نشریهٔ

ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال چهارم
شماره اول
آبان ۱۳۸۲
قیمت : ۷۰۰ تومان

- چرا ریاضیات می‌خوانیم؟
- بازی هگز
- نابرابریهایی برای تابعهای محدب (۱)
- تورنمنت شهرها
- مقاله‌ای از کاتالان

به نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال چهارم ـ شمارهٔ اول ـ آبان ۱۳۸۲

فهرست:

مقاله‌ها

سرگرمی

المپیاد

ازگذشته‌ها

راه حل

روی جلد: دوچرخه‌سوار از راست به چپ حرکت می‌کرده است یا از چپ به راست؟

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، محمد مهدی عابدی‌نژاد

هیات تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، سیدمصطفی سیادت موسوی، امید نقشینه ارجمند

ویراستاران: بردیا حسام، ارشک حمیدی

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ۸۹۷۱۵۸۳

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

چرا ریاضیات می‌خوانیم؟

ولادیمیر آرنولد

چرا باید ریاضیات بخوانیم؟ راجر بیکن، فیلسوف انگلیسی، در سال ۱۲۶۷ میلادی پاسخ این سؤال را چنین داده است: «کسی که این کار را نکند نمی‌تواند چیزی از بقیهٔ علوم و هر آنچه در این جهان هست بفهمد. . . . چیزی که بدتر است این است که کسانی که ریاضیات نمی‌دانند به جهالت خودشان پی نمی‌برند و درنتیجه در پی چاره‌جویی برنمی‌آیند.» می‌توانم همین‌جا سخنرانیم را پایان دهم، اما ممکن است بعضیها فکر کنند که شاید خیلی چیزها در هفت قرن گذشته تغییر کرده باشد . . . .

شاهدی تازه‌تر می‌آورم. پال دیراک، از خالقان مکانیک کوانتومی، معتقد است که وقتی تئوری فیزیکی‌ای را پایه‌ریزی می‌کنید، نباید به هیچ شهود فیزیکی‌ای اعتماد کنید. پس به چه چیزی اعتماد کنید؟ به گفتهٔ این فیزیکدان مشهور، فقط به برنامه‌ای متکی بر ریاضیات ـ ولو اینکه در نگاه اول ربطی به فیزیک نداشته باشد.

درحقیقت، در فیزیک تمامی ایده‌های صرفاً فیزیکی رایج در ابتدای این قرن را کنار گذاشته‌اند، در حالی‌که الگوهای ریاضی‌ای که به زرادخانهٔ فیزیکدانها راه یافته‌اند به‌تدریج معنای فیزیکی یافته‌اند. در اینجاست که قابل اعتماد بودن ریاضیات به‌روشنی رخ می‌نمایاند.

بنابراین، الگوسازی ریاضی روشی پربار برای شناخت در علوم طبیعی است. اکنون می‌خواهیم الگوهای ریاضی را از نگاهی دیگر، یعنی مسألهٔ آموزش ریاضی بررسی کنیم.

سه روش آموزش ریاضیات

در آموزش ریاضیات روسی (هم در دبیرستان و هم در مقاطع بالاتر) ما پیرو نظام آموزشی اروپایی هستیم که براساس «بورباکی‌ای سازی» ریاضیات بنا شده است. (نیکلاس بورباکی نام مستعار گروهی از ریاضیدانان فرانسوی است، که از سال ۱۹۳۹ به انتشار مجموعه‌ای ازکتابها دست زده‌اند که در آنها شاخه‌های اصلی ریاضیات جدید به‌طور اصولی ـ یعنی به روش اصل موضوعی براساس نظریهٔ مجموعه‌ها ـ شرح داده شده است.)

اصولی کردن ریاضیات به نوعی تصنعی کردن آموزش آن منجر می‌شود، و این زیانی است که بورباکی‌ای سازی به آموزش ریاضیات وارد کرده است. نمونه‌ای شگرف مثال زیر است. از دانش‌آموزان سال ـ دومی مدرسه‌ای در فرانسه پرسیده‌اند «دو بعلاوهٔ سه چقدر می‌شود؟» پاسخ چنین بوده است «چون جمع تعویض‌پذیر است، می‌شود سه بعلاوهٔ دو.»

پاسخی واقعاً قابل تأمل! کاملاً درست است، اما دانش‌آموزان حتی به جمع کردن سادهٔ این دو عدد هم فکر نکرده‌اند، زیرا در تعلیم آنها تکیه بر ویژگیهای عملها بوده است. در اروپا، معلمان متوجهٔ نارساییهای این روش شده‌اند و بورباکی‌ای سازی را کنار گذاشته‌اند.

طی چند سال گذشته، آموزش ریاضیات روسی دستخوش تغییراتی به سبک امریکایی شده است. اساس این سبک این اصل است: آنچه را که برای کاربردهای عملی لازم است آموزش بدهید. درنتیجه، کسی که فکر می‌کند به ریاضیات احتیاجی نخواهد داشت اصلاً لازم نیست آن را بخواند. ریاضیات درسی اختیاری در دورهٔ راهنمایی و دبیرستان است ـ مثلاً، یک سوم دانش‌آموزان دبیرستانی جبر نمی‌خوانند. نتیجهٔ این امر را در مثال زیر روشن کرده‌ایم. در آزمونی برای دانش‌آموزان چهارده‌سالهٔ امریکایی از آنها خواسته شده بود که براورد کنند (نه اینکه حساب کنند، بلکه فقط براورد کنند) که اگر ۸۰درصد از عدد ۱۲۰ را برداریم این عدد چه تغییری می‌کند. سه نوع پاسخ را می‌توانستند انتخاب کنند: زیاد می‌شود، تغییری نمی‌کند، کمتر می‌شود. تقریباً ۳۰% دانش‌آموزان سؤال‌شونده پاسخ درست را برگزیده بودند. یعنی اینکه پاسخها را تصادفی انتخاب کرده بودند. نتیجه: هیچ‌کس هیچ‌چیز نمی‌داند. دومین ویژگی شاخص روش آموزش ریاضی امریکایی، کامپیوتری کردن آن است. جذابیت کار با کامپیوتر به خودی خود به گسترش تواناییهای فکری کمکی نمی‌کند. مثالی دیگر از یکی از آزمونهای امریکا می‌آوریم.

کلاسی ۲۶ دانش‌آموز دارد. این دانش‌آموزان می‌خواهند با اتومبیل به مسافرت بروند. در هر اتومبیل یک نفر از اولیا و چهار دانش‌آموز جا می‌شوند. چند نفر از اولیا را می‌توانیم دعوت کنیم؟

جوابی که تقریباً همه داده بودند ۶۵ نفر بود. جواب کامپیوتر $۶/۵ = ۴ \div ۲۶$ است، و دانش‌آموزان می‌دانستند که اگر جواب باید عددی صحیح باشد، می‌توان بلایی سر ممیز آورد ـ مثلاً، می‌توان اصلاً آن را برداشت.

نمونه‌ای دیگر از یکی از آزمونهای رسمی دانش‌آموزی در سال ۱۹۹۲ می‌آوریم:

رابطهٔ کدام زوج شباهت بیشتری به رابطهٔ میان زاویه و درجه دارد:

الف) زمان و ساعت

ب) شیر و کوارت[۱]

ج) مساحت و اینچ مربع

پاسخ، مساحت و اینچ مربع است، زیرا درجه کوچکترین واحد اندازه‌گیری زاویه و اینچ مربع کوچکترین واحد اندازه‌گیری مساحت است، اما ساعت را می‌توان به دقیقه هم تقسیم کرد.

طراح این مسأله مسلماً مطابق نظام امریکایی می‌اندیشیده است. می‌ترسم که طولی نکشد که ما هم به چنین سطح نازلی برسیم.[۲] مایهٔ شگفتی است که تعداد زیادی ریاضیدان و فیزیکدان برجسته در ایالات متحده وجود دارد.

امروزه آموزش ریاضیات ما آرام آرام از نظام اروپایی به نظام امریکایی تبدیل می‌شود. مطابق معمول، باز هم عقبیم، حدود سی سال از اروپا عقبتریم و بنابراین سی سال بعد زمان آن فرا می‌رسد که اوضاع را سروسامان بدهیم و از چاهی که با طناب نظام آموزشی امریکایی به آن رفته‌ایم بیرون بیاییم.

سطح آموزش ریاضی سنتی ما بسیار بالا و براساس آموزش مسأله‌های حساب بوده است. حتی تا همین بیست سال پیش هم خانواده‌هایی بودند که نسخه‌هایی از کتابهای قدیمی مربوط به مسأله‌های «سود و زیان» را داشتند.

۱) واحد اندازه‌گیری مایعات برابر با ۱/۴۴ لیتر.

۲) جو بِرمن، استاد ریاضیات در نیویورک، برایم توضیح داد که از نظر او که امریکایی است، پاسخ «درست» این مسأله کاملاً روشن است. او گفت که «اصل مطلب این است که من می‌توانم میزان حماقت طراح این مسأله را دقیقاً تصور کنم.»

در حال حاضر، همهٔ اینها از بین رفته است. در آخرین اصلاحات آموزش ریاضی، جبری‌سازی، دانش‌آموزان را به روبات تبدیل کرده است. مسأله‌های حساب است که «بی‌محتوایی» ریاضیاتی را که تدریس می‌کنیم نشان می‌دهند.

مثلاً این مسأله‌ها را در نظر بگیرید:

۱. سه‌تا سیب داریم. یکی را برمی‌داریم. چندتا باقی مانده است؟

۲. چند برش با اره لازم است تا تکه‌ای هیزم را به سه بخش تقسیم کنیم؟

۳. تعداد خواهران بوریس از تعداد برادرانش سه تا بیشتر است. در خانوادهٔ او تعداد دختران چندتا بیشتر از تعداد پسران است؟

از منظر حساب اینها مسأله‌های متفاتی هستند، زیرا محتوایشان فرق می‌کند. همچنین، تلاش فکری لازم برای حل کردن این مسأله‌ها هم کاملاً متفاوت است، هرچند که الگوی جبری هر سه آنها یکی است: $3 - 1 = 2$. جالب‌توجه‌ترین نکته در ریاضیات، فراگیر بودن شگفت‌آور الگوها و کارایی نامحدود آنها در مسأله‌های عملی است.

به‌قول ولادیمیر مایاکوفسکی، شاعر بزرگ روس: «کسی که اولین‌بار دو بعلاوهٔ دو می‌شود چهار را مطرح کرده است، حتی اگر با جمع کردن دوتا ته سیگار با دوتا ته سیگار دیگر به این حقیقت رسیده باشد، ریاضیدان بزرگی بوده است. هر کس پس از او به این نتیجه رسیده باشد، حتی اگر چیزهای بسیار بزرگتری، مثل لوکوموتیوها را با هم جمع کرده باشد، ریاضیدان نیست.» لوکوموتیوشماری، روش امریکایی آموزش ریاضیات است. چنین چیزی مصیبت‌بار است. طرز پیشرفت فیزیک در ابتدای سدهٔ اخیر نمونه‌ای است که نشان می‌دهد ریاضیات لوکوموتیوی به‌مراتب از ریاضیات ته سیگاری به‌دردنخورتر است: ریاضیات کاربردی نتوانسته همگام با فیزیک پیشرفت کند، در حالی‌که ریاضیات نظری هر آنچه را که فیزیکدانان برای بسط بیشتر دانش خودشان نیاز داشته‌اند برایشان فراهم کرده است. ریاضیات لوکوموتیوی از روال معمول عقب می‌ماند: تا حساب کردن با چرتکه را آموزش بدهیم، سر و کلهٔ کامپیوترها پیدا می‌شود. باید شیوهٔ فکر کردن را آموزش بدهیم، نه طرز فشار دادن دکمه‌ها را.

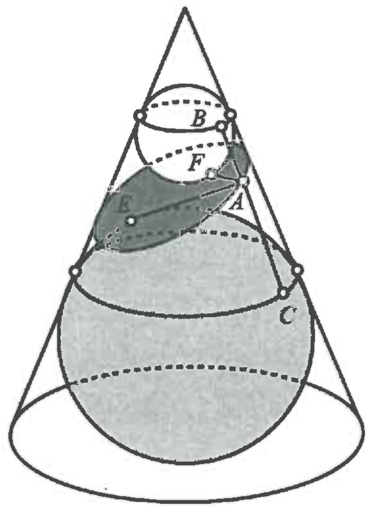
مسلماً، الگوهای ریاضی همیشه بلافاصله فایدهٔ عملی پیدا نمی‌کنند. گاهی ممکن است که فایدهٔ الگویی حتی دو هزار سال بعد معلوم شود. این، همان چیزی است که دربارهٔ مقاطع مخروطی پیش آمده است.

مقاطع مخروطی و قانون گرانش

مقاطع مخروطی را در یونان باستان کشف کرده‌اند و آپولونیوس پرگایی (۲۶۵ تا ۱۷۵ قبل از میلاد) در رساله‌ای هشت‌جلدی ویژگیهای آنها را شرح داده است. اما اولین‌بار، در قرن شانزدهم احتیاجی به این نظریه پیدا شد، و آن هم زمانی بود که یوهان کپلر داشت قانون گرانش خود را تدوین می‌کرد. تیکو براهه، معلم کپلر، طی بیست سال در رصدخانهٔ اورانیبورگ موقعیت سیاره‌های منظومهٔ شمسی را اندازه گرفته بود. کپلر، پس از مرگ معلمش، نتایج این یافته‌ها را از نظر ریاضی بررسی کرد و متوجه شد که مثلاً مدار حرکت مریخ بیضی است.

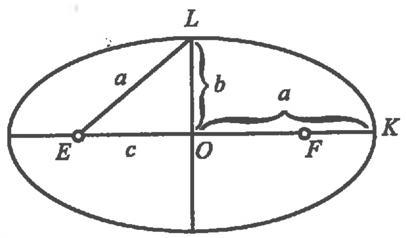
بیضی مکان هندسی نقطه‌هایی است که مجموع فاصله‌های هر یک از آنها تا دو نقطهٔ ثابت، به‌نام کانونهای بیضی، مقداری ثابت است. قضیه‌ای جالب، که متأسفانه در برنامهٔ دبیرستانی آن را ثابت نمی‌کنند، این است که

سطح مقطع مخروط و صفحه‌ای که به میزان خوبی نسبت به محور مخروط اریب است بیضی است. اثبات این قضیه نسبتاً ساده است (شکل ۱ را ببینید). دوکره‌ای راکه در مخروط محاط شده‌اند و بر صفحه (درکانونهای E و F بیضی) مماس‌اند کره‌های داندلن می‌نامند.



شکل ۱. بیضی با کانونهای E و F و کره‌های داندلن. دو مماسی که از یک نقطه بر کره رسم می‌شوند برابرند و درنتیجه $FA+EA=BA+AC=BC$، و طول BC مقداری ثابت است.

برای اینکه زنجیرهٔ استدلالهای کپلر را بفهمیم، لازم است که تعدادی از نتایج ساده دربارهٔ هندسهٔ بیضی را بدانیم. می‌توان ثابت کرد که طول OK، طول نیمقطر بلندتر بیضی، که معمولاً آن را با a نشان می‌دهند (شکل ۲ را ببینید)، برابر است با طول وتر EL از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن برابر است با $b=OL$ (OL را نیمقطر کوتاهتر بیضی می‌نامند) و طول ضلع دیگر آن برابر است با $c=EO$. نسبت $\frac{c}{a}$ شکل بیضی را مشخص می‌کند و آن را خروج از مرکز بیضی می‌نامند، زیرا با جای کانونها نسبت به مرکز بیضی متناسب است. خروج از مرکز را معمولاً با e نشان می‌دهند.



شکل ۲. کانونها، نیمقطرها و خروج از مرکز بیضی

بنابر قضیهٔ فیثاغورس، اگر مقدار e کوچک باشد، نسبت طول نیمقطرها برابر است با

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\cong 1-\frac{e^2}{2}$$

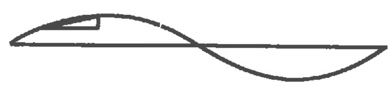
درنتیجه، بیضی‌ای که خروج از مرکزش کوچک است تقریباً فرقی با دایره ندارد. مثلاً، اگر $e=0{,}1$، قطر کوچک بیضی فقط به‌اندازهٔ $\frac{1}{200}$ طول قطر بزرگ بیضی از آن کوتاهتر است. در چنین بیضی‌ای که طول قطر بزرگ آن ۱ متر است، طول قطر کوچک فقط نیم سانتی‌متر کوتاهتر است، و درنتیجه این بیضی با دایره فرق قابل توجهی ندارد؛ هرچند که کانونهای این بیضی ۵ سانتی‌متر از مرکز آن فاصله دارند، که کاملاً قابل توجه است.

دستور

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\cong 1-\frac{e^2}{2}$$

(که یعنی طول ضلع بلندتر زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ کشیده شده عملاً با طول وتر آن برابر است و تقریب خوبی برای محاسبهٔ تفاضل طولهای آنهاست) یکی از برجسته‌ترین نتیجه‌ها در تمام ریاضیات است (و متأسفانه آن را در مدارس آموزش نمی‌دهند).

مثلاً، فرض کنید مسیر بازگشتتان به خانه خمی سینوسی است. مسیرتان چقدر از هنگامی که روی خطی راست حرکت می‌کنید طولانیتر است (شکل ۳ را ببینید)؟ البته، نظر اول (که دو برابر است) اغراق است. با وجود این، به‌نظر می‌رسد که طول مسیر خمیده یک برابر و نیم طول مسیر مستقیم است. در واقع امر، طول این مسیر فقط حدود ۲۰٪ بیشتر است. دلیل این امر این است که خم سینوسی فقط کمی به سمت محور خم شده است، و درنتیجه طول وتر متناظر به مقدار ناچیزی از طول ضلع زاویهٔ قائمه بلندتر است.

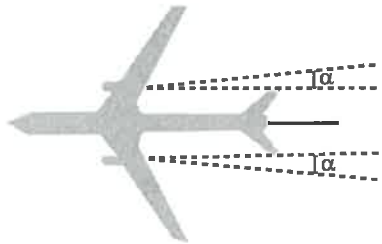


شکل ۳. خم سینوسی چقدر بلندتر از خط راست است؟

کاربرد دیگری از این دستور می‌آوریم. موتور هواپیماهای جت اولیه را به بالهای آنها را نزدیک بدنهٔ هواپیما وصل می‌کردند و درنتیجه، فشار هوایی که از موتورها خارج می‌شد به دمها صدمه می‌زد. طراحان هواپیما، که با دستوری که آن را بررسی کردیم آشنا بودند، موتورها را به‌اندازهٔ زاویهٔ کوچکی مانند α کج کردند (شکل ۴ را ببینید). جای دمها تغییر نکرد (انحراف جریان هوا متناسب با α است)، و در عین حال قدرت پیشرانه عملاً ثابت ماند (قدرت هدر رفته تقریباً $\frac{\alpha^2}{2}$ است، که در آن α برحسب رادیان است ـ به‌ازای زاویهٔ 3° فقط حدود $\frac{1}{800}$ قدرت هدر می‌رود).

دوباره کارهای کپلر را بررسی می‌کنیم. او ابتدا فکر می‌کرد که مدار مریخ دایره است. اما از قضا موقعیت خورشید ۰٫۱ شعاع مدار نسبت به مرکز آن جابه‌جا بود. کپلر به این نتیجه (که در نوع خودش قابل توجه بود) قانع نشد ـ زیرا او با نظریهٔ مقاطع مخروطی آشنایی داشت. کپلر می‌دانست که بیضی‌ای که خروج از مرکزش کوچک

است بسیار شبیه دایره به‌نظر می‌آید و بررسی کرد که تغییرات کمی که مدار مریخ نسبت به دایره دارد چه اثری دارد. جالب است که کسب این نتایج فقط در سایهٔ دقت فوق‌العادهٔ یافته‌های تیکو براهه، که او هم با چشم غیرمسلح کار می‌کرده است، ممکن شده است. در آن زمان، اخترشناسان خیلی به تلسکوپ متکی نبودند و حتی بعد از آن، در اواخر قرن هفدهم بود که معلوم شد یافته‌هایی که با تلسکوپ به‌دست می‌آیند به مراتب دقیقتر از یافته‌هایی هستند که با چشم غیرمسلح به‌دست می‌آیند.



شکل ۴. حفظ کردن دمها

تئوریهای جدید فیزیک معمولاً با اصلاح مهمترین دستاوردهای تئوریهای قبلی به‌وجود می‌آیند. اگر کپلر کار را به همان یافتن مدار دایره‌ای غیرعادی ختم کرده بود، یا اگر یافته‌های تیکو براهه دقت کمتری داشت، بسط و گسترش مکانیک سماوی (و شاید کل فیزیک نظری) شاید حتی قرنها به تعویق می‌افتاد.

