(2 + 1) + 1$

$= 4 + 2 + 1$

$= 7$

با استفاده از فرمول بالا،

تعداد حرکتهای معمای ۱ حلقه‌ای $=$ ۱

تعداد حرکتهای معمای ۲ حلقه‌ای $=$ ۲ $+$ ۱

تعداد حرکتهای معمای ۳ حلقه‌ای $=$ ۴ $+$ ۲ $+$ ۱

می‌توان حدس زد که

تعداد حرکتهای معمای ۴ حلقه‌ای $=$ ۸ $+$ ۴ $+$ ۲ $+$ ۱ $=$ ۱۵

و بالاخره به استقرا نتیجه می‌گیریم که

تعداد حرکتهای معمای n حلقه‌ای $= ۲^{n-۱} + ۲^{n-۲} + \cdots + ۴ + ۲ + ۱$

و همان‌طورکه می‌دانید، مجموع سمت چپ این تساوی برابر است با

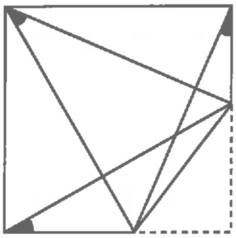
$$۲^{n} - ۱$$

با افزایش n، تعداد حرکتهای لازم برای حل معمای n «حلقه‌ای» به‌صورت توانی افزایش می‌یابد. اگر بتوان در هر ثانیه یک حرکت انجام داد، و با فرض این که هیچ حرکت اشتباهی هم انجام ندهیم، چقدر طول می‌کشد تا معمای حلقه‌های چینی با ۵ «حلقه» را حل کنیم؟ با ۹ «حلقه» چقدر؟ اگر متوسط عمر انسان، ۷۵ سال باشد و او $\frac{۲}{۳}$ از عمر خود را صرف حل کردن یک معمای حلقه‌های چینی بکند، این معما حداکثر چند «حلقه» دارد؟ شاید جدول زیر، عمق فاجعه را به شما نشان دهد!

تعداد «حلقه‌ها»	سالها	روزها	ساعتها	دقیقه‌ها	ثانیه‌ها
۱					۱
۲					۳
۳					۷
۴					۱۵
⋮					⋮
۹				۸	۳۱
۱۰				۱۷	۳
⋮				⋮	⋮
۱۵			۹	۶	۷
۲۰		۱۲	۳	۱۶	۱۵
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
۲۵	۱	۲۳	۸	۴۰	۳۱
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳۰	۳۴	۱۷	۱۳	۳۷	۳
۳۱	۶۸	۳۵	۳	۱۴	۷
۳۲	۱۳۶	۷۰	۶	۲۸	۱۵

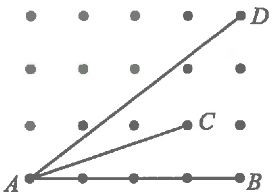
از باب تفریح

۱. در یک دوره مسابقات فوتبال هر تیم دقیقاً یک‌بار با بقیهٔ تیمها بازی کرده است. نحوهٔ امتیازدهی چنین است: برد ۳ امتیاز، تساوی ۱ امتیاز و باخت هیچ امتیاز. در روزگاری نه‌چندان دور، نحوهٔ امتیازدهدهی چنین بود: برد ۲ امتیاز، تساوی ۱ امتیاز و باخت هیچ امتیاز. آیا ممکن است قهرمان این دوره، در سیستم قدیمی قعرنشین باشد؟



۲. مانند شکل روبه‌رو از یکی از گوشه‌های مربعی مثلثی قائم‌الزاویه بریده‌ایم. معلوم شده است که مجموع طول ضلعهای زاویهٔ قائمه این مثلث برابر با طول ضلع مربع است. مجموع زاویه‌های سیاه شده در شکل چقدر است؟

۳. در ظرفی ۱۰۱ مهره ریخته‌ایم. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند. هرکدام از آنها به نوبت تعدادی مهره، دست‌کم یکی و حداکثر ده تا، بر می‌دارد. وقتی‌که هیچ مهره‌ای در ظرف باقی نمانده است، هر بازیکن تعداد مهره‌هایش را می‌شمارد. اگر این دو عدد نسبت به هم اول باشند، نفر اول و درغیراین صورت نفر دوم می‌برد. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟



۴. در شکل روبه‌رو فاصلهٔ هر نقطه از نقطه‌های مجاورش (افقی و عمودی) برابر با یک واحد است. ثابت کنید $\angle BAC = \angle CAD$.

۵. کدام عدد بزرگتر است: $\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۱۰} + \sqrt[۳]{۲۵}$ یا $\sqrt[۳]{۶} - \sqrt[۳]{۹} + \sqrt[۳]{۱۵}$؟

۶. a و b عددهایی طبیعی‌اند و $a = a^۲ + b^۲ - ۸b - ۲ab + ۱۶$. ثابت کنید a مربع کامل است.

۷. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$۱۰ - ۹(۹ - ۸(۸ - ۷(۷ - ۶(۶ - ۵(۵ - ۴(۴ - ۳(۳ - ۲(۲ - x)))))))) = x$$

۸. آیا ممکن است عددی که با سیصد رقم یک و تعدادی صفر نوشته شده است مربع کامل باشد؟

۹. آیا می‌توان هر مثلث را به چهار چندضلعی محدب تقسیم کرد: یک مثلث، یک چهارضلعی، یک پنج ضلعی و یک شش ضلعی؟

۱۰. ثابت کنید عددی به شکل ۱۳۸۲ . . . ۱۳۸۲۱۳۸۲ وجود دارد که بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیر است.

آمادگی برای المپیاد ریاضی

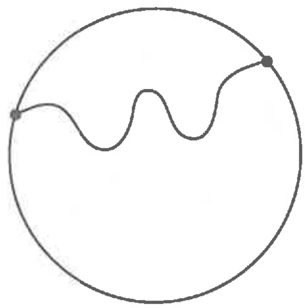
هادی سلماسیان

این بار قصد دارم شما را با روشهای حل مسأله‌های هندسهٔ ترکیبی آشنا کنم. چون این قبیل مسأله‌ها، مثل بقیهٔ مسأله‌های ترکیبیات، بسیار متنوع‌اند، شک دارم بتوانم در مورد آنها بنویسم بدون اینکه در آخر کار، نوعی گسیختگی در نوشته‌ام دیده نشود.

مسألهٔ ۱ . فرض کنید یک منحنی بسته روی کره‌ای به شعاع واحد طوری رسم شده است که کره را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم می‌کند. حداقل طول این منحنی چقدر است؟

قبل از اینکه این مسأله را حل کنیم، اجازه دهید مسألهٔ دیگری را که تا حدی شبیه مسألهٔ بالاست ولی ظاهر ساده‌تری دارد (حداقل می‌شود شکل آن را در صفحه کشید و به آن نگاه کرد!) مطرح کنم.

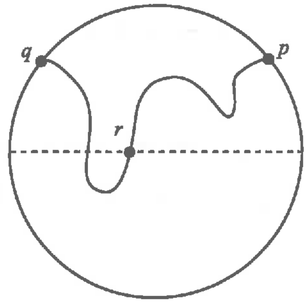
مسألهٔ ۲ . یک منحنی، بین دو نقطه روی دایره‌ای به شعاع واحد طوری رسم شده است که کاملاً درون آن قرار دارد و ناحیهٔ درون آن را به دو قسمت با مساحتهای مساوی تقسیم می‌کند. حداقل طول این منحنی چقدر است؟ چه موقع به این حداقل می‌رسیم؟



شکل ۱

بد نیست سعی کنیم با بررسی چند مثال بفهمیم حداقل طول منحنی موردنظر چقدر است. مثلاً اگر منحنی را قطری از دایره درنظر بگیریم، معلوم می‌شود که حداقل مقدار موردنظر از ۲ بزرگتر نیست. می‌توانید منحنیهای دیگر، مثلاً قسمتی از یک دایره یا یک خط شکسته (دنباله‌ای از چند پاره‌خط) را آزمایش کنید. به هرحال، گمان نمی‌کنم بتوانید به نتیجهٔ بهتری برسید! بنابراین به نظر می‌رسد که جواب، باید همان ۲ باشد. بگذارید کمی دقیق‌تر بررسی کنیم که منحنی موردنظر چه خاصیتی باید داشته باشد. فرض کنید منحنی از نقطهٔ p روی دایره شروع شود و به نقطهٔ q

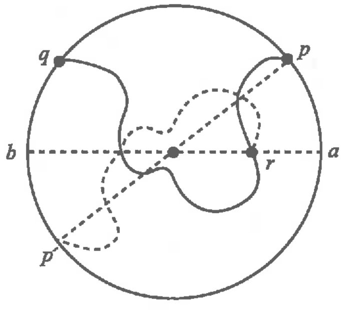
روی دایره ختم شود (شکل ۲ را ببینید) و قطری از دایره هم وجود داشته باشد که p و q هر دو در یک طرف آن قرار بگیرند. توجه کنید که ممکن است p و q بر هم منطبق باشند.



شکل ۲

روشن است که ممکن نیست منحنی موردنظر کاملاً در یک طرف این قطر قرار بگیرد، زیرا در این صورت مساحت یکی از ناحیه‌ها از نصف مساحت درون دایره کمتر خواهد بود. بنابراین، منحنی و قطر یکدیگر را در نقطه‌ای مانند r قطع می‌کنند (البته ممکن است بیش از یک بار یکدیگر را قطع کنند).