معلوم شد که مدار مریخ در امتداد خطی عمود بر قطری از آن که از خورشید می‌گذرد کمی، در حدود نیم درصد ـ یعنی به‌اندازهٔ $\frac{e^2}{2}$، پخ است. همین نکته کپلر را به فکر بیضوی بودن مدار سیارات انداخت.

اگر ریاضیدانان پیشتر نظریهٔ مقاطع مخروطی را پی‌ریزی نکرده بودند، برخی قانونهای اصلی حاکم بر طبیعت به موقعش کشف نمی‌شدند، علوم و فن‌آوریهای جدید پدید نمی‌آمدند و تمدن در همان سطح ابتدایی می‌ماند. دست‌کم سیر تاریخ کاملاً متفاوت می‌بود.

کپلر قوانین حرکت سیارات را کشف کرد، اما این مطلب را که سیارات واقعاً روی مداری بیضوی حرکت می‌کنند نیوتن در کتابش اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعت (۱۶۷۸) ثابت کرد، و همین کتاب پایهٔ تمامی فیزیک نظری جدید را استوار ساخت. نیوتن از قانون جاذبهٔ عمومی‌اش نتیجه گرفت که مدار حرکت سیارات بیضوی است. خاطرنشان می‌کنیم که رابرت هوک پیش از نیوتن این مسأله را بررسی کرده بود. او مسألهٔ حرکت اجسام را در میدانی گرانشی که در آن نیروی گرانش با مربع فاصله نسبت عکس دارد بررسی کرده بود. هوک به‌طور تقریبی از معادلهٔ حرکت انتگرال گرفته بود و با ترسیم مدارها دریافته بود که آنها شبیه به بیضی‌اند. شرافت علمی او اجازه نداد که این مدارها را بیضی فرض کند و نتوانست بیضی بودن آنها را ثابت کند. بنابراین، هوک آنها را بیضیوار نامید و به نیوتن پیشنهاد کرد که ثابت کند قانون اول کپلر (که سیارات روی مداری بیضوی حرکت می‌کنند) از قانون عکس مربعات نتیجه می‌شود. نیوتن، که نظریهٔ باستانی مقاطع مخروطی را بسیار خوب می‌دانست، به این سؤال با ترسیمات پیچیده

براساس هندسهٔ مقدماتی پاسخ داد.

بعد از این، خمهای درجهٔ دوم بارها و بارها در تحقیقات علمی ظاهر شدند. چرا این الگو در مسأله‌های کاربردی اینقدر به دردبخور از آب درآمده است؟ به‌ویژه، چرا می‌توان حرکت سیارات را با الگوی مقاطع مخروطی شرح داد؟ پاسخ این سؤال مشخص نیست، و این سؤال نوعی معماست. این سؤال هیچ پاسخی ندارد. ما به قدرت جادویی علوم عقلی ایمان داریم. نیوتن در اینجا به اثباتی برای وجود خداوند پی برده است: «این مجموعهٔ خوش‌ترکیب از خورشید، سیارات و ستاره‌های دنباله‌دار مگر به اراده و قدرت قادرترین و داناترین موجود به‌وجود نمی‌آمده است. . . . او بر همه‌چیز حاکم است. نه چون پیشوای کائنات، که چون صاحب عالم، و به‌سبب تفوقش در خور نام خداوند قادر متعال است.»

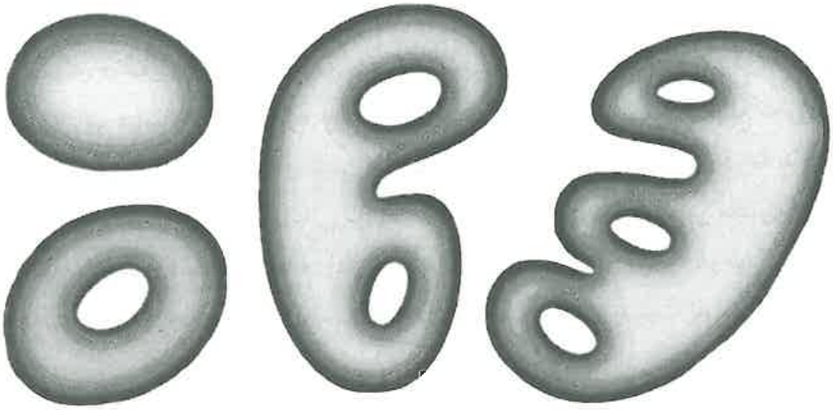
کاوشگران فضا در عصر نو هم برای طراحی روش پرتاب ماهواره از ویژگیهای مقاطع مخروطی استفاده می‌کنند. بنابراین، کارهای پیشین آپولونیوس شالودهٔ فیزیک جدید و تحولات عظیم در علم و فن‌آوری شده است. با وجود این، این ریاضیدان نامدار یونانی هنگام تحقیق دربارهٔ مقاطع مخروطی فقط به زیبایی الگوی ریاضی آن می‌اندیشیده است.

کامپیوترها، مکانیک کوانتومی و رویه‌های ریمانی

مثالی دیگر، سرگذشت تکوین کامپیوتر است. مدتها پیش از اینکه نخستین کامپیوتر ساخته شود، دو جزءِ اصلی آن که مربوط به ریاضیات‌اند در ریاضیات وجود داشته‌اند: منطق ریاضی (به‌ویژه جبر بول، که جورج بول، ۱۸۱۵ تا ۱۸۶۴، آن را ابداع کرده بود) و طراحی کلی ماشین محاسبه. نخستین ماشین حساب را بلز پاسکال، ریاضیدان فرانسوی، در سال ۱۶۴۱ ساخته است.

مثال سوم، بسط مکانیک امواج توسط اروین شرودینگر است. زمانی که شرودینگر به سراغ مسألهٔ نوسان رفت، از قبل تعبیر ماتریسی مکانیک کوانتومی از ورنر هایزنبرگ شناخته شده بود. معلوم نبود که چگونه می‌توان طیفی گسسته را به‌جای طیفی پیوسته از نظریهٔ امواج در سراسر فضا به‌دست آورد. شرودینگر از کارهای هرمان وایل، ریاضیدان مشهور آلمانی، کمک گرفت. اگر نتایجی که وایل در نظریهٔ طیفی روی بازه‌ای نامتناهی به‌دست آورده بود نبود، هرگز چیزی از معادلهٔ مشهور شرودینگر نمی‌شنیدیم. همان ماجرای قبلی: ریاضیدانی با نظریه‌ای که برای کاربرد ــ شرایط مرزی در بینهایت ــ مهیاست پیدایش می‌شود، و تنها کاری که باید کرد به‌کار بردن نظریه است.

مثال بعدیِ رویه‌های ریمانی است. این رویه‌ها را برنهارد ریمان، ریاضیدان آلمانی، در اواسط سدهٔ گذشته معرفی کرده است. این رویه‌ها از بریدن مناسب و چسباندن تعدادی (حتی تعدادی نامتناهی) صفحه از یک متغیر مختلط به‌دست می‌آیند. از نظر توپولوژی، چنین رویه‌ای ممکن است کره باشد، یا کره‌ای دسته‌دار باشد (شکل ۵ را ببینید)، یا خیلی چیزهای دیگر. نظریهٔ رویه‌های ریمانی به‌عنوان بخشی از نظریهٔ توابع یک متغیرهٔ مختلط شکل گرفت. بعدها، رویه‌های ریمانی در مسأله‌هایی کاملاً متفاوت به‌کار آمدند. مثلاً، انتگرالهای بیضوی روی رویه‌های ریمانی تعبیر هندسی ساده‌ای پیدا کردند.



شکل ۵. رویه‌های ریمانی

کارل گوستاو ژاکوبی ثابت کرد که رویه‌های ریمانی بر دو مسألهٔ دیگر «تأثیرگذارند»:

۱. تعیین تعداد راههای نوشتن عددی صحیح به شکل مجموع چهار مربع کامل.

۲. بررسی نوسانات آونگ، که منجر به معادلهٔ دیفرانسیل

$$x'' \doteq -\sin x$$

می‌شود.

تابعهای مثلثاتی و شمردن مارها

به‌عنوان مثال پنجم، مثلث معروف برنولی-اویلر را در نظر بگیرید:

۱
۰ ۱
۱ ۱ ۰
۰ ۱ ۲ ۲
۵ ۵ ۴ ۲ ۰
۰ ۵ ۱۰ ۱۴ ۱۶ ۱۶
۶۱ ۶۱ ۵۶ ۴۶ ۳۲ ۱۶ ۰
۰ ۶۱ ۱۲۲ ۱۷۸ ۲۲۴ ۲۵۶ ۲۷۲ ۲۷۲

این مثلث به‌صورت زیر تکمیل می‌شود. در سطر شمارهٔ ۰، می‌نویسیم ۱. در هر سطر با شمارهٔ فرد (سطرهای اول،

سوم، و همین‌طور تا آخر) از سمت راست در هر جای خالی مجموع عددهای سطر قبل را که سمت راست این جای خالی قرار دارند می‌نویسیم. سطرهای با شمارهٔ زوج هم به همین ترتیب منتها از سمت چپ پر می‌شوند.

اعجاز نهفته در این مثلث را یکصد سال قبل کشف کرده‌اند. سررشتهٔ این کشف، قضیهٔ «ساده»ی زیر است (ریاضیدانان اغلب این حقیقت را که هر چیزی نسبتاً ساده است کتمان می‌کنند):

$$\sec t + \tan t = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}$$

که در آن k_nها عددهای روی ضلعهای مورب مثلث برنولی-اویلرند (k_n بزرگترین عدد در سطر nام است).

درنتیجه، ضریبهای در امتداد ضلع مورب سمت چپ، بسط تابع $\tan x$ به سری توانی را به‌دست می‌دهند (این تابع فرد است، و درنتیجه بسط آن فقط شامل جمله‌های از درجهٔ فرد است):

$$a_1 = \frac{k!}{1!} = 1, \quad a_3 = \frac{k_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{k_5}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}, \cdots$$

و

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

به‌طور مشابه، ضلع مورب سمت راست، بسط تابع سکانت را به‌دست می‌دهد.

از مثلث برنولی-اویلر می‌توان رده‌بندی توپولوژیکی چندجمله‌ایهای حقیقی مانند

$$a^{n+1} + a_1 x^n + \cdots + a_{n+1}$$

را که همهٔ n نقطهٔ بحرانی (اکسترممهای نسبی) آنها حقیقی و متمایزند به‌دست آورد.

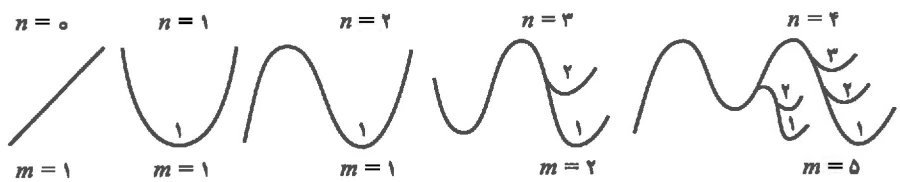
نمودار چنین چندجمله‌ایهایی شبیه مار است، و بنابراین آن را مار می‌نامیم. به‌ازای $n \leq 4$، همهٔ گونه‌های ممکن مارها در شکل ۶ نشان داده شده است. دو مار را از یک گونه می‌دانیم که بتوان آنها را با تغییر هموار متغیرهای مستقل و وابسته که جهت را حفظ می‌کند به هم تبدیل کرد.[3] مثلاً، مارهای چندجمله‌های درجهٔ ۴ ($n = 3$) را در نظر بگیرید. در اینجا نقطه‌های بحرانی حتماً به‌ترتیب مینیمم-ماکسیمم-مینیمم ظاهر می‌شوند. نوع توپولوژیکی مار براساس اینکه آخرین مینیمم، پایین اولین مینیمم است یا بالای آن مشخص می‌شود. بنابراین، به‌ازای $n = 3$ تعداد انواع مارها برابر با ۲ است.

در مورد مارهایی که در آنها $n = 4$، (ماکسیمم-مینیمم-ماکسیمم-مینیمم) دومین ماکسیمم هم ممکن است پایین اولین ماکسیمم باشد هم بالای آن. در حالت اول دو موقعیت برای مینیمم دوم وجود دارد (پایین یا بالای مینیمم اول، اما همواره پایین هر دو ماکسیمم) و در حالت دوم سه موقعیت وجود دارد. درکل، پنج نوع مار وجود دارد.

۳) یعنی وقتی چندجمله‌ایهای $p(x)$ و $q(x)$ که مارها را تعریف می‌کنند با معادلهٔ $p(x) = f(q(g(x)))$، که در آن مشتقهای تابعهای f و g مثبت‌اند، به هم مربوط باشند. می‌توانید این تبدیلها را جمع شدن و کشیده شدن نامنظم صفحهٔ مختصات در امتداد محورها تصور کنید، بی‌آنکه تا شود یا پشت و رو شود.

اگر کمی حوصله به خرج دهید و همهٔ مارها را به‌ازای $n = ۵$ بکشید، قانع می‌شوید که ۱۶ نوع از این مارها وجود دارد، و به‌ازای $n = ۶$، ۶۱ نوع مار وجود دارد (باز هم می‌توان آنها را رسم کرد). اکنون که عدد اویلر ۶۱ در یکی از رده‌بندیها ظاهر شده است، باید دور و بر خود را نگاه کنیم و ببینیم آیا بقیهٔ این عددها هم این اطراف هستند یا نه.

اکنون مارها را براساس «دمها»یشان ـ یعنی، براساس آخرین نقطه‌های بحرانی سمت راست آنها ـ رده‌بندی می‌کنیم. این n مقدار بحرانی را به‌ترتیب صعودی (از پایین) با عددهای ۱، ۲، ... و n شماره‌گذاری کنید. شمارهٔ هر نقطهٔ بحرانی را ارتفاع آن می‌نامیم. ارتفاع دم برخی مارها را در شکل ۶ مشخص کرده‌ایم. مثلاً، پنج ماری را که



شکل ۶. رده‌بندی مارها: n تعداد پیچها و m تعداد انواع مارهاست.

به‌ازای $n = ۴$ به‌دست می‌آیند براساس ارتفاع دمهایشان به شکل زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

ارتفاع دم	۱	۲	۳	۴
تعداد مارها	۲	۲	۱	۰

اگر سطر پایین این جدول را با عددهای مثلث برنولی ـ اویلر (یعنی با عددهای سطر سوم آن، با شمردن از سطر ۰) مقایسه کنیم، معلوم می‌شود که این سطرها یکی‌اند. پس طبیعی است که مجموع $۰ + ۱ + ۲ + ۲$ (که برابر با $k_۴$ است) تعداد کل انواع مارهای چهار پیچ باشد.

می‌توانید مطمئن باشید که همواره تعداد مارهایی که n پیچ دارند و ارتفاع دمهایشان متفاوت است (به ترتیبی) با عددهای سطر متناظرشان در مثلث برنولی ـ اویلر برابر است. با دانستن این موضوع، که به خودی خود دور از انتظار است (و به ناچار کمی به کار عملی، یعنی کشیدن مارها، احتیاج داشت)، می‌توانیم ثابت کنیم که طبقه‌بندی مارها براساس طول دمهایشان در قاعدهٔ بازگشتی‌ای که مثلث برنولی ـ اویلر را مشخص می‌کند صدق می‌کند.

مانند دستور تحلیلی

$$K(t) = \sec t + \tan t$$

برای

$$K(t) = \sum_{n=۰}^{\infty} k_n \frac{t^n}{n!}$$

می‌توان این مطلب را به‌صورت زیر ثابت کرد.

ماری با $n+1$ پیچ در نظر بگیرید ($n \geq 1$). بلندترین ماکسیمم نسبی آن را انتخاب کنید و آن را تا بینهایت بالا بکشید. این کار مار موردنظر را به دو مار کوچکتر تکه می‌کند و تعداد کل نقطه‌های بحرانی را یکی کم می‌کند. به‌روش مشابه، می‌توان پایینترین مینیمم نسبی را تا $-\infty$ پایین کشید (و قسمت سمت چپ را برگرداند تا ماری معمولی به‌دست آید).

از این روش کم کردن تعداد نقطه‌های بحرانی، رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آید: به‌ازای $n \geq 1$،

$$2k_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k_i k_{n-i}$$

که در آن حاصلضرب $k_i k_{n-i}$ تعداد زوجهای ممکن از همهٔ «بچه‌مارها»ست؛ ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{i}$ برای حساب کردن آرایشهای دوبه‌دو مجزای ممکن مقادیر بحرانی در دو قسمت است (می‌توان هر i عددی را که از عددهای ۱، ۲، . . . و n انتخاب شده است، مثلاً ارتفاعهای پیچهای قسمت سمت چپ نسبت به n پیچ کل مار دانست)؛ و ضریب ۲ در سمت چپ تساوی مربوط به دو راهی است که می‌توان مار $(n+1)$ام را تکه کرد، که درنتیجه در مجموع سمت راست به‌حساب می‌آیند. به‌ازای $n=0$، ضریب ۲ را باید برداشت (چرا؟).

این رابطه را می‌توان برحسب تابع K به شکل معادلهٔ دیفرانسیل

$$2\frac{dK}{dt} = 1 + K^2$$

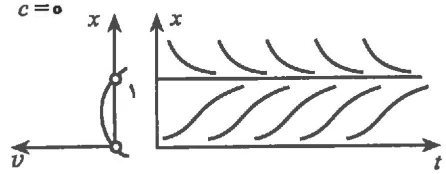
نوشت (ببینید می‌توانید این تساوی را مستقیماً ثابت کنید). درنتیجه $K(t) = \sec t + \tan t$ (این تابع در معادلهٔ بالا با شرط اولیهٔ $K(0) = k_0 = 1$ صدق می‌کند).

از بهترین روش ماهیگیری تا بهترین روش اصلاحات

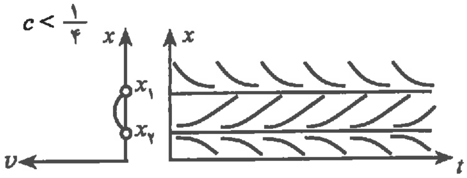
این هم مثال آخر. الگوی تغییرات جمعیت در دسته‌ای از حیوانات (مثلاً ماهیهای یک استخر یا اقیانوس) را در نظر بگیرید. در ساده‌ترین حالت، این وضعیت را می‌توان با الگوی $x' = kx$ توصیف کرد، که در آن $x = x(t)$ میزان جمعیت در زمان t است ــ یعنی آهنگ تغییر جمعیت با خود جمعیت (با ضریب k) متناسب است. جواب این معادله تابع نمایی $x(t) = x(0)e^{kt}$ است.

با وجود این، در عمل، شرایط زندگی با زیاد شدن x بدتر می‌شود و ضریب k کوچک می‌شود. مثلاً اگر فرض کنیم $k = a - bx$، به معادلهٔ معروف لجستیک می‌رسیم. در حالتی که $a = b = 1$، جوابهای این معادله به جمعیت پایدار $x = 1$ میل می‌کنند (شکل ۷ را ببینید).

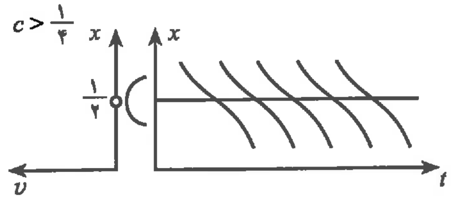
علاوه بر این، اگر سهمی به‌اندازهٔ c برای صید یا مرگ و میر در نظر بگیریم، معادلهٔ موردنظر فقط کمی تغییر می‌کند: $x' = x - x^2 - c$. این الگو، ساده‌ترین الگوی پرورش ماهی است.



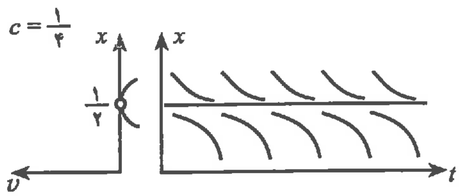
شکل ۷. پایدارسازی جمعیت: همهٔ مسیرها به جواب پایدار $x = 1$ میل می‌کنند.



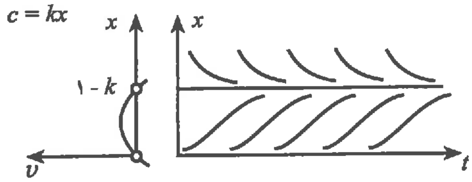
شکل ۸. الگوی ماهیگیری با صید «متوسط». در جمعیت اولیه $x(0) < x_2$، **جمعیت** از بین می‌رود؛ مسیرهایی که به‌ازای آنها $x(0) > x_2$ همگی به $x = x_1$ میل می‌کنند.



شکل ۹. صید بی‌رویه. جمعیت همواره از بین می‌رود.



شکل ۱۰. از بین رفتن جمعیت در برنامه‌ای بهینه. مسیرهای در دامنهٔ $x < \frac{1}{2}$ به نابودی می‌روند، آنهایی که در دامنهٔ $x \geq \frac{1}{2}$ قرار دارند به وضعیت پایدار $x = \frac{1}{2}$ میل می‌کنند، اما در یک دورهٔ طولانی، به دلیل آشفتگیهای تصادفی کوچک باز هم به منطقهٔ خطر برخورد می‌کنند.