اگر بتوانیم برای طول قطعهٔ بین p و r و قطعهٔ بین q و r از منحنی، تخمینهای مناسبی بیابیم، احتمالاً قادر به حل مسألهٔ ۲ هم هستیم. روشن است که اگر p و q دو سر یک قطر باشند، طول منحنی از طول پاره‌خط بین p و q کمتر نیست، یعنی حداقل برابر با ۲ است. اما اگر این‌طور نباشد چطور؟ باید ارتباطی بین این وضعیتِ ناجور و نقطهٔ p'، که انتهای قطری است که سر دیگر آن p است، باشد (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳

درواقع، فرض کنید ab قطری از دایره باشد که با پاره‌خط pq موازی است، و r هم یکی از نقطه‌های برخورد منحنی با قطر ab باشد. اگر نقطهٔ q را نسبت به قطر ab قرینه کنیم به نقطهٔ p' می‌رسیم. پس اگر قطعهٔ منحنی بین r و q را نسبت به این قطر قرینه کنیم، به یک قطعه منحنی، با همان طول، بین r و p' خواهیم رسید. بنابراین، طول منحنی مورد توجه ما (که بین p و q رسم شده بود)، برابر است با طول منحنی جدیدی بین p و p' که از r می‌گذرد. چون p و

p' دو سر یک قطرند، طول این منحنی جدید دست‌کم ۲ است.

تمرین صفر. اگر p و q بر یک نقطه منطبق باشند، کجای استدلال بالا نادرست می‌شود؟ چطور می‌شود این اشکال را رفع کرد؟

استدلال بالا نشان می‌دهد که درواقع دقیقاً وقتی طول منحنی موردنظر حداقل می‌شود که این منحنی قطری از دایره باشد.

بار دیگر مسألهٔ ۱ را بررسی می‌کنیم. چطور می‌شود شبیه استدلال بالا را برای مسألهٔ ۱ به‌کار برد؟ طبیعی است که به جای قطر ab باید از صفحه‌ای گذرنده از مرکز کره استفاده کرد. این بار هم، هر صفحه که از مرکز کره بگذرد، منحنی بستهٔ ذکر شده را قطع می‌کند. ولی مشکل اینجاست که منحنی ما مثل قبل «سروته» ندارد. خوب، بد نیست برایش سروته بسازیم! مثلاً p و q را دو نقطهٔ دلخواه روی منحنی بگیرید. صفحهٔ گذرنده از مبدأ را هم، صفحه‌ای بگیرید که اگر q را نسبت به آن قرینه کنیم، به سر دیگر قطری از کره که از p می‌گذرد برسیم. درحقیقت، این صفحه موازی با پاره‌خط pq و عمود بر صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ p، q و مرکز کره است.[1]

استدلال مربوط به مسألهٔ ۲ را می‌شود تکرار کرد و ثابت کرد که هرکدام از قسمتهای منحنی که بین p و q قرارگرفته‌اند، اگر صفحهٔ ذکر شده را قطع کنند، طولشان دست‌کم برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیری روی کره که دو نقطهٔ کره راکه دو سر یک قطر هستند به هم وصل می‌کند. تقریباً روشن است که این مقدار برابر است با نصف محیط یکی از «استوا» های کره.

تمرین ۱ . استدلال بالا را کامل و مسألهٔ ۱ را به این طریق حل کنید. (راهنمایی. فرض کنید p و q طوری انتخاب شوند که طول قطعه منحنیهای ایجاد شده بین p و q هرکدام نصف طول منحنی بستهٔ اول کار باشند.)

بنابراین، حداقل طول منحنی بستهٔ موردنظر برابر است با محیط یک استوا. ضمناً، تساوی درست وقتی اتفاق می‌افتد که این منحنی خودش استوا باشد.

توجه کنید که مسأله‌های ۱ و ۲ را می‌توان برای مکعب و مربع مطرح کرد، و با استدلالی شبیه قبل، آنها را حل کرد. مسألهٔ ۲ را می‌شود برای مثلث متساوی‌الاضلاع (که فرقش با مربع و دایره این است که مرکز تقارن ندارد) هم مطرح کرد، هر چند که راه‌حل آن دشوارتر است (و در اینجا آن را نمی‌آورم). خودم دربارهٔ مشابه مسألهٔ ۱ برای چهاروجهی منتظم فکر نکرده‌ام و نمی‌دانم چقدر مشکل است. در اینجا، برای حل آن ۳۰۰۰ تومان جایزه می‌گذارم (بدون توجه به اینکه چقدر ممکن است این مسأله آسان باشد).

مسألهٔ دیگری را مطرح می‌کنم. این مسأله دریکی از المپیادهای داخلی ایران مطرح شده است، و از قضا در امتحانی که خودم درآن شرکت کردم (آن موقع کلاس دوم دبیرستان بودم). البته من تغییراتی مطابق مقتضیات زمان درآن داده‌ام.

مسألهٔ ۳ . درون مربعی واحد در صفحه، ۱۳۸۱ منحنی بسته رسم شده‌اند. می‌دانیم هیچ‌یک از این منحنیهای بسته

[1] اگر چیز زیادی دربارهٔ هندسهٔ فضایی نمی‌دانید، نترسید! دیوارهای اتاقتان را نگاه کنید! آنها صفحه‌های عمود بر هم را به شما نشان خواهند داد. ضمناً تیر برق توی کوچه، خطی است موازی با دیوارهای اتاقتان.

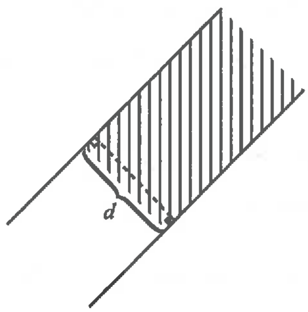
خودش را قطع نمی‌کند. درضمن، مجموع مساحتهای محصور در این منحنیها از ۱۳۸۰ بیشتر است. ثابت کنید نقطه‌ای در مربع وجود دارد که درون یا روی همهٔ این منحنیها قرار دارد.

خوب، ایدهٔ حل این مسأله ساده است. فرض کنید دو منحنی بسته درون مربع واحد رسم شده‌اند و مجموع مساحتهای محصور بین آنها از یک بزرگتر است. آیا نقطه‌ای وجود دارد که درون یا روی هر دو آنها قرارگرفته باشد؟ بله، درواقع، دو منحنی مجزا (از نظر سطح محصور بین آنها)، روی هم مساحتی را می‌پوشانند که از مساحت مربع، بیشتر نیست. این استدلال را می‌توان به شکل دیگری هم بیان کرد: ناحیه‌های خارج از دو منحنی را درنظر بگیرید. چون مجموع مساحتهای محصور بین آنها بیش از یک است، مجموع مساحتهای خارج از هر یک از آنها روی هم کمتر از ۱ − (۱ + ۱) می‌شود. پس نقطه‌ای در مربع وجود دارد که خارج از هیچ‌یک از این دو منحنی نیست.

تمرین ۲ . استدلال اخیر را برای مسألهٔ ۳ بازسازی کنید.

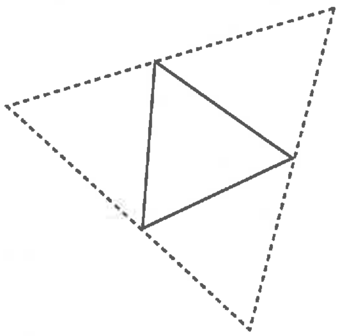
گاهی ممکن است اندیشیدن به «مساحت» برای حل مسأله‌های هندسهٔ ترکیبی مفید باشد. به عنوان مثال، در حیاطی دایره‌ای شکل به شعاع ۱۰ متر، حداکثر چند درخت می‌توان کاشت که فاصلهٔ هر دو تا از آنها دست‌کم یک متر باشد؟ روشن است که اگر بتوان تعدادی درخت را به این روش کاشت، دایره‌های به شعاع نیم‌متر و به مرکز درختها باید دو به دو مجزا باشند. ضمناً، این دایره‌ها درون دایره‌ای هم‌مرکز با حیاط، با شعاع ده متر و نیم، قرار خواهند گرفت. پس به این شیوه کرانی بالا برای تعداد درخت‌ها به‌دست می‌آید. این مسأله، فقط در «روز درختکاری» کاربرد ندارد! مسأله‌های مشابه آن، که به مسأله‌های جای دادن معروف‌اند، در ترکیبیات اهمیت ویژه‌ای دارند. بگذریم. تمرین زیر، کاربرد دیگری از «مساحت» را نشان می‌دهد.

تمرین ۳ . تعدادی متناهی نقطه در صفحه قرار دارند. فرض کنید می‌توان هر سه تا از این نقاط را در نواری به ضخامت d جا داد (منظور از نوار به ضخامت d، ناحیهٔ محصور بین دو خط موازی به فاصلهٔ d است (شکل ۴ را ببینید)). ثابت کنید می‌توان همهٔ نقطه‌ها را همزمان در نواری به ضخامت $2d$ جا داد.



شکل ۴

(راهنمایی: فرض کنید سه نقطه که روی یک خط نیستند، در نواری به قطر d جا بگیرند. از هر رأس مثلثی که رأسهایش این سه نقطه‌اند، خطی موازی ضلع مقابلش بکشید. مثلثی که به این صورت ساخته می‌شود (شکل ۵ را ببینید) در نواری به قطر $2d$ جا خواهد گرفت. پس برای حل مسأله خوب است ثابت کنیم می‌شود سه تا از نقاط را طوری انتخاب کرد که بقیهٔ نقاط، درون یا روی مثلث بزرگی که ساخته شد قرار بگیرند (شکل ۵ را ببینید). اگر بخت یاری کند، ممکن است سه نقطه‌ای که رأسهای مثلثی با بیشترین مساحت ممکن هستند، به‌کار بیایند.)