شکل ۱۱. پایدارسازی سیستم بر اساس بازخورد (با شکل ۷ مقایسه کنید).

به‌ازای $c < \frac{1}{4}$، باز هم جوابی نامتغیر به‌دست می‌آید (شکل ۸ را ببینید). به‌ازای $c > \frac{1}{4}$، انقراضی ناگهانی رخ می‌دهد (شکل ۹ را ببینید).

به‌ازای $c = \frac{1}{4}$، الگوی نامتغیر در $x = \frac{1}{2}$ است (شکل ۱۰ را ببینید). اما این وضعیت ناپایدار است: خطاهای کوچک تصادفی فاجعه به‌بار می‌آورند-یعنی نابودی جمعیت. اگر جمعیت را در سطحی پایدار نگه داریم، چگونه می‌توان به بهترین صید دست یافت؟ جواب این نیست که برنامه‌ای ثابت برای صید در نظر بگیریم، بلکه باید بازخورد را هم در نظر بگیریم-یعنی، میزان صیدی متناسب با ذخایر واقعی. در مدلی با بازخورد $x' = x - x^2 - kx$، بهترین مقدار برای ضریب k، $\frac{1}{2}$ است. به‌ازای این مقدار k، همهٔ جوابها در سطح $x_0 = \frac{1}{2}$ پایدار می‌شوند، یعنی اینکه میانگین صید در یک دورهٔ طولانی $kx_0 = \frac{1}{4}$ است (شکل ۱۱ را ببینید). این میزان همان میزان صید در برنامه‌ای ثابت به‌اندازهٔ بیشترین مقدار مجاز است.

در این حالت، بهره‌وری بیشتر ممکن نیست. اما در برنامهٔ ثابت، سیستم پایداریش را از دست می‌دهد و بی‌تردید خود را نابود می‌کند، در حالی‌که توجه به بازخورد آن را پایدار می‌سازد و تغییرات کوچک در ضریب k منجر به فاجعه نمی‌شود.

بجاست افرادی که تصمیمات سرنوشت‌ساز می‌گیرند با الگوهای مشابه و قواعد دیگر برای تصمیم‌گیریهای راهبردی برای جامعه آشنا باشند.

بررسیهای سادهٔ ریاضی-اینکه قوانین طبیعت را می‌توان با معادلات دیفرانسیل توصیف کرد-درک پدیده‌های به‌ظاهر پیچیده را در زندگی ممکن می‌کنند. دهه‌های متمادی وضعیت اقتصادی روسیه مایهٔ نگرانی کارشناسان بوده است: نظامی‌گری، انحصارطلبی و بی‌کفایتی کلی زمامداران باعث شده بود مشتق دوم به‌طور ثابتی منفی بماند (یعنی، آهنگ پیشرفت پیوسته کاهش یافته است). کسانی که ریاضی نمی‌دانند، از این موضوع واقعاً به وحشت نمی‌افتند، زیرا مشتق اول همچنان مثبت است (یعنی رفاه اجتماعی همچنان رو به افزایش است). با این حال، ریاضیدانان می‌دانند که مشتقی که همواره منفی است، حتی اگر از مرتبه‌های بالا باشد، سرانجام مشتق اول را هم منفی می‌سازد-یعنی منجر به کاهش تولید و رفاه اجتماعی می‌شود، و وقتی وخامت اوضاع چشمگیر باشد، شدیدتر هم می‌شود. به‌دلیل سستی در دستگاه حکومت، اصلاً راهی فوری برای تغییر وضعیت موجود وجود ندارد، زیرا هر نوع تغییری فقط روی علامت مشتقی از مرتبه‌های بالا تأثیر دارد (در پروستریکا، مشتق سوم یا حتی چهارم). بنابراین، اوضاع بد اقتصادی که شاهدش هستیم، نتیجهٔ اشتباهات گذشته در زمان تصمیم‌گیری دربارهٔ افزایش تولید است، نه تصمیم‌گیریهای غلط جدید. متأسفانه، بسیار دشوار است که این مطالب سادهٔ ریاضی را برای کسی که مشکل معیشتی دارد و همهٔ مشکلاتش را مربوط به اصلاحات ناموفق می‌داند توضیح داد. هر اصلاحاتی، حتی اگر اقدامی کاملاً صحیح باشد، بی‌تردید منجر به وخامت اوضاع می‌شود.

در این کشور برنامه‌ها طوری طرح‌ریزی می‌شوند که میزان تولید برای ۲۰ سال (که «برای عمر ما به‌قدر کافی طولانی است») بهینه باشد. برای ریاضیدانان به‌روشنی معلوم است که هر نوع برنامه‌ریزی بهینه از این دست، در پایان دوره، موجب نابودی کامل همهٔ منابع می‌شود (در غیر این صورت، منابع باقی‌مانده را می‌توان مصرف کرد و

درنتیجه برنامهٔ موردنظر بهینه نیست). خوشبختانه، برنامه‌ها «اصلاح» می‌شده‌اند و هرگز به انجام نمی‌رسیده‌اند. با این همه، جهت‌گیریهای اصلی همچنان پابرجا هستند و درنتیجه به‌طورکلی همهٔ آنچه را که در ابتدای پروستریکا داشته‌ایم از بین برده‌ایم.

تلاش برای پدید آوردن برنامه‌های اصلاحات اقتصادی مشروح «روزبه‌روز»، شبیه تلاش برای برنامه‌ریزی برای کل اقتصاد و شبیه تلاش برای دقیقه‌به‌دقیقه راهنمایی کردن کسی است که از مسکو به سنت‌پترزبورگ رانندگی می‌کند: «در فلان دقیقه بپیچ به راست؛ در فلان دقیقه بپیچ به چپ، ...». پیشرفت فقط از طریق در نظرگرفتن بازخورد به‌دست می‌آید. یعنی، آنچه که برای پیشرفت احتیاج است، داشتن برنامه (مسیر) نیست، بلکه، به زبان ریاضی، میدانی برداری در فضای اوضاع حکومت است، یعنی شیوه‌ای برای تصمیم‌گیری براساس وضع به‌وجود آمده، نه براساس تقویم.

برخی از این نکات را به هنگام فرا رسیدن زمان اصلاح برنامه‌های نظام آموزشی هم باید به‌خاطر داشت. از مثالهایی که آوردیم معلوم می‌شود که «چیزی عملی‌تر از یک نظریهٔ خوب وجود ندارد». ضروری است که مربیان دنباله‌رو احتیاجات عملی فعلی نباشند، بلکه همواره اهداف بلندمدت جامعه را مدنظر داشته باشند.

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

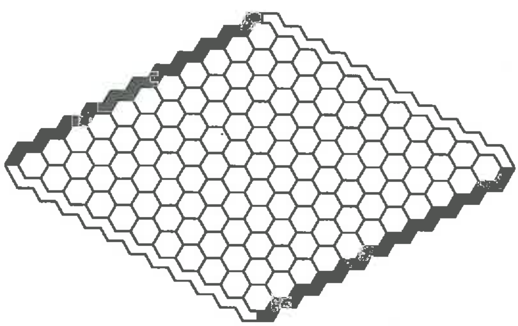
Vladimir Arnold, Why study mathematics?, *Quantum*, Sept./Oct. 1994.

بازی هگز

سید عباس موسوی

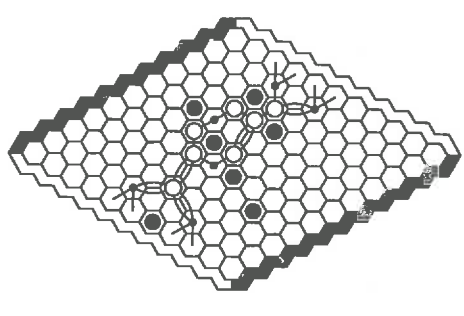
بازی هگز در سال ۱۹۴۲ به‌وسیلهٔ پیت هین، شاعر و فیزیکدان دانمارکی ابداع شد، در سال ۱۹۴۸ جان نش آن را به سرگرمی اوقات فراغت جمعی از بزرگترین ریاضیدانها در مؤسسهٔ مطالعات عالی پرینستون تبدیل کرد و بالاخره، مارتین گاردنر در سال ۱۹۵۹ آن را به مردم معرفی کرد. این بازی، با وجود قوانین بسیار ساده‌اش، عمق و غنای فوق‌العاده‌ای دارد و ریاضیدانهای بسیاری را به خود مشغول کرده است.

بازی هگز، معمولاً روی صفحه‌ای ۱۱ × ۱۱، ۱۴ × ۱۴ یا ۱۹ × ۱۹ به شکل زیر انجام می‌شود.

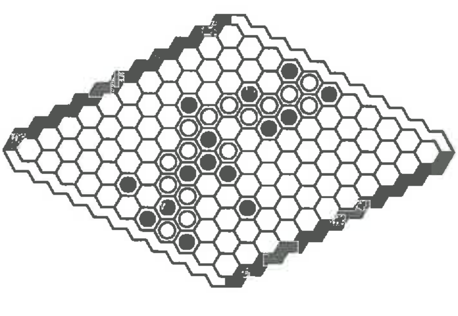


شکل ۱

بازیکن سفید و بازیکن سیاه، هرکدام صاحب دو ضلع مقابل این لوزی هستند و هر یک به نوبت یکی از مهره‌هایش را در خانه‌ای خالی قرار می‌دهد و برنده، بازیکنی است که زودتر بتواند دو ضلع مربوط به خودش را با زنجیری پیوسته از مهره‌هایش به هم وصل کند. مثلاً، در شکل ۲ (الف) بازیکن سفید برنده است و در شکل ۲ (ب) هم، با احتساب «دوراهیها»، بازیکن سفید برنده است.



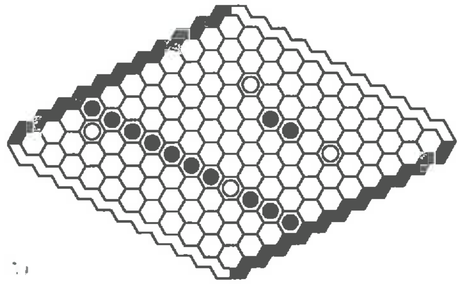
شکل ۲ (الف)

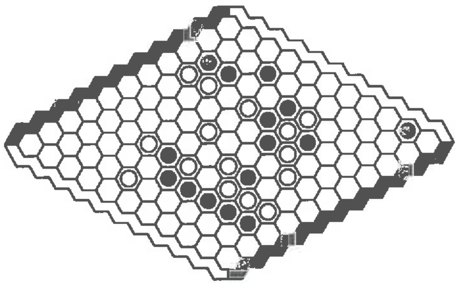


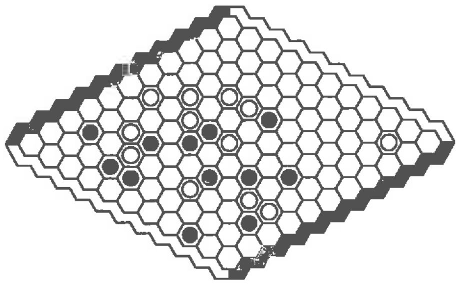
شکل ۲ (ب)

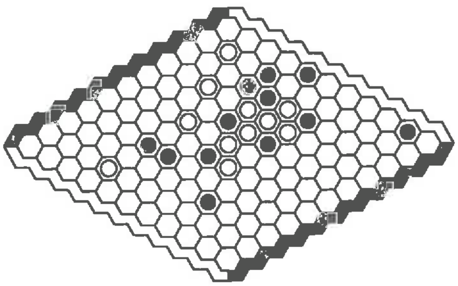
پیش از ادامهٔ بحث، پیشنهاد می‌کنیم که یک صفحهٔ هگز بسازید و با دوستانتان بازی کنید تا با بازی و پیچیدگیهایش آشنا شوید (اگر پیدا کردن همبازی سخت است، می‌توانید از کامپیوتر استفاده کنید). ابتدا، معماهای زیر را حل کنید:

- در شکل ۳ (الف)، نوبت بازیکن سفید است. راهی برای برنده شدن او پیدا کنید.
- در شکل ۳ (ب)، نوبت بازیکن سیاه است. راهی برای برنده شدن او پیدا کنید.
- در شکل ۳ (ج)، نوبت بازیکن سفید است. راهی برای برنده شدن او پیدا کنید.
- در شکل ۳ (د)، نوبت بازیکن سفید است. راهی برای برنده شدن او پیدا کنید.


شکل ۳ (الف)


شکل ۳ (ب)


شکل ۳ (ج)

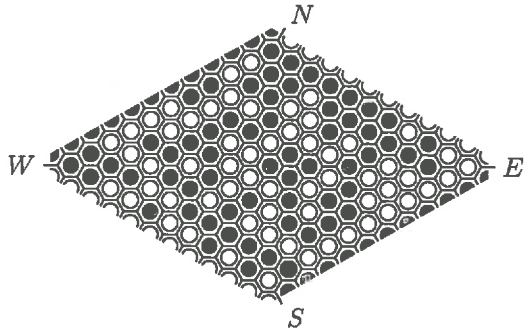

شکل ۳ (د)

یکی از خاصیتهای جالب بازی هگز، این است که همیشه، یکی از بازیکنها برنده می‌شود و بازی، هرگز به تساوی ختم نمی‌شود.

قضیهٔ ۱ . بازی هگز به تساوی ختم نمی‌شود.

برهان. کافی است ثابت کنیم که اگر هیچ خانهٔ خالی‌ای در صفحه وجود نداشته باشد، حتماً یکی از دو بازیکن برنده شده است.

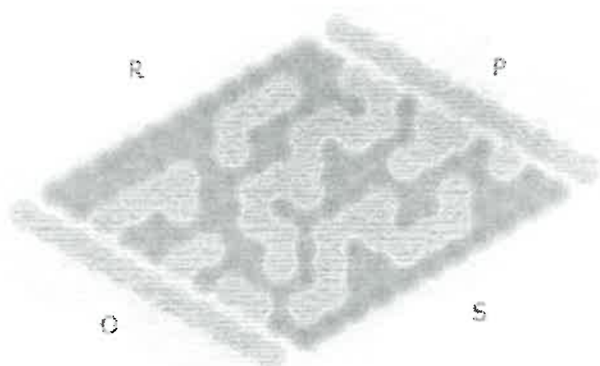
صفحهٔ پر شدهٔ شکل ۴ را در نظر بگیرید و دو ردیف مهرهٔ سفید به دو ضلع سفید و دو ردیف مهرهٔ سیاه به دو ضلع سیاه اضافه کنید (مهره‌های اضافه شده را در شکل ۴ به‌صورت بریده نشان داده‌ایم).
مسیری را از W شروع می‌کنیم و در هر رأس، مسیر را طوری ادامه می‌دهیم که بین خانه‌هایی با رنگ مخالف باقی بماند. این مسیر، در هر رأسی که سه یال به آن می‌رسند می‌تواند ادامه پیدا کند (یالی که به این رأس رسیده است



شکل ۴

از میان دو خانهٔ ناهمرنگ می‌گذرد و سومین خانهٔ مجاور این رأس، با یکی از این دو خانه همرنگ و با دیگری ناهمرنگ است). به‌علاوه، این مسیر از هیچ رأسی بیشتر از یک‌بار نمی‌گذرد (چرا؟)، پس باید جایی خاتمه پیدا کند. محل خاتمهٔ مسیر، باید یکی از محلهایی باشد که در شکل ۴ با N و S نشان داده شده‌اند (چرا؟). اگر مسیر در N به انتها برسد، بازیکن سفید برنده است و اگر در S به انتها برسد، بازیکن سیاه برنده است. ∎

تعبیر دیگری هم برای حکم این قضیه وجود دارد: فرض کنید که P و Q در شکل ۵، دو ساحل یک رودخانه باشند و مهره‌های بازیکن اول را نشانهٔ وجود آب و مهره‌های بازیکن دوم را نشانهٔ سنگ فرض کنید؛ بنابراین، بازیکن دوم سعی می‌کند که با گذاشتن بلوکهای سنگی، راه آب را سد کند. به‌روشنی معلوم است که وقتی صفحهٔ بازی پر شده باشد، بازیکن دوم تنها در صورتی در بستن جریان آب موفق شده است که توانسته باشد با سنگهایش سدی روی رودخانه ببندد و در غیر این صورت، آب از R به S جریان خواهد داشت. درنتیجه، در پایان بازی، حتماً یکی از دو بازیکن برنده می‌شوند.



شکل ۵

جالب است بدانید که این واقعیت که بدیهی به‌نظر می‌رسد، با حالتی از قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر معادل است (به [۱] نگاه کنید).

چه کسی برنده است؟

ثابت شده است که در هر بازی دو نفره که در زمان متناهی پایان می‌یابد و امکان تساوی هم ندارد، حتماً یکی از دو بازیکن «استراتژی برد» دارد، یعنی روشی دارد که با استفاده از آن، حتماً برنده می‌شود. اگر به‌اندازهٔ کافی هگز بازی کنید، متوجه می‌شوید که بازیکن اول برتریهایی نسبت به بازیکن دوم دارد. بنابراین طبیعی به‌نظر می‌رسد که بازیکن اول، استراتژی برد داشته باشد.

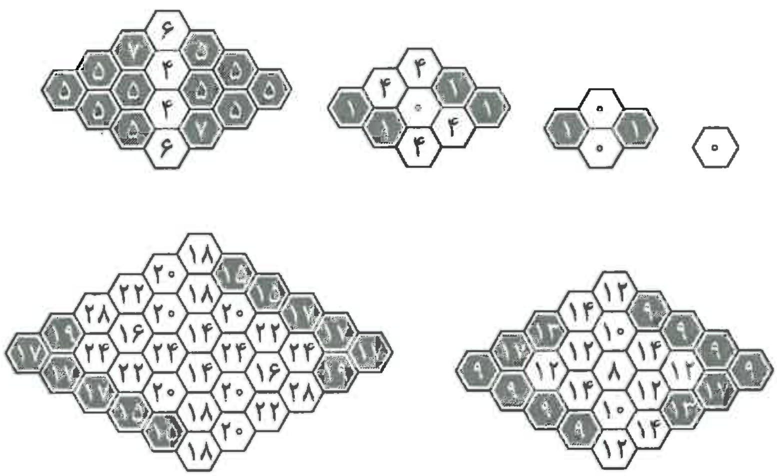
قضیهٔ ۲ . در بازی هگز، بازیکن دوم استراتژی برد ندارد.

برهان. فرض کنید بازیکن دوم استراتژی‌ای برای برد داشته باشد. در این صورت، بازیکن اول می‌تواند به‌طور تصادفی مهره‌ای در صفحه بگذارد و بعد، از استراتژی بازیکن دوم استفاده کند و هر وقت لازم شد که مهره‌ای در این خانه قرار بدهد، چون این خانه از قبل اشغال شده است، باز هم به‌طور تصادفی مهره‌ای در صفحه بگذارد (حرکت اضافهٔ بازیکن اول، نه فقط مشکلی برای او ایجاد نمی‌کند، بلکه حتی ممکن است به برد او هم کمک کند).

به این ترتیب، نشان داده‌ایم که اگر بازیکن دوم استراتژی برد داشته باشد، بازیکن اول هم استراتژی برد دارد. اما می‌دانیم که فقط یکی از دو بازیکن برنده می‌شود، پس امکان ندارد که بازیکن دوم استراتژی برد داشته باشد. ∎

استدلال بالا، که به «استراتژی دزدی» معروف است، فقط «وجود» استراتژی برد را برای بازیکن اول ثابت می‌کند؛ اما برای صفحه‌های بزرگتر از صفحهٔ ۷×۷، چنین روشی شناخته نشده است. بنابراین، نگران نباشید: بازی روی صفحه‌های بزرگتر، هنوز بیمزه نشده است!

می‌توانید از شکل ۶ اطلاعاتی دربارهٔ استراتژی برد روی صفحه‌های کوچک پیدا کنید. این اطلاعات را گروه تحقیقاتی بازیها در دانشگاه آلبرتا به‌دست آورده‌اند و با استفاده از همین اطلاعات، نرم‌افزاری به‌نام ملکه زنبور تولید کرده‌اند که اگر بازی را روی صفحه‌ای که از صفحهٔ ۷×۷ بزرگتر نیست شروع کند، بدون شک برنده می‌شود (به [۲] نگاه کنید).



شکل ۶

در شکلهای صفحهٔ قبل، رنگ سفید نشان‌دهندهٔ خانه‌های برنده برای بازیکن اول و رنگ سیاه نشان‌دهندهٔ خانه‌های برنده برای بازیکن دوم است و عدد داخل هر خانه، نشان‌دهندهٔ طول بازی منجر به برد بعد از قرار دادن مهره در آن خانه است. مثلاً، در سه شکل اول (از راست)، بازیکن اول می‌تواند با گرفتن یکی از خانه‌های با مقدار صفر فوراً برنده شود و در شکل چهارم، بازیکن اول می‌تواند با گرفتن یکی از خانه‌های با مقدار ۴، بعد از چهار حرکت برنده شود (چون همهٔ عددهای داخل خانه‌های سیاه از ۴ بزرگتر هستند)، اما اگر نفر اول در جایی غیر از این دو خانه بازی کند، نفر دوم می‌تواند با گرفتن یکی از خانه‌های سیاه با مقدار ۵ برنده شود. بنابراین، هر بازیکن در نوبت خودش باید در خانه‌ای با رنگ مربوط و با کمترین عدد ممکن بازی کند.