شکل ۵

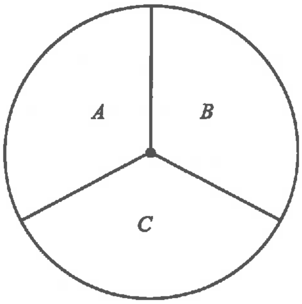
در انتهای این قسمت، مسألهٔ بورسوک را بررسی می‌کنیم. می‌دانید دو سر هر قطر دایره، دو نقطه روی دایره‌اند که فاصلهٔ آنها بیشترین مقدار ممکن است. فرض کنید بخواهیم مفهوم قطر را برای شکلهای دیگر تعمیم دهیم. طبیعی است که چیزی شبیه آنچه گفتیم تعریف کنیم.

تعریف ۱ . اگر S زیرمجموعه‌ای از صفحه باشد، قطر S، که آن را با $d(S)$ نشان می‌دهیم، درصورت وجود، این‌طور تعریف می‌شود: فاصلهٔ هر دو نقطه از S، حداکثر $d(S)$ است و ضمناً دو نقطه در S وجود دارند که فاصلهٔ آنها مساوی با $d(S)$ است.

برای مثال، قطر پاره‌خطی به طول l، همان l است و قطر دایره‌ای به شعاع R، برابر با $2R$ است. توجه کنید که با تعریف بالا، ممکن است قطر بعضی مجموعه‌ها تعریف نشود. مثلاً، مجموعه نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابت کمتر از یک است، و یا مجموعهٔ نقاط خط.

فرض کنید بخواهیم سطح قرص واحد (یعنی ناحیهٔ درون دایرهٔ واحد) را با تعدادی از زیرمجموعه‌هایش طوری بپوشانیم که قطر هر یک از این زیرمجموعه‌ها از قطر دایره کمتر باشد. شکل ۶ نشان می‌دهد که می‌توان این کار را با سه مجموعه انجام داد. آیا می‌شود این کار را با دو مجموعه هم انجام داد؟ پاسخ منفی است.

تمرین ۴ . این ادعا را ثابت کنید. (راهنمایی: فرض کنید چنین پوششی با دو مجموعهٔ A و B ممکن باشد. فرض کنید $2 > d(A) \geq d(B)$. ثابت کنید اگر m نقطه‌ای از A روی دایره باشد، کمان کوچکی روبه‌روی آن وجود دارد که در B قرار می‌گیرد (و ضمناً دو سر این کمان نیز در B است). با درنظرگرفتن هر یک از دو سر این کمان، و به دلیلی مشابه،



شکل ۶

مشابه، کمانهای کوچکی با طول همان کمان قبلی روی دایره به‌دست می‌آیند که در A قرار دارند. اگر کار را به همین شیوه، با درنظرگرفتن انتهای کمانهای پدید آمده، ادامه دهیم، به این نتیجهٔ نادرست خواهیم رسید که تمام نقاط دایره هم در A قرار دارند و هم در B؛ یعنی قطر A و قطر B مساوی با ۲ است.

بورسوک در دههٔ ۳۰ مسألهٔ زیر را مطرح کرد.

مسألهٔ بورسوک. اگر X زیرمجموعهٔ دلخواهی از صفحه و خوشرفتار[1] باشد، آیا می‌توان X را با سه مجموعه که قطرشان از $d(X)$ کمتر است پوشاند؟

پاسخ، مثبت است. نظیر همین سؤال را برای زیرمجموعه‌های فضای سه‌بعدی هم می‌شود مطرح کرد و در آنجا هم چهار مجموعه کافی است. بورسوک حدس زد که اگر X زیرمجموعه‌ای از فضای n بعدی (اگر بدانید چیست!) باشد، $n+1$ مجموعه کافی است. این حدس، در سال ۹۲ رد شد؛ البته برای فضای ۱۳۲۵ بعدی!

بحث را با مسأله‌ای از نوع دیگر، تمام می‌کنم.

مسألهٔ ۴ . $2m$ نقطهٔ قرمز و $2n$ نقطهٔ آبی روی صفحه قرار دارند. فرض کنید هیچ سه‌تایی از این نقاط روی یک خط راست نیستند. آیا همیشه خط راستی وجود دارد که در هر طرفش نیمی از نقطه‌های قرمز و نیمی از نقطه‌های آبی وجود داشته باشد؟ (راهنمایی: می‌توان برای هر راستای دلخواه در صفحه که با برداری مانند v نشان داده می‌شود، خطی به موازات v را در صفحه حرکت داد تا وقتی که در هر طرفش نیمی از نقطه‌های قرمز قرار بگیرند. این خط را $l(v)$ بنامید (اگر بیش از یک خط وجود داشته باشد یکی از آنها را به دلخواه انتخاب کنید). فرض کنید $m(v)$ تفاضل تعداد نقطه‌های آبی در سمت چپ و سمت راست $l(v)$ باشد. (البته، در اینجا چپ و راست معنی دارند زیرا راستای v دارای جهت است.) ثابت کنید می‌توان $l(v)$ را چنان انتخاب کرد که با گرداندن v در جهت عقربه‌های ساعت، $l(v)$ هم آرام «به گردش» در آید. ضمناً، دقت کنید که $m(-v) = -m(v)$ و چون گردش $l(v)$ «آرام» است و جهش ندارد، تغییرات $m(v)$ هم «ناگهانی» نیست. پس می‌توان راستایی یافت که $m(v) = 0$. این کلیات را دقیق کنید.)

---

۱. یعنی در حل مسأله با ما بدرفتاری نمی‌کند! مثلاً، X ناحیهٔ درون یک منحنی نه‌چندان ناهموار باشد.

نابرابری تجدید آرایش

ارشک حمیدی

هر بچهٔ عاقلی می‌داند که اگر مجاز باشد از میان سکه‌های ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی، ۵ سکه از یک نوع، ۴ سکه از نوع دیگر و ۲ سکه از نوع سوم انتخاب کند، برای اینکه پول بیشتری بردارد باید ۵ سکهٔ ۲۵ تومانی، ۴ سکهٔ ۱۰ تومانی و ۲ سکهٔ ۵ تومانی انتخاب کند. این مطلب ساده را، که در حقیقت معادل یکی از مسأله‌های المپیاد بین‌المللی ریاضی در سالهای گذشته است، در قضیهٔ زیر به شکل کاملتری بیان کرده‌ایم.

قضیهٔ ۱ . نابرابری تجدید آرایش. فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n، b_1، b_2، ... و b_n عددهایی حقیقی باشند،

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, \qquad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$$

و c_1، c_2، ... و c_n همان عددهای b_1، b_2، ... و b_n به ترتیبی دیگر باشند. دراین صورت

$$\begin{aligned} a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 &\leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n \\ &\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \end{aligned}$$

می‌توانید اثباتی ساده و زیبا از این قضیه را در [۱، مسألهٔ ۵۷] ببینید. چند نابرابری معروف نتیجه‌ای از نابرابری تجدید آرایش‌اند. پیش از اینکه آنها را بررسی کنیم، چند مسألهٔ نمونه می‌آوریم تا با روش استفاده از نابرابری تجدید آرایش آشنا شوید.

مسألهٔ ۱ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۵) فرض کنید x_1، ...، x_n، y_1، ... و y_n عددهایی حقیقی باشند و

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, \qquad y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

ثابت کنید اگر z_1، z_2، ... و z_n جایگشتی از عددهای y_1، y_2، ... و y_n باشند، آن‌وقت

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که چون z_1، ... و z_n همان عددهای y_1، ... و y_nاند، پس

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$$

به این ترتیب، اگر نابرابری موردنظر را ساده کنیم، معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

که همان نابرابری تجدید آرایش است. ∎

مسألهٔ ۲ . فرض کنید a_1، a_2، a_3، b_1، b_2 و b_3 عددهایی حقیقی باشند و

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3, \qquad b_1 \geq b_2 \geq b_3$$

ثابت کنید

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

راه‌حل. اگر دو بار از نابرابری تجدید آرایش استفاده کنیم نتیجه می‌شود

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$$

همچنین، معلوم است که

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

اگر این سه برابری را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq a_1(b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_1 + b_2 + b_3) + a_3(b_1 + b_2 + b_3)$$

و درنتیجه

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

■

مسألهٔ ۳ . a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم

$$a \geq b \geq c$$

و درنتیجه، چون a، b و c مثبت‌اند،

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$$

اکنون اگر دوبار از نابرابری تجدید آرایش استفاده کنیم نتیجه می‌شود

$$a \times \frac{1}{b+c} + b \times \frac{1}{c+a} + c \times \frac{1}{a+b} \geq a \times \frac{1}{c+a} + b \times \frac{1}{a+b} + c \times \frac{1}{b+c}$$

$$a \times \frac{1}{b+c} + b \times \frac{1}{c+a} + c \times \frac{1}{a+b} \geq a \times \frac{1}{a+b} + b \times \frac{1}{b+c} + c \times \frac{1}{c+a}$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3$$

و درنتیجه

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

■

مسألهٔ ۴ . a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$$

راه‌حل. توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم

$$a \geq b \geq c$$

و درنتیجه، چون a، b و c مثبت‌اند،

$$a^3 \geq b^3 \geq c^3$$

$$\frac{a}{abc} \geq \frac{b}{abc} \geq \frac{c}{abc}$$

به این ترتیب، اگر دوبار از نابرابری تجدید آرایش استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} a^3 \times \frac{a}{abc}+b^3 \times \frac{b}{abc}+c^3 \times \frac{c}{abc} &\geq a^3 \times \frac{b}{abc}+b^3 \times \frac{c}{abc}+c^3 \times \frac{a}{abc} \\ &= \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b} \\ a^3 \times \frac{a}{abc}+b^3 \times \frac{b}{abc}+c^3 \times \frac{c}{abc} &\geq a^3 \times \frac{c}{abc}+b^3 \times \frac{a}{abc}+c^3 \times \frac{b}{abc} \\ &= \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \end{aligned}$$

درنتیجه

$$2\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right) \geq \frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}$$

که همان نابرابری موردنظر است. ■

مسألهٔ ۵ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۴) فرض کنید a، b و c طول ضلعهای یک مثلث باشند. ثابت کنید

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

راه‌حل. می‌توانیم فرض کنیم $a \geq b \geq c$. دراین صورت

$$c(a+b-c) \geq b(c+a-b) \geq a(b+c-a)$$

زیرا، مثلاً،

$$c(a+b-c)-b(c+a-b)=(b-c)(b+c-a)\geq 0$$

و نابرابری سمت راست هم به همین ترتیب ثابت می‌شود. اکنون اگر دوبار از نابرابری تجدید آرایش استفاده کنیم نتیجه می‌شود

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$$

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c)$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم، پس از ساده کردن، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید. ■

با استفاده از روشی که در راه‌حل مسألهٔ ۲ استفاده کردیم، می‌توانیم نابرابری زیر را ثابت کنیم.