بازیهای شبیه به بازی هگز

بازی Y. این بازی، روی صفحه‌ای به شکل صفحهٔ شکل ۷ انجام می‌شود. در این بازی، هر بازیکن سعی می‌کند که با زنجیره‌ای از مهره‌هایش، سه ضلع مثلث را به هم وصل کند. مثلاً، در بازی شکل ۷، بازیکن سفید برنده است.

شکل ۷

دو قضیه‌ای که قبلاً ثابت کردیم، در مورد این بازی هم درست هستند. اثبات درستی آنها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

هگز برعکس. این بازی شبیه هگز است، با این تفاوت که بازیکنی که دو ضلع مربوط به خودش را به هم وصل کند، بازنده است. یعنی شرط برد در بازی هگز، شرط باخت در بازی هگز برعکس است.

برخلاف تصور اولیه، ممکن است بازیکن دوم استراتژی برد نداشته باشد. اینکه کدام بازیکن استراتژی برد دارد، به زوج و فرد بودن تعداد خانه‌های صفحهٔ بازی مربوط می‌شود.

قضیهٔ ۳. در بازی هگز برعکس روی صفحه‌ای $N \times N$، اگر N زوج باشد، بازیکن اول استراتژی برد دارد و اگر N فرد باشد، بازیکن دوم استراتژی برد دارد. به‌علاوه، روشی وجود دارد که بازیکن بازنده به کمک آن بازی را تا پر شدن همهٔ خانه‌های صفحه ادامه بدهد.

توجه کنید که کافی است قسمت دوم قضیه را ثابت کنیم، زیرا اگر این ادعا صحیح باشد و بتوان بازی را تا پر شدن کامل صفحه ادامه داد، زوج و فرد بودن تعداد خانه‌ها نشان می‌دهد که کدام بازیکن آخرین حرکت را انجام می‌دهد و برنده می‌شود.

برای اثبات این قضیه، از روشی شبیه به استراتژی دزدی استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که حرکت تصادفی اضافه، لزوماً به برد کمک نمی‌کند و مزیت به‌حساب نمی‌آید.

برهان. چون بازی به تساوی ختم نمی‌شود، حتماً یکی از بازیکنها استراتژی برد دارد. فرض کنید P بازیکنی باشد که استراتژی برد دارد، Q بازیکن دیگر باشد، $\mathcal{L}$ استراتژی برد P باشد و $m(\mathcal{L})$ حداقل تعداد خانه‌های خالی صفحه در انتهای بازی، بین همهٔ صفحه‌هایی که در آنها P، $\mathcal{L}$ را بازی می‌کند و برنده می‌شود باشد. برای اثبات حکم، باید ثابت کنیم که $m(\mathcal{L}) = 0$ و برای این کار، ثابت می‌کنیم که اگر $m(\mathcal{L}) \geq 1$، Q هم استراتژی برد دارد، که با فرضمان تناقض دارد.

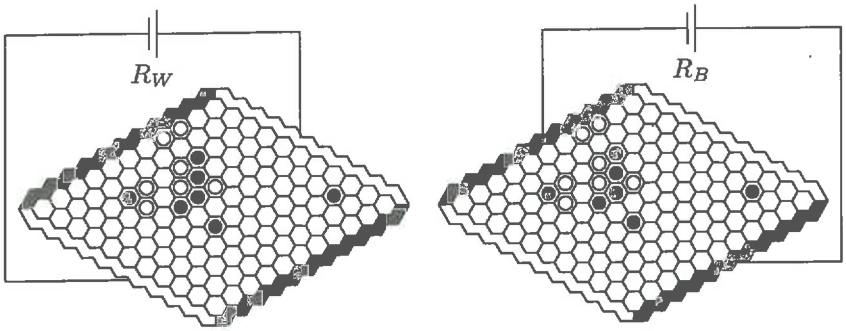
فرض کنید Q بازیکن اول باشد. در این حالت، Q می‌تواند با گذاشتن مهره‌ای روی صفحه، خود را بازیکن دوم فرض کند و از $\mathcal{L}$ برای بازی استفاده کند و اگر در جریان بازی براساس $\mathcal{L}$ لازم شد که مهره‌ای در خانه‌ای که در ابتدای بازی پر شده بود قرار دهد، باز هم مهره‌ای را به تصادف روی صفحه بگذارد (چون $m(\mathcal{L}) \geq 1$، Q همیشه می‌تواند این کار را انجام بدهد). اگر این مهرهٔ اضافه را نادیده بگیریم و جایش را خالی فرض کنیم، Q بالاخره در بازی برنده خواهد شد، چون استراتژی برد دارد. اما اضافه کردن مهره‌ای از مهره‌های Q به بازی‌ای که Q در آن برنده شده است تأثیری در برد Q ندارد، پس Q با وجود مهرهٔ اضافه هم برنده می‌شود و این با فرض استراتژی برد داشتن P تناقض دارد.

ادامهٔ اثبات را، در حالتی که Q بازیکن دوم باشد، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. ■

کامپیوتر و بازی هگز

برای اینکه کامپیوتر بتواند بازی‌ای مثل بازی هگز را انجام بدهد، باید بتواند به هر موقعیت در بازی عدد یا ارزشی نسبت بدهد که نشان‌دهندهٔ میزان نزدیکی هر یک از بازیکنها به برد است. در این صورت، کامپیوتر می‌تواند با بررسی موقعیتهای مختلف، موقعیتی را که ارزش بیشتری دارد انتخاب کند و حرکتی را که به آن موقعیت منجر می‌شود انجام بدهد. ساده‌ترین روش برای کامل کردن اتصال است، اما با این ارزشگذاری نمی‌توان اتصالهای بالقوه را در نظر گرفت.

کلود شانون، پدر علم مخابرات، در سال ۱۹۵۳ اولین ماشینی را که هگز بازی می‌کرد اختراع کرد. این ماشین، برای ارزشگذاری موقعیتها، از دو مدار مثل شکل ۸ استفاده می‌کرد.



شکل ۸ (ب) شکل ۸ (الف)

در این دو مدار، به هر خانه، مطابق جدول صفحهٔ بعد مقاومتی نسبت داده می‌شود.

	مقاومت خانه در مدار سیاه	مقاومت خانه در مدار سفید
اگر خانه خالی باشد	۱	۱
اگر مهره، سیاه باشد	۰	∞
اگر مهره، سفید باشد	∞	۰

بین هر دو خانهٔ همسایه از هر مدار، اتصالی با مقاومتی برابر با مجموع مقاومتهای دو خانه قرار داده می‌شود. بنابر قوانین کیرشهف، مقاومت کل مدار، تخمینی برای تعداد مهره‌های لازم برای کامل کردن اتصال طرفین و تعداد راههای ممکن برای انجام این کار است. بنابراین، می‌توانیم از نسبت $\frac{R_B}{R_W}$ به‌عنوان ارزشگذاری‌ای برای بازیکن سیاه انتخاب کنیم. نرم‌افزار Hexy، که معروفترین بازیکن کامپیوتری بازی هگز در دنیاست، با تغییرات مختصری براساس همین ایده کار می‌کند (به [۳] نگاه کنید). شما هم اگر کمی برنامه‌نویسی می‌دانید، دست به‌کار شوید و حریفی کامپیوتری برای خودتان بسازید.

مراجع

[۱] David Gale, The game of Hex and the Brouwer's fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly*, **86** (1979), pp. 818-827.

[۲] http://game.cs.ualberta.ca

[۳] http://home.earthlink.net/~ vanshel

از باب تفریح

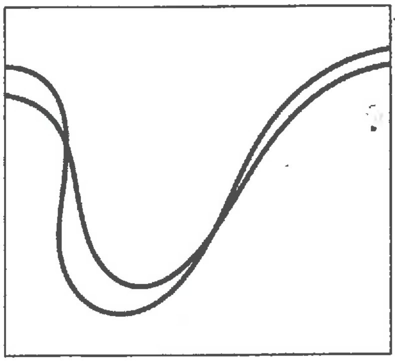
۱. علی، احمد و محمد در یک دوره مسابقات شطرنج به‌ترتیب زیر با هم بازی می‌کنند: ابتدا دو نفر با هم بازی می‌کنند و سپس نفر سوم با برندهٔ آنها بازی می‌کند (اگر بازی به تساوی ختم شود، کسی که با مهرهٔ سفید بازی کرده است بازنده است). در پایان مسابقات علی ۱۵بار، احمد ۹بار و محمد ۱۴بار بازی کرده است. چه کسانی بازی سیزدهم را برگزار کرده‌اند؟

۲. آیا دو مثلث متساوی‌الساقین وجود دارند که ساقهایشان با هم برابر باشند و یکی از آنها کاملاً درون دیگری قرار بگیرد؟

۳. در شکل زیر ثابت کنید که مساحت ناحیهٔ سایه‌دار نصف مساحت ستاره است.

۴. دو تاس روی میز قرار دارد و شما می‌توانید سه وجه هر یک از آن دو را ببینید. تعداد نقطه‌های روی این وجه‌ها ۲۷تاست. تعداد کل نقطه‌هایی که روی وجه‌های هر تاس می‌بینید چندتاست؟

۵. در شکل زیر قسمتی از رد چرخهای جلو و عقب دوچرخهٔ دوچرخه‌سواری را می‌بینید. این دوچرخه‌سوار از راست به چپ حرکت می‌کرده است یا از چپ به راست؟



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۹)

نابرابریهایی برای تابعهای محدب (۱)

ارشک حمیدی

مسأله‌هایی که در مسابقه‌های ریاضی داده می‌شوند باید به‌گونه‌ای باشند که خلاقترین دانش‌آموزان، حتی اگر معلومات کمی داشته باشند، مشخص شوند. مسأله‌های کدام قسمتهای ریاضیات مقدماتی برای این کار مناسبترند؟ هر جوابی به این سؤال احتمالاً به شکل «مسأله‌هایی از ... نابرابریها ...» است. با اینکه چند نابرابری کلاسیک وجود دارد و مسأله‌های نابرابریها معمولاً با استفاده از این نابرابریها حل می‌شوند (یا با کمی اغراق، همهٔ نابرابریها نتیجه‌ای از نابرابری واضح $X^۲ \geq ۰$ هستند!)، در نگاه اول معمولاً مشخص نیست که باید از کدام نابرابری یا ترکیبی از کدام نابرابریها استفاده کرد. هرولد بور، آنالیزدان مشهور (و برادر نیلس بور، برندهٔ جایزه نوبل در فیزیک)، زمانی گفته است: «آنالیزدانان نیمی از وقت خود را صرف جستجو در نوشتگان ریاضی می‌کنند، تا نابرابریهایی را که می‌خواهند از آنها استفاده کنند اما نمی‌توانند آنها را ثابت کنند پیدا کنند». در اینجا نابرابریهایی را بررسی می‌کنیم که هم در حل کردن مسأله‌های مربوط به نابرابریها مفیدند و هم در طرح کردن این‌گونه مسأله‌ها: کافی است تابعی محدب داشته باشید تا بتوانید مسأله‌ای از نابرابریها طرح کنید.

تابع محدب چیست؟

تابع f را روی بازه‌ای مانند I محدب می‌نامند، هرگاه به‌ازای هر دو عدد از این بازه مانند x و y و هر عدد حقیقی مانند λ در بازهٔ $(۰, ۱)$،

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda) f(y) \qquad (۱)$$

تعبیر هندسی نابرابری (۱) این است که پاره‌خطی که نقطه‌های $(x, f(x))$ و $(y, f(y))$ روی نمودار تابع f را به هم وصل می‌کند روی بازهٔ $[x, y]$، روی نمودار یا بالای آن قرار دارد. مثلاً تابعهای $f(x) = x$ و $f(x) = x^۲$ محدب‌اند.

مسألهٔ ۱ . ثابت کنید تابع f روی بازهٔ I محدب است، اگر و فقط اگر به‌ازای هر سه عدد از این بازه مانند $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ که $x_۱ < x_۲ < x_۳$،

$$(x_۳ - x_۲) f(x_۱) + (x_۱ - x_۳) f(x_۲) + (x_۲ - x_۱) f(x_۳) \geq ۰ \qquad (۲)$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f محدب باشد. ابتدا توجه کنید که اگر $\lambda = \frac{x_۳ - x_۲}{x_۳ - x_۱}$، آنگاه

$$x_۲ = \lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۳$$

درنتیجه، چون تابع f محدب است،

$$f(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۳) \leq \lambda f(x_۱) + (۱ - \lambda) f(x_۳)$$

بنابراین

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

پس

$$(x_3 - x_2) f(x_1) + (x_1 - x_3) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_3) \geq 0$$

اکنون فرض کنید تابع f به‌ازای هر سه عدد از بازهٔ I مانند x_1، x_2 و x_3 که $x_1 < x_2 < x_3$، در نابرابری (۲) صدق کند. فرض کنید x و y دو عدد در بازهٔ I باشند و λ عددی در بازهٔ $(0, 1)$ باشد. اگر $x < y$ و فرض کنیم $x_1 = x$، $x_3 = y$ و $x_2 = \lambda x + (1 - \lambda) y$، چون $x_1 < x_2 < x_3$، از نابرابری (۲) نتیجه می‌شود

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \tag{3}$$

و اگر $y < x$ و فرض کنیم $x_1 = y$، $x_3 = x$ و $x_2 = \lambda x + (1 - \lambda) y$، چون $x_1 < x_2 < x_3$، باز هم از نابرابری (۲) نتیجه می‌شود که نابرابری (۳) درست است. یعنی تابع f محدب است. ■

بیشتر تابعهای معروف مشتق‌پذیرند و برای تابعهای مشتق‌پذیر، معیار خوبی برای محدب بودن وجود دارد: اگر تابعی روی بازه‌ای باز مشتق‌پذیر باشد، روی این بازه محدب است، اگر و فقط اگر مشتق آن روی این بازه صعودی باشد. از این حکم می‌توان نتیجه گرفت که اگر تابع f روی بازهٔ باز I دوبار مشتق‌پذیر باشد، روی این بازه محدب است، اگر و فقط اگر به‌ازای هر x در I، $f''(x) \geq 0$. به این ترتیب، مثلاً تابع $f(x) = x^{2n}$، که در آن n عددی طبیعی است، روی $\mathbb{R}$ محدب است. همچنین، تابع $f(x) = e^x$ روی $\mathbb{R}$ و تابع $f(x) = \tan x$ روی بازهٔ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ محدب است.

نابرابری ینسن

فرض کنید تابع f روی بازهٔ I محدب باشد. در این صورت، اگر x_1 و x_2 عضو I باشند و λ_1 و λ_2 عددهایی مثبت باشند که $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$، آنگاه از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{4}$$

نابرابری کلیتر زیر را یوهان ینسن، ریاضیدان دانمارکی و همه‌کارهٔ تابعهای محدب، در سال ۱۹۰۵ ثابت کرده است.

نابرابری ینسن (برای تابعهای محدب). فرض کنید تابع f روی بازهٔ I محدب باشد. در این صورت اگر x_1، x_2، ... و x_n عددهایی در بازهٔ I و λ_1، λ_2، ... و λ_n عددهایی مثبت باشند که $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$، آنگاه

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

این نابرابری را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$ درستی حکم معلوم است و اگر $n = 2$، نابرابری موردنظر همان نابرابری (۴) است. فرض کنید k عددی طبیعی باشد، $k \geq 2$ و نابرابری موردنظر به‌ازای $n = k$ درست باشد. فرض کنید x_1، x_2، ... و x_{k+1} عددهایی در بازهٔ I و λ_1، λ_2، ... و λ_{k+1} عددهایی مثبت باشند

که مجموعشان برابر با ۱ است. فرض کنید

$$\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{۱ - \lambda_۱}, \qquad i = ۲, \cdots, k + ۱$$

در این صورت

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i f(x_i) &= \lambda_۱ f(x_۱) + (۱ - \lambda_۱) \sum_{i=۲}^{k+۱} \lambda'_i f(x_i) \\
&\geq \lambda_۱ f(x_۱) + (۱ - \lambda_۱) f\left(\sum_{i=۲}^{k+۱} \lambda'_i x_i\right) \\
&\geq f\left(\lambda_۱ x_۱ + (۱ - \lambda_۱) \sum_{i=۲}^{k+۱} \lambda'_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=۱}^{k+۱} \lambda_i x_i\right)
\end{aligned}$$

پس نابرابری موردنظر به‌ازای $n = k + ۱$ هم درست است.

تابع f را روی بازهٔ I مقعر می‌نامند، هرگاه تابع $-f$ روی این بازه محدب باشد. بنابراین، اگر تابع f مقعر باشد، نابرابری زیر درست است.

نابرابری ینسن (برای تابعهای مقعر). فرض کنید تابع f روی بازهٔ I مقعر باشد. در این صورت اگر $x_۱$، $x_۲$، … و x_n عددهایی در بازهٔ I و $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، … و λ_n عددهای مثبت باشند که $\lambda_۱ + \lambda_۲ + \cdots + \lambda_n = ۱$، آنگاه

$$f(\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲ + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_۱ f(x_۱) + \lambda_۲ (x_۲) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

در نابرابری ینسن (برای تابعهایی که خطی نیستند)، تساوی فقط وقتی پیش می‌آید که

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n$$

مسألهٔ ۲. a و b عددهایی مثبت‌اند و $a + b = ۱$. کمترین مقدار عبارت

$$\left(a + \frac{۱}{a}\right)^۲ + \left(b + \frac{۱}{b}\right)^۲$$

را پیدا کنید.

راه‌حل. توجه کنید که $۰ < a, b < ۱$ و تابع $f(x) = \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۲$ روی بازهٔ $(۰, ۱)$ محدب است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای محدب،

$$\frac{۱}{۲}(f(a) + f(b)) \geq f\left(\frac{a + b}{۲}\right)$$

بنابراین

$$\left(۱ + \frac{۱}{a}\right)^۲ + \left(b + \frac{۱}{b}\right)^۲ \geq ۲\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۲}$$

درضمن، اگر $a = b = \frac{۱}{۲}$، مقدار عبارت موردنظر برابر با $\frac{۲۵}{۲}$ است. پس کمترین مقدار عبارت موردنظر برابر با $\frac{۲۵}{۲}$ است. ∎

مسألهٔ ۳ . a و b عددهایی مثبت‌اند و $a + b = ۲$. ثابت کنید

$$\left(۱ + \sqrt[۵]{a}\right)^۵ + \left(۱ + \sqrt[۵]{b}\right)^۵ \leq ۶۴$$

راه‌حل. توجه کنید که تابع $f(x) = \left(۱ + \sqrt[۵]{x}\right)^۵$ روی بازهٔ $(۰, +\infty)$ مقعر است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای مقعر،

$$\frac{۱}{۲}((f(a) + f(b)) \leq \left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}\left(\left(۱ + \sqrt[۵]{a}\right)^۵ + \left(۱ + \sqrt[۵]{b}\right)^۵\right) \leq \left(۱ + \sqrt[۵]{\frac{a+b}{۲}}\right)^۵ = ۲^۵$$

درنتیجه

$$\left(۱ + \sqrt[۵]{a}\right)^۵ + \left(۱ + \sqrt[۵]{b}\right)^۵ \leq ۲^۶ = ۶۴$$

∎

مسألهٔ ۴ . کوچکترین عدد حقیقی مانند K را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد مثبت مانند a و b،

$$\sqrt[۳]{a} + \sqrt[۳]{b} \leq K\sqrt[۳]{a+b}$$

راه‌حل. توجه کنید که تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ روی بازهٔ $(۰, +\infty)$ مقعر است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای مقعر، اگر a و b عددهایی مثبت باشند،

$$\frac{۱}{۲}\left(\sqrt[۳]{a} + \sqrt[۳]{b}\right) \leq \sqrt[۳]{\frac{a+b}{۲}}$$

پس

$$\sqrt[۳]{a} + \sqrt[۳]{b} \leq \sqrt[۳]{۴}\sqrt[۳]{a+b}$$

چون به‌ازای $a = b$ در این نابرابری تساوی پیش می‌آید، کوچکترین عدد موردنظر $\sqrt[۳]{۴}$ است. ∎

مسألهٔ ۵ . A، B و C زاویه‌های یک مثلث‌اند.