نابرابری چبیشف. فرض کنید a_1، ...، a_n، b_1، ... و b_n عددهایی حقیقی باشند و

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n,\qquad b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$$

دراین صورت

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geq(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

مسألهٔ ۶ . (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۴؛ المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۹۵) a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

راه‌حل. کافی است ثابت کنیم

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geq\frac{a+b+c}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

این نابرابری هم نتیجه‌ای ساده از نابرابری چبیشف است، زیرا می‌توانیم فرض کنیم $a\geq b\geq c$، و درنتیجه $\ln a\geq\ln b\geq\ln c$. ■

نابرابری معروف زیر هم نتیجه‌ای از نابرابری تجدید آرایش است.

نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی. اگر x_1، x_2، ... و x_n عددهایی نامنفی باشند، آنگاه

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

برای اثبات این نابرابری، ابتدا توجه کنید می‌توانیم فرض کنیم x_1، x_2، ... و x_n عددهایی مثبت‌اند. فرض کنید

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

و

$$a_1=\frac{x_1}{G},\qquad a_2=\frac{x_1x_2}{G^2},\ldots,\qquad a_n=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{G^n}=1$$

در این صورت، بنابر نابرابری تجدید آرایش،

$$\frac{a_۱}{a_n}+\frac{a_۲}{a_۱}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-۱}}\geq\frac{a_۱}{a_۱}+\frac{a_۲}{a_۲}+\cdots+\frac{a_n}{a_n}=n$$

اما

$$\frac{a_۱}{a_n}+\frac{a_۲}{a_۱}+\cdots+\frac{a_n}{a_n}=\frac{x_۱}{G}+\frac{x_۲}{G}+\cdots+\frac{x_n}{G}$$

پس

$$\frac{x_۱}{G}+\frac{x_۲}{G}+\cdots+\frac{x_n}{G}\geq n$$

و درنتیجه

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_۱x_۲\cdots x_n}$$

در این نابرابری، تساوی وقتی پیش می‌آید که $x_۱=x_۲=\cdots=x_n$.

سعی می‌کنیم مسأله‌های متنوعی را با نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی حل کنیم تا وسعت کاربرد آن بیشتر معلوم شود.

مسألهٔ ۷ . کدام عدد بزرگتر است: $۱۳۸۱^{۱۳۸۳}$ یا $۱۳۸۳^{۱۳۸۱}$؟

راه‌حل. توجه کنید که

$$۱۳۸۱=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\underbrace{۱+۱+\cdots+۱}_{۱۳۷۹}$$

پس، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{۱۳۸۱}{۱۳۸۳}=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+۱+۱+\cdots+۱}{۱۳۸۳}\geq\sqrt[۱۳۸۳]{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times۱\times۱\times\cdots\times۱}=\sqrt[۱۳۸۳]{\frac{۱}{۱۶}}$$

بنابراین

$$\left(\frac{۱۳۸۱}{۱۳۸۳}\right)^{۱۳۸۳}\geq\frac{۱}{۱۶}$$

درنتیجه

$$۱۳۸۱^{۱۳۸۳}\geq\frac{۱}{۱۶}\times۱۳۸۳^{۱۳۸۳}\geq\frac{۱۳۸۳^۲}{۱۶}\times۱۳۸۳^{۱۳۸۱}$$

چون $\frac{۱۳۸۳^۲}{۱۶}>۱$، پس

$$۱۳۸۱^{۱۳۸۳}>۱۳۸۳^{۱۳۸۱}$$

■

مسألهٔ ۸ . (مسابقهٔ ریاضی بلغارستان؛ دور بهاری، ۱۹۸۸) a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$۳(a+\sqrt{ab}+\sqrt[۳]{abc})\leq۴(a+b+c)$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc} &= a+\frac{1}{2}\sqrt{a(4b)}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{a(4b)(16c)} \\ &\le a+\frac{1}{4}(a+4b)+\frac{1}{12}(a+4b+16c) \\ &= \frac{4}{3}(a+b+c) \end{aligned}$$

■

مسألهٔ ۹ . (المپیاد ریاضی سنت پترزبورگ، ۱۹۹۷) a، b و c عددهایی حقیقی‌اند و $a, b, c \ge 2$. ثابت کنید

$$(a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \ge 125abc$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که چون $a, b, c \ge 2$، پس

$$(a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \ge (4a+b)(4b+c)(4c+a) \qquad (1)$$

از طرف دیگر، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{a+a+a+a+b}{5} \ge \sqrt[5]{a\times a\times a\times a\times b}$$

پس

$$4a+b \ge 5\sqrt[5]{a^4b}$$

به همین ترتیب، معلوم می‌شود

$$4b+c \ge 5\sqrt[5]{b^4c}$$

$$4c+a \ge 5\sqrt[5]{c^4a}$$

پس

$$(4a+b)(4b+c)(4c+a) \ge 125abc$$

و درنتیجه، بنابر نابرابری (۱)،

$$(a^3+b)(b^3+c)(c^3+a) \ge 125abc$$

■

مسألهٔ ۱۰ . نامعادلهٔ زیر را حل کنید

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{13}} \le \frac{7}{x^7}$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که اگر x عددی مثبت باشد، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^{13}} \ge 7\sqrt[7]{\frac{1}{x^{1+3+\cdots+13}}} = \frac{7}{x^7}$$

پس اگر x ریشهٔ نامعادلهٔ موردنظر باشد، باید

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^3} = \cdots = \frac{1}{x^{13}}$$

یعنی $x = 1$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که ۱ ریشهٔ نامعادلهٔ موردنظر است. اکنون توجه کنید که اگر x عددی منفی باشد، می‌توان نوشت $x = -t$، که در آن t عددی مثبت است. پس بنابر آنچه ثابت کردیم

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \cdots + \frac{1}{t^{13}} \geq \frac{7}{t^7}$$

یعنی

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^{13}} \leq \frac{7}{x^7}$$

بنابراین، هر عدد منفی ریشهٔ نامعادلهٔ موردنظر است. ■

مسألهٔ ۱۱ . a، b و c عددهایی مثبت‌اند و $abc = 1$. ثابت کنید

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

راه‌حل. می‌توانیم فرض کنیم $a \geq b \geq c$. دراین صورت

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$$

درنتیجه، بنابر نابرابری تجدید آرایش،

$$\frac{b}{\sqrt{a}} + \frac{c}{\sqrt{b}} + \frac{a}{\sqrt{c}} \geq \frac{a}{\sqrt{a}} + \frac{b}{\sqrt{b}} + \frac{c}{\sqrt{c}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

همچنین، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{c}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{\sqrt{abc}}} = 3$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید. ■

مسألهٔ ۱۲ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۵) a، b و c عددهایی مثبت‌اند و $abc = 1$. ثابت کنید

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

راه‌حل. فرض کنید

$$x = bc = \frac{1}{a}, \qquad y = ca = \frac{1}{b}, \qquad z = ab = \frac{1}{c}$$

دراین صورت، نابرابری موردنظر با نابرابری زیر هم‌ارز است

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

این نابرابری را ثابت می‌کنیم. توجه کنید می‌توانیم فرض کنیم $x \geq y \geq z$ و درنتیجه

$$x^۲ \geq y^۲ \geq z^۲$$

$$\frac{۱}{y+z} \geq \frac{۱}{z+x} \geq \frac{۱}{x+y}$$

بنابراین، اگر دو بار از نابرابری تجدید آرایش استفاده کنیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y} \geq \frac{x^۲}{x+y} + \frac{y^۲}{y+z} + \frac{z^۲}{z+x}$$

$$\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y} \geq \frac{x^۲}{z+x} + \frac{y^۲}{x+y} + \frac{z^۲}{y+z}$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$۲\left(\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y}\right) \geq \frac{z^۲+x^۲}{z+x} + \frac{x^۲+y^۲}{x+y} + \frac{y^۲+z^۲}{y+z}$$

اکنون توجه کنید که چون $A^۲ + B^۲ \geq \frac{۱}{۲}(A+B)^۲$، پس

$$\begin{aligned}\frac{x^۲}{y+z} + \frac{y^۲}{z+x} + \frac{z^۲}{x+y} &\geq \frac{۱}{۲}\left(\frac{z+x}{۲} + \frac{x+y}{۲} + \frac{y+z}{۲}\right)\\ &= \frac{۱}{۲}(x+y+z)\\ &\geq \frac{۱}{۲}(۳\sqrt[۳]{xyz}) = \frac{۳}{۲}\end{aligned}$$