الف) ثابت کنید

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

ب) ثابت کنید

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

راه‌حل. الف) توجه کنید که تابع $f(x) = \sin x$ روی بازهٔ $(۰, \pi)$ مقعر است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای مقعر،

$$\frac{۱}{۳}(f(A) + f(B) + f(C)) \leq f\left(\frac{A+B+C}{۳}\right)$$

بنابراین

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq ۳\sin\left(\frac{A+B+C}{۳}\right) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

ب) توجه کنید که تابع $f(x) = \ln \sin x$ روی بازهٔ $(۰, \pi)$ مقعر است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای مقعر،

$$\frac{۱}{۳}(f(A) + f(B) + f(C)) \leq f\left(\frac{A+B+C}{۳}\right)$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۳}(\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C) \leq \ln\sin\left(\frac{A+B+C}{۳}\right)$$

پس

$$\ln(\sin A \times \sin B \times \sin C) \leq \ln\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۳}$$

اکنون توجه کنید که چون تابع $\ln x$ صعودی است، پس

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۳} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$$

■

مسألهٔ ۶. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{۳}{۲}$$

راه‌حل. فرض کنید $s = a+b+c$. توجه کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{s-x}$ روی بازهٔ $(۰, s)$ محدب است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای محدب،

$$\frac{۱}{۳}(f(a) + f(b) + f(c)) \leq f\left(\frac{a+b+c}{۳}\right)$$

پس

$$\frac{۱}{۳}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{\frac{a+b+c}{۳}}{s - \frac{a+b+c}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

که همان نابرابری موردنظر است. ■

مسألهٔ ۷. (المپیاد ریاضی کره، ۱۹۹۸) a، b و c عددهایی مثبت‌اند و $a+b+c=abc$. ثابت کنید

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+a^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+b^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+c^۲}}\le\frac{۳}{۲}$$

راه‌حل. می‌توانیم فرض کنیم $a=\tan\alpha$، $b=\tan\beta$ و $c=\tan\gamma$، که در آنها $۰<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{۲}$. در این صورت

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta+\gamma)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{۱-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}\\&=\frac{a+b+c-abc}{۱-ab-bc-ca}=۰\end{aligned}$$

پس $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. از طرف دیگر،

$$\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+a^۲}}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۱+b^۲}},\qquad\cos\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۱+c^۲}}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{۳}{۲}$$

چون تابع $\cos x$ روی بازهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ مقعر است، می‌توان این نابرابری را به روش راه‌حل مسألهٔ ۵ ثابت کرد. ∎

مسألهٔ ۸. (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۵) a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{b+۲c+۳d}+\frac{b}{c+۲d+۳a}+\frac{c}{d+۲a+۳b}+\frac{d}{a+۲b+۳c}\ge\frac{۲}{۳}$$

راه‌حل. فرض کنید $s=a+b+c+d$. توجه کنید که اگر a، b، c و d را به‌ترتیب با $\frac{a}{s}$، $\frac{b}{s}$، $\frac{c}{d}$ و $\frac{d}{s}$ جایگزین کنیم، نابرابری موردنظر تغییری نمی‌کند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $s=۱$. همچنین، تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ محدب است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای محدب،

$$\begin{aligned}&af(b+۲c+۳d)+bf(c+۲d+۳a)+cf(d+۲a+۳b)+df(a+۲b+۳c)\\&\ge f\left(a(b+۲c+۳d)+b(c+۲d+۳a)+c(d+۲a+۳b)+d(a+۲b+۳c)\right)\end{aligned}$$

درنتیجه، اگر سمت چپ نابرابری موردنظر را A بنامیم، به‌دست می‌آید

$$A\ge\frac{۱}{۴(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

پس کافی است ثابت کنیم

$$\frac{۱}{۴(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \geq \frac{۲}{۳}$$

یا، چون $a+b+c+d=۱$،

$$۳(a+b+c+d)^۲ \geq ۸(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

این نابرابری هم درست است، زیرا

$$۳(a+b+c+d)^۲ - ۸(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$= (a-b)^۲ + (a-c)^۲ + (a-d)^۲ + (b-c)^۲ + (b-d)^۲ \geq ۰$$

■

تمرین

۱. ثابت کنید تابع f روی بازهٔ I محدب است، اگر و فقط اگر به‌ازای هر سه عدد حقیقی از این بازه مانند $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ که $x_۱ < x_۲ < x_۳$،

$$\frac{f(x_۱)}{(x_۱-x_۲)(x_۱-x_۳)} + \frac{f(x_۲)}{(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)} + \frac{f(x_۳)}{(x_۳-x_۱)(x_۳-x_۲)} \geq ۰$$

۲. A، B و C زاویه‌های یک مثلث‌اند. ثابت کنید

الف) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq ۳\sqrt[۴]{\frac{۳}{۴}}$

ب) $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۸}$

ج) $\cos A\cos B\cos C \leq \frac{۱}{۸}$

۳. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{۳}\right)^{a+b+c}$$

۴. (المپیاد ریاضی ایرلند، ۲۰۰۲) a، b و c عددهایی در بازهٔ $(۰, ۱)$اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{۱-a} + \frac{b}{۱-b} + \frac{c}{۱-c} \geq \frac{۳\sqrt[۳]{abc}}{۱-\sqrt[۳]{abc}}$$

۵. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\cdots(۱+a_n) \geq (۱+\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n})^n$$

۶. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq ۲$$

۷. (مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸) $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی حقیقی در بازهٔ $[۱, +\infty)$اند. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱+a_۱}+\frac{۱}{۱+a_۲}+\cdots+\frac{۱}{۱+a_n}\geq\frac{n}{۱+\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}}$$

۸. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی در بازهٔ $(۰, \frac{۱}{۲}]$اند. ثابت کنید

$$\frac{\prod_{i=۱}^{n} a_i}{(\sum_{i=۱}^{n} a_i)^n}\leq\frac{\prod_{i=۱}^{n}(۱-a_i)}{(\sum_{i=۱}^{n}(۱-a_i))^n}$$

۹. x، y و z عددهایی غیرمنفی‌اند و $xyz-x-y-z=۲$. کمترین مقدار عبارت

$$x^۲+y^۲+z^۲$$

را پیدا کنید.

مرجع

۱. ارشک حمیدی، برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۸.

ورود اصفهان به تورنمنت شهرها

فروزان خردپژوه

همان‌طورکه در شمارهٔ قبل اشاره شد، «تورنمنت شهرها» مسابقه‌ای ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی است که در شهرهای مختلف جهان برگزار می‌شود.

سال گذشته، خانهٔ ریاضیات اصفهان این مسابقه را در میان دانش‌آموزان سالهای اول، دوم و سوم شهر اصفهان برگزار کرد. اولین‌بار بود که این مسابقه در یکی از شهرهای ایران به‌طور رسمی برگزار می‌شد. مسابقه در تاریخ ۱۳۸۲/۱۲/۱۶ در محل کتابخانهٔ مرکزی شهر و در دو سطح معمولی و پیشرفته برگزار شد. تورنمنت شهرها مسابقه‌ای انفرادی است، اما مسؤلان خانهٔ ریاضیات اصفهان برای پیگیری اهدافی که خانه در نظر دارد، اصرار به برگزاری این مسابقه به‌صورت تیمی داشتند. به این منظور، مسؤلان خانهٔ ریاضیات اصفهان بیش از دو سال با کمیتهٔ برگزارکنندهٔ این مسابقه در مسکو بحث و تبادل‌نظر کردند. سرانجام، با موافقت کمیتهٔ مرکزی مسابقات، این مسابقه یک‌بار به‌طور آزمایشی در اسفندماه ۱۳۸۰ و به‌طور تیمی صرفاً در میان دانش‌آموزان خانهٔ ریاضیات اصفهان برگزار شد. پس از مشخص شدن نتایج و موفقیت این طرح، با ارسال گزارش به کمیتهٔ مرکزی مسابقات، برگزارکنندگان این مسابقه موافقت خود را با برگزاری این مسابقه به‌صورت تیمی و به‌طور رسمی در اسفندماه ۱۳۸۱ اعلام کردند.

خوشبختانه این مسابقه با استقبال بی‌سابقهٔ دانش‌آموزان اصفهان روبرو شد به‌طوری که ۲۵۳ تیم سه‌نفره در این مسابقه شرکت کردند. بسیاری از مسؤلین شهر اصفهان پس از بازدید از این آزمون آن را از نظر ایجاد محیطی برای کارگروهی دانش‌آموزان تحسین کردند.

ورقه‌ها را، پس از جداسازی مشخصات گروههای شرکت‌کننده، چندین نفر صحیح کردند (هر سؤال را حداقل سه نفر صحیح کردند) و با توجه به جمعیت شهر اصفهان و معیارهای کمیته برگزارکننده مسابقه در مسکو، ۱۴ تیم برتر این مسابقه انتخاب و ورقه‌هایشان به زبان انگلیسی ترجمه شد و برای داوری نهایی به مسکو فرستاده شد. گروههای برتر این مسابقه عبارت‌اند از:

۱. محمدرضا بلندنظر، مهدی صفرنژاد، امید حاتمی ورزنه از دبیرستان شهید اژه‌ای.

۲. هوشمند شیرانی مهر، مهدی سلطان الکتابی، محمد اصغری از دبیرستان شهید اژه‌ای.

۳. مهسا جبل‌عالمی، زهرا حسینی، شادی طوقی عشقی از دبیرستان فرزانگان امین.

۴. صبیحه سادات فقیه، سپیده یزدخواستی، کتایون نشاط‌پور از دبیرستان فرزانگان امین.

۵. محمد صالحی‌زاده، سید علی‌رضا مؤمنی، سالار رحیلی از دبیرستانهای شهید اژه‌ای و سادات.

۶. مسیح نیلفروشان همدانی، ایمان امین‌الرعایا، سید داوود احمدی از دبیرستان سادات.

۷. درنا حسنی، الهام نصر آزادانی، لیلا سپه‌کار از دبیرستان فرزانگان امین.

۸. سید رسول اعتصامی، متین آزادمنش، فرزام انصاری‌پور از دبیرستانهای هراتی، سادات و شهید اژه‌ای.

۹. افشین نیک‌زاد، احمد خواجه‌نژاد، حسن نیک‌آئین از دبیرستان شهید اژه‌ای.

۱۰. حمید صفرزاده، حسین خوشنویس، رضا خرمی از دبیرستان شهید اژه‌ای.

۱۱. سمیرا صدیقین، زهرا زجاجی، زهرا قاسمی از دبیرستان فرزانگان امین.

۱۲. محمدسعید عندلیب، ابراهیم امیری، محمدعلی بهرام‌علی از دبیرستان شهید اژه‌ای.

۱۳. مریم قنبری، فرح میرزائی، وجیهه نیک‌رفتار از دبیرستان گلستانیان.

۱۴. فاطمه آقاجان عبداله، مینا آمده، مرضیه اسلامی راسخ از دبیرستان صفورا.

۱۵. نعیمه سادات حسینی، فرشته سادات فرشیان، سوگل عطاری‌پور اصفهانی از دبیرستان فرزانگان امین.

۱۶. فریبا علیخانی کوپائی، فاطمه جعفری، نگار ایروانی از دبیرستان فرزانگان امین.

۱۷. آزاده حریری، شقایق اختری، زهرا عسگری از دبیرستان امام صادق (ع).

۱۸. فاطمه عابدی اصفهانی، زهرا موحدی‌نیا، مهتاب صبوحیان از دبیرستان شاهد زینب.

۱۹. شهرام علیپور آزادی، حسام صدیقی، شهاب سعید مهر از دبیرستان سادات.

۲۰. هدی صفائی‌پور، مینا متقی، ساناز نورمحمدی از دبیرستان فرزانگان امین.

مسؤلین شهر اصفهان از این افراد در چهارمین جشنوارهٔ خانهٔ ریاضیات اصفهان، که در تاریخ ۱۳۸۲/۲/۱۹ برگزار شد، قدردانی کردند.

بیست و چهارمین تورنمنت شهرها

دور بهاری، ۲۰۰۳

سؤالهای دو سال اول

سطح معمولی

۱. ۲۰۰۳ تومان را در N کیف قرار داده‌ایم و کیفها را در M جیب گذاشته‌ایم. می‌دانیم که N، از مبلغی که در هر جیب قرار دارد بیشتر است. آیا درست است که (همواره) در یکی از کیفها کمتر از M تومان قرار دارد؟

۲. دو نفر بازیکن به نوبت ضلعهای nضلعی‌ای را رنگ می‌کنند. بازیکن اول ضلعی را که با ضلعهای از قبل رنگ شده هیچ رأس مشترکی ندارد یا دو رأس مشترک دارد رنگ می‌کند. بازیکن دوم ضلعی را که با ضلعهای از قبل رنگ شده دقیقاً یک رأس مشترک دارد رنگ می‌کند و بازیکنی که نتواند حرکتی کند می‌بازد. به‌ازای چه مقدارهایی از n بازیکن دوم استراتژی برد دارد؟

۳. نقطه‌های K و L روی ضلعهای AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = BC)$ طوری انتخاب شده‌اند که $AK + LC = KL$. از نقطهٔ M، وسط پاره‌خط KL، خطی راست موازی با BC رسم کرده‌ایم که ضلع AC را در نقطهٔ N قطع کرده است. $\angle KNL$ را پیدا کنید.

۴. هر جملهٔ دنباله‌ای از عددهای طبیعی (بجز جملهٔ اول) برابر است با مجموع جملهٔ قبلی‌اش و بزرگترین رقم همین جمله. بیشترین تعداد جمله‌های فرد در چنین دنباله‌ای چندتاست؟

۵. آیا می‌توان صفحه‌ای ۲۰۰۳×۲۰۰۳ را با دومینوهای ۲×۱ که به‌طور افقی قرار گرفته‌اند و مستطیلهای ۳×۱ که به‌طور عمودی قرار گرفته‌اند پوشاند؟

سطح پیشرفته

۱. علی معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ را که در آن a، b و c عددهایی طبیعی‌اند روی تخته نوشته است. احمد یکی یا دوتا از علامتهای «+» را به «−» تغییر می‌دهد یا اصلاً هیچ علامتی را تغییر نمی‌دهد. علی برنده است، به‌شرطی که هر دو ریشهٔ معادلهٔ به‌دست آمده عددهایی صحیح باشند و در غیر این صورت (اگر معادله ریشهٔ حقیقی نداشته باشد یا دست‌کم یکی از ریشه‌ها عددی صحیح نباشد) احمد برنده است. آیا علی می‌تواند ضریبها را طوری انتخاب کند که در هر صورت ببرد؟

۲. مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$، که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی، r شعاع دایرهٔ محاطی، a طول بلندترین ضلع و h طول کوتاهترین ارتفاع مثلث است.

۳. در یک تورنمنت، هر یک از ۱۵ تیم شرکت‌کننده با هر یک از دیگر تیمها دقیقاً یک‌بار بازی کرده است. بازی فرد بازی‌ای است که تعداد کل بازیهایی که پیش از آن دو تیم مسابقه‌دهنده انجام داده‌اند عددی فرد باشد.
الف) ثابت کنید دست‌کم یک بازی فرد وجود دارد.
ب) آیا ممکن است دقیقاً یک بازی فرد وجود داشته باشد؟

۴. تکه‌ای شکلات به شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع n از قطعه‌هایی مثلثی‌شکل به طول ضلع ۱ که ضلعهایشان موازی ضلعهای شکلات است تشکیل شده است. دو بازیکن به نوبت شکلات می‌خورند. هر بازیکن تکه‌ای مثلثی را (در امتداد یکی از خطها) جدا می‌کند و می‌خورد و باقی‌ماندهٔ شکلات را به بازیکن دیگر می‌دهد (مادامی که از تکه شکلات بیش از یک قطعه باقی مانده است هیچ بازیکنی مجاز نیست همهٔ آن را بخورد). بازیکنی که هیچ حرکتی نداشته باشد یا دقیقاً یک قطعه را برای رقیبش بگذارد می‌بازد. به‌ازای هر n، مشخص کنید که کدام بازیکن استراتژی برد دارد.

۵. بیشترین تعداد خانه‌های روی جدولی 9×9 که می‌توان آنها را در امتداد هر دو قطرشان برید و جدول به چند تکه تقسیم نشود چقدر است؟

۶. ذوزنقه‌ای به قاعده‌های AD و BC بر دایره‌ای محیط شده است و E محل برخورد قطرهای ذوزنقه است. ثابت کنید زاویهٔ AED منفرجه نیست.

سؤالهایِ دو سال دوم

سطح معمولی

۱. ۲۰۰۳ تومان را در N کیف قرار داده‌ایم و کیفها را در M جیب گذاشته‌ایم. می‌دانیم که N از مبلغی که در هر جیب قرار دارد بیشتر است. آیا درست است که (همواره) در یکی از کیفها کمتر از M تومان قرار دارد؟

۲. ۱۰۰ضلعی‌ای از ۱۰۰ قطعه تشکیل شده است. آیا ممکن است که نتوان با تعداد کمتری از این قطعه‌ها چندضلعی دیگری ساخت؟

۳. نقطهٔ M طوری درون مثلث ABC انتخاب شده است که شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای AMC، BMC و BMA از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC کوچکتر نیست. ثابت کنید همهٔ این چهارتا شعاع برابرند.

۴. جمله‌های دنبالهٔ

$$00, 01, 02, 03, \ldots, 99$$

را طوری از نو مرتب می‌کنیم که هر جمله با اضافه کردن ۱ به یکی از رقمهای جملهٔ قبلی‌اش یا کم کردن ۱ از یکی از این رقمها به‌دست می‌آید (مثلاً، ممکن است بعد از ۲۹ یکی از ۱۹، ۳۹ یا ۲۸ بیاید، اما ممکن نیست ۳۰ یا ۲۰ بیاید). بیشترین تعداد جمله‌هایی که در ردیف خودشان باقی می‌مانند چقدر است؟

۵. ثابت کنید می‌توان مستطیلی $a \times b$، $\frac{b}{2} < a < b$، را به سه قطعه تقسیم کرد و آنها را طوری از نو چید که یک مربع (که هیچ همپوشانی یا سوراخی ندارد) تشکیل شود.

سطح پیشرفته

۱. هرم مثلثی $ABCD$ مفروض است. ثابت کنید $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$، که در آن R شعاع کرهٔ محیطی، r شعاع کرهٔ محاطی، a طول بلندترین یال و h طول کوتاهترین ارتفاع هرم (از یک رأس تا وجه روبه‌رو به آن) است.

۲. $P(x)$ چندجمله‌ای‌ای است که ضریبهایش عددهایی حقیقی‌اند، $P(a_1) = 0$ و $P(a_{i+1}) = a_i$ ($i \geq 1$)، که در اینجا $(a_i)_{i\geq 1}$ دنباله‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی متمایز است. مقدارهای ممکن درجهٔ $P(x)$ را تعیین کنید.

۳. آیا می‌توان مکعبی را با سه مثلث کاغذی (بدون همپوشانی) پوشاند؟

۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به وتر BA در دایره‌ای محاط شده است. فرض کنید K وسط کمان BC که شامل A نیست باشد، N وسط AC و M محل برخورد KN با دایره باشد. فرض کنید E نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره در نقطه‌های A و C باشد. ثابت کنید $\angle EMK = 90°$.

۵. پیش از بازی، علی عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰ انتخاب می‌کند. سپس احمد عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند d می‌گوید. اگر عدد علی بر d بخش‌پذیر باشد، احمد می‌برد. در غیر این صورت، علی d را از عددش کم می‌کند و بازی (با این عدد جدید) ادامه پیدا می‌کند. احمد نمی‌تواند عددی را دو بار بگوید. اگر عدد علی منفی شود، احمد می‌بازد. آیا احمد استراتژی برد دارد؟

۶. روی خانه‌های جدولی 4×4 علامتهای «+» یا «−» قرار داده شده‌اند. می‌توانیم علامت هر خانه و همهٔ خانه‌های مجاورش (یعنی خانه‌هایی که با آن ضلعی مشترک دارند) را تغییر دهیم. تعداد جدولهای متمایزی را که ممکن است با تکرار این روند به‌دست بیایند پیدا کنید.

۷. مربعی را طوری مثلث‌بندی کرده‌ایم که هیچ سه رأس از مثلثها روی یک خط قرار ندارند. به‌ازای هر رأس (از جمله رأسهای خود مربع) تعداد ضلعهایی را که از آن خارج شده‌اند می‌شماریم. آیا ممکن است که همهٔ این عددها زوج باشند؟

چهل و چهارمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱۳ و ۱۴ جولای ۲۰۰۳، ژاپن، توکیو

۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای ۱۰۱ عضوی از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰۰۰۰۰\}$ باشد. ثابت کنید عددهایی مانند $t_۱$، $t_۲$، ... و $t_{۱۰۰}$ در S وجود دارند، به‌طوری که هیچ دو تایی از مجموعه‌های

$$A_j = \{x + t_j : \ x \in A\}, \qquad j = ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰$$

اشتراک ندارند.

۲. همهٔ زوجها از عددهای طبیعی مانند (a, b) را طوری پیدا کنید که

$$\frac{a^۲}{۲ab^۲ - b^۳ + ۱}$$

عددی طبیعی باشد.