(در نابرابری آخر از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی استفاده کرده‌ایم.) ■

مسألهٔ ۱۳ . (مسألهٔ پیشنهادی به هیأت داوران المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۰) a، b، c و d عددهایی حقیقی و غیرمنفی‌اند و $ab + bc + cd + da = ۱$. ثابت کنید

$$\frac{a^۳}{b+c+d} + \frac{b^۳}{a+c+d} + \frac{c^۳}{a+b+d} + \frac{d^۳}{a+b+c} \geq \frac{۱}{۳}$$

راه‌حل. فرض کنید

$$A = b+c+d, \qquad B = a+c+d$$

$$C = a+b+d, \qquad D = a+b+c$$

می‌توانیم فرض کنیم $a \geq b \geq c \geq d$ و درنتیجه

$$a^۳ \geq b^۳ \geq c^۳ \geq d^۳$$

$$\frac{۱}{A} \geq \frac{۱}{B} \geq \frac{۱}{C} \geq \frac{۱}{D}$$

پس بنابر نابرابری چبیشف،

$$۴\left(a^۳\frac{۱}{A}+b^۳\frac{۱}{B}+c^۳\frac{۱}{C}+d^۳\frac{۱}{D}\right)\geq(a^۳+b^۳+c^۳+d^۳)\left(\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C}+\frac{۱}{D}\right) \qquad (۱)$$

همچنین، باز هم بنابر نابرابری چبیشف،

$$۴(a^۳+b^۳+c^۳+d^۳)\geq(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲)(a+b+c+d) \qquad (۲)$$

اکنون توجه کنید که از نابرابری تجدید آرایش نتیجه می‌شود

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲\geq ab+bc+cd+da=۱$$

در ضمن،

$$a+b+c+d=\frac{۱}{۳}(A+B+C+D)$$

به این ترتیب، نابرابری (۲) را می‌توان چنین نوشت

$$a^۳+b^۳+c^۳+d^۳\geq\frac{۱}{۱۲}(A+B+C+D)$$

پس نابرابری (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{a^۳}{A}+\frac{b^۳}{B}+\frac{c^۳}{C}+\frac{d^۳}{D}\geq\frac{۱}{۴۸}(A+B+C+D)\left(\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C}+\frac{۱}{D}\right) \qquad (۳)$$

از طرف دیگر، از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$A+B+C+D\geq ۴\sqrt{ABCD}$$

$$\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C}+\frac{۱}{D}\geq ۴\sqrt{\frac{۱}{A}\frac{۱}{B}\frac{۱}{C}\frac{۱}{D}}$$

پس

$$(A+B+C+D)\left(\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C}+\frac{۱}{D}\right)\geq ۱۶$$

بنابراین، نابرابری (۳) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{a^۳}{A}+\frac{b^۳}{B}+\frac{c^۳}{C}+\frac{d^۳}{D}\geq\frac{۱}{۳}$$

■

نابرابری کُشی ـ شوارتز. فرض کنید $a_۱$، ...، a_n، $b_۱$، ... و b_n عددهایی حقیقی باشند. دراین صورت

$$(a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+\cdots+b_n^۲)\geq(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n)^۲$$

برای اثبات این نابرابری، ابتدا توجه کنید که اگر a_iها یا b_iها همگی صفر باشند، آن‌وقت نابرابری موردنظر درست

است. پس فرض کنید دست‌کم یکی از a_iها و دست‌کم یکی از b_iها برابر با صفر نباشد. فرض کنید

$$A = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲}, \qquad B = \sqrt{b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots + b_n^۲}$$

دراین صورت $A, B \neq ۰$. فرض کنید

$$x_۱ = \frac{a_۱}{A}, \ \ x_۲ = \frac{a_۲}{A}, \ldots, \ x_n = \frac{a_n}{A}$$
$$x_{n+۱} = \frac{b_۱}{B}, \ \ x_{n+۲} = \frac{b_۲}{B}, \ldots, \ x_{۲n} = \frac{b_n}{B}$$

دراین صورت، بنابر نابرابری تجدید آرایش،

$$\begin{aligned} ۲ &= \frac{a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲}{A^۲} + \frac{b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots + b_n^۲}{B^۲} \\ &= x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲ + x_{n+۱}^۲ + \cdots + x_{۲n}^۲ \\ &\geq x_۱ x_{n+۱} + x_۲ x_{n+۲} + \cdots + x_n x_{۲n} + x_{n+۱} x_۱ + x_{n+۲} x_۲ + \cdots + x_{۲n} x_n \\ &= \frac{۲(a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \cdots + a_n b_n)}{AB} \end{aligned}$$

پس

$$AB \geq a_۱ b_۱ + a_۲ b_۲ + \cdots + a_n b_n$$

که با نابرابری موردنظر هم‌ارز است. در نابرابری کُشی ـ شوارتز تساوی وقتی پیش می‌آید که

$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

مسألهٔ ۱۴ . معادلهٔ زیر را حل کنید

$$(۱-x)^۲ + (x-y)^۲ + (y-z)^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$$

راه‌حل. اگر x، y و z جواب معادلهٔ موردنظر باشند، آن‌وقت بنابر نابرابری کُشی ـ شوارتز،

$$\begin{aligned} ۱ &= \big((۱-x) + (x-y) + (y-z) + z\big)^۲ \\ &\leq ۴\big((۱-x)^۲ + (x-y)^۲ + (y-z)^۲ + z^۲\big) = ۱ \end{aligned}$$

بنابراین باید $۱ - x = x - y = y - z = z = \frac{۱}{۴}$ و درنتیجه $x = \frac{۳}{۴}$، $y = \frac{۱}{۲}$ و $z = \frac{۱}{۴}$. ∎

مرجع

۱. ارشک حمیدی، برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۸.

تورنمنت شهرها

ارشک حمیدی

در فرهنگ ریاضی روسها سنت پرباری برای برگزاری مسابقه‌ها و المپیادهای ریاضی وجود دارد. درحقیقت، اولین مسابقهٔ ریاضی که به آن عنوان «المپیاد» اطلاق شده، المپیاد ریاضی لنینگراد بوده که در سال ۱۹۳۴ پایه‌گذاری شده است. اولین المپیاد ریاضی مسکو هم یک سال بعد برگزار شده است. بنیانگذاران این المپیادها، ریاضیدانان برجسته‌ای چون بوریس دِلون و آندری کولموگوروف بوده‌اند. هدف اصلی برگزارکنندگان این المپیادها، یافتن جوانانی با استعداد درخشان در ریاضیات برای تربیت ریاضیدانان آینده بوده است و مسلماً این هدف تحقق یافته است: ریاضیدانان برجسته‌ای چون آرنولد، منین، نوویکوف، درنیفلد، کونتسویچ، ... همگی از شرکت‌کنندگان موفق این المپیادها بوده‌اند. اولین المپیاد سراسری اتحاد شوروی در سال ۱۹۶۷ برگزار شده است. پس از چند سال، نحوهٔ برگزاری این المپیاد مشکلاتی را به‌وجود آورد: سهم دانش‌آموزان شهرهای بزرگ نظیر مسکو و لنینگراد به نسبت دانش‌آموزان مستعد و برگزیدهٔ آنها بسیار کم بود. در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، هیأت داوران این المپیاد، که ریاستش برعهدهٔ کولموگوروف بود، پیشنهاد کرد که این سهمیه افزایش پیدا کند. با این پیشنهاد هیأت داوران موافقت نشد و سرانجام در سال ۱۹۸۰ تقریباً تمامی اعضای آن به دلایل سیاسی برکنار شدند.

در سال ۱۹۸۰، علاوه‌بر المپیاد سراسری اتحاد شوروی، مسابقهٔ دیگری برگزار شد. هیأت داوران قبلی، مسابقه‌ای به نام المپیاد سه شهر (بین شهرهای مسکو، لنینگراد و ریگا) ترتیب دادند. سال بعد شهرهای دیگری هم شرکت کردند و مسابقه را تورنمنت شهرها نامیدند. در دههٔ ۱۹۸۰ ابتدا شهرهایی از بلغارستان، سپس شهرهایی از کشورهای اروپای شرقی و سپس استرالیا در این مسابقه شرکت کردند. در چند سال اخیر، حدود ۱۰۰ شهر از نزدیک به ۱۵ کشور از سراسر جهان در این مسابقه شرکت می‌کنند.

تورنمنت شهرها مسابقه‌ای ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی است و در هر سال تحصیلی در دو مرحلهٔ پاییزی و بهاری برگزار می‌شود. در هر مرحله دو سطح مسأله مطرح می‌شود، سطح «معمولی» و سطح «پیشرفته». مسأله‌های هر سطح به دو گونه‌اند، مسأله‌هایی برای دانش‌آموزان دو سال اول دبیرستان و مسأله‌هایی برای دانش‌آموزان دو سال آخر دبیرستان.

در اینجا، برای اینکه خوانندگان نشریهٔ ریاضیات با نوع مسأله‌های این مسابقه آشنا شوند، تعدادی از آنها را آورده‌ایم. سالی که مسأله داده شده است و نام طراح یا طراحان مسأله را هم آورده‌ایم. در میان آنها، اسامی ریاضیدانان و طراحان برجسته‌ای چون نیکلای واسیلیف، ایگور شاریگین، ویکتور پراسلوف، ویکتور پریزولوف، دمیتری فومین و ماکسیم کونتسویچ (برندهٔ مدال فیلدز در سال ۱۹۸۸) دیده می‌شود.

مسأله‌هایی برای دانش‌آموزان دو سال اول دبیرستان

۱. الف) $4k$ ضلعی منتظمی را به تعدادی متوازی‌الاضلاع بریده‌ایم. ثابت کنید در میان این متوازی‌الاضلاعها دست‌کم k مستطیل وجود دارد.

ب) اگر طول ضلع $4k$ ضلعی برابر با a باشد، مجموع مساحتهای مستطیلهای قسمت (الف) را حساب کنید.

(۱۹۸۳، و. پریزولوف)

۲. از رأسهای A و B مثلث ABC دو خط رسم کرده‌ایم که مثلث را به چهار ناحیه تقسیم کرده‌اند (سه مثلث و یک چهارضلعی). معلوم شده است که مساحت سه تا از این ناحیه‌ها برابر است. ثابت کنید یکی از این سه ناحیه چهارضلعی است.

(۱۹۸۶، آ. ساوین، گ. گالپرین)

۳. آیا می‌توان صفحه را با دایره‌ها طوری پوشاند که از هر نقطهٔ صفحه دقیقاً ۱۹۸۸ دایره بگذرد؟

(۱۹۸۸، ن. واسیلیف)

۴. n ضلعی محدبی را با ترسیم برخی قطرهای نامتقاطعش به تعدادی مثلث افراز کرده‌ایم. با انجام عملیاتی به نام پروستریکا (یعنی بازسازی)، می‌توانیم به جای دو مثلث با ضلعی مشترک مانند ABD و BCD، مثلثهای ABC و ACD را بگذاریم. کمترین تعداد عملیات پروستریکای لازم برای تبدیل افرازی به افرازی دیگر را با $p(n)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید

الف) $p(n) \geq n - 3$

ب) $p(n) \leq 2n - 7$

ج) اگر $n \geq 13$، $p(n) \leq 2n - 10$

(۱۹۸۸، د. فومین، براساس ایده‌هایی از و. ترستن، د. اسلیتر و ر. تاریان)

۵. شش‌ضلعی منتظمی را به n متوازی‌الاضلاع با مساحتهای برابر بریده‌ایم. ثابت کنید n بر سه بخش‌پذیر است.

(۱۹۸۹، و. پراسلوف و ای. شاریگین)

۶. بیشترین تعداد ناحیه‌هایی را پیدا کنید که می‌توان صفحه را با استفاده از نمودارهای ۱۰۰ تابع درجهٔ دوم مختلف مانند $y = ax^2 + bx + c$ به آنها تقسیم کرد.

(۱۹۹۰، ن. واسیلیف)

۷. فرض کنید

$$a = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{99}}}},\qquad b = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{99+\cfrac{1}{100}}}}}$$

ثابت کنید

$$|a-b| < \frac{1}{99! \times 100!}$$

(۱۹۹۰، گ. گالپرین)

۸. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_0 = 9$ و به‌ازای هر عدد صحیح و نامنفی مانند k،

$$a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$$

ثابت کنید در بسط اعشاری a_{10} بیش از ۱۰۰۰ رقم نُه وجود دارد.

(۱۹۹۱، یائو)

۹. ثابت کنید اگر a، b و c و نیز مجموعهای

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\qquad \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

عددهایی صحیح باشند، آن‌وقت

$$|a| = |b| = |c|$$

(۱۹۹۵، ا. گریبالکو)

۱۰. آیا ۱۰۰ عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان برابر با کوچکترین مضرب مشترکشان باشد؟

(۱۹۹۵، س. توکارف)

۱۱. آیا می‌توان چهار نقطه را در صفحه با قرمز و چهار نقطهٔ دیگر را با آبی طوری رنگ کرد که هر سه نقطهٔ همرنگ از آنها رأسهای متوازی‌الاضلاعی باشند که رأس چهارمش نقطه‌ای به رنگ دیگر است؟

(۱۹۹۶، ن. واسیلیف)

۱۲. n خط راست طوری در صفحه رسم شده‌اند که هر یک از آنها دقیقاً ۱۹۹۹تای دیگر را قطع کرده است. همهٔ مقادیر ممکن n را پیدا کنید.

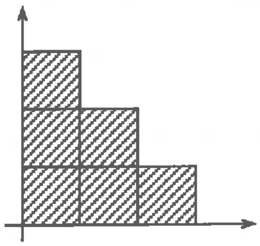
(۱۹۹۹، ر. ژنوداروف)

مسأله‌هایی برای دانش‌آموزان دو سال آخر دبیرستان

۱. ثابت کنید هر عدد حقیقی مثبت را می‌توان به شکل مجموع نُه عدد حقیقی نوشت که در نمایش اعشاری آنها فقط رقمهای ۰ و ۷ وجود دارد.

(۱۹۸۱، اِ. تورکویچ)

۲. مانند شکل زیر، شش مربع از صفحه‌ای نامتناهی و «چهارخانه» را سایه زده‌ایم. روی برخی مربعها قطعه‌هایی را قرار داده‌ایم. می‌توان جای قطعه‌ها را مطابق قاعدهٔ زیر تغییر داد: اگر مربعهای همسایهٔ سمت راست یا بالای قطعه‌ای خالی باشند، می‌توان این قطعه را برداشت و در یکی از مربعهای خالی گذاشت.



می‌خواهیم همهٔ مربعهای سایه‌دار را از قطعه‌ها خالی کنیم. در هر مورد تعیین کنید که می‌توان این کار را کرد یا نه.

الف) در ابتدا شش قطعه داریم که در شش مربع سایه‌دار قرار دارند.

ب) در ابتدا فقط یک قطعه داریم که در مربع سایه‌دار پایینی سمت چپ قرار دارد؟

(۱۹۸۱، م. کونتسویچ)

۳. عددهای ۱ تا ۱۰۰۰ را روی یک دایره چیده‌ایم. ثابت کنید می‌توان ۵۰۰ پاره‌خط غیرمتقاطع رسم کرد که هریک دو تا از این عددها را به هم وصل می‌کند و (قدرمطلق) تفاضل دو عددی که در دو سرش نوشته شده است از ۷۴۹ بیشتر نیست.

(۱۹۸۳، ا. رازبوروف)

۴. k رأس n ضلعی منتظم P را رنگ کرده‌ایم. رنگ‌آمیزی‌ای را تقریباً یکنواخت می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، شرط زیر برقرار باشد: اگر M_1 مجموعه‌ای از m رأس متوالی P و M_2 مجموعه‌ای دیگر از این نوع باشد، آن‌وقت اختلاف تعداد رأسهای رنگی M_1 با تعداد رأسهای رنگی M_2 حداکثر ۱ باشد. ثابت کنید به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی مانند k و n $(n \leq n)$ رنگ‌آمیزی تقریباً یکنواخت وجود دارد و بدون

درنظرگرفتن رنگ‌آمیزیهای تقریباً یکنواختی که از دوران دیگری به‌دست می‌آیند، یکتاست.

(۱۹۸۳، م. کونتسویچ)

۵. در مثلث ABC، AH ارتفاع و BE نیمساز است. می‌دانیم زاویهٔ BEA برابر با $۴۵°$ است. ثابت کنید زاویهٔ EHC برابر با $۴۵°$ است.

(۱۹۸۵، ای. شاریگین)

۶. تابع f روی خط حقیقی تعریف شده است و به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(x+۱)f(x)+f(x+۱)+۱=۰$$

ثابت کنید تابع f پیوسته نیست.

(۱۹۸۶، ا. پلوتکین)

۷. ۱۰۱ مستطیل داریم که طول ضلعهایشان عددهایی طبیعی‌اند و از ۱۰۰ بزرگتر نیستند. ثابت کنید در میان این ۱۰۱ مستطیل، سه مستطیل مانند A، B و C وجود دارند که می‌توان A را کاملاً درون B و B را کاملاً درون C قرار داد.

(۱۹۸۹، ن. سدراکیان)

۸. همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, N\}$ را درنظر بگیرید که هیچ‌یک سه عدد متوالی را در بر ندارد. ثابت کنید مجموع مربعهای حاصل‌ضرب عضوهای این زیرمجموعه‌ها برابر با $(N+۱)!-۱$ است.

(۱۹۸۹، براساس ایده‌ای از ر. پ. استنلی)

۹. دو ساعتِ یکجور روی دیوار نصب شده‌اند، یکی از آنها ساعت را به وقت مسکو و دیگری ساعت را به وقت محلی نشان می‌دهد. کمترین فاصلهٔ میان نوک عقربه‌های ساعت‌شمار آنها برابر با m و بیشترین فاصلهٔ میان نوک این عقربه‌ها برابر با M است. فاصلهٔ مرکز ساعتها را پیدا کنید.

(۱۹۹۰، س. فومین)

۱۰. ثابت کنید می‌توان با یالهای هر چهاروجهی دلخواهی دو مثلث رسم کرد.

(۱۹۹۴، و. پریزولوف)

۱۱. مکعبی را به ۹۹ مکعب کوچک بریده‌ایم، که دقیقاً ۹۸ تای آنها مکعب واحدند. حجم مکعب اصلی را پیدا کنید.

(۱۹۹۷، و. پریزولوف)

۱۲. فرض کنید a، b، c و d عددهایی در بازهٔ $[۰, ۱]$ باشند. ثابت کنید عددی مانند x در این بازه وجود دارد که

$$\frac{۱}{|x-a|}+\frac{۱}{|x-b|}+\frac{۱}{|x-c|}+\frac{۱}{|x-c|}<۴۰$$

(۱۹۹۵، ل. کورلیانچیک)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

۱. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که

$$\frac{m}{\sqrt{m}}+\frac{۶}{n\sqrt{m}}<\frac{۵\sqrt{n}}{n}$$

۲. آیا این حکم درست است که هر عدد گویا و مثبت را می‌توان به شکل $\frac{a^۲+b^۳}{c^۵+d^۷}$ نوشت، که در آن a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند؟

۳. معادلهٔ $a!=۴b!+۱۰c!$ را در مجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید.