۳. شش‌ضلعی‌ای مفروض است و در آن هر دو ضلع روبه‌رو این ویژگی را دارند که فاصلهٔ وسطهایشان $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ مجموع طولهایشان است. ثابت کنید همهٔ زاویه‌های این شش‌ضلعی برابرند.

۴. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی‌ای محدب باشد. فرض کنید P، Q و R پای عمودهای وارد از D به‌ترتیب بر BC، CA و AB باشند. ثابت کنید $PQ = QR$ اگر و فقط اگر نیمساز زاویه‌های ABC و ADC روی پاره‌خط AC به هم برسند.

۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی باشند که $x_۱ < x_۲ \leq \cdots \leq x_n$.

الف) ثابت کنید

$$\left(\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}|x_i - x_j|\right)^۲ \leq \frac{۲(n^۲ - ۱)}{۳}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(x_i - x_j)^۲$$

ب) ثابت کنید در نابرابری قسمت (الف) تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n تصاعدی حسابی تشکیل دهند.

۶. فرض کنید p عددی اول باشد. ثابت کنید عددی اول مانند q وجود دارد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n^p - p$ بر q بخش‌پذیر نیست.

(راه‌حل در صفحهٔ ۶۰)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌ها

۲۱. عددهای ۱، ۲، ... و ۹۹۹۹۹۹ را به دو گروه تقسیم کرده‌ایم، یک گروه عددهایی که نزدیکترین مربع کامل به آنها عددی فرد است و گروه دیگر عددهایی که نزدیکترین مربع کامل به آنها عددی زوج است. مجموع عددهای کدام گروه بزرگتر است؟

۲۲. دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (۴x)_۵ + ۷y = ۱۴ \\ (۲y)_۵ - (۳x)_۷ = ۷۴ \end{cases}$$

را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید (در اینجا، $(n)_k$ نزدیکترین مضرب k به n است).

۲۳. من عددی از میان عددهای ۰، ۱، ... و ۱۵ انتخاب کرده‌ام. شما می‌توانید هفت سؤال از من بکنید و من به‌صورت «بله» و «خیر» جوابتان را می‌دهم. درضمن، می‌توانم یک‌بار دروغ بگویم. عددی را که انتخاب کرده‌ام پیدا کنید.

۲۴. تکه‌ای مقوای مستطیل‌شکل را در امتداد خطی راست می‌بریم و آن را به دو تکه تقسیم می‌کنیم. یکی از این دو قسمت را هم به‌همین ترتیب به دو تکه تقسیم می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. کمترین تعداد برشهای لازم را پیدا کنید که در میان همهٔ تکه‌های موجود، هزارتا ۱۳۸۲ضلعی وجود داشته باشد.

۲۵. $(a_n)_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی است، به‌طوری که اگر $i \neq j$، $(a_i, a_j) = (i, j)$ ((a, b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است). ثابت کنید $a_n = n$، $n \geq ۱$.

۲۶. ثابت کنید از میان هر ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز، می‌توان ۹۸ عدد طوری انتخاب کرد که مجموع آنها بر مجموع دو عدد دیگر بخش‌پذیر نباشد.

۲۷. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر سه عدد حقیقی مانند x، y و z،

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq ۳f(x+۲y+۳z)$$

۲۸. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(x^۳+x) \leq x \leq (f(x))^۳ + f(x)$$

۲۹. $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ چندجمله‌ایهایی درجهٔ دوم‌اند. آیا ممکن است عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۸ ریشه‌های معادلهٔ $f(g(h(x))) = ۰$ باشند؟

۳۰. $ABCD$ لوزی است و $\angle B = ۶۰^\circ$. M نقطه‌ای درون مثلث ADC است و $\angle AMC = ۱۲۰^\circ$. خطهای BA و CM در نقطهٔ P و خطهای BC و AM در نقطهٔ Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید D روی خط PQ قرار دارد.

۳۱. در مثلث حادهٔ ABC نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ را روی ارتفاعهای AA'، BB' و CC' طوری انتخاب کرده‌ایم که هیچ‌یک از آنها بر نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعها، منطبق نیست. درضمن،

$$S_{ABC_۱} + S_{BCA_۱} + S_{CAB_۱} = S_{ABC}$$

ثابت کنید نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و H روی یک دایره قرار دارند.

۳۲. شش نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید دو مثلث وجود دارند که رأسهایشان از این شش نقطه هستند و بلندترین ضلع یکی از آنها، کوتاهترین ضلع مثلث دیگر است.

۳۳. تعدادی دایره درون مربعی به ضلع ۱ قرار داده‌ایم. مجموع محیطهای مربعها برابر با ۱۰ است. ثابت کنید خط راستی وجود دارد که موازی یکی از ضلعهای مربع است و دست‌کم سه‌تا از دایره‌ها را قطع می‌کند.

۳۴. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\frac{n^۲ - n}{۲} \leq \{\sqrt{۱}\} + \{\sqrt{۲}\} + \cdots + \{\sqrt{n^۲}\} \leq \frac{n^۲ - ۱}{۲}$$

($\{t\}$ جزءِ کسری عدد t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

۳۵. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$(a+b+c+d)^۳ \leq ۴(a^۳ + b^۳ + c^۳ + d^۳) + ۲۴\,(ab(c+d) + cd(a+b))$$

۳۶. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند ($n \geq ۲$). ثابت کنید

$$(a_۱^۳ + ۱)(a_۲^۳ + ۱) \cdots (a_n^۳ + ۱) \geq (a_۱^۲ a_۲ + ۱)(a_۲^۲ a_۳ + ۱) \cdots (a_n^۲ a_۱ + ۱)$$

۳۷. چهارضلعی محدب $ABCD$ درون دایره‌ای به شعاع واحد محاط شده است و $AB \times BC \times CD \times DA \geq ۴$. ثابت کنید $ABCD$ مربع است.

۳۸. x عددی حقیقی است و $۱ < x < ۲$. ثابت کنید در میان عددهای

$$\lfloor x \rfloor,\ \lfloor ۲x \rfloor,\ \lfloor ۳x \rfloor, \ldots$$

بی‌نهایت توان ۲ وجود دارد.

۳۹. a و b دو عدد طبیعی متمایزند و $ab(a+b)$ بر $a^۲+ab+b^۲$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $|a-b| > \sqrt[۳]{ab}$.

۴۰. a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند و $a^۲+ab+b^۲ = c^۲+cd+d^۲$. ثابت کنید $a+b+c+d$ مرکب است.

راه‌حلها

۱. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که

$$\frac{m}{\sqrt{m}} + \frac{۶}{n\sqrt{m}} < \frac{۵\sqrt{n}}{n}$$

راه‌حل. فرض کنید m و n عددهایی طبیعی باشند و

$$\frac{m}{\sqrt{m}} + \frac{۶}{n\sqrt{m}} < \frac{۵\sqrt{n}}{n}$$

اگر دو طرف این نابرابری را در $n\sqrt{m}$ ضرب کنیم معلوم می‌شود

$$mn + ۶ < ۵\sqrt{mn}$$

و درنتیجه

$$\left(\sqrt{mn} - ۳\right)\left(\sqrt{mn} - ۲\right) < ۰$$

پس $۳ > \sqrt{mn} > ۲$ و درنتیجه $\frac{۴}{m} < n < \frac{۹}{m}$. بنابراین، چون n عددی طبیعی است، پس $m < ۹$ و چون m عددی طبیعی است، $m \leq ۸$. اکنون به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که (m, n) یکی از زوج‌های زیر است: $(۱, ۵)$، $(۱, ۶)$، $(۱, ۷)$، $(۱, ۸)$، $(۲, ۳)$، $(۲, ۴)$، $(۳, ۲)$، $(۴, ۲)$، $(۵, ۱)$، $(۶, ۱)$، $(۷, ۱)$ و $(۸, ۱)$.

۲. آیا این حکم درست است که هر عدد گویا و مثبت را می‌توان به شکل $\frac{a^۲+b^۳}{c^۵+d^۷}$ نوشت، که در آن a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند؟

راه‌حل. بله. فرض کنید $\frac{m}{n}$ عددی گویا و مثبت باشد. می‌توانیم فرض کنیم m و n عددهایی طبیعی‌اند. اکنون توجه کنید که

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{n} \times \frac{m^۵n^۴ + m^{۱۴}n^۶}{m^۵n^۴ + m^{۱۴}n^۶} = \frac{m^۶n^۴ + m^{۱۵}n^۶}{m^۵n^۵ + m^{۱۴}n^۷} = \frac{\left(m^۳n^۲\right)^۲ + \left(m^۵n^۲\right)^۳}{(mn)^۵ + \left(m^۲n\right)^۷}$$

۳. معادلهٔ $a! = ۴b! + ۱۰c!$ را در مجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید.

راه‌حل. فرض کنید (a, b, c) جواب معادلهٔ موردنظر باشد. ابتدا توجه کنید که $a > b$ و $a > c$. اکنون حالتهای صفحهٔ بعد را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. $c = b$. در این حالت معادلهٔ موردنظر $a! = 14b!$ است. پس $\frac{a!}{b!} = 14$. توجه کنید که $\frac{a!}{b!}$ یا برابر با a است یا برابر با حاصل‌ضرب چند عدد طبیعی متوالی است. چون ۱۴ را نمی‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب چند عدد طبیعی متوالی نوشت، پس $a = 14$ و $b = 13$. بنابراین $c = 13$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $a = 14$، $b = 13$ و $c = 13$، (a, b, c) جواب معادلهٔ موردنظر است.

حالت ۲. $b > c$. توجه کنید که معادلهٔ موردنظر را می‌توان به شکل

$$\frac{b!}{c!}\left(\frac{a!}{b!} - 4\right) = 10$$

نوشت. فرض کنید $d = \frac{b!}{c!}$. در این صورت $d \geq 2$. همچنین، چون d مقسوم‌علیه ۱۰ است، پس d یا ۲ است یا ۵ یا ۱۰.

اگر $d = 2$، آنگاه $b = 2$ و $c = 1$. درنتیجه $a! = 18$، که ممکن نیست.

اگر $d = 10$، آنگاه $b = 10$ و $c = 9$. درنتیجه $a! = 5 \times 10!$، که ممکن نیست.

اگر $d = 5$، آنگاه $b = 5$ و $c = 4$. درنتیجه $a! = 6 \times 5! = 6!$، پس $a = 6$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $a = 6$، $b = 5$ و $c = 4$، (a, b, c) جواب معادلهٔ موردنظر است.

حالت ۳. $b < c$. توجه کنید که معادلهٔ موردنظر را می‌توان به شکل

$$\frac{c!}{b!}\left(\frac{a!}{c!} - 10\right) = 4$$

نوشت. فرض کنید $e = \frac{c!}{b!}$. توجه کنید که e یا ۲ است یا ۴.

اگر $e = 2$، آنگاه $c = 2$ و $b = 1$. درنتیجه $a! = 24$، پس $a = 4$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $a = 4$، $b = 1$ و $c = 2$، (a, b, c) جواب معادلهٔ موردنظر است.

اگر $e = 4$، آنگاه $c = 4$ و $b = 3$. درنتیجه $a! = 11 \times 4!$، که ممکن نیست.

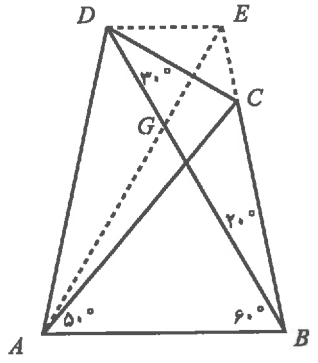
۴. m و n عددهایی طبیعی‌اند و $m^2 + n^2 + m$ بر mn بخش‌پذیر است. ثابت کنید m مربع کامل است.

راه‌حل. فرض کنید d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n باشد. چون $d^2 \mid mn$، پس $d^2 \mid m^2 + n^2 + m$. درنتیجه، چون $d^2 \mid m^2$ و $d^2 \mid n^2$، پس $d^2 \mid m$.

اکنون توجه کنید که از $m \mid m^2 + n^2 + m$ نتیجه می‌شود $m \mid n^2$، و چون $m \mid m^2$، پس $m \mid d^2$ (توجه کنید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m^2 و n^2 برابر با d^2 است). بنابراین $m = d^2$. یعنی m مربع کامل است.

۵. در چهارضلعی $ABCD$، $\angle BAC = 50°$، $\angle ABD = 60°$، $\angle DBC = 20°$ و $\angle BDC = 30°$. $\angle CAD$ را حساب کنید.

راه‌حل. نقطهٔ G را روی قطر BD طوری انتخاب کنید که مثلث AGB متساوی‌الاضلاع باشد و نقطهٔ E را روی امتداد AG (از سمت G) طوری انتخاب کنید که DE با AB موازی باشد (شکل زیر را ببینید).



توجه کنید که $\angle EDG = \angle ABD = ۶۰^\circ$. همچنین،

$$\angle DGE = \angle BGA = ۶۰^\circ$$

پس مثلث DEG متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر،

$$\angle EDC = \angle EDG - \angle CDE = ۶۰^\circ - ۳۰^\circ = ۳۰^\circ$$

یعنی CD نیمساز زاویهٔ EDG است. پس CD بر GE عمود است.

اکنون توجه کنید که

$$\angle BCA = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۶۰^\circ + ۲۰^\circ) = ۵۰^\circ$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و $BC = BA$. درنتیجه $BC = BG$. بنابراین مثلث BCG هم متساوی‌الساقین است و

$$\angle BCG = \angle BGC = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ) = ۸۰^\circ$$

به این ترتیب

$$\angle ACG = \angle BCG - \angle BCA = ۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۳۰^\circ$$

و

$$\angle GCD = ۱۸۰^\circ - (۲۰^\circ + ۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۵۰^\circ$$

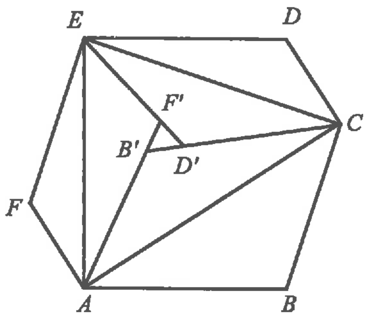
چون مثلث CGE متساوی‌الساقین و CD بر GE عمود است، پس CD نیمساز زاویهٔ GCE است. یعنی $\angle ECD = ۵۰^\circ$. اکنون توجه کنید که

$$\angle ECD + \angle DCB = ۵۰^\circ + ۱۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

یعنی نقطه‌های B، C و E روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین چهارضلعی $ABED$ ذوزنقه است. چون مثلثهای AGD و BGE همنهشت‌اند، پس $AD = BE$. یعنی $ABCD$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است. بنابراین $\angle DAB = \angle ABC$. پس $\angle DAC = ۳۰^\circ$.

۶. شش‌ضلعی $ABCDEF$ محاطی است، هر جفت از ضلعهای روبه‌رویش موازی‌اند و مساحتش دو برابر مساحت مثلث ACE است. ثابت کنید طول هر جفت از ضلعهای روبه‌رو در این شش‌ضلعی با هم برابر است.

راه‌حل. چون شش‌ضلعی موردنظر محاطی است، پس محدب است. از رأسهای A، C و E به‌ترتیب خطهایی موازی BC، DE و CD رسم کنید. چون شش‌ضلعی محدب است، نقطه‌های برخورد هر دوتا از این خطها درون مثلث ACE قرار دارد. مانند شکل زیر، نقطه‌های برخورد را B'، D' و F' بنامید.



توجه کنید که مثلث AEF و مثلث AEF'، مثلث ABC و مثلث $AB'C$، و مثلث CDE و مثلث $CD'E$ همنهشت‌اند. بنابراین

$$S_{ABCDEF} = S_{AEF} + S_{AEF'} + S_{ABC} + S_{AB'C} + S_{CDE} + S_{CD'E} + S_{B'D'F'}$$
$$= ۲S_{AEF'} + ۲S_{AB'C} + ۲S_{CD'E} + S_{B'D'F'}$$
$$= ۲S_{ACE} - S_{B'D'F'}$$

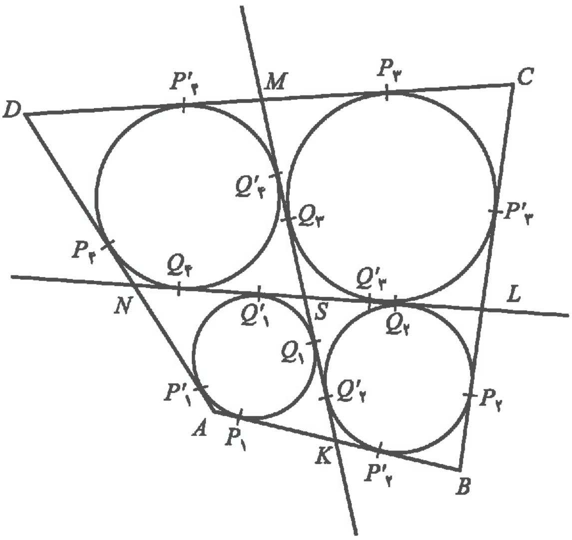
بنابر فرض، $S_{ABCDEF} = ۲S_{ACE}$. پس $S_{B'D'F'} = ۰$. یعنی نقطه‌های B'، D' و F' بر هم منطبق‌اند. پس $AF' = AB'$ و درنتیجه

$$EF = AF' = AB' = BC$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $AB = ED$ و $AF = CD$.

۷. در چهارضلعی محدب $ABCD$ نقطه‌های K، L، M و N را به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA انتخاب کرده‌ایم و KM و LN یکدیگر را در نقطهٔ S قطع کرده‌اند. ثابت کنید اگر چهارضلعیهای $AKSN$، $BKSL$، $CLSM$ و $DMSN$ محیطی باشند، چهارضلعی $ABCD$ هم محیطی است.

راه‌حل. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



توجه کنید که اگر چهارضلعیهای $AKSN$، $BKSL$، $CLSM$ و $DMSN$ محیطی باشند، آنگاه

$$AP_1 = AP'_1, \quad BP_2 = BP'_2, \quad CP_3 = CP'_3, \quad DP_4 = DP'_4 \tag{1}$$

و

$$SQ_1 = SQ'_1, \quad SQ_2 = SQ'_2, \quad SQ_3 = SQ'_3, \quad SQ_4 = SQ'_4 \tag{2}$$

همچنین

$$P_1P'_2 = Q'_1Q_2, \quad P_2P'_3 = Q'_2Q_3, \quad P_3P'_4 = Q'_3Q_4, \quad P_4P'_1 = Q'_4Q_1 \tag{3}$$

برای اینکه ثابت کنیم چهارضلعی $ABCD$ محیطی است کافی است ثابت کنیم

$$AB + CD = BC + DA$$

یا با توجه به تساویهای (۱)،

$$P_1P'_2 + P_3P'_4 = P_2P'_3 + P_4P'_1 \tag{4}$$

توجه کنید که بنابر تساویهای (۲) و (۳)،

$$P_1P'_2 = Q'_1Q_2 = Q'_1S + SQ_2 = SQ_1 + SQ_2$$

$$P_2P'_3 = Q'_2Q_3 = Q'_2S + SQ_3 = SQ_2 + SQ_3$$

$$P_3P'_4 = Q'_3Q_4 = Q'_3S + SQ_4 = SQ_3 + SQ_4$$
$$P_4P'_1 = Q'_4Q_1 = Q'_4S + SQ_1 = SQ_4 + SQ_1$$

بنابراین هر یک از طرفهای تساوی (۴) برابر است با

$$SQ_1 + SQ_2 + SQ_3 + SQ_4$$

یعنی این تساوی درست است.

۸. قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. ثابت کنید

$$\frac{AB}{CD} + \frac{CD}{AB} + \frac{BC}{AD} + \frac{AD}{BC} \leq \frac{OA}{OC} + \frac{OC}{OA} + \frac{OB}{OD} + \frac{OD}{OB}$$

راه‌حل. از تشابه مثلثها نتیجه می‌شود

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OD}, \qquad \frac{BC}{AD} = \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{OA}{OC} + \frac{OC}{OA} + \frac{OB}{OD} + \frac{OD}{OB} - \left(\frac{AB}{CD} + \frac{CD}{AB} + \frac{BC}{AD} + \frac{AD}{BC}\right) \\
=&\frac{OA}{OC} + \frac{OC}{OA} + \frac{OB}{OD} + \frac{OD}{OB} - \left(\frac{OB}{OC} + \frac{OA}{OD} + \frac{OB}{OA} + \frac{OD}{OC}\right) \\
=&\frac{OA^2 + OC^2 - OA \times OB - OC \times OD}{OA \times OC} \\
+&\frac{OB^2 + OD^2 - OC \times OB - OA \times OD}{OB \times OD}
\end{aligned}$$

درنتیجه، چون $OA \times OC = OB \times OD$، سمت راست تساوی آخر کسری با مخرج $OA \times OC$ و صورت

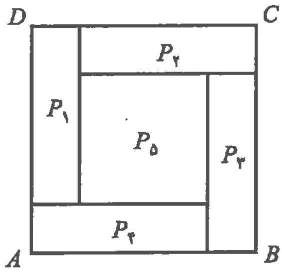
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 - OA \times OB - OC \times OD - OC \times OB - OA \times OD$$

است، که برابر است با

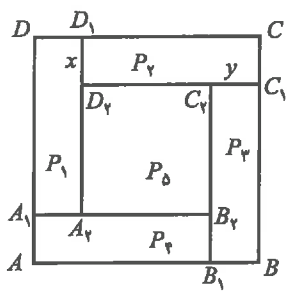
$$\frac{1}{2}\left((OA - OB)^2 + (OC - OD)^2 + (OC - OB)^2 + (OA - OD)^2\right)$$

بنابراین حکم درست است.