۴. m و n عددهایی طبیعی‌اند و $m^۲+n^۲+m$ بر mn بخش‌پذیر است. ثابت کنید m مربع کامل است.

۵. در چهارضلعی $ABCD$، $\angle BAC=۵۰^\circ$، $\angle ABD=۶۰^\circ$، $\angle DBC=۲۰^\circ$ و $\angle BDC=۳۰^\circ$. $\angle CAD$ را حساب کنید.

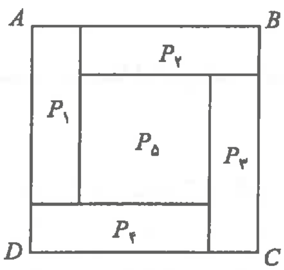
۶. شش‌ضلعی $ABCDEF$ محاطی است، هر جفت از ضلعهای روبه‌رویش موازی‌اند و مساحتش دو برابر مساحت مثلث ACE است. ثابت کنید طول هر جفت از ضلعهای روبه‌رو در این شش‌ضلعی با هم برابر است.

۷. در چهارضلعی محدب $ABCD$ نقطه‌های K، L، M و N را به ترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA انتخاب کرده‌ایم و KM و LN یکدیگر را در نقطهٔ S قطع کرده‌اند. ثابت کنید اگر چهارضلعیهای $AKSN$، $BKSL$، $CLSM$ و $DMSN$ محیطی باشند، چهارضلعی $ABCD$ هم محیطی است.

۸. قطرهای چهارضلعی محدب $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. ثابت کنید

$$\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}+\frac{BC}{AD}+\frac{AD}{BC}\leq\frac{OA}{OC}+\frac{OC}{OA}+\frac{OB}{OD}+\frac{OD}{OB}$$

۹. مانند شکل زیر مستطیل $ABCD$ را به پنج مستطیل $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$ و $P_۵$ تقسیم کرده‌ایم. معلوم شده است که مساحت $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$ برابر است و $P_۵$ مربع است. ثابت کنید $ABCD$ هم مربع است.



۱۰. مجموع ۱۰۰ عدد حقیقی برابر با صفر است. ثابت کنید می‌توان دست‌کم ۹۹ زوج (غیرمرتب) از این عددها انتخاب کرد که مجموع عددهای هر یک از آنها غیرمنفی باشد.

۱۱. فرض کنید تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعهٔ $\{1,2,\ldots,n\}$ که هر دو تا از آنها حداکثر یک عضو مشترک دارند برابر با b باشد. ثابت کنید

$$b \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor \right\rfloor$$

۱۲. همهٔ چندجمله‌ایها مانند $p(x)$ و $q(x)$ را طوری پیدا کنید که

$$q(x^2) = (x+1)^4 - x\big(p(x)\big)^2$$

۱۳. دانش‌آموزی به‌تازگی روش حل کردن معادله‌های درجهٔ دوم را یاد گرفته است. او ابتدا معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ را حل می‌کند. اگر ریشه‌های این معادله عددهای حقیقی c و d باشند و $c<d$، او معادلهٔ $x^2+cx+d=0$ را حل می‌کند، و همین کار را ادامه می‌دهد. این دانش‌آموز حداکثر چند بار می‌تواند این کار را تکرار کند؟

۱۴. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geq 4$$

۱۵. مجموع عددهای غیرمنفی a، b، c، d، e و f برابر با ۱ است و

$$ace+bdf \geq \frac{1}{108}$$

ثابت کنید

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab \leq \frac{1}{36}$$

۱۶. همهٔ عددهایی طبیعی مانند n را پیدا کنید، به‌طوری که اگر x_1، x_2، ...، x_n، y_1، y_2، ... و y_n عددهایی حقیقی باشند، آن‌وقت

$$x_1x_2\cdots x_n + y_1y_2\cdots y_n \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdots\sqrt{x_n^2+y_n^2}$$

۱۷. معادلهٔ $x^2=4y+3[x,y]$ را در مجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید ($[x,y]$، کوچکترین مضرب مشترک x و y است).

۱۸. همهٔ تابعها مانند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\big((x-y)^2\big) = \big(f(x)\big)^2 - 2xf(y) + y^2$$

۱۹. آیا می‌توان عددهایی گنگ مانند a و b پیدا کرد که $a,b>1$ و اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، $\lfloor a^m \rfloor$ و $\lfloor b^n \rfloor$ برابر نباشند؟

۲۰. آیا عددی حقیقی و بزرگتر از ۱ مانند x وجود دارد که صحیح نباشد و

$$\{x\}+\{x^3\}+\{x^5\}+\cdots+\{x^{99}\} < \frac{1}{2^{99}}$$

($\{t\}$ جزء کسری t است، یعنی $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$.)

اثبات قضیه‌ای در بارهٔ اعداد اول

لئونارد اویلر

اغلب قضیه‌های فرما در حساب، بدون اثبات بیان شده‌اند. شاید این حکمها واقعاً درست باشند و نه فقط خاصیتهای استثنایی چند عدد خاص. به‌هرروی، علم اعداد همچنان سرزنده است و مرزهایش را می‌گستراند. گو اینکه او اکتشافات هندسی قابل توجهی داشته، بر خود فرض دانسته‌ام که در پی یافتن اثبات حکمهایی باشم که او ادعا کرده که می‌توانسته ثابت کند، یا دست‌کم از صحتشان مطمئن بوده است. حقیقتی است که فرما اغلب حکم‌هایش را از راه مشاهده به‌دست آورده و این در حقیقت، با کمی اغماض، تنها راهِ یافتن چنین خاصیتهایی است. درواقع اما، می‌توان مثالهایی [نادرست] یافت که از همین راه مشاهده به‌دست آمده‌اند و کافی است که حکمی از این دست مثال بزنیم که خود فرما صحت آن‌را ادعا کرده است. حکمی را می‌گویم که نادرستی‌اش در سال جاری معلوم شد: این‌که همهٔ اعدادِ به شکل $۲^{۲^n} + ۱$، اول هستند. درواقع، به‌نظر می‌رسد که مشاهدات باید برای اثبات این حکم کافی باشند.

درست است که همهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰٬۰۰۰ را می‌شناسیم و به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که هیچ عدد اول کوچک‌تر از ۶۰۰ مقسوم علیه عددی به شکل $۲^{۲^n} + ۱$ نیست، اما اگر عددی بزرگ به‌جای n بگذاریم چه می‌شود؟ به‌هرروی، به آسانی می‌توان نشان داد که این گزاره درست نیست و استفاده از مشاهده در این موضوع به خطا می‌انجامد.

به چنین دلایلی، خاصیتهایی از اعداد که از طریق مشاهده به‌دست می‌آمدند قطعی دانسته نمی‌شدند، مگر این‌که برهانی صریح برایشان یافت شود و یا غلط بودنشان به‌نحوی ثابت شود. تاکنون اما، من در حکمهای مهم فرما چیزی جز حکمهایی که از راه مشاهده به‌دست آمده‌اند نیافته‌ام و از آنجا که در اثبات این حکمها بسیار خبره‌ام، در صحت این حکمها به هیچ وجه تردیدی نیست.

حکمی که در اینجا ثابت می‌کنم، این است:

اگر p عددی اول باشد، عدد $a^{p-۱} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است، مگر اینکه a بر p بخش‌پذیر باشد.

درستی حکم به‌این طریق نتیجه می‌شود: در حالتی که a در فرمول برابر ۲ باشد، حکم را ثابت کرده‌ام، ولی این اثبات را نمی‌توان به حالت کلی تعمیم داد. دلیل این‌که این اثبات را آورده‌ام، این است که گذار به حالت کلی را ساده کنم.

قضیه. اگر p عددی فرد و اول باشد، عبارت $۲^{p-۱} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است.

برهان. با نوشتن ۱ + ۱ به‌جای ۲، نتیجه می‌شود

$$(۱+۱)^{p-۱} = ۱ + \frac{p-۱}{۱} + \frac{(p-۱)(p-۲)}{۱\times ۲} + \frac{(p-۱)(p-۲)(p-۳)}{۱\times ۲\times ۳} + \frac{(p-۱)(p-۲)(p-۳)(p-۴)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴} + \cdots$$

تعداد جمله‌های طرف راست، p (و درنتیجه فرد) است. به‌علاوه، هر جملهٔ کسری حتماً عددی صحیح است، زیرا صورت هریک از کسرها به مخرج همان کسر بخش‌پذیر است. با کم‌کردن ۱ از دو طرف، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} ۲^{p-۱}-۱ &= (۱+۱)^{p-۱}-۱ \\ &= \left(\frac{p-۱}{۱}+\frac{(p-۱)(p-۲)}{۱\times ۲}\right) \\ &\quad + \left(\frac{(p-۱)(p-۲)(p-۳)}{۱\times ۲\times ۳}+\frac{(p-۱)(p-۲)(p-۳)(p-۴)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}\right)+\cdots \end{aligned}$$

تعداد جمله‌های طرف راست $p-۱$ (و درنتیجه زوج) است. با جفت جفت جمع کردن جمله‌ها، تعداد جمله‌ها نصف می‌شود و در نتیجه

$$\begin{aligned} ۲^{p-۱}-۱ = \frac{p(p-۱)}{۱\times ۲} &+\frac{p(p-۱)(p-۲)(p-۳)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴} \\ &+\frac{p(p-۱)(p-۲)(p-۳)(p-۴)(p-۵)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶}+\cdots \end{aligned}$$

و چون p عددی فرد است، آخرین جمله برابر است با

$$\frac{p\times (p-۱)\times \cdots \times ۲}{۱\times ۲\times \cdots \times (p-۱)}=p$$

بنابراین، روشن است که هر جمله بر p بخش‌پذیر است، زیرا p عددی اول است و بزرگ‌تر از همهٔ عاملهای مخرج، پس تقسیم به مخرج عامل p را از بین نمی‌برد. در نتیجه، اگر p عدد اول فردی باشد، $۲^{p-۱}-۱$ بر p بخش‌پذیر است.

چون $۲^{p-۱}-۱$ بر p بخش‌پذیر است، دو برابرش هم بر p بخش‌پذیر است. در نتیجه، به‌ازای هر عدد اول مثل p، $۲^{p}-۲$ بر p بخش‌پذیر است. به‌علاوه، چون به‌ازای هر عدد اول فرد مثل p، $۲^{p-۱}-۱$ بر p بخش‌پذیر است، به‌سادگی می‌توان نشان داد که به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی دلخواه مثل m، $۲^{m(p-۱)}-۱$ بر p بخش‌پذیر است، پس هر عبارت مثل $۴^{p-۱}-۱$، $۸^{p-۱}-۱$، $۱۶^{p-۱}-۱$ و غیره هم بر p بخش‌پذیر است. بنابراین، درستی این قضیه را، برای حالتی که a توانی از ۲ است، ثابت کرده‌ایم.

اکنون حکم زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر p عدد اولی جز ۳ باشد، $۳^{p-۱}-۱$ بر p بخش‌پذیر است.

برهان. اگر $۳^{p-۱}-۱$ بر عدد اولی جز ۳ بخش‌پذیر باشد، $۳^{p}-۳$ نیز چنین است و برعکس. در نتیجه، چون

$$\begin{aligned} ۳^{p} &= (۱+۲)^{p} \\ &= ۱+\frac{p}{۱}\times ۲+\frac{p(p-۱)}{۱\times ۲}\times ۲^{۲}+\cdots+\frac{p}{۱}\times ۲^{p-۱}+۲^{p} \end{aligned}$$

و غیر از ۱ و ۲^p هر جملهٔ طرف راست بر p بخش‌پذیر است، عبارت $۳^p - ۲^p - ۱$ ـ که همان

$$۳^p - ۳ - ۲^p + ۲$$

است ـ بر p بخش‌پذیر است. $۲^p - ۲$ هم بر p بخش‌پذیر است، پس $۳^p - ۳$ نیز چنین است. به‌علاوه، اگر p عدد اولی غیر از ۳ باشد، $۳^{p-۱} - ۱$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

به‌این شیوه، می‌توان از درستی قضیه به‌ازای عدد داده‌شده‌ای مثل a به درستی آن به‌ازای $a + ۱$ رسید. با کنار هم چیدن این دو برهان، می‌توان قضیهٔ کلی زیر را به‌دست آورد.

قضیه. به‌ازای هر عدد اول مثل p، اگر $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر باشد، $(a + ۱)^p - a - ۱$ هم بر p بخش‌پذیر است.

برهان. می‌توان $(۱ + a)^p$ را، طبق معمول، به‌صورت

$$۱ + \frac{p}{۱}a + \frac{p(p-۱)}{۱ \times ۲} + \cdots + \frac{p}{۱}a^{p-۱} + a^p$$

نوشت که در آن، هر جمله جز ۱ و [احتمالاً] a^p بر p بخش‌پذیر است. در نتیجه، $(۱ + a)^p - a - ۱$، که برابر

$$(۱ + a)^p - a - ۱ - a^p + a$$

است، بر p بخش‌پذیر است و چون $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است، $(۱ + a)^p - a - ۱$ هم چنین است.

بنابراین، با دانستن این که $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است، بخش‌پذیری $(a + ۱)^p - a - ۱$ بر p نتیجه می‌شود و این هم بخش‌پذیری $(a + ۲)^p - a - ۲$ بر p را نشان می‌دهد و در حالت کلی، بخش‌پذیری $(a + b)^p - a - b$ بر p را. پس، به‌ازای هر a ی دلخواه، $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است و در نتیجه، $a^{p-۱} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است، مگر اینکه a مضربی از p باشد.

• ترجمهٔ بردیا حسام

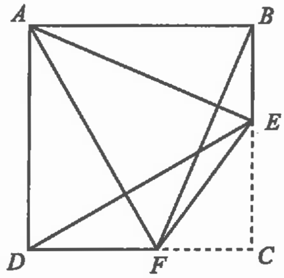
L. Euler, Proof of a Theorem on Looking at Prime Numbers, *Commentaries of the Academy of Science of St. Petersburg*, 8 (1736), pp. 141-146

از باب تفریح (حل)

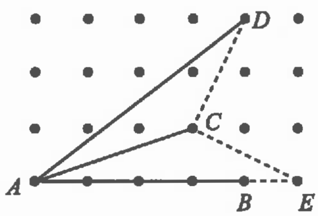
۱. بله، ممکن است. فرض کنید ۱۳ تیم در مسابقات شرکت کرده‌اند، یک تیم ۵ برد و ۷ باخت داشته است و بقیهٔ بازیها به تساوی ختم شده‌اند. این تیم قهرمان این دوره است، زیرا ۱۵ امتیاز دارد و بقیهٔ تیمها حداکثر $۱۱ \times ۱ + ۳ = ۱۴$ امتیاز دارند. در سیستم قدیمی، تیم موردنظر قعرنشین است، زیرا ۱۰ امتیاز دارد و بقیهٔ تیمها دست‌کم ۱۱ امتیاز دارند.

۲. بازیکن اول حتماً می‌برد. فرض کنید تعداد مهره‌های بازیکن اول برابر با a و تعداد مهره‌های بازیکن دوم برابر با b باشد. چون $a + b = ۱۰۱$ و ۱۰۱ عددی اول است، پس a و b نسبت به هم اول‌اند.

۳. توجه کنید که با نمادگذاری شکل ۱، مثلث ABE با مثلث BCF و مثلث ADF با مثلث DCE همنهشت است. بنابراین، $\angle BAE = \angle CBF$ و $\angle DAF = \angle CDE$. پس مجموع زاویه‌های موردنظر برابر با ۹۰° است.



۴. توجه کنید که با نمادگذاری شکل ۲، $AD = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$ و $CE = CD = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵}$. پس مثلثهای ACD و ACE همنهشت‌اند. درنتیجه، $\angle BAC = \angle CAD$.



۵. توجه کنید که ۱ ریشهٔ معادلهٔ موردنظر است، و چون این معادله درجهٔ اول است، پس ریشهٔ دیگری ندارد.

۶. ثابت می‌کنیم $\sqrt[۳]{۱۵} + \sqrt[۳]{۹} - \sqrt[۳]{۶} > \sqrt[۳]{۲۵} + \sqrt[۳]{۱۰} - \sqrt[۳]{۴}$ یا

$$\sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۹} + \sqrt[۳]{۲۵} > \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۱۰} + \sqrt[۳]{۱۵}$$

اگر فرض کنیم $a = \sqrt[۳]{۲}$، $b = \sqrt[۳]{۳}$ و $c = \sqrt[۳]{۵}$، کافی است ثابت کنیم

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ > ab + bc + ca$$

این نابرابری هم با نابرابری زیر هم‌ارز است

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲ > ۰$$

معلوم است که این نابرابری درست است.

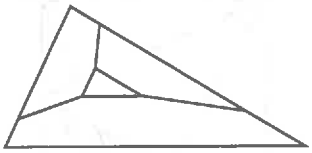
۷. می‌توان نوشت

$$۹a = a^۲ + b^۲ + ۸a - ۸b - ۲ab + ۱۶ = (a - b + ۴)^۲$$

چون $۹a$ مربع کامل است، پس a هم مربع کامل است.

۸. خیر، چنین عددی بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۹. بله، شکل زیر را ببینید.



۱۰. عددهای زیر را درنظر بگیرید

$$۱۳۸۲,\ ۱۳۸۲۱۳۸۲,\ ۱۳۸۲۱۳۸۲۱۳۸۲,\ \cdots,\ \underbrace{۱۳۸۲۱۳۸۲\cdots۱۳۸۲}_{۱۳۸۲}$$

توجه کنید که بنابر اصل لانه‌کبوتری باقیماندهٔ دست‌کم دو تا از این عددها بر ۱۳۸۱ با هم برابر است. پس تفاضل آنها بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیر است. یعنی عددی به شکل

$$۱۳۸۲۱۳۸۲\ldots۱۳۸۲۰۰\ldots۰$$

وجود دارد که بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیر است. توجه کنید که عددی صحیح و نامنفی مانند k وجود دارد که

$$۱۳۸۲۱۳۸۲\ldots۱۳۸۲۰۰\ldots۰ = ۱۳۸۲۱۳۸۲\ldots۱۳۸۲ \times ۱۰^k$$

چون ۱۳۸۱ و ۱۰^k نسبت به هم اول‌اند، پس عددی به شکل ۱۳۸۲ ... ۱۳۸۲۱۳۸۲ وجود دارد که بر ۱۳۸۱ بخش‌پذیر است.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

سایر کتابهای ریاضی

مجموعهٔ کتابهای گلفاند

توپولوژی شهودی

فرهنگ ریاضی
نوجوانان و جوانان

ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی
در چهار کتاب به‌همراه راهنمای حل مسائل

آمادگی برای المپیاد کامپیوتر

مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی

کتابهای موضوعی ریاضی

کتاب برگزیدهٔ سومین
جشنوارهٔ کتابهای آموزشی رشد