۹. مانند شکل صفحهٔ بعد مستطیل $ABCD$ را به پنج مستطیل P_1، P_2، P_3، P_4 و P_5 تقسیم کرده‌ایم. معلوم شده است که مساحت P_1، P_2، P_3، P_4 برابر است و P_5 مربع است. ثابت کنید $ABCD$ هم مربع است.



راه‌حل. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $A_2D_2 = 1$. فرض کنید $D_1D_2 = x$ و $C_1C_2 = y$. در این صورت $S_{P_1} = x(1+y)$ و چون $S_{P_1} = S_{P_2}$، پس $yC_1B = x(1+y)$. بنابراین

$$C_1B = \frac{x(1+y)}{y} = \frac{x}{y} + x$$

و درنتیجه

$$B_1B_2 = C_1B - 1 = \frac{x}{y} + x - 1$$

همچنین، چون $S_{P_2} = S_{P_4}$،

$$AB_1 = \frac{x+xy}{B_1B_2} = \frac{x+xy}{\frac{x}{y}+x-1} = \frac{xy+y^2}{x+xy-y}$$

و درنتیجه

$$A_1A_2 = \frac{xy+y^2}{x+xy-y} - 1 = \frac{xy^2-x+y}{x+xy-y}$$

از طرف دیگر، $S_{P_1} = S_{P_4}$ و درنتیجه

$$A_1A_2 = \frac{x+xy}{1+x}$$

بنابراین

$$\frac{xy^2 - x + y}{x + xy - y} = \frac{x + xy}{1 + x}$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این تساوی با تساوی

$$(x - y)(1 + 2xy + 2x) = 0$$

هم‌ارز است. بنابراین $x = y$. اکنون توجه کنید که

$$CD = A_1A_2 + 1 + y = \frac{x + xy}{1 + x} + 1 + y = \frac{x + x^2}{1 + x} + 1 + x = 1 + 2x$$

همچنین،

$$AD = x + 1 + B_1B_2 = x + 1 + \frac{x}{y} + x - 1 = 1 + 2x$$

یعنی $AD = CD$. پس $ABCD$ مربع است.

۱۰. مجموع ۱۰۰ عدد حقیقی برابر با صفر است. ثابت کنید می‌توان دست‌کم ۹۹ زوج (غیرمرتب) از این عددها انتخاب کرد که مجموع عددهای هر یک از آنها غیرمنفی باشد.

راه‌حل. عددها را a_1، a_2، ... و a_{100} بنامید و فرض کنید

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{100}$$

در این صورت

$$a_{50} + a_{99} \leq a_{51} + a_{99} \leq \cdots \leq a_{98} + a_{99}$$

$$a_{50} + a_{99} \leq a_{50} + a_{100} \leq a_{51} + a_{100} \leq \cdots \leq a_{99} + a_{100}$$

بنابراین اگر $a_{50} + a_{99}$ عددی غیرمنفی باشد، حکم مسأله درست است.

فرض کنید $a_{50} + a_{99}$ عددی منفی باشد. توجه کنید که

$$a_{50} + a_{99} \geq a_{49} + a_{98} \geq \cdots \geq a_3 + a_{52} \geq a_2 + a_{51}$$

پس عددهای

$$a_{50} + a_{99}, a_{49} + a_{98}, \ldots, a_3 + a_{52}, a_2 + a_{51}$$

منفی‌اند. درنتیجه مجموع آنها هم عددی منفی است. مجموع این عددها برابر است با $S - (a_1 + a_{100})$، که در آن S مجموع عددهای a_1، a_2، ... و a_{100} است. بنابراین، چون $S = 0$، پس $a_1 + a_{100}$ عددی مثبت است. اکنون توجه کنید که

$$a_1 + a_{100} \leq a_2 + a_{100} \leq \cdots \leq a_{99} + a_{100}$$

پس در این حالت هم حکم مسأله درست است.

۱۱. فرض کنید تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ که هر دوتا از آنها حداکثر یک عضو مشترک دارند برابر با b باشد. ثابت کنید

$$b \le \left\lfloor \frac{n}{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor \right\rfloor$$

راه‌حل. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m، $m \le n$، فرض کنید B_m مجموعهٔ زیرمجموعه‌های kعضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد که حداکثر یک عضو مشترک دارند و شامل m هستند. توجه کنید که اشتراک هر دو عضو B_m مجموعهٔ تک‌عضوی $\{m\}$ است، و درنتیجه، اگر m را از هر یک از آنها حذف کنیم، مجموعه‌هایی $k-1$ عضوی به‌دست می‌آوریم که هیچ دو تایی از آنها اشتراکی ندارند و اجتماع همهٔ آنها مجموعه‌ای حداکثر $n-1$ عضوی است. بنابراین

$$|B_m| \le \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor$$

از طرف دیگر،

$$|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_n| = kb$$

و درنتیجه

$$kb = |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_n| \le n \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor$$

بنابراین

$$b \le \left\lfloor \frac{n}{k} \left\lfloor \frac{n-1}{k-1} \right\rfloor \right\rfloor$$

۱۲. همهٔ چندجمله‌ایها مانند $p(x)$ و $q(x)$ را طوری پیدا کنید که

$$q(x^2) = (x+1)^4 - x\big(p(x)\big)^2$$

راه‌حل. فرض کنید چندجمله‌ایهای $p(x)$ و $q(x)$ ویژگی موردنظر را داشته باشند و درجهٔ $p(x)$ برابر با n باشد. در این صورت درجهٔ $x\big(p(x)\big)^2$ برابر با $2n+1$ است. درنتیجه، اگر $2n+1 > 4$، درجهٔ $(x+1)^4 - x\big(p(x)\big)^2$ عددی فرد است، که چون درجهٔ $q(x^2)$ عددی زوج است، به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $2n+1 \le 4$ و درنتیجه $n = 1$. فرض کنید

$$p(x) = ax + b$$

در این صورت

$$\begin{aligned} q(x^2) &= (x+1)^4 - x(ax+b)^2 \\ &= x^4 + (4-a^2)x^3 + (6-2ab)x^2 + (4-b^2)x + 1 \end{aligned}$$

پس $a = \pm ۲$ و $b = \pm ۲$. بنابراین

$$p(x) = ۲x + ۲, \quad q(x) = x^۲ - ۲x + ۱$$
$$p(x) = ۲x - ۲, \quad q(x) = x^۲ + ۱۴x + ۱$$
$$p(x) = -۲x + ۲, \quad q(x) = x^۲ + ۱۴x + ۱$$
$$p(x) = -۲x - ۲, \quad q(x) = x^۲ - ۲x + ۱$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که در هر مورد $p(x)$ و $q(x)$ ویژگی موردنظر را دارند.

۱۳. دانش‌آموزی به‌تازگی روش حل کردن معادله‌های درجهٔ دوم را یادگرفته است. او ابتدا معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ را حل می‌کند. اگر ریشه‌های این معادله عددهای حقیقی c و d باشند و $c < d$، او معادلهٔ $x^۲ + cx + d = ۰$ را حل می‌کند و همین کار را ادامه می‌دهد. این دانش‌آموز حداکثر چندبار می‌تواند این کار را تکرار کند؟

راه‌حل. فرض کنید معادلهٔ nام $f_n(x) = x^۲ + p_n x + q_n = ۰$ باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq ۳$ و $f_n(x) = ۰$ معادلهٔ آخر نباشد، آن‌وقت $p_n q_n > ۰$. توجه کنید که

$$p_{n-۱} = -(p_n + q_n)$$
$$q_{n-۱} = p_n q_n$$

درضمن، همواره $q_k < p_k$. بنابراین $-(p_n + q_n) < p_n q_n$. به این ترتیب

$$q_n > p_n, \quad q_n > -p_n(۱ + q_n), \quad ۴q_n < p_n^۲$$

از این نابرابریها به‌سادگی نتیجه می‌شود $p_n q_n > ۰$.

ثابت می‌کنیم که دانش‌آموز حداکثر پنج‌بار می‌تواند چنین معادله‌هایی را حل کند. اگر $f_۵(x) = ۰$ آخرین معادله نباشد، بنابر آنچه در بالا ثابت کردیم یا $q_۵ > p_۵ > ۰$ و درنتیجه $q_۴ > ۰ > p_۴$، یا $p_۵ < q_۵ < ۰$ و درنتیجه $q_۴ > p_۴ > ۰$ و $q_۳ > ۰ > p_۳$. به این ترتیب، در هر مورد به‌نتیجه‌ای رسیده‌ایم که با آنچه در ابتدای راه‌حل ثابت کردیم تناقض دارد.

اگر فرض کنیم

$$f_۵(x) = x^۲ - \frac{۱}{۲}x + ۴, \quad f_۴(x) = x^۲ - \frac{۷}{۲}x - ۲$$
$$f_۳(x) = x^۲ + \frac{۱۱}{۲}x + ۷, \quad f_۲(x) = x^۲ - \frac{۲۵}{۲}x - \frac{۷۷}{۲}$$
$$f_۱(x) = x^۲ - ۲۶x - \frac{۱۹۲۵}{۲}$$

معلوم می‌شود که می‌توان پنج معادله با ویژگی موردنظر به‌دست آورد.

۱۴. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4$$

راه‌حل. عبارت سمت چپ نابرابری موردنظر را A بنامید. در این صورت

$$A=\frac{(a+c)(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)}+\frac{(b+d)(a+b+c+d)}{(a+d)(b+c)}$$

اکنون توجه کنید که چون $(x+y)^2\geq 4xy$،

$$\frac{(a+c)(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)}\geq (a+c)(a+b+c+d)\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$
$$=\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\frac{(b+d)(a+b+c+d)}{(a+d)(b+c)}\geq \frac{4(b+d)}{a+b+c+d}$$

بنابراین

$$A\geq \frac{4(a+c)+4(b+d)}{a+b+c+d}=4$$

۱۵. مجموع عددهای غیرمنفی a، b، c و d برابر با ۱ است و

$$ace+bdf\geq \frac{1}{108}$$

ثابت کنید

$$abc+bcd+cde+def+efa+fab\geq \frac{1}{36}$$

راه‌حل. فرض کنید

$$A=ace+bdf,\qquad B=abc+bcd+cde+def+efa+fab$$

در این صورت، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$A+B=(a+d)(b+e)(c+f)\leq \left(\frac{(a+d)+(b+e)+(c+f)}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

بنابراین

$$B\leq \frac{1}{27}-A\leq \frac{1}{27}-\frac{1}{108}=\frac{1}{36}$$

۱۶. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید، به‌طوری که اگر x_1، x_2، …، x_n، y_1، y_2، … و y_n عددهایی حقیقی باشند، آن‌وقت

$$x_1x_2\cdots x_n + y_1y_2\cdots y_n \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\cdots\sqrt{x_n^2+y_n^2}$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که اگر $n=1$، نابرابری موردنظر، یعنی نابرابری $x_1+y_1 \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}$ همواره درست نیست. ثابت می‌کنیم اگر n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$، نابرابری موردنظر درست است. توجه کنید که کافی است نابرابری موردنظر را وقتی که x_iها و y_iها عددهایی مثبت‌اند ثابت کنیم. به این ترتیب کافی است ثابت کنیم

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\times\cdots\times\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}+\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\times\cdots\times\frac{y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \leq 1 \qquad (*)$$

فرض کنید

$$a_i=\frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}},\qquad b_i=\frac{y_i}{\sqrt{x_i^2+y_i^2}},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

در این صورت a_iها و b_iها عددهایی در بازهٔ $(0,1)$اند و $a_i+b_i=1$، $1 \leq i \leq n$. توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\begin{aligned}\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}&+\sqrt{b_1b_2\cdots b_n}\\ &\leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\\ &\leq \frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\frac{1}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=1\end{aligned}$$

که همان نابرابری $(*)$ است.

۱۷. معادلهٔ $x^2=4y+3[x,y]$ را در مجموعهٔ عددهای طبیعی حل کنید ($[x,y]$ کوچکترین مضرب مشترک x و y است).

راه‌حل. فرض کنید (x,y) جواب معادلهٔ موردنظر و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x و y باشد. در این صورت عددهایی طبیعی مانند x_1 و y_1 وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند و $x=dx_1$ و $y=dy_1$. چون $[x,y]=dx_1y_1$، پس

$$d^2x_1^2=4dy_1+3dx_1y_1$$

درنتیجه

$$x_1(dx_1-3y_1)=4y_1 \qquad (*)$$

بنابراین x_1 مقسوم‌علیه $4y_1$ است، و چون x_1 و y_1 نسبت به هم اول‌اند، پس x_1 مقسوم‌علیه ۴ است. پس $x_1=1,2,4$.

اگر $x_1 = 1$، از تساوی (*) نتیجه می‌شود $d = 7y_1$ و درنتیجه

$$x = dx_1 = 7y_1, \qquad y = dy_1 = 7y_1^2$$

اگر $x_1 = 2$، از تساوی (*) نتیجه می‌شود $2d = 5y_1$. بنابراین y_1 بر ۲ بخش‌پذیر است، که چون x_1 و y_1 نسبت به هم اول‌اند، ممکن نیست.

اگر $x_1 = 4$، از تساوی (*) نتیجه می‌شود $d = y_1$. بنابراین

$$x = dx_1 = 4d, \qquad y = dy_1 = d^2$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر k عددی طبیعی باشد و $(x, y) = (7k, 7k^2), (4k, k^2)$، آن‌وقت (x, y) جواب معادلهٔ موردنظر است.

۱۸. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\big((x-y)^2\big) = \big(f(x)\big)^2 - 2xf(x) + y^2$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگی موردنظر را داشته باشد. اگر فرض کنیم $x = 0$ و $y = 0$، از تساوی

$$f\big((x-y)^2\big) = \big(f(x)\big)^2 - 2xf(x) + y^2 \qquad (*)$$

نتیجه می‌شود $f(0) = f(0)^2$. بنابراین یا $f(0) = 0$ یا $f(0) = 1$. همچنین، اگر فرض کنیم $x = 0$ و $y = \sqrt{t}$، که در آن t عددی حقیقی و نامنفی است، از تساوی (*) به‌دست می‌آید

$$f(y) = f(0)^2 + y \qquad (**)$$

ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x) = x + f(0)^2$. توجه کنید که اگر x عددی مثبت و y عددی حقیقی باشد، از تساوی (**) نتیجه می‌شود

$$f(x) = x + f(0)^2$$
$$f\big((x-y)^2\big) = (x-y)^2 + f(0)^2$$

بنابراین از تساوی (*) نتیجه می‌شود

$$(x-y)^2 + f(0)^2 = \big(x + f(0)^2\big)^2 - 2xf(y) + y^2$$

درنتیجه

$$x^2 - 2xy + y^2 + f(0)^2 = x^2 + f(0)^4 + 2xf(0) - 2xf(y) + y^2$$

بنابراین

$$2x\big(f(x) - y - f(0)^2\big) = f(0)^4 - f(0)^2 = 0$$

پس $f(y) = y + f(0)^2$.

بنابراین، یا به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x) = x$ یا به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x) = x + 1$.
به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این دو تابع ویژگی موردنظر را دارند.

۱۹. آیا می‌توان عددهایی گنگ مانند a و b پیدا کرد که $a, b > 1$ و اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، $\lfloor a^m \rfloor$ و $\lfloor b^n \rfloor$ برابر نباشند؟

راه‌حل. بله، مثلاً $a = \sqrt{6}$ و $b = \sqrt{3}$. فرض کنید به‌ازای عددهایی طبیعی مانند m و n،

$$\lfloor a^m \rfloor = \lfloor b^n \rfloor = k$$

در این صورت

$$k^2 \leq 6^m < k^2 + 2k + 1, \qquad k^2 \leq 3^n < k^2 + 2k + 1$$

بنابراین

$$2k \geq |6^m - 3^n| = 3^m |2^m - 3^{n-m}|$$

معلوم است که $m < n$، و درنتیجه $|2^m - 3^{n-m}| \geq 1$. بنابراین $2k \geq 3^m$ و درنتیجه

$$\frac{9^m}{4} \leq k^2 \leq 6^m$$

اکنون توجه کنید که اگر $\left(\frac{2}{3}\right)^m \geq \frac{1}{4}$، آنگاه m یکی از عددهای ۱، ۲ یا ۳ است. توجه کنید که $\lfloor a \rfloor = 1$، $\lfloor a^2 \rfloor = 6$ و $\lfloor a^3 \rfloor = 14$. از طرف دیگر،

$$\lfloor b \rfloor = 1, \qquad \lfloor b^2 \rfloor = 3, \qquad \lfloor b^3 \rfloor = 5, \qquad \lfloor b^4 \rfloor = 9, \qquad \lfloor b^5 \rfloor = 15$$

بنابراین به تناقض رسیده‌ایم، و اگر m و n عددهایی طبیعی باشند، $\lfloor a^m \rfloor$ و $\lfloor b^n \rfloor$ برابر نیستند.

۲۰. آیا عددی حقیقی و بزرگ‌تر از ۱ مانند x وجود دارد که صحیح نباشد و

$$\{x\} + \{x^3\} + \{x^5\} + \cdots + \{x^{99}\} < \frac{1}{2^{99}}$$

($\{t\}$ جزء کسری t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

راه‌حل. بله، وجود دارد. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $n > 1$، و $x = n^{99} + \frac{1}{n}$. در این صورت

$$\{x^{2k+1}\} = \left\{\left(n^{99} + \frac{1}{n}\right)^{2k+1}\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} n^{198k - 100i + 99}\right\}$$

اگر $0 \leq k \leq 49$ و $0 \leq i \leq 2k$، آنگاه $198k - 100i + 99 > 0$. بنابراین

$$\{x^{2k+1}\} = \left\{\binom{2k+1}{2k+1} n^{198k - 100(2k+1) + 99}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{2k+1}\right\} = \left(\frac{1}{n}\right)^{2k+1}$$

درنتیجه

$$
\begin{aligned}
\{x\} + \{x^{۳}\} + \cdots + \{x^{۹۹}\} &= \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n^{۳}} + \cdots + \frac{۱}{n^{۹۹}} \\
&= \frac{۱}{n} \frac{۱ - \left(\frac{۱}{n^{۲}}\right)^{۵۰}}{۱ - \frac{۱}{n^{۲}}} \\
&< \frac{۱}{n} \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{n^{۲}}} \\
&= \frac{n}{n^{۲} - ۱} \\
&< \frac{۱}{n - ۱}.
\end{aligned}
$$

بنابراین، اگر مثلاً $n = ۲^{۹۹} + ۱$ و $x = n^{۹۹} + \frac{۱}{n}$، آنگاه

$$\{n\} + \{x^{۳}\} + \cdots + \{x^{۹۹}\} < \frac{۱}{n - ۱} = \frac{۱}{۲^{۹۹}}$$

نتیجه‌هایی از قضیهٔ اویلر

اوژن کاتالان

سؤال آکادمی علوم، که موضوع گردهمایی جایزهٔ بزرگ ریاضی (۱۸۶۳) بود، این بود:

به شکل قابل توجهی، نظریهٔ هندسی چندوجهی‌ها را بهبود ببخشید.

این «رساله»، بازنوشتی از نوشته‌ای‌ست که در بیست و دوم دسامبر ۱۸۶۲ به دبیر مؤسسه تقدیم شد (بیست و سوم ژانویهٔ ۱۸۶۵).

نتیجه‌های قضیهٔ اویلر

قضیهٔ اویلر، که با معادلهٔ

$$f+v=e+۲ \tag{۱}$$

بیان می‌شود، هنوز هم کلی‌ترین و مهم‌ترین رابطه‌ای‌ست که اجزای هر چندوجهی محدبی در آن صدق می‌کنند. اجزای چندوجهی، با چهار معادلهٔ

$$f_۳+\cdots+f_n=f \tag{۲}$$

$$v_۳+\cdots+v_p=v \tag{۳}$$

$$۳f_۳+\cdots+nf_n=۲e \tag{۴}$$

$$۳v_۳+\cdots+pv_p=۲e \tag{۵}$$

به‌هم مربوط می‌شوند. در این معادله‌ها، f_i تعداد وجه‌های iضلعی و v_j تعداد رأسهای متصل به j یال است.

اگر e معلوم باشد، می‌دانیم که f، v، $f_۱$، $\ldots$، f_n و $v_۱$، $\ldots$، v_p مجهولهایی هستند که مقدارشان صحیح و مثبت است و در معادله‌های بنیادی (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) صدق می‌کنند. پیش از ادامهٔ بحث، چند نتیجه از این معادله‌ها را یادآوری می‌کنیم.

با حذف $f_۳$ از معادله‌های (۲) و (۴) و $v_۳$ از معادله‌های (۳) و (۵)، نتیجه می‌شود

$$f_۴+۲f_۵+\cdots+(n-۳)f_n=۲e-۳f$$

$$v_۴+۲v_۵+\cdots+(p-۳)v_p=۲e-۳v$$

پس

$$f\leq\frac{۲}{۳}e \tag{۶}$$

$$v\leq\frac{۲}{۳}e \tag{۷}$$

از این نابرابریها و (۱)، نتیجه می‌شود (ژرگون، آنال دُ ماتماتیک، ۱۵ ۱۶۴)

$$f \geq \frac{۱}{۳}e + ۲ \qquad (۸)$$

$$v \geq \frac{۱}{۳}e + ۲ \qquad (۹)$$

بنابراین، در هر چندوجهی محدب با e یال، تعداد وجه‌ها بین $۲ + \frac{۱}{۳}e$ و $\frac{۲}{۳}e$ است.

در معادله‌های (۸) و (۹)، تساوی هم ممکن است اتفاق بیفتد. در منشوری با قاعدهٔ nضلعی،

$$v = ۲n, \quad f = n + ۲, \quad e = ۳n$$

و درنتیجه

$$v = \frac{۲}{۳}e, \quad f = \frac{۱}{۳}e + ۲$$

در چندوجهی‌ای که از یکی‌کردن قاعده‌های دو هرم با قاعدهٔ nضلعی به‌دست آمده،

$$v = n + ۲, \quad f = ۲n, \quad e = ۳n$$

و درنتیجه (کاتالان، اِلمان دُ ژئومتری)

$$v = \frac{۱}{۳}e + ۲, \quad f = \frac{۲}{۳}e$$

ممکن است که به‌ازای بعضی از مقادیر e، به‌ازای هر مقدار v و f که در رابطه‌های (۱)، (۸) و (۹) صدق کند، چندوجهی‌ای وجود داشته باشد. به‌ازای $e = ۱۵$، چنین اتفاقی می‌افتد. در این حالت، مقدارهای ممکن f و v عبارت‌اند از $f = ۱۰$ و $v = ۷$، $f = ۹$ و $v = ۸$، $f = ۸$ و $v = ۹$ و $f = ۷$ و $v = ۱۰$. بنابر بند قبل، حالتهای اول و آخر در هرم مضاعف با قاعدهٔ پنج‌ضلعی و منشور با قاعدهٔ پنج‌ضلعی رخ می‌دهند. حالت دوم در نُه‌وجهی‌ای که وجه‌هایش چهارضلعیهای $ABCD$، $AEFD$ و $EFGH$ و مثلثهای AEH، ABH، BGH، BCG، CFG و CDF هستند اتفاق می‌افتد.

بالاخره، حالت سوم ($f = ۸$ و $v = ۹$) در چندوجهی‌ای اتفاق می‌افتد که به‌نوعی دوقلوی چندوجهی قبلی‌ست؛ چندوجهی‌ای که وجه‌هایش سه مثلث و شش چهارضلعی هستند.

با حذف f، v و e از معادله‌های بنیادی، دو رابطهٔ

$$۲(v_۳ + \cdots + v_p) - (f_۳ + ۲f_۴ + \cdots + (n-۲)f_n) = ۴ \qquad (۱۰)$$

$$۲(f_۳ + \cdots + f_n) - (v_۳ + ۲v_۴ + \cdots + (p-۲)v_p) = ۴ \qquad (۱۱)$$

نتیجه می‌شوند که هر مجهول را به‌آسانی می‌توان از آنها حذف کرد.

با جمع جمله به جملهٔ دو معادلهٔ اخیر، $f_۴$ و $v_۴$ حذف می‌شوند و نتیجه می‌شود

$$f_۳ + v_۳ = ۸ + (f_۵ + v_۵) + ۲(f_۶ + v_۶) + \cdots$$

یعنی در هر چندوجهی محدب، مجموع تعداد مثلثها و سه‌شاخه‌ها برابر است با هشت، به‌علاوهٔ مجموع تعداد پنج‌ضلعیها و پنج‌شاخه‌ها، به‌علاوهٔ دو برابر مجموع تعداد شش‌ضلعیها و شش‌شاخه‌ها و .... پس هر چندوجهی محدبی که مثلث نداشته باشد، سه‌شاخه دارد.

حذف f_3 و v_3 از معادله‌های (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌دهد

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - (f_7 + 2f_8 + \cdots) - 2(v_4 + 2v_5 + \cdots) = 12$$

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 - (v_7 + 2v_8 + \cdots) - 2(f_4 + 2f_5 + \cdots) = 12$$

در نتیجه

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 12 \qquad (12)$$

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 \geq 12 \qquad (13)$$

یعنی

الف) هر چندوجهی محدب مثلث دارد یا چهارضلعی یا پنج‌ضلعی،

ب) هر چندوجهی محدب سه‌شاخه دارد یا چهارشاخه یا پنج‌شاخه،

ج) اگر هیچ‌یک از وجه‌های چندوجهی محدب چهارضلعی یا پنج‌ضلعی نباشد، اقلاً چهار وجه آن مثلث‌اند،

د) اگر هیچ‌یک از رأس‌های چندوجهی محدب چهارشاخه یا پنج‌شاخه نباشد، اقلاً چهار رأس آن سه‌شاخه‌اند.

حذف f_5 و v_5 از معادله‌های (۱۰) و (۱۱) نتیجه می‌دهد

$$4f_3 + 2f_4 - 2f_6 - 4f_7 - \cdots + v_3 - 2v_4 - 5v_5 - 8v_6 - \cdots = 20$$

$$4v_3 + 2v_4 - 2v_6 - 4v_7 - \cdots + f_3 - 2f_4 - 5f_5 - 8f_6 - \cdots = 20$$

در نتیجه

$$4f_3 + 2f_4 + v_5 \geq 20 \qquad (14)$$

$$4v_3 + 2v_4 + f_3 \geq 20 \qquad (15)$$

یعنی

الف) هر چندوجهی محدب بدون سه‌شاخه و چهارشاخه، اقلاً بیست مثلث دارد،

ب) هر چندوجهی محدب بدون مثلث و چهارضلعی، اقلاً بیست سه‌شاخه دارد،

ج) اگر چندوجهی محدبی فقط یک سه‌شاخه داشته باشد و چهارشاخه نداشته باشد، اقلاً شانزده وجه آن مثلث‌اند،

د) اگر چندوجهی محدبی فقط یک مثلث داشته باشد و چهارضلعی نداشته باشد، اقلاً شانزده رأس آن سه‌شاخه‌اند.

۳ دسامبر ۱۸۶۲.

• ترجمهٔ بردیا حسام

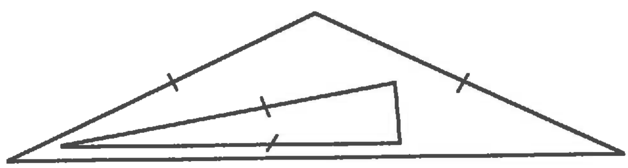
E. Catalan, Conséquences du thèorém d'Euler, *J. École Polytéch.*, **24** (1895) 2-6.

راه‌حلها

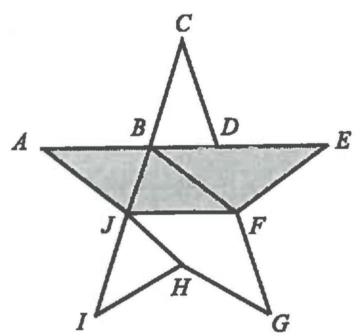
از باب تفریح

۱. تعداد کل بازیهای انجام شده $(۱۴ + ۹ + ۱۵)\frac{۱}{۲}$ یا ۱۹تاست. هیچ بازیکنی بیش از یک بازی را به‌طور متوالی از دست نمی‌دهد. احمد ۹بار بازی کرده است؛ پس او در بازیهای با شمارهٔ زوج بازی کرده است (در غیر این صورت تعداد بازیهایی که او انجام داده است بیشتر می‌شود). بنابراین علی و محمد بازی سیزدهم را برگزار کرده‌اند.

۲. بله، شکل زیر را ببینید.



۳. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



توجه کنید که مثلثهای FBE و FJG همنهشت‌اند. همچنین، مثلثهای BCD، JAB و HIJ همنهشت‌اند. از طرف دیگر، پنج‌ضلعی $BDFHJ$ منتظم و هر یک از زاویه‌های داخلی‌اش برابر با ۱۰۸° است. درنتیجه

$$\angle DBF = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \angle BDF) = ۳۶^\circ$$

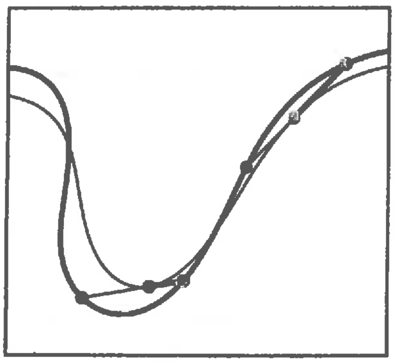
و

$$\angle FBJ = \angle DBJ - \angle DBF = ۱۰۸^\circ - ۳۶^\circ = ۷۲^\circ$$

همچنین
$$\angle ABJ = ۱۸۰^\circ - \angle DBJ = ۱۸۰^\circ - ۱۰۸^\circ = ۷۲^\circ$$
پس مثلثهای متساوی‌الساقین ABJ و FBJ همنهشت‌اند. اکنون به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که حکم مسأله درست است.

۴. بیشترین تعداد نقطه‌های روی سه‌وجه هر تاس برابر با ۴ + ۵ + ۶ یا ۱۵تاست. باید دو عدد پیدا کنیم که حداکثر ۱۵ باشند و مجموعشان ۲۷ باشد. تنها حالتهای ممکن ۱۴ و ۱۳ و ۱۵ و ۱۲ است. ثابت می‌کنیم ممکن نیست تعداد نقطه‌های روی سه وجه تاسی ۱۳ باشد و درنتیجه، عددهای موردنظر ۱۵ و ۱۲ هستند. چون ۱۳ > ۱۲ = ۴ × ۳، برای اینکه تعداد نقطه‌های سه‌وجه تاسی ۱۳ باشد، باید یکی از وجه‌ها ۵ یا ۶ نقطه داشته باشد. اکنون می‌توانید با بررسی مورد به مورد ثابت کنید که در هر حالت به تناقض می‌رسیم.

۵. از راست به چپ. فرض کنید $F(t)$ و $B(t)$ به‌ترتیب نقطه‌های تماس چرخهای جلو عقب دوچرخه با زمین در زمان t باشند. در این صورت، چون چرخ عقب فرمان نمی‌دهد، خطی که $F(t)$ و $B(t)$ را به هم وصل می‌کند بر مسیری که چرخ عقب طی می‌کند مماس است و طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند ثابت است (برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ برخورد چرخها با زمین). درنتیجه خم ضخیم در شکل زیر مسیر چرخ عقب نیست، زیرا برخی مماسهای بر آن خم دیگر را قطع نمی‌کنند. بنابر مسیر چرخ عقب خم نازک است.



اکنون کافی است چند مماس بر این خم رسم کنیم تا جهت حرکت دوچرخه معلوم شود. اگر جهت حرکت از چپ به راست باشد، باید طول مماسهای ضخیم در شکل بالا برابر باشد، که نیست. اما طول مماسهای نازک برابر است و درنتیجه، جهت حرکت از راست به چپ است.

چهل و چهارمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱. فرض کنید $D = \{x - y :\ x, y \in A, x > y\}$. اگر مثلاً $A_i \cap A_j \neq \varnothing$، آن‌وقت عددهایی مانند x و y در A وجود دارند که $x > y$ و $x + t_i = y + t_j$، و درنتیجه
$$t_i - t_j = y - x \in D$$

فرض کنید $t_1 = 1$ و t_2 را کوچکترین عدد در S بگیرید که

$$t_2 \notin D_1 = \{x + t_1 :\ x \in D\}$$

اگر t_1، ... و t_i، $i < 100$، انتخاب شده باشند، t_{i+1} را کوچکترین عدد در S بگیرید که

$$t_{i+1} \notin D_k = \{x + t_k :\ x \in D\}, \qquad k = 1, 2, \cdots, i$$

توجه کنید که چون

$$\sum |D_k| \leq i\binom{101}{2} \leq 5050i < 1000000$$

این کار را می‌توان انجام داد. به این ترتیب

$$t_i - t_j \notin D, \qquad 1 \leq j < i \leq 100$$

بنابراین $A_i \cap A_j = \varnothing$.

۲. فرض کنید زوج (a, b) ویژگی موردنظر را داشته باشد و

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$$

در این صورت

$$a^2 - 2kb^2a + k(b^3 - 1) = 0$$

بنابراین مبین معادلهٔ درجهٔ دوم بالا مربع کامل است، یعنی عددی صحیح مانند d وجود دارد که

$$(2b^2k - b)^2 + 4k - b^2 = d^2$$

اگر $4k - b^2 = 0$، آنگاه

$$a = 2b^2k - \frac{b}{2}, \qquad \frac{b}{2}$$

اگر $4k - b^2 > 0$، آنگاه

$$d^2 - (2b^2k - b)^2 = 4k - b^2 \geq 2(2b^2k - 2b + 1)$$

یعنی

$$4k(b^2 - 1) + (b^2 - 1) \leq 0$$

درنتیجه $b = 1$.

اگر $4k - b^2 < 0$، آنگاه

$$(2b^2k - b)^2 - d^2 = b^2 - 4k$$

اما

$$(2b^2k - b)^2 - (2b^2k - b - 1)^2 = 2(2b^2k - b) - 1$$

چون

$$2(2b^2k-b)-1-(b^2-4k)=b^2(4k-3)+2b(b-1)+(4k-1)>0$$

پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین

$$(a,b)=(2k,1),(k,2k),(8k^2-k,2k)$$

که در آنها k عددی صحیح است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که زوجهای موردنظر همین زوجها هستند.

۳. فرض کنید $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$، ... و $\mathbf{a}_6$ بردارهای نظیر رأسها باشند. در این صورت

$$\left|\frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2}{2}-\frac{\mathbf{a}_4+\mathbf{a}_5}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}(|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2|+|\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_5|)$$

$$\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4-\mathbf{a}_5|)$$

(تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که ضلعها موازی باشند) درنتیجه

$$|(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_4)+(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_5)|\geq\sqrt{3}|(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_4)-(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_5)|$$

فرض کنید $\mathbf{r}_1=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_4$، $\mathbf{r}_2=\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_5$، $\mathbf{r}_3=\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_6$ ($\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_3$ قطرند). در این صورت

$$|\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2|\geq\sqrt{2}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| \qquad (1)$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$|\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3|\geq\sqrt{3}|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3| \qquad (2)$$

$$|\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3|\geq\sqrt{3}|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3| \qquad (3)$$

اگر دو طرف تساوی (۱) را به توان ۲ برسانیم نتیجه می‌شود

$$\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2\geq\frac{1}{4}(|\mathbf{r}_1|^2+|\mathbf{r}_2|^2)$$

درنتیجه، اگر زاویهٔ میان $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ برابر x باشد،

$$\cos x\geq\frac{|\mathbf{r}_2|^2+|\mathbf{r}_2|^2}{4|\mathbf{r}_1\|\mathbf{r}_2|}\geq\frac{1}{2}$$

و تساوی وقتی برقرار است که $|\mathbf{r}_2|=|\mathbf{r}_1|$. بنابراین $0\leq x\leq 60^\circ$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که زاویهٔ میان $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ بین 0° و 60° است و زاویهٔ میان $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_3$ از 120° کمتر نیست. بنابراین در نابرابریهای (۱)، (۲) و (۳) تساوی برقرار است. یعنی $|\mathbf{r}_1|=|\mathbf{r}_2|=|\mathbf{r}_3|$، زاویهٔ میان هر جفت از این قطرها 60° است و ضلعهای روبه‌رو موازی‌اند.

اکنون فرض کنید شش‌ضلعی موردنظر $ABCDEF$ باشد. پاره‌خط DG را موازی و هم‌طول با پاره‌خط EB رسم کنید (یعنی $EDGB$ متوازی‌الاضلاع است). در این صورت $ED \parallel BG$ و چون $ED \parallel AB$،

پس A، B و G روی یک خط راست‌اند. بنابراین $\angle ADG = ۶۰^\circ$، زیرا $EB \parallel DG$ و زاویهٔ حادهٔ میان AD و EB برابر با ۶۰° است. همچنین $AD = EB = DG$. بنابراین مثلث ADG متساوی‌الاضلاع است. درنتیجه

$$\angle DAG = \angle DAB = ۶۰^\circ$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $\angle DAF = ۶۰^\circ$. بنابراین $\angle FAB = ۱۲۰^\circ$. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که بقیهٔ زاویه‌ها هم برابر با ۱۲۰° هستند.

۴. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $X_۱$، $Y_۱$ و $Z_۱$ پای عمودهای وارد از نقطهٔ M بر ضلعهای مثلث XYZ باشند، آنگاه

$$X_۱Z_۱ = \frac{MA \times XY}{۲R}, \qquad X_۱Y_۱ = \frac{MB \times XZ}{۲R}, \qquad Y_۱Z_۱ = \frac{MZ \times XY}{۲R}$$

که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث XYZ است. درحقیقت، توجه کنید که چون نقطه‌های M، X، $X_۱$ و $Z_۱$ رویِ دایره‌ای به قطر MX قرار دارند، بنابر قانون سینوسها،

$$X_۱Z_۱ = MA \sin X = MA \times \frac{YZ}{۲R} = \frac{MA \times YZ}{۲R}$$

و همین‌طور در مورد $X_۱Y_۱$ و $Y_۱Z_۱$.

اکنون توجه کنید که اگر $PR = PQ$، آنگاه

$$\frac{DA \times BC}{۲r} = \frac{DC \times AB}{۲r}$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. بنابراین

$$\frac{CD}{DA} = \frac{BC}{AB}$$

که حکم از آن نتیجه می‌شود.

۵. نابرابری موردنظر با نابرابری

$$\left(\sum_{i<j} |x_i - x_j|\right)^۲ \leq \frac{n^۲ - ۱}{۳} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^۲$$

هم‌ارز است. سمت چپ این نابرابری را L و سمت راست آن را R بنامید. همچنین، فرض کنید $a_i = a_{i+۱} - x_i$، $۱ \leq i \leq n - ۱$. در این صورت

$$L = ((n-۱)a_۱ + ۲(n-۲)a_۲ + \cdots + (n-۱)a_{n-۱})^۲$$

$$R = \sum_{i=۱}^{n-۱} \left(a_i^۲ + (a_i + a_{i+۱})^۲ + \cdots + (a_i + a_{i+۱} + \cdots + a_{n-۱})^۲\right)$$

چون

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = 2\binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2}$$

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \cdots + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i+1}$$

از نابرابری کشی ـ شوارتز نتیجه می‌شود

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12}R = \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-i)^2\right)\right)R$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_1 + 2(a_i + a_{i+1} + \cdots + (n-i)(a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{n-1}\right)\right)\right)^2$$

$$= \frac{n^2}{4}L$$

که همان نابرابری موردنظر است. چون در این نابرابری تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = 2, \qquad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1} = 3, \cdots$$

پس در نابرابری موردنظر تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$، یعنی وقتی و فقط وقتی که x_iها تصاعدی حسابی تشکیل دهند.

۶. چون

$$\frac{p^p - 1}{p-1} = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{p-1} \equiv p + 1 \ (p^2 \ \text{به پیمانهٔ})$$

پس $\frac{p^p-1}{p-1}$ مقسوم‌علیه اولی مانند q دارد که به پیمانهٔ p^2 با ۱ همنهشت نیست. ثابت می‌کنیم q ویژگی موردنظر را دارد. فرض کنید چنین نباشد و عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد که $n^p - p$ بر q بخش‌پذیر باشد. در این صورت، بنابر تعریف q،

$$p^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \ (q \ \text{به پیمانهٔ})$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ کوچک فرما، $n^{q-1} - 1$ بر q بخش‌پذیر است. چون $q - 1$ بر p^2 بخش‌پذیر نیست، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p^2 و $q - 1$ یا ۱ است یا p. درنتیجه $n^p - 1$ بر q بخش‌پذیر است. بنابراین $p - 1$ بر q بخش‌پذیر است. درنتیجه

$$1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv p \ (q \ \text{به پیمانهٔ})$$

به این ترتیب، بنابر تعریف q، p بر q بخش‌پذیر است، که تناقض است.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

منتشر
می‌کند: