نشریهٔ

ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال چهارم / ۲
شمارهٔ پیاپی: ۱۳
بهمن ۱۳۸۲
قیمت: ۷۰۰ تومان

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

کتابهای کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز

طرح مشترک با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

هدف از تهیه و انتشار کتابهای کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز کمک به توسعه و درک بهتر مفاهیم کتابهای درسی و ایجاد مهارت برای پاسخگویی به پرسشها، مسائل و آزمونهای گوناگون است. کتابهای کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز بر اساس برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی تهیه شده است. در این کتابها ابتدا بعضی از مفاهیم، کتابهای درسی با ذکر مصادیق تشریح شده و بعد از توسعهٔ آن مفاهیم، مصادیق آن در قالب تمرینهای طبقه‌بندی شده برای یادگیری عمیق آمده است. این کتابها جانشینی برای کتابهای درسی نیست، بلکه باید همراه با مطالعهٔ کتابهای درسی مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد.

کتابهای تقدیری سومین جشنوارهٔ کتابهای آموزشی رشد

به نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی
سال چهارم/ ۲، شمارهٔ پیاپی: ۱۳، بهمن ۱۳۸۲

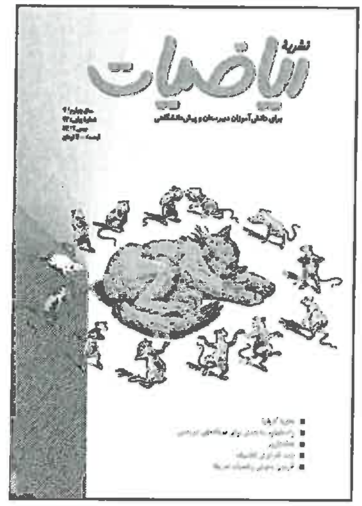
فهرست:

مقاله‌ها

سرگرمی

المپیاد

راه حل



روی جلد: گربه می‌تواند سیزده تا در میان موشها را بخورد و آخرین موشی که خورده می‌شود باید موش سفید باشد. ابتدا کدام موش را باید بخورد؟

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش
مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، محمد مهدی عابدی‌نژاد
هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، سیدمصطفی سیادت موسوی، امید نقشینه ارجمند
ویراستاران: بردیا حسام، ارشک حمیدی

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه
مسؤول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم مهری
رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ۱۴۱۴۵
تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ۸۹۷۱۵۸۳
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

نظریهٔ گرهها

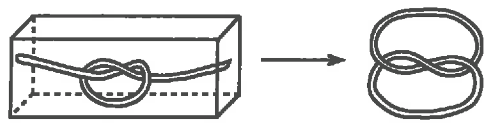
اولگ ویرو

وقتی ریاضیدانها می‌خواهند چیزی را بررسی کنند، معمولاً آن‌را با شیئی ریاضی جایگزین می‌کنند. به همین شیوه، گرههای معمولی هم که با طناب درست می‌شوند، به گرههای ریاضی تبدیل می‌شوند.

یکی از سؤالهایی که باعث شد ریاضیدانها به بررسی گرهها علاقه‌مند شوند، این بود که کدام گرهها را می‌توان بدون بریدن طناب بازکرد و کدامها را نمی‌توان بازکرد.

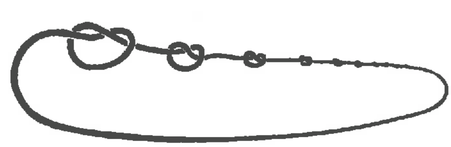
الگوی اولیهٔ گره ریاضی، تکه طناب پیچ‌خورده‌ای است که دو سرش ثابت شده‌اند. دو سر طناب به این دلیل ثابت فرض می‌شوند که اگر این‌طور نباشد، می‌توانیم با رد کردن یکی از دو سر طناب از همهٔ حلقه‌ها گره را بازکنیم.

راهی ساده‌تر برای اینکه مشکل‌مان با دو سر طناب را حل کنیم، این است که دو سر طناب را به هم وصل کنیم (شکل ۱ را ببینید). در نتیجه، طناب به حلقه‌ای پیچ خورده تبدیل می‌شود.



شکل ۱

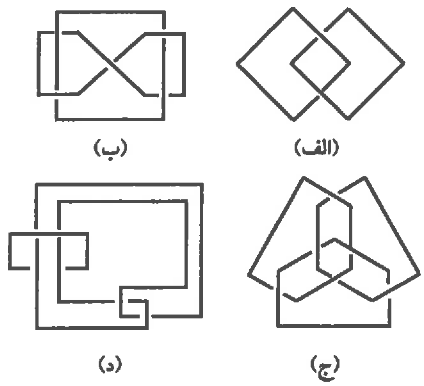
گام بعدی برای رسیدن به گره ریاضی، جایگزین کردن طناب با خط (محور طناب) است. هرچند که هر طناب را می‌توان خطی (در امتداد محور طناب) در نظر گرفت، نمی‌توان هر خط را محور طنابی با ضخامت ثابت فرض کرد. مثلاً، خمی را که رویش دنباله‌ای نامتناهی از گرهها که کوچک و کوچکتر می‌شوند وجود دارد (شکل ۲ را ببینید) نمی‌توانیم طوری «باد» کنیم که طنابی با ضخامت متناهی به‌دست بیاید. خمهایی از این نوع (که تعدادی نامتناهی گره دارند) هم در ریاضیات بررسی می‌شوند. این نوع از خمها را گرههای سرکش می‌نامیم.



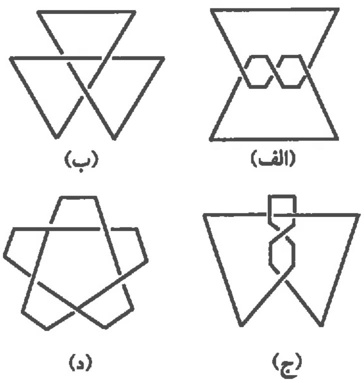
شکل ۲

ما با گرههای سرکش کاری نداریم. برای اینکه این نوع گرهها راکنار بگذاریم، «گره سربه‌راه» را تعریف می‌کنیم: گره سربه‌راه، مسیری یک‌تکه و بسته در فضاست که خودش را قطع نمی‌کند و از تعدادی متناهی پاره‌خط تشکیل شده است.

این تعریف، به خوبی با شهودمان دربارهٔ گره تطبیق دارد. هر گره سربه‌راه را می‌توان با طناب درست کرد و هر گره روی طناب، محوری دارد که از تعدادی متناهی پاره‌خط تشکیل شده است. کلمهٔ یک‌تکه در تعریف گره سربه‌راه، به این معناست که نمی‌توان مسیر را به‌صورت اجتماع چند مسیر بسته نشان داد. اگر یک‌تکه بودن گره برایمان مهم نباشد، به تعریف زنجیرهٔ سربه‌راه می‌رسیم. در شکل ۳، چند گره سربه‌راه را نشان داده‌ایم و در شکل ۴، چند زنجیرهٔ سربه‌راه را که گره نیستند.



شکل ۳



شکل ۴

چون در اینجا فقط با گرهها و زنجیره‌های سربه‌راه سر و کار داریم، از این به بعد عبارت «سربه‌راه» را نمی‌آوریم.

ترسیم گرهها

برای ترسیم گره، ابتدا یک «منظر» انتخاب می‌کنیم. این نقطه باید در دو شرط صدق کند: اول اینکه باید بتوانیم صفحه‌ای پیدا کنیم که از این نقطه می‌گذرد و گره، در یک طرف آن قرار دارد و دوم اینکه از این نقطه، هیچ سه پاره‌خطی از گره نباید طوری دیده شوند که انگار از یک نقطه می‌گذرند.

می‌توانیم نقطه را آنقدر از گره دور انتخاب کنیم که شرط اول برآورده شود. در این حال، می‌توانیم صفحه‌ای پیدا کنیم که گره در یک طرف آن قرار داشته باشد و گره را روی همین صفحه تصویر می‌کنیم. برای برآورده کردن شرط دوم، باید این نقطه را طوری پیدا کنیم که هر خط گذرا از آن، گره را حداکثر در دو نقطه قطع کند. این شرط هم با تغییر مکان جزئی نقطه برآورده می‌شود.

هرجا که تصویر دو پاره‌خط غیرمتقاطع یکدیگر را قطع می‌کنند، باید مشخص کنیم که کدام‌یک از پاره‌خطها به ناظر نزدیکتر است. برای این کار، تصویر پاره‌خط دورتر را در نقطهٔ برخورد، بریده می‌کشیم (شکل ۳ و شکل ۴ را ببینید). تصویری را که با رعایت همهٔ این قاعده‌ها به دست می‌آید نمودار گره می‌نامیم.

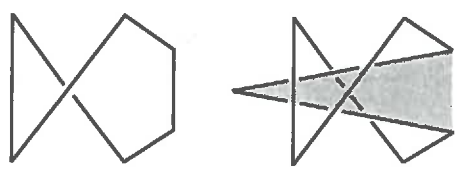
گرههای معادل

طبیعی است که بگوییم گرههایی که با پیچاندن، کشیدن، جمع کردن و تغییر شکلهای پیوستهٔ دیگر به یکدیگر تبدیل می‌شوند، معادل هستند. این مفهوم شهودی «معادل بودن»، وقتی که با گرههای سر به‌راه سر و کار داریم، به مفهوم ایزوتوپ تبدیل می‌شود: می‌گوییم دو گره (یا در حالت کلی‌تر، دو زنجیره) ایزوتوپ هستند اگر بتوانیم یکی از آنها را با دنباله‌ای از عملها ـ که آنها را تبدیل ایزوتوپی مقدماتی می‌نامیم ـ به دیگری تبدیل کنیم.

ایزوتوپ مقدماتی گره، به یکی از دو شیوهٔ زیر به‌دست می‌آید:

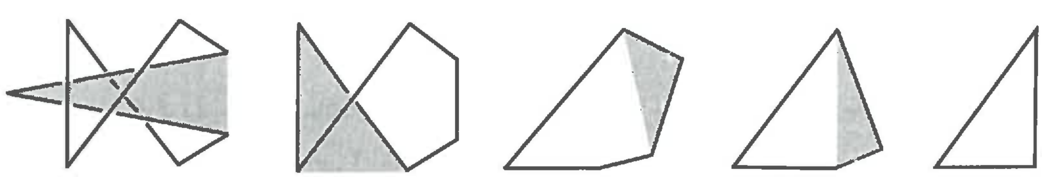
- تعویض یکی از ضلعهای گره با دو پاره‌خط جدید، طوری که رو و درون مثلثی که با این سه پاره‌خط تشکیل می‌شود، فقط در همان ضلع گره با گره اشتراک داشته باشد.
- عکس عمل قبلی: تعویض دو تا از ضلعهای گره با یک پاره‌خط جدید، طوری که رو و درون مثلثی که با این سه پاره‌خط تشکیل می‌شود، فقط در همان دو ضلع گره با گره اشتراک داشته باشد.

در شکل ۵، دو گره نشان داده‌ایم که با تبدیل ایزوتوپی مقدماتی به هم تبدیل می‌شوند. مثلثی را که در تعریف ایزوتوپی مقدماتی آمده است (مثلثی در شکل ۵ سایه خورده است) رد تبدیل می‌نامیم.



شکل ۵

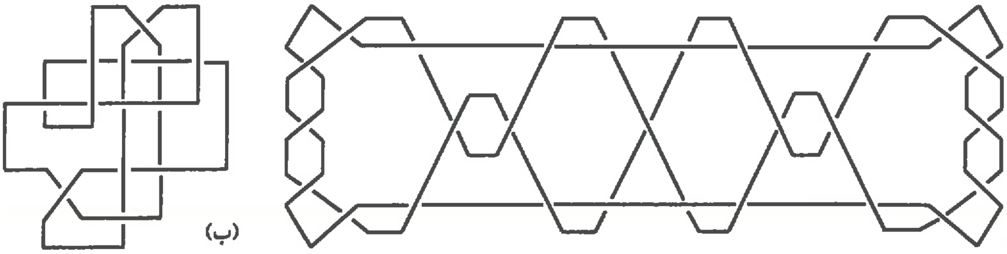
گرهی را که ایزوتوپ مثلث باشد، گره بدیهی می‌نامیم. گرههای شکل ۵ گره بدیهی هستند. دنباله‌ای از تبدیلهای ایزوتوپی مقدماتی‌ای را که این گرهها را به مثلث تبدیل می‌کنند در شکل ۶ نشان داده‌ایم.



شکل ۶

معلوم است که هر دو مثلثی با هم ایزوتوپ هستند و در نتیجه، هر دو گره بدیهی‌ای ایزوتوپ هستند. با این حال، بعضی از گرههای بدیهی بسیار پیچیده به نظر می‌آیند.

تمرین ۱ . ثابت کنید گرههایی که در شکل ۷ نشان داده شده‌اند بدیهی هستند.



(ب) (الف)

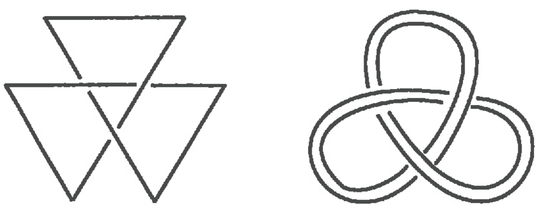
شکل ۷

تمرین ۲ . ثابت کنید گرههایی که در شکل ۳(الف) و ۳(ب) نشان داده شده‌اند ایزوتوپ هستند.

اثبات ایزوتوپ نبودن گرهها

بعد از تعریف ایزوتوپ، طبیعی است که بپرسیم آیا گرههایی وجود دارند که ایزوتوپ نباشند؟ تا پیش از اینکه به این سؤال جواب بدهیم، ممکن است فکر کنیم که همهٔ گرهها اساساً یکی هستند.

می‌دانیم که گرههای بسیار درهم پیچیده‌ای وجود دارند که می‌توان ثابت کرد که بدیهی هستند. از طرف دیگر، اگر سعی کنیم گره شکل ۸ را (که به گره سه‌پر یا گره شبدری معروف است) باز کنیم، درمی‌یابیم که این کار ممکن نیست. اما چه‌طور می‌توان ثابت کرد که گره شکل ۸ بدیهی نیست؟



شکل ۸

توجه کنید که گرهی بدیهی نیست که تبدیل آن به مثلث با استفاده از تبدیلهای ایزوتوپی مقدماتی ممکن نباشد. درهم پیچیدگی گرههایی که در شکل ۷ نشان داده شده‌اند نشان می‌دهد که فهمیدن بدیهی بودن گرهی مفروض، ممکن است چه‌قدر دشوار باشد. تنها راه اثبات اینکه گرهی بدیهی نیست، این است که خاصیتی از گرهها پیدا کنیم که با تبدیلهای ایزوتوپی مقدماتی تغییر نکند و گره مفروضمان آن خاصیت را داشته باشد، ولی مثلث آن خاصیت را نداشته باشد.

خاصیتی از گره را که با تبدیلهای ایزوتوپی مقدماتی تغییر نکند، ناوردا می‌نامیم. ناورداهای گرهها، اصلی‌ترین موضوع در نظریهٔ گرهها به‌شمار می‌آیند. مثالی از ناورداها، بدیهی بودن گره است. به‌سادگی می‌توانیم چندین

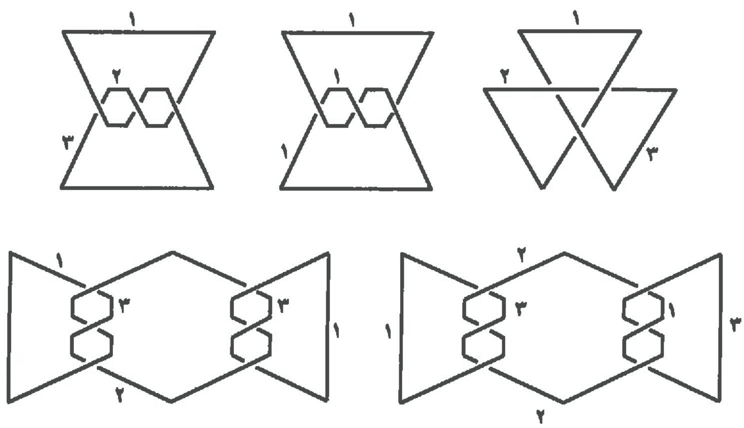
ناوردای دیگر هم تعریف کنیم؛ مثلاً، کمترین تعداد ممکن ضلعها و کمترین تعداد ممکن تقاطعها بین همهٔ نمودارهای همهٔ ایزوتوپهای گره. با این حال، این ناورداها و بسیاری از ناورداهای مشابه، نه تنها در پاسخ دادن به سؤالمان کمکی نمی‌کنند، چندین سؤال جدید هم پیش می‌آورند. حقیقت این است که دردسر محاسبهٔ این ناورداها از زحمت اثبات بدیهی نبودن گره کمتر نیست.

چیزی که می‌تواند در اثبات بدیهی نبودن گره کمکمان کند، ناوردایی است که محاسبه‌اش ساده باشد و با یک نمودار گره تعریف بشود، نه با ردهٔ همهٔ گرههای ایزوتوپ. اکنون چنین ناوردایی را معرفی می‌کنیم.

رنگ‌آمیزی نمودار گره

به یاد بیاورید که هر نمودار گره، تصویر گره روی یک صفحه است و تصویر هیچ سه ضلعی از گره یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند و وقتی تصویر دو ضلع یکدیگر را قطع کنند، تصویر ضلع دورتر را بریده می‌کشیم. به دلیل همین بریدگیها، نمودار گره از چند پاره‌خط شکستهٔ غیر متقاطع تشکیل شده است. هریک از آنها را بخش نمودار می‌نامیم. تعداد بخشها با تعداد بریدگیها (همان «تقاطعها») برابر است.

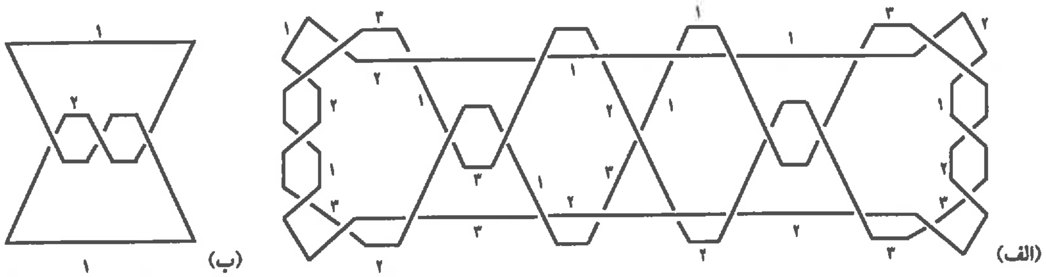
راهی ساده برای اثبات این که دو گره مفروض ایزوتوپ نیستند این است که نمودارشان را طبق قواعد مشخصی رنگ کنیم.[1] می‌گوییم که رنگ‌آمیزی نمودار با سه رنگ درست است اگر هر بخش نمودار به یک رنگ باشد و در هر تقاطع، سه بخشی که به هم می‌رسند یا هر سه از یک رنگ باشند و یا از سه رنگ مختلف. چند مثال رنگ‌آمیزی درست را در شکل ۹ نشان داده‌ایم و در شکل ۱۰، چند نمونهٔ رنگ‌آمیزی غلط را آورده‌ایم.



شکل ۹

تمرین ۳. ثابت کنید که اگر مجبور باشیم از هر سه رنگ استفاده کنیم، نمی‌توانیم نمودار گرههای شکل ۶ و شکل ۷ را درست رنگ کنیم.

۱) ایدهٔ رنگ‌آمیزی نمودارهای گرهها از رالف فاکس، ریاضیدان امریکایی، است.



شکل ۹

تمرین ۴ . ثابت کنید که با سه رنگ، می‌توان نمودار گره سه‌پر (شکل ۸) را به نُه شکل مختلف درست رنگ‌آمیزی کرد.

قضیهٔ زیر، قضیهٔ اصلی است.

قضیهٔ ۱ . تعداد رنگ‌آمیزیهای درست هر نمودار گره با سه رنگ، ناوردای گره است.

قبل از اینکه سعی کنیم قضیهٔ ۱ را ثابت کنیم، چند مورد کاربرد آن را نشان می‌دهیم. ساده‌ترین نتیجهٔ این قضیه، نتیجهٔ زیر است.

نتیجه. گرهی که بتوان نموداری از آن را با سه رنگ درست رنگ کرد، گره بدیهی نیست.

چون گرههای شکل ۶ و شکل ۷ بدیهی هستند، این نتیجه، حکم تمرین ۳ را ثابت می‌کند. اما از این مهمتر، این است که بدیهی نبودن گره سه‌پر و بسیاری از گرههای دیگر از همین حکم نتیجه می‌شود.

تمرین ۵ . با استفاده از قضیهٔ ۱، ثابت کنید که گره سه‌پر با گرههای شکل ۳ (ج) و شکل ۳ (د) ایزوتوپ نیست و به‌علاوه، گره سمت چپ، پایین شکل ۹ نه با گره سه‌پر ایزوتوپ است و نه با آن دو گره.

گرههای شکل ۳ (ج) و ۳ (د) بدیهی نیستند. با این حال، این حکم را نمی‌توان با درست رنگ‌آمیزی کردن آنها با سه رنگ ثابت کرد. در حقیقت، با اینکه با استفاده از قضیهٔ ۱ می‌توانیم در موارد بسیاری ایزوتوپ نبودن گرهها را ثابت کنیم، این قضیه روش کلی‌ای به‌دست نمی‌دهد.

تمرین ۶ . دنباله‌ای نامتناهی از گرهها مثال بزنید که تعداد رنگ‌آمیزیهای سه رنگی درست هیچ دو تایی از آنها با هم برابر نباشد. (بنابر قضیهٔ ۱، هیچ دو گرهی از این دنباله باهم ایزوتوپ نیستند.)

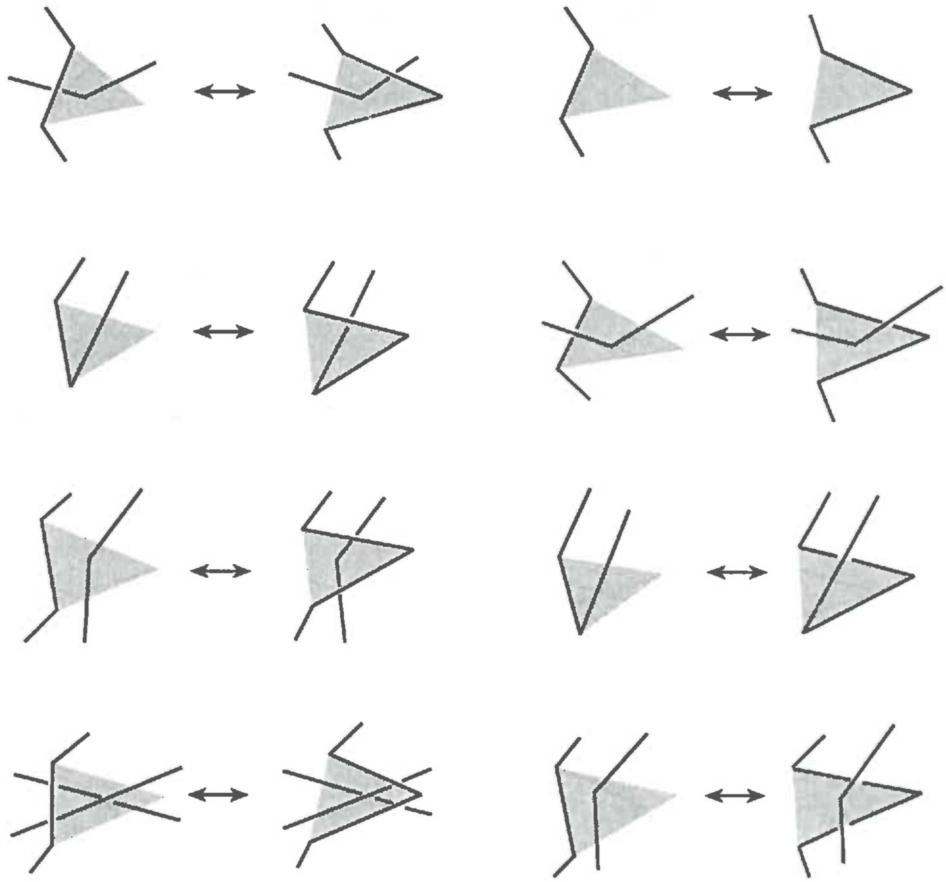
اگر در قضیهٔ ۱ کلمهٔ «گره» را با «زنجیره» عوض کنیم، باز هم حکم قضیه درست باقی می‌ماند. توجه کنید که اگر نمودار زنجیره‌ای را نتوان با بیشتر از یک رنگ درست رنگ کرد، زنجیره را نمی‌توان «باز» کرد (یعنی این زنجیره، با زنجیره‌ای که از گرههایی که در دو طرف صفحه‌ای هستند درست شده ایزوتوپ نیست).

تمرین ۷ . ثابت کنید که زنجیره‌های شکل ۴ را نمی‌توان باز کرد.

اثبات قضیهٔ ۱

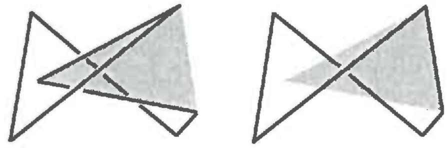
قضیهٔ ۱ از دو قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود. اثبات این دو قضیه بسیار طولانی است، اما سخت نیست.

قضیهٔ ۲. هر تبدیل ایزوتوپی مقدماتی زنجیره‌ای مفروض را می‌توانیم با دنباله‌ای از تبدیلهای ایزوتوپی مقدماتی که هرکدام نمودار زنجیره را به یکی از شیوه‌های شکل ۱۱ عوض می‌کنند جایگزین کنیم.

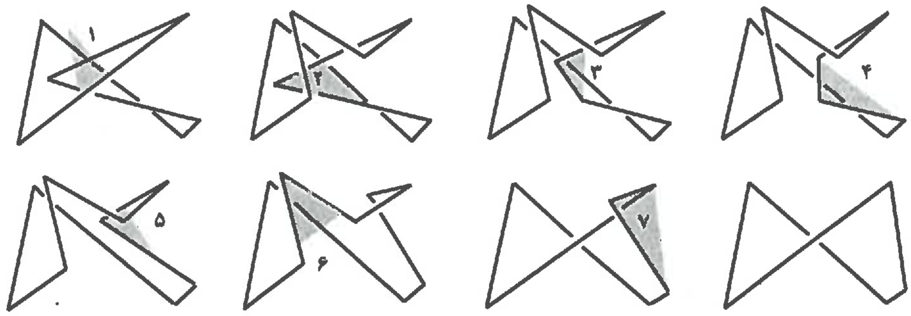


شکل ۱۱

مثلاً، تبدیل ایزوتوپی مقدماتی شکل ۱۲ را می‌توانیم با دنبالهٔ تبدیلهای ایزوتوپی مقدماتی شکل ۱۳ جایگزین کنیم. (عددهای شکل ۱۳ ترتیب عملها را نشان می‌دهند.)



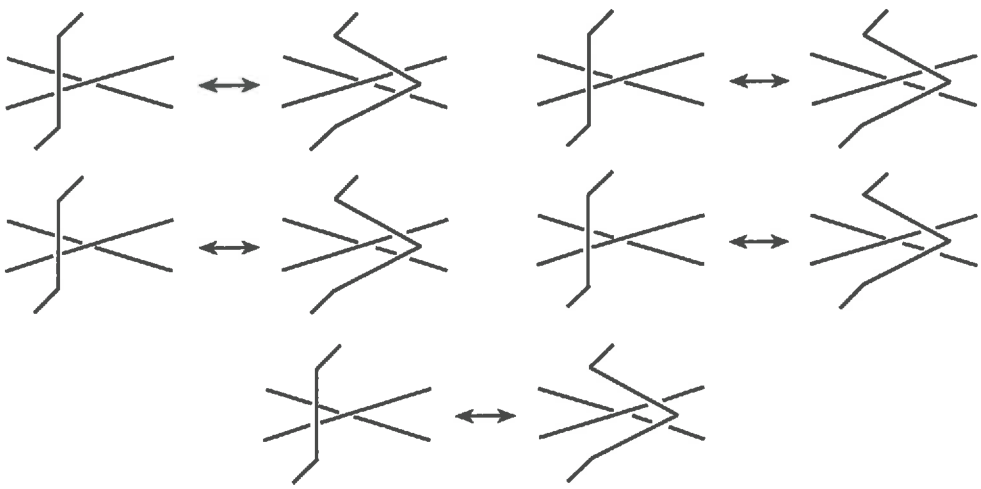
شکل ۱۲



شکل ۱۳

قضیهٔ ۳ . بین رنگ‌آمیزیهای سه‌رنگی درست هر دو نمودار که یکی از آنها با انجام یکی از عملهای شکل ۱۱ روی دیگری به‌دست آمده است تناظر یک‌به‌یکی وجود دارد به‌طوری که قسمتهای بی‌تغییر مانده در رنگ‌آمیزیهای متناظر، همرنگ هستند.

حکم این قضیه در مورد همهٔ تبدیلهای شکل ۱۱ غیر از شکل ۱۱ پایین، چپ واضح است. در این یک مورد، حکم قضیه از ترسیمهای شکل ۱۴ نتیجه می‌شود.



شکل ۱۴

• ترجمهٔ بردیا حسام

Oleg Viro, Tied into Knot Theory, *Quantum*, May/June 1998, pp. 16-20.

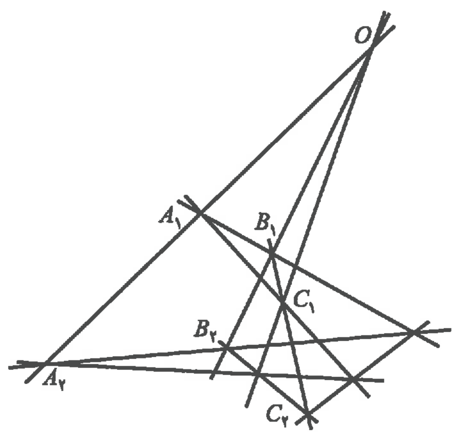
راه‌حلهای سه‌بعدی برای مسأله‌های دو بعدی

الکساندر شن

در این مقاله چند مثال می‌آورم که در آنها ترسیمی ساده اما غیرمنتظره در فضای سه‌بعدی منجر به راه‌حلی کوتاه برای مسأله‌ای نسبتاً دشوار از هندسهٔ مسطحه می‌شود.

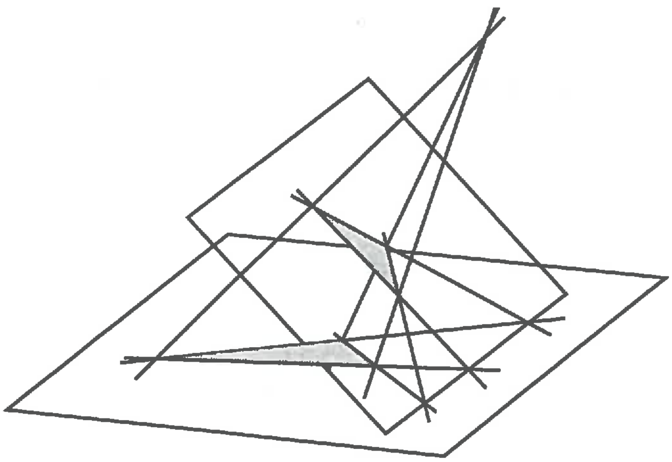
۱. مثال اول آنقدر مشهور است که اغلب شما قطعاً با آن آشنایید؛ با این حال، آنقدر زیباست که نمی‌توان از آن چشم پوشید. این مثال، قضیهٔ دزارگ است.

قضیه. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ را درنظر بگیرید. فرض کنید خطهای راست A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 از نقطه‌ای مانند O می‌گذرند. در این صورت سه نقطهٔ برخورد ضلعهای نظیر (یعنی نقطهٔ برخورد A_1B_1 و A_2B_2، نقطهٔ برخورد B_1C_1 و B_2C_2 و نقطهٔ برخورد A_1C_1 و A_2C_2) روی یک خط راست قرار دارند (شکل ۱ را ببینید).



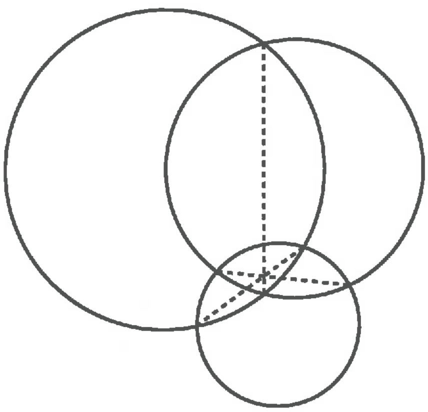
شکل ۱

ببینیم چرا این قضیه درست است. برگهٔ شفافی را درنظر بگیرید که مثلث $A_1B_1C_1$ روی آن رسم شده است. این برگه را طوری کج می‌کنیم که یک ضلعش روی صفحهٔ افقی باقی بماند. سپس لامپی را طوری قرار می‌دهیم که روی برگهٔ شفاف نور بیفکند و سایهٔ مثلث $A_1B_1C_1$ روی صفحه بیفتد. می‌توان فرض کرد این سایه، همان مثلث $A_2B_2C_2$ است. (ازکلی بودن استدلالمان چیزی کم نشده است، زیرا هر دو مثلث را می‌توان به این طریق به هم مربوط کرد.) ضلعهای این مثلث سایهٔ ضلعهای مثلث اصلی‌اند و آنها را در جایی که برگهٔ شفاف با صفحهٔ افقی تماس پیدا می‌کند (یعنی جایی که این دو صفحه با یکدیگر برخورد می‌کنند) قطع می‌کنند (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۲

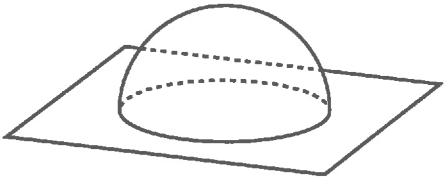
۲. مثال دوم مسألهٔ مربوط به وتر مشترکهای سه دایره است. سه دایرهٔ متقاطع در صفحه درنظر بگیرید. دو نقطهٔ برخورد هر دوتا از آنها را با وتری مشترک به هم وصل می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه وتر از یک نقطه می‌گذرند (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳

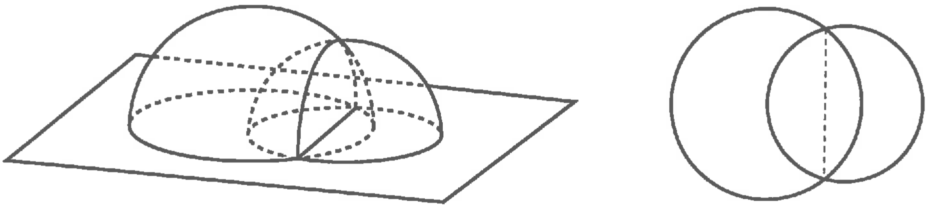
برای اینکه بفهمیم چرا این حکم درست است، صفحه‌ای افقی را درنظر بگیرید که از مرکز کره‌ای می‌گذرد. این صفحه کره را به دو نیمکره که با یک دایره از هم جدا شده‌اند تقسیم می‌کند. فقط به نیمکرهٔ بالایی احتیاج داریم. اگر از بالا به این نیمکره نگاه کنیم یک دایره می‌بینیم (شکل ۴ را ببینید).

اکنون دو نیمکرهٔ متقاطع از این دست که دایره‌های قطریشان روی یک صفحهٔ افقی قرار دارند درنظر بگیرید. اگر از بالا نگاه کنیم دو دایرهٔ متقاطع می‌بینیم. اگر دقیقتر نگاه کنیم، وتر مشترک این دو دایره را هم می‌بینیم.



شکل ۴

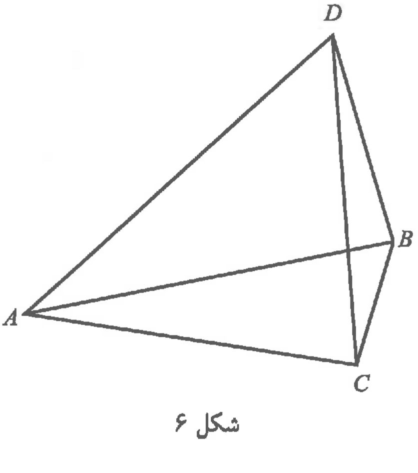
درحقیقت، کره‌ها یکدیگر را روی دایره‌ای که بر صفحهٔ افقی عمود است قطع می‌کنند، که به این ترتیب از بالا به خطی راست می‌ماند (شکل ۵ را ببینید).



شکل ۵

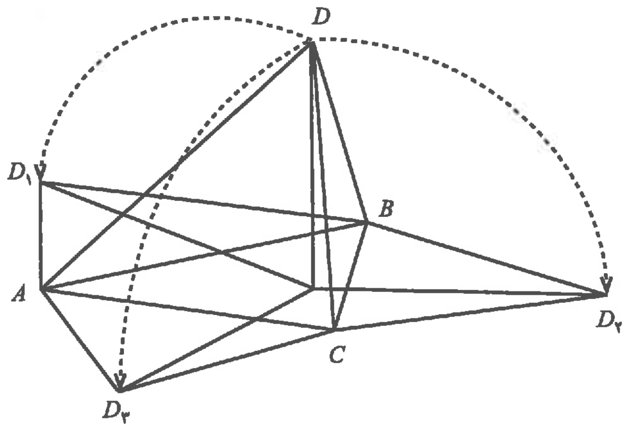
اکنون راه‌حل مسأله به‌سادگی به‌دست می‌آید. سه نیمکره که روی صفحه‌ای افقی قرار دارند درنظر بگیرید. اگر از بالا نگاه کنیم، سه دایره می‌بینیم (که دایره‌های قطری این نیمکره‌ها هستند). نقطهٔ تقاطع این سه نیمکره را درنظر بگیرید (به‌عبارت دیگر، نقطه‌ای را درنظر بگیرید که دایره‌ای که اشتراک دوتا از کره‌هاست، در این نقطه کرهٔ سوم را قطع می‌کند). اگر از بالا نگاه کنیم، این نقطه همان نقطهٔ برخورد سه وتر مشترک است، بنابراین مسأله حل شده است.

۳. در مثال سوم ابتدا مسأله‌ای فضایی را بررسی می‌کنیم و بعد آن را به مسأله‌ای مسطحه تبدیل می‌کنیم. چهاروجهی کاغذی $ABCD$ را که وجه BACاش افقی است درنظر بگیرید (شکل ۶ را ببینید).



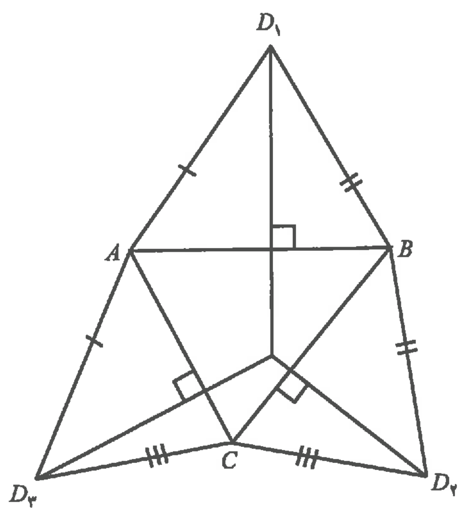
شکل ۶

چهاروجهی را در امتداد خطهای AD، BD و CD می‌بریم و وجه‌های جانبی‌اش را از روی یالهای افقی چهاروجهی آنقدر می‌چرخانیم که صاف روی صفحهٔ افقی قرار بگیرند. به این ترتیب شش‌ضلعی $AD_۱BD_۲CD_۳$ را به‌دست می‌آوریم که رأسهای $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ در آن نسخه‌هایی از رأس Dاند (شکل ۷ را ببینید).



شکل ۷

مسیر حرکت این سه نسخهٔ D را به هنگام چرخش وجه‌های جانبی ABD، BCD و ACD به‌دور یالهای افقی چهاروجهی دنبال می‌کنیم. هر یک از این نسخه‌ها روی دایره‌ای که به صفحهٔ افقی و یکی از ضلعهای مثلث ABC عمود است حرکت می‌کند. بنابراین، اگر از بالا نگاه کنیم، رأسهای $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ در امتداد خطهایی راست که بر ضلعهای مثلث ABC عمودند حرکت می‌کنند (شکل ۸ را ببینید).



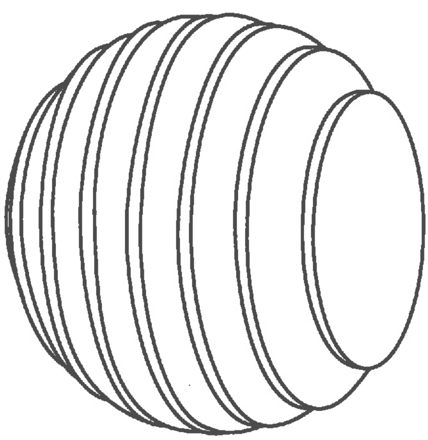
شکل ۸

به این ترتیب، راه‌حل مسألهٔ زیر را به‌دست آورده‌ایم:

مثلث ABC_1 و سه مثلث ABD_1، BCD_2 و ACD_3 را که هرکدام ضلعی مشترک با مثلث ABC دارد درنظر بگیرید. فرض کنید که ضلعهای مجاور به هر رأس مثلث ABC برابر باشند (یعنی $AD_1 = AD_3$، $BD_1 = BD_2$ و $CD_2 = CD_3$). ارتفاعهای سه مثلث ABD_1، BCD_2 و ACD_3 را که از رأسهای D_1، D_2 و D_3 عمود بر ضلعهای مثلث ABC رسم شده‌اند درنظر بگیرید. ثابت کنید که امتداد این ارتفاعها از یک نقطه می‌گذرند.

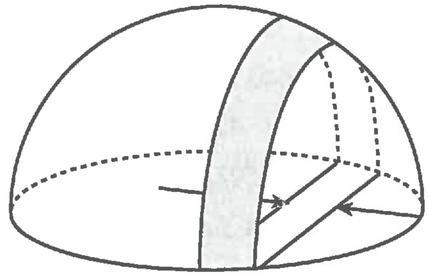
۴. این مثال هم مربوط به دایره‌هاست. قرصی سیاه‌رنگ به قطر d مرسوم بر صفحه و تعدادی نوار کاغذی بلند و سفیدرنگ با عرضهای متفاوت درنظر بگیرید. می‌خواهیم قرص را با این نوارها طوری بپوشانیم که هیچ نقطهٔ سیاهی معلوم نباشد.

اگر مجموع عرضهای نوارها دست‌کم برابر با d باشد که معلوم است باید چه‌کار کنیم: همهٔ نوارها را پهلو به پهلوی هم قرار می‌دهیم. به‌نظر می‌رسد که اگر مجموع عرضها از d کمتر باشد پوشاندن قرص با این نوارها ممکن نیست. چرا؟ برای اینکه دلیل این امر را توضیح دهیم، یادآوری می‌کنیم که مساحت قسمتی از کره که میان دو صفحهٔ موازی (که کره را قطع کرده‌اند) قرار دارد، به شعاع کره و فاصلهٔ میان این صفحه‌ها بستگی دارد نه به موقعیت صفحه‌ها. به‌بیان دیگر، اگر لیموی کروی را به تکه‌هایی با ضخامت یکسان تقسیم کنیم، اندازهٔ پوست همهٔ تکه‌ها برابر است (شکل ۹ را ببینید).



شکل ۹

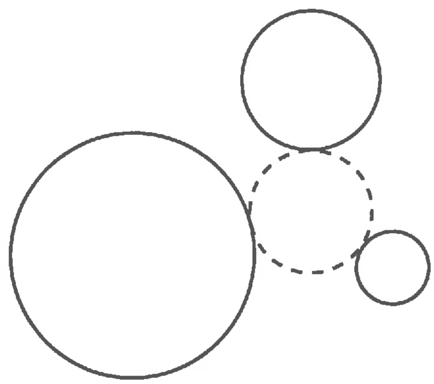
ارتباط این مطلب و مسألهٔ قرص و نوارهای ما چیست؟ فرض کنید که دایرهٔ لبهٔ قرص، نیمکره‌ای است که از بالا به آن نگاه می‌کنیم. در این صورت هر نواری که روی قرص قرار می‌دهیم قسمتی از نیمکره است که میان دو صفحهٔ موازی (که به‌عنوان لبهٔ نوارها به چشم می‌آیند) قرار دارد. مساحت این قسمت متناسب با عرض نوار است (شکل ۱۰ را ببینید).



شکل ۱۰

اگر نوارها قرص را بپوشانند، قسمتهای نظیرشان روی نیمکره، نیمکره را می‌پوشانند. بنابراین مجموع مساحتهایشان از مساحت نیمکره کمتر نیست و کل نیمکره نظیر نواری به عرض d است. بنابراین، مجموع عرضهای همهٔ نوارها دست‌کم d است.

۵. مثال آخرمان مسألهٔ قدیمی آپولونیوس است: دایره‌ای مماس بر سه دایرهٔ مفروض رسم کنید (شکل ۱۱ را ببینید).



شکل ۱۱

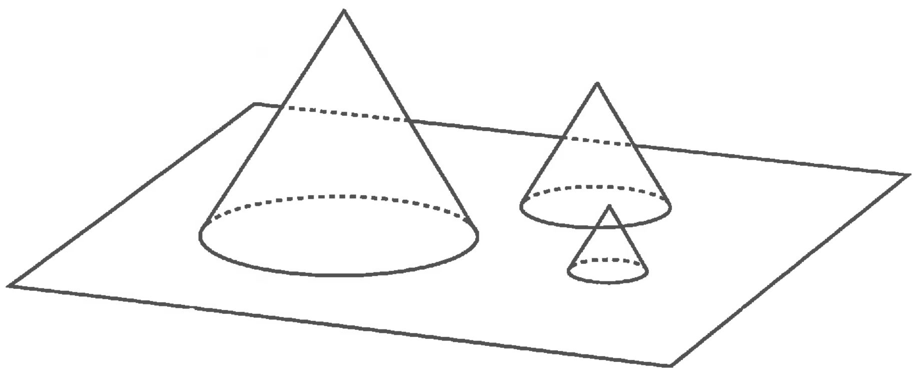
راه‌حلی که در اینجا می‌آوریم از ا. و. خابیاشویلی است. نمی‌توانم دست اول بودن این راه‌حل را تأیید کنم، اما این راه‌حل واقعاً زیباست.

این مسأله را آپولونیوس، ریاضیدان یونانی (۲۶۰ تا ۱۷۰ پیش از میلاد) در رسالهٔ دو جلدی‌اش به‌نام «دربارهٔ مماسها» مطرح کرده است. با این حال، کل این رساله و راه‌حل آپولونیوس مفقود شده است.

بعدها ریاضیدانان مشهور بسیاری (از جمله ف. ویت. ر. دکارت، ا. نیوتن و ل. اویلر) روی این مسأله کار کردند؛ با این وجود، در راه‌حلهای همهٔ آنها از مفاهیمی استفاده شده است که آپولونیوس با آنها آشنا نبوده است (در مشهورترین راه‌حل از انعکاس استفاده می‌شود. اگر دو دایرهٔ مفروض یکدیگر را در مرکز انعکاس قطع کنند، پس از منعکس شدن به خط راست تبدیل می‌شوند؛ این حالت خاص هم ساده است).

ا. و. خابیاشویلی راه‌حلی را پیشنهاد کرده است که معتقد است شاید راه‌حلی باشد که آپولونیوس پیدا کرده است. هر چه باشد، آپولونیوس به استادی در مقاطع مخروطی مشهور است.

راه‌حل او چنین است. فرض کنید سه دایرهٔ مفروض روی صفحه رسم شده باشند. سه مخروط متشابه درنظر بگیرید که محورهای قائمشان صفحه را در امتداد دایره‌ها قطع کنند (شکل ۱۲ را ببینید)، درست شبیه سه مخروط آتشفشانی با ارتفاعهای مختلف که در دل دریا جای گرفته‌اند.



شکل ۱۲

مخروط دیگری هم درنظر بگیرید که متشابه با سه مخروط مفروض است و محور قائم هم دارد، اما رأسش رو به پایین است. این مخروط را میان سه مخروط مفروض قرار می‌دهیم و آنقدر آن را حرکت می‌دهیم تا بر آنها مماس شود. در این صورت، مقطع این مخروط و صفحهٔ افقی دایرهٔ موردنظر است و رأسش بر نقطهٔ برخورد سه مخروط مفروض منطبق است. پس اگر نقطهٔ برخورد این سه مخروط را پیدا کنیم، راه‌حل مسألهٔ آپولونیوس به‌سادگی به‌دست می‌آید.

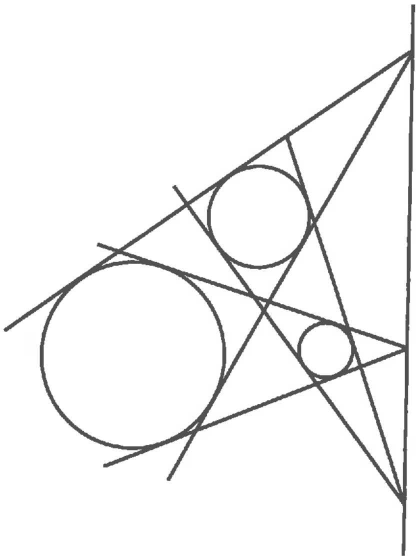
البته، می‌خواهیم ترسیمی با استفاده از خطکش و پرگار انجام دهیم، بنابراین استدلال خابیاشویلی را پی می‌گیریم. صفحه‌ای را درنظر بگیرید که از رأسهای سه مخروط مفروض می‌گذرد. مخروط چهارم، در وضعیت نهایی‌اش (که موردنظر ماست) این صفحه را در بیضی‌ای که از رأسهای مخروطهای مفروض می‌گذرد قطع می‌کند.

از هر سه نقطه تعداد زیادی بیضی می‌گذرد، پس به اطلاعات دیگری هم احتیاج داریم. توجه کنید که همهٔ بیضیهایی که مقطع مخروط چهارم و صفحهٔ موردنظرند متشابه‌اند و نسبت قطر بلندتر آنها به قطر کوتاهترشان برابر است.

بنابراین، با افکنشی مناسب (تبدیلی آفین) مسأله را به این یکی تبدیل می‌کنیم: دایره‌ای رسم کنید که از سه نقطهٔ مفروض بگذرد.

می‌ماند که ثابت کنیم همهٔ ترسیمهای موردنظر را می‌توان فقط با خطکش و پرگار (روی صفحه‌ای مناسب) انجام داد. از آوردن جزئیات صرفنظر می‌کنیم و فقط دو مطلب اساسی لازم را یادآوری می‌کنیم.

الف) برای اینکه روی صفحه‌ای افقی (که سه دایرهٔ مفروض روی آن قرار دارند) خط برخورد صفحه‌ای را که از رأس مخروطها می‌گذرد پیدا کنیم، به طریق زیر عمل می‌کنیم: دو مماس مشترک هر دو دایره را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخوردشان را پیدا می‌کنیم. این سه نقطهٔ برخورد روی خط راست موردنظر قرار دارند (شکل ۱۳ را ببینید).



شکل ۱۳

ب) با نگاه به نمای جانبی یک مخروط و صفحه‌ای که این مخروط را قطع کرده است، به‌سادگی می‌توان قطر بلندتر و قطر کوتاهتر بیضی‌ای را که از برخورد این دو پدید آمده است رسم کرد و نسبتی که محور مخروط قطر بلندتر بیضی را تقسیم می‌کند مشخص کرد.

شما چه فکر می‌کنید؟ آیا این همان راه‌حل اصلی آپولونیوس است؟ جالب است که نظر متخصصین تاریخ ریاضیات را هم بدانیم.

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

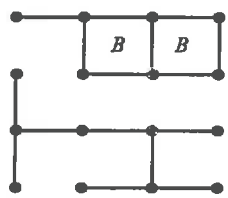
Alexander Shen, Three-Dimensional Solutions for Two-Dimensional Problems, *THE MATHEMATICAL INTELLIGENCER*, vol. 19, No 3, 1997, pp. 44-47.

نقطه‌بازی

سید عباس موسوی

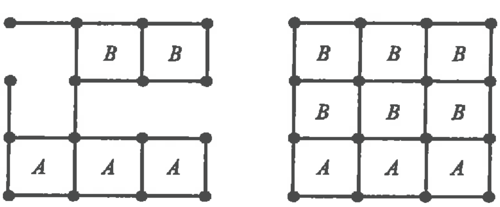
حتماً تا به حال نقطه‌بازی کرده‌اید. در این بازی (که به بازی «نقطه‌ها و خانه‌ها» هم مشهور است)، دو بازیکن بازی را در شبکه‌ای مستطیلی از نقطه‌ها شروع می‌کنند و هر بازیکن در نوبت بازیش با کشیدن خطی افقی یا عمودی، دو نقطهٔ مجاور را به هم وصل می‌کند. بازیکنی که چهارمین ضلع مستطیلی را بکشد، نام خود را در این مستطیل ثبت می‌کند و باید خط دیگری هم (به‌عنوان جایزه‌ای اجباری!) رسم کند. بازی وقتی تمام می‌شود که همهٔ مستطیلها پر شوند و بازیکنی برنده است که تعداد مستطیلهایی که نامش در آنها ثبت شده است، بیشتر باشد. هیچ‌یک از بازیکنها مجبور نیست که مستطیلی را کامل کند، مگر اینکه نتواند حرکت دیگری انجام بدهد. هدفمان این است که ببینیم که چه‌طور می‌توان این بازی را بهتر انجام داد و در آن برنده شد.

از بازی‌ای ساده شروع می کنیم. در بازی شکل ۱، فرض کنید که شما بازیکن A هستید و نوبت بازی شماست. چه حرکتی انجام می‌دهید؟



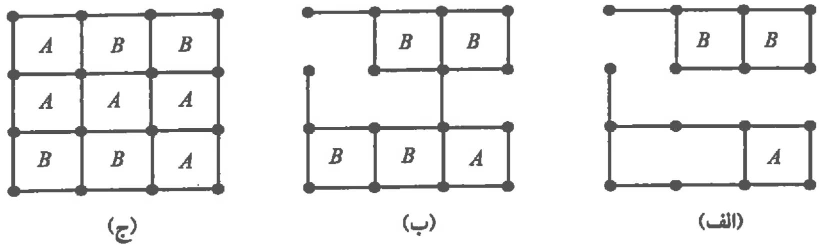
شکل ۱

بیشتر بازیکنها سعی می‌کنند که زنجیر سه‌تایی پایینی را انتخاب کنند؛ اما با این کار، مجبور می‌شوند که زنجیر چهارتایی میانی را به حریف واگذار کنند.



شکل ۲

خوشبختانه، همان‌طور که احتمالاً حدس زده‌اید، راه هوشمندانه‌تری هم وجود دارد: قربانی کردن دو خانهٔ آخر زنجیره باعث می‌شود که حریف مجبور شود که زنجیرهٔ چهارتایی میانی را به شما واگذار کند (شکل ۳ را ببینید).

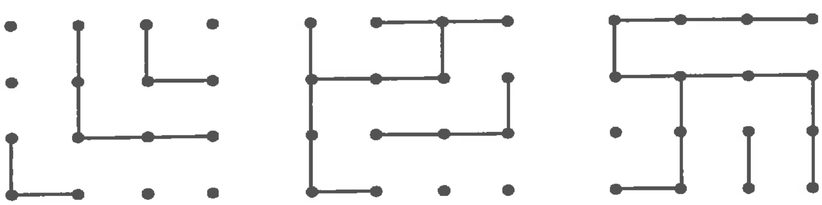


شکل ۳

وضعیتهایی مثل وضعیت الف، معمولاً با وضعیتی مثل ب دنبال می‌شوند. به این حرکت، **حرکت جفت** می‌گوییم. همان‌طور که خواهید دید، حرکتهای جفت نقش مهمی در بازی دارند.

اگر هر دو بازیکن عاقلانه بازی کنند، از بازی کردن داخل زنجیرها (که به باز شدن زنجیر برای حریف می‌انجامد) خودداری می‌کنند و ترجیح می‌دهند که بیرون زنجیره‌های موجود بازی کنند و بنابراین، بعد از مدتی تقریباً تمام صفحهٔ بازی به چند زنجیر تبدیل می‌شود. در این حالت، اگر حریف یکی از زنجیرها را باز کند، می‌توانیم با استفاده از شیوهٔ بالا (یعنی قربانی کردن دو خانهٔ آخر هر زنجیر، غیر از آخرین زنجیر) کنترل بازی را در اختیار بگیریم؛ یعنی حریف را مجبور کنیم که زنجیره‌ای جدید باز کند. وقتی که تعداد و طول زنجیرها کافی باشد، علی‌القاعده کسی که کنترل بازی را در اختیار دارد برنده است.

سعی کنید که با استفاده از روش بالا، مسأله‌های شکل ۴ را حل کنید. در هر مورد، فرض کنید که نوبت شماست و حرکت مناسب را، که منجر به برد می‌شود، انجام بدهید.



شکل ۴

چون احتمال دارد که حریف هم با همین روش سعی کند که بازی را کنترل کند، معمولاً کسی که اولین زنجیر را باز کند مجبور خواهد شد که همهٔ زنجیرها را یکی بعد از دیگری باز کند و درنتیجه بازنده خواهد شد. حقیقتی ریاضی در مورد این بازی، می‌تواند کمکمان کند که بفهمیم که چه‌طور می‌توانیم حریف را وادار کنیم که اولین زنجیر را باز کند.

قضیه. در هر بازی، تعداد نوبتهای بازی برابر است با تعداد نقطه‌های صفحهٔ بازی به‌علاوهٔ تعداد کل حرکتهای جفت انجام شده در بازی.

برهان. فرض کنید P تعداد نقطه‌ها باشد، T تعداد نوبتهای بازی، E تعداد کل خطهای رسم شده و B تعداد

مستطیلها باشد. اگر هیچ حرکت جفتی درکار نباشد، کشیدن هر خط یا یک مستطیل درست می‌کند و یا نوبت را به حریف واگذار می‌کند. بنابراین

$$E = B + T - ۱$$

درضمن، بنابر فرمول اویلر برای هرگراف و از جمله گراف نقطه‌بازی،

$$E = B + P - ۱$$

و درنتیجه

$$T = P$$

پس در این حالت، تعداد نوبتها برابر با تعداد نقطه‌های صفحه است.

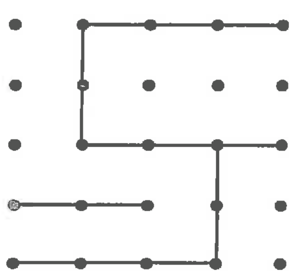
از طرف دیگر، هر حرکت جفت، به‌جای یک مستطیل، دو مستطیل ایجاد می‌کند و نوبت را هم عوض نمی‌کند. پس تعداد نوبتها برابر است با تعداد نقطه‌ها به‌علاوهٔ تعداد حرکتهای جفت. ■

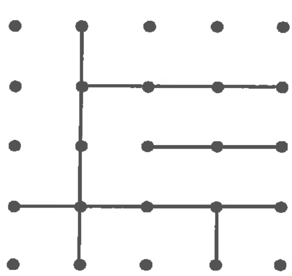
معمولاً بازیکنی که آخرین حرکت را انجام می‌دهد، بازیکنی است که کنترل بازی را در دست دارد و آخرین زنجیر را تصاحب می‌کند. بنابراین، اگر بازیکن اول بتواند بازیکن دوم را وادارکند که اولین زنجیر را بازکند، تعداد نوبتهای بازی فرد خواهد بود و اگر عکس این وضع اتفاق بیفتد، تعداد نوبتها زوج خواهد بود. چون تعداد نقطه‌های صفحه ثابت است، نفر اول باید کاری کند که جمع تعداد نقطه‌های صفحه و حرکتهای جفت فرد شود و نفر دوم باید این مجموع را زوج کند. اما از آنجا که معمولاً تعداد حرکتهای جفت یکی کمتر از تعداد زنجیرهاست، در هر زنجیر غیر از زنجیر آخر، یک حرکت جفت به‌وسیلهٔ بازنده انجام شده است. این قانون به‌صورت زیر درمی‌آید:

بازیکن اول باید سعی کند که مجموع تعداد زنجیرها و تعداد نقطه‌های صفحه زوج باشد.

بازیکن دوم باید سعی کند که مجموع تعداد زنجیرها و تعداد نقطه‌های صفحه فرد باشد.

مثلاً، در شکل ۵، در بازی الف فقط یک زنجیر وجود دارد و تعداد نقطه‌های صفحه هم فرد است، پس بازیکن

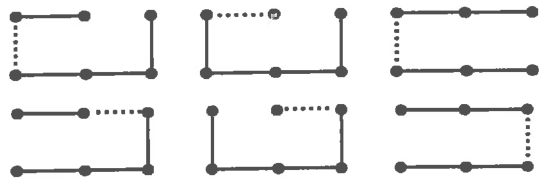

(ب)


(الف)

شکل ۵

دوم در هر صورت مجبور است که اولین زنجیر را بازکند. در بازی ب هم دو زنجیر وجود دارد، پس بازیکن اول در هر حال خواهد شد که اولین زنجیر را بازکند.

توجه کنید که در شمارش زنجیرها، فقط زنجیرهایی را می‌شماریم که حداقل سه خانه داشته باشند، چون فقط در این زنجیرها می‌توانیم با قربانی کردن دو خانه حریف را وادارکنیم که حرکت جفت انجام بدهد. در زنجیرهایی با دو خانه، باید از انجام حرکتی که باعث شود که حریف بتواند ما را مجبورکند که حرکت جفت انجام بدهیم خودداری کنیم. پس نباید شش حرکت شکل ۶ را انجام بدهیم.

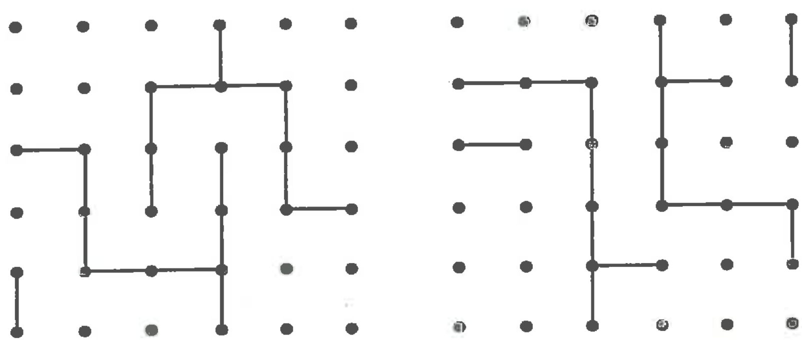


شکل ۶

در ضمن، هر زنجیر بسته، تنها در صورتی شمرده می‌شود که بیش از چهار خانه داشته باشد و در این حالت، باید آن را دوبار بشمریم، چون در هر زنجیر بسته، دو حرکت جفت انجام می‌شود و باید چهار خانه را قربانی کنیم. پس باید تا جایی که می‌توانیم از ساخته شدن زنجیرهای کوتاه یا بسته که باعث می‌شوند که نسبت خانه‌های قربانی‌شده به خانه‌های به‌دست آمده بیشتر شود، جلوگیری کنیم (توجه کنید که اگر تعداد زنجیرهای کوتاه خیلی زیاد باشد، ممکن است که هیچ‌یک از این روشها مفید نباشد).

اکنون باید بتوانید به کمک قانون زنجیرها، مسأله‌های زیادی را حل کنید. برای شروع، دو مسألهٔ زیر را حل کنید.

مسألهٔ ۱ . در هر یک از بازیهای شکل ۷ فرض کنید که نوبت بازی شماست و شما بازیکن اول هستید. حرکتی را پیدا کنید که تعداد زنجیرها را به نفع شما تغییر می‌دهد.



شکل ۷

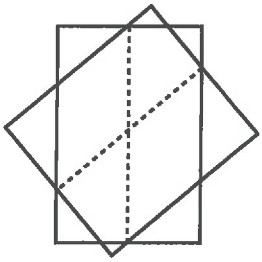
مسألهٔ ۲ . ثابت کنید که در بازی ۴ × ۴ (بازی با ۹ خانه)، بازیکن دوم استراتژی برد دارد. (راهنمایی: ثابت کنید که بازیکن دوم، می‌تواند طوری بازی کند که در بازی فقط یک زنجیر وجود داشته باشد.)

از باب تفریح

۱. عده‌ای «عشق شطرنج» در پارکی بی‌وقفه شطرنج بازی می‌کنند و چون یک دست مهره بیشتر ندارند از قانون زیر پیروی می‌کنند: برندهٔ بازی، دو بازی بعدی و بازنده، چهار بازی بعدی را از دست می‌دهد. چند بازیکن می‌توانند به این روش بازی کنند؟ (اگر بازی به تساوی ختم شود، سفید بازنده است.)

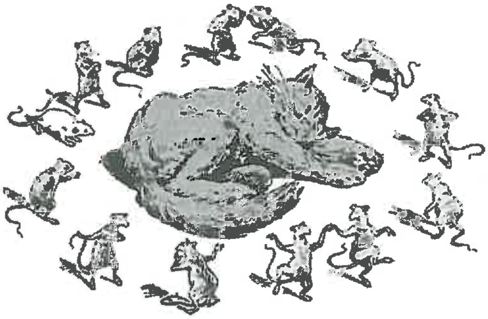
۲. در مجلسی هرکس حداکثر سه دشمن دارد. آیا می‌توان افراد حاضر را به دوگروه طوری تقسیم کرد که هرکس در گروه خودش حداکثر یک دشمن داشته باشد؟

۳. مانند شکل زیر دو مستطیل را روی یکدیگر قرار داده‌ایم. معلوم شده است که پاره‌خطهای نقطه‌چین با دو ضلع از مستطیل متناظرشان موازی‌اند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که مساحت مستطیلها برابر است؟



۴. یکی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۷ را طوری حذف کنید که بقیه را بتوان با کاشیهای ۴ × ۱ فرش کرد.

۵. ملوس خواب دید که سیزده موش، دوازده موش خاکستری و یک موش سفید، او را احاطه کرده‌اند و کسی به او می‌گوید: «ملوس، می‌توانی موشها را سیزده‌تا در میان (به شرطی که در یک جهت بشماری) بخوری و آخرین موشی که می‌خوری باید موش سفید باشد.» ملوس ابتدا باید کدام موش را بخورد؟



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۷)

چند نابرابری کلاسیک

ارشک حمیدی

در این مقاله چند نابرابری کلاسیک را که همگی نتیجه‌ای از نابرابری ینسن ([۳] را ببینید) هستند آورده‌ایم. البته می‌توان این نابرابریها را با استفاده از روشهای مقدماتی‌تری هم ثابت کرد ([۲] را ببینید). مشهورترین این نابرابریها، نابرابری مربوط به میانگین حسابی و میانگین هندسی عددهاست.

نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی نامنفی باشند. در این صورت

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

برای اثبات این نابرابری ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند. همچنین، چون تابع $\ln x$ روی بازهٔ $(0,+\infty)$ مقعر است، از نابرابری ینسن برای تابعهای مقعر نتیجه می‌شود

$$\ln\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n\right)$$

پس

$$\ln\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) \geq \ln\left((a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right)$$

و چون تابع $\ln x$ صعودی است، پس

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

که همان نابرابری موردنظر است. در این نابرابری، تساوی فقط وقتی پیش می‌آید که

$$a_1=a_2=\cdots=a_n$$

به‌همین ترتیب می‌توان نابرابری کلیتر زیر را ثابت کرد.

نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی وزندار. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی نامنفی باشند. همچنین فرض کنید λ_1، λ_2، ... و λ_n عددهایی مثبت باشند و $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. در این صورت

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n \geq a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}$$

مسألهٔ ۱ . (المپیاد ریاضی ایرلند، ۲۰۰۲) a، b و c عددهایی در بازهٔ $(0,1)$اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

راه‌حل اول. ابتدا توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی_میانگین هندسی،

$$\sqrt[۳]{abc} \leq \frac{a+b+c}{۳}$$

همچنین، تابع $f(x) = \frac{x}{۱-x}$ روی بازهٔ $(۰, ۱)$ صعودی و محدب است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای محدب،

$$f\left(\sqrt[۳]{abc}\right) \leq f\left(\frac{a+b+c}{۳}\right) \leq \frac{۱}{۳}(f(a)+f(b)+f(c))$$

پس

$$f(a)+f(b)+f(c) \geq ۳f\left(\sqrt[۳]{abc}\right)$$

که همان نابرابری موردنظر است. ■

راه‌حل دوم. با استفاده از نابرابری میانگین حسابی_میانگین هندسی می‌توان نوشت

$$\frac{a}{۱-a}+\frac{b}{۱-b}+\frac{c}{۱-c} \geq ۳\sqrt[۳]{\frac{abc}{(۱-a)(۱-b)(۱-c)}}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\sqrt[۳]{\frac{abc}{(۱-a)(۱-b)(۱-c)}} \geq \frac{\sqrt[۳]{abc}}{۱-\sqrt[۳]{abc}}$$

یا

$$\sqrt[۳]{(۱-a)(۱-b)(۱-c)}+\sqrt[۳]{abc} \leq ۱$$

اکنون اگر دوبار از نابرابری میانگین حسابی_میانگین هندسی استفاده کنیم نتیجه می‌شود

$$\sqrt[۳]{(۱-a)(۱-b)(۱-c)}+\sqrt[۳]{abc} \leq \frac{(۱-a)+(۱-b)+(۱-c)}{۳}+\frac{a+b+c}{۳} = ۱$$

■

مسألهٔ ۲ . (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۴؛ المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۹۵) a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{۳}}$$

راه‌حل اول. توجه کنید که کافی است ثابت کنیم

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq \frac{a+b+c}{۳}\ln(abc)$$

چون تابع $f(x) = x\ln x$ روی بازهٔ $(۰, +\infty)$ محدب است، از نابرابری ینسن برای تابعهای محدب نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۳}\left(f(a)+f(b)+f(c)\right) \geq f\left(\frac{a+b+c}{۳}\right)$$

پس

$$a\ln a + b\ln b + c\ln c \geq (a+b+c)\ln\left(\frac{a+b+c}{۳}\right) \qquad (*)$$

اکنون توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

و چون تابع $\ln x$ صعودی است، پس

$$\ln\left(\frac{a+b+c}{۳}\right) \geq \ln\sqrt[۳]{abc} = \frac{۱}{۳}\ln(abc) \qquad (**)$$

از ترکیب کردن نابرابریهای $(*)$ و $(**)$ نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید. ■

راه‌حل دوم. توجه کنید که اگر فرض کنیم

$$\lambda_۱ = \frac{a}{a+b+c}, \quad \lambda_۲ = \frac{b}{a+b+c}, \quad \lambda_۳ = \frac{c}{a+b+c}$$

آن‌وقت $\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = ۱$ و درنتیجه، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی وزندار،

$$\lambda_۱\left(\frac{۱}{a}\right) + \lambda_۲\left(\frac{۱}{b}\right) + \lambda_۳\left(\frac{۱}{c}\right) \geq \left(\frac{۱}{a}\right)^{\lambda_۱}\left(\frac{۱}{b}\right)^{\lambda_۲}\left(\frac{۱}{c}\right)^{\lambda_۳}$$

بنابراین

$$\frac{۳}{a+b+c} \geq \left(\frac{۱}{a^a b^b c^c}\right)^{\frac{۱}{a+b+c}}$$

و درنتیجه

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{۳}\right)^{a+b+c}$$

اما بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{abc}$$

بنابراین

$$a^a b^b c^c \geq \left(\sqrt[۳]{abc}\right)^{a+b+c} = (abc)^{\frac{a+b+c}{۳}}$$ ■

مسألهٔ ۳ . (المپیاد ریاضی انگلستان، ۱۹۹۶) همهٔ عددهای حقیقی مثبت مانند a، b، c و d را طوری پیدا کنید که

$$a+b+c+d=۱۲$$

$$abcd=۲۷+ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

راه‌حل. فرض کنید عددهای a، b، c و d ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. در این صورت از تساوی اول و نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$۳=\frac{a+b+c+d}{۴}\geq\sqrt[۴]{abcd}$$

پس $abcd\leq ۸۱$ و تساوی وقتی پیش می‌آید که $a=b=c=d=۳$. همچنین، از تساوی دوم و نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}abcd&=۲۷+ab+ac+ad+bc+bd+cd\\&\geq ۲۷+۶\sqrt{abcd}\end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که چندجمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲-۶x-۲۷$ فقط روی بازه‌های $(-\infty,-۳]$ و $[۹,+\infty)$ غیرمنفی است. بنابراین $\sqrt{abcd}\geq ۹$ و درنتیجه $abcd\geq ۸۱$. پس $abcd=۸۱$ و درنتیجه $a=b=c=d=۳$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $a=b=c=d=۳$، عددهای a، b، c و d ویژگیهای موردنظر را دارند. ■

مسألهٔ زیر از چهلمین المپیاد بین‌المللی ریاضی که در کشور رومانی برگزار شده است به یادگار مانده است. ممکن است راه‌حلی که در اینجا برای این مسأله آورده‌ایم سرراست به‌نظر بیاید، اما راه‌حل طراح مسأله بسیار پیچیده بوده است.

مسألهٔ ۴ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۹) n عددی طبیعی است و $n\geq ۲$. کوچکترین عدد حقیقی مانند C را طوری پیدا کنید که اگر $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌وقت

$$\sum_{۱\leq i<j\leq n}x_ix_j(x_i^۲+x_j^۲)\leq C(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)^۴$$

راه‌حل. فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n عددهایی حقیقی و نامنفی باشند و

$$S=x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲$$

در این صورت (در نابرابری دوم از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کرده‌ایم)

$$\sum_{۱\leq i<j\leq n}x_ix_j(x_i^۲+x_j^۲)\leq\sum_{۱\leq i<j\leq n}x_ix_jS=\frac{۱}{۲}\left(S\times ۲\sum_{۱\leq i<j\leq n}x_ix_j\right)$$

$$\leq \frac{۱}{۲}\left(\frac{S+۲\sum_{۱\leq i<j\leq n} x_ix_j}{۲}\right)^۲$$
$$= \frac{۱}{۲}\,\frac{(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)^۴}{۴}$$

اکنون به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که کمترین مقدار موردنظر برای C برابر با $\frac{۱}{۸}$ است. ∎

نابرابری میانگین توان‌دار. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی مثبت باشند. همچنین فرض کنید s و t عددهایی حقیقی و ناصفر باشند و $s<t$. در این صورت

$$\left(\frac{a_۱^s+a_۲^s+\cdots+a_n^s}{n}\right)^{\frac{۱}{s}} \leq \left(\frac{a_۱^t+a_۲^t+\cdots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{۱}{t}}$$

برای اثبات این نابرابری، ابتدا حالتهایی را در نظر بگیرید که

$$۰<s<t \quad \text{یا} \quad s<۰<t$$

در این حالتها، چون تابع $f(x)=x^{\frac{t}{s}}$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ محدب است، از نابرابری ینسن برای تابعهای محدب نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{a_۱^s+a_۲^s+\cdots+a_n^s}{n}\right)^{\frac{t}{s}} \leq \frac{(a_۱^s)^{\frac{t}{s}}+(a_۲^s)^{\frac{t}{s}}+\cdots+(a_n^s)^{\frac{t}{s}}}{n}$$

که همان نابرابری موردنظر است. در حالتی که $s<t<۰$، چون $۰<-t<-s$، از آنچه در بالا ثابت کردیم نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{\left(\frac{۱}{a_۱}\right)^{-t}+\left(\frac{۱}{a_۲}\right)^{-t}+\cdots+\left(\frac{۱}{a_n}\right)^{-t}}{n}\right)^{\frac{۱}{-t}} \leq \left(\frac{\left(\frac{۱}{a_۱}\right)^{-s}+\left(\frac{۱}{a_۲}\right)^{-s}+\cdots+\left(\frac{۱}{a_n}\right)^{-s}}{n}\right)^{\frac{۱}{-s}}$$

که همان نابرابری موردنظر است.

مسألهٔ ۵ . (المپیاد ریاضی کانادا، ۲۰۰۳) دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^۳+y^۳+z^۳=x+y+z \\ x^۲+y^۲+z^۲=xyz \end{cases}$$

را در مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت حل کنید.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم دستگاه موردنظر در مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت جواب ندارد. فرض کنید x، y و z عددهایی مثبت و جواب دستگاه معادله‌های موردنظر باشند. توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی و نابرابری میانگین تواندار،

$$\sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{۳} \leq \sqrt{\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۳}} \leq \sqrt[۳]{\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{۳}}$$

پس اگر فرض کنیم

$$S = x+y+z = x^۳+y^۳+z^۳, \qquad P = xyz = x^۲+y^۲+z^۲$$

می‌توان نوشت

$$\sqrt[۳]{P} \leq \frac{S}{۳} \leq \sqrt{\frac{P}{۳}} \leq \sqrt[۳]{\frac{S}{۳}}$$

اکنون توجه کنید که از $\sqrt[۳]{P} \leq \sqrt{\frac{P}{۳}}$ نتیجه می‌شود $P^۲ \leq \frac{P^۳}{۲۷}$ و درنتیجه $P \geq ۲۷$. همچنین، از $\frac{S}{۳} \leq \sqrt[۳]{\frac{S}{۳}}$ نتیجه می‌شود $\frac{S^۳}{۲۷} \leq \frac{S}{۳}$ و درنتیجه $S \leq ۳$. به این ترتیب $\sqrt[۳]{P} \geq ۳$ و $\sqrt[۳]{\frac{S}{۳}} \leq ۱$ که با نابرابری $\sqrt[۳]{P} \leq \sqrt[۳]{\frac{S}{۳}}$ تناقض دارد. ∎

مسألهٔ ۶. (المپیاد ریاضی روسیه، ۱۹۹۹) x و y عددهایی مثبت‌اند و

$$x^۲+y^۳ \geq x^۳+y^۴$$

ثابت کنید $x^۳+y^۳ \leq ۲$.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم که اگر $x^۳+y^۳ > ۲$، آنگاه

$$x^۲+y^۳ < x^۳+y^۴$$

توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین تواندار،

$$\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۲}} \leq \sqrt[۳]{\frac{x^۳+y^۳}{۲}}$$

درنتیجه

$$x^۲+y^۲ \leq \sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{(x^۳+y^۳)^۲} < \sqrt[۳]{x^۳+y^۳}\sqrt[۳]{(x^۳+y^۳)^۲} = x^۳+y^۳$$

پس $x^۲-x^۳ < y^۳-y^۲$، بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$y^۳-y^۲ \leq y^۴-y^۳$$

این نابرابری هم با نابرابری $y^۲(y-۱)^۲ \geq ۰$ هم ارز است و این نابرابری درست است. ∎

نابرابری کشی ـ شوارتز. فرض کنید $a_۱$، ...، a_n، $b_۱$، ... و b_n عددهایی حقیقی باشند. در این صورت

$$(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲)(b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots + b_n^۲) \geq (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \cdots + a_nb_n)^۲$$

برای اثبات این نابرابری ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم a_iها و b_iها همگی مثبت‌اند. فرض کنید

$$t_i = \frac{b_i^۲}{b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots + b_n^۲}, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

در این صورت، چون تابع $f(x) = x^۲$ روی بازهٔ $(۰, +\infty)$ محدب است، از نابرابری ینسن برای تابعهای محدب نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=۱}^{n} t_i \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^۲ \geq \left(\sum_{i=۱}^{n} t_i \frac{a_i}{b_i}\right)^۲$$

اگر این نابرابری را ساده کنیم، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید. در نابرای کُشی ـ شوارتز تساوی (در حالتی که عددهای غیرصفرند) فقط وقتی پیش می‌آید که

$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

به‌همین ترتیب می‌توان نابرابری کلیتر زیر را ثابت کرد.

نابرابری هُلدر. فرض کنید p و q عددهایی حقیقی باشند، $p, q > ۱$ و $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. همچنین، فرض کنید $a_۱$، ...، a_n، $b_۱$، ... و b_n عددهایی حقیقی باشند. در این صورت

$$\sum_{i=۱}^{n} |a_ib_i| \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{۱}{p}} \left(\sum_{i=۱}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{۱}{q}}$$

مسألهٔ ۷ . دستگاه معادله‌های

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۹۶$$
$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲ = ۱۴۴$$
$$a_۱^۳ + a_۲^۳ + \cdots + a_n^۳ = ۲۱۶$$

را در مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت حل کنید.

راه‌حل. فرض کنید عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n جواب دستگاه معادله‌های موردنظر باشند. توجه کنید که بنابر نابرابری کشی ـ شوارتز،

$$(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)(a_۱^۳ + a_۲^۳ + \cdots + a_n^۳) \geq (a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n)^۲$$

از طرف دیگر، توجه کنید که $۱۴۴^۲ = ۲۱۶ \times ۹۶$، پس در نابرابری بالا تساوی برقرار است. بنابراین

$$\frac{a_۱}{a_۱^۳} = \frac{a_۲}{a_۲^۳} = \cdots = \frac{a_n}{a_n^۳}$$

بنابراین عددی مثبت مانند a وجود دارد که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = a$. بنابراین $na = ۹۶$ و $na^۲ = ۱۴۴$.
پس $n = ۳۲$ و $a = \frac{۳}{۲}$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که دستگاه معادله‌های موردنظر فقط یک جواب دارد:

$$(a_۱, a_۲, \ldots, a_{۳۲}) = \left(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}, \ldots, \frac{۳}{۲}\right)$$

■

مسألهٔ ۸ . (مسابقهٔ ریاضی اتریش-لهستان، ۱۹۸۳) a، b، c و d عددهایی نامنفی‌اند و

$$a^۵ + b^۵ \leq ۱, \qquad c^۵ + d^۵ \leq ۱$$

ثابت کنید

$$a^۲c^۳ + b^۲d^۳ \leq ۱$$

راه‌حل اول. ابتدا توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی وزندار،

$$\frac{۲}{۵}a^۵ + \frac{۳}{۵}c^۵ \geq a^۲c^۳, \qquad \frac{۲}{۵}b^۵ + \frac{۳}{۵}d^۵ \geq b^۲d^۳$$

درنتیجه

$$a^۲c^۳ + b^۲d^۳ \leq \frac{۲}{۵}(a^۵ + b^۵) + \frac{۳}{۵}(c^۵ + d^۵) \leq \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵} = ۱$$

■

راه‌حل دوم. نابرابری موردنظر نتیجه‌ای سرراست از نابرابری هُلدر است. توجه کنید که $\frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵} = ۱$ و درنتیجه بنابر نابرابری هُلدر،

$$a^۲c^۳ + b^۲d^۳ \leq \left((a^۲)^{\frac{۵}{۲}} + (b^۲)^{\frac{۵}{۲}}\right)^{\frac{۲}{۵}} \left((c^۳)^{\frac{۵}{۳}} + (d^۳)^{\frac{۵}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۵}}$$

$$= (a^۵ + b^۵)^{\frac{۲}{۵}}(c^۵ + d^۵)^{\frac{۳}{۵}} \leq ۱$$

■

مسألهٔ ۹ . a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند و $c^۲ + d^۲ = (a^۲ + b^۲)^۳$. ثابت کنید

$$\frac{a^۳}{c} + \frac{b^۳}{d} \geq ۱$$

راه‌حل اول. اگر دوبار از نابرابری کشی-شوارتز استفاده کنیم معلوم می‌شود

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\right)(ac+bd) &\geq \left(\sqrt{\frac{a^3}{c}}\sqrt{ac}+\sqrt{\frac{b^3}{d}}\sqrt{bd}\right)^2\\ &= (a^2+b^2)^2\\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\ &\geq ac+bd\end{aligned}$$

پس

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geq 1$$

■

راه‌حل دوم. با استفاده از نابرابری هُلدر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= c^{\frac{2}{3}}\left(\frac{a^3}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+d^{\frac{2}{3}}\left(\frac{b^3}{d}\right)^{\frac{2}{3}}\\ &\leq (c^2+d^2)^{\frac{1}{3}}\left(\left(\left(\frac{a^3}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\left(\frac{b^3}{d}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

و چون $a^2+b^2=(c^2+d^2)^{\frac{1}{2}}$، پس

$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geq 1$$

■

مسألهٔ ۱۰ . (المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸) x_1، x_2، ... و x_n عددهایی مثبت‌اند $(n\geq 2)$ و

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$$

ثابت کنید

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که بنابر نابرابری کشی-شوارتز،

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leq\sqrt{n}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\sqrt{n}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\frac{x_۱}{\sqrt{۱-x_۱}}+\frac{x_۲}{\sqrt{۱-x_۲}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{۱-x_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-۱}}$$

اکنون توجه کنید که چون تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x}}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ محدب است، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای محدب،

$$\frac{۱}{n}\sum f(x_i)\geq f\left(\frac{۱}{n}\sum x_i\right)=f\left(\frac{۱}{n}\right)=\sqrt{\frac{n}{n-۱}}$$

که همان نابرابری موردنظر است. ∎

مسألهٔ ۱۱ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱) a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{\sqrt{a^۲+۸bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^۲+۸ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^۲+۸ab}}\geq ۱$$

راه‌حل اول. فرض کنید $s=a+b+c$. ابتدا توجه کنید که اگر a، b و c را به‌ترتیب با $\frac{a}{s}$، $\frac{b}{s}$ و $\frac{c}{s}$ جایگزین کنیم، نابرابری موردنظر تغییر نمی‌کند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $s=۱$. همچنین، تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ روی بازهٔ $(۰,+\infty)$ محدب است. درنتیجه، بنابر نابرابری ینسن برای تابعهای محدب،

$$\begin{aligned}&af(a^۲+۸bc)+bf(b^۲+۸ca)+cf(c^۲+۸ab)\\&\geq f\Big(a(a^۲+۸bc)+b(b^۲+۸ca)+c(c^۲+۸ab)\Big)\end{aligned}$$

پس

$$\frac{a}{\sqrt{a^۲+۸bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^۲+۸ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^۲+۸ab}}\geq\frac{۱}{\sqrt{a(a^۲+۸bc)+b(b^۲+۸ca)+c(c^۲+۸ab)}}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$a(a^۲+۸bc)+b(b^۲+۸ca)+c(c^۲+۸ab)\leq ۱$$

یا

$$a^۳+b^۳+c^۳+۲۴abc\leq ۱$$

توجه کنید که چون $a+b+c=۱$، کافی است ثابت کنیم

$$a^۳+b^۳+c^۳+۲۴abc\leq(a+b+c)^۳$$

اما

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc)$$

پس باید ثابت کنیم

$$6abc \le a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2$$

این نابرابری هم نتیجه‌ای ساده از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی است. ■

راه‌حل دوم. ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$$

این نابرابری با نابرابریهای

$$\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\right)^2 \ge \sqrt[3]{a^2}(a^2+8bc)$$

$$\sqrt[3]{b^8}+\sqrt[3]{c^8}+2\sqrt[3]{a^4}\sqrt[3]{b^4}+2\sqrt[3]{a^4}\sqrt[3]{c^4}+2\sqrt[3]{b^4}\sqrt[3]{c^4} \ge 8\sqrt[3]{a^2}bc$$

هم‌ارز است. نابرابری آخر هم نتیجه‌ای ساده از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \ge \frac{\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge \frac{\sqrt[3]{c^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید. ■

راه‌حل سوم. سمت چپ نابرابری موردنظر را A بنامید. در این صورت، بنابر نابرابری کُشی-شوارتز،

$$A\left(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\right) \ge (a+b+c)^2$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

توجه کنید که بنابر نابرابری کُشی_شوارتز،

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^{۲}+۸bc}+b\sqrt{b^{۲}+۸ca}+c\sqrt{c^{۲}+۸ab} \\ &= \sqrt{a}\sqrt{a^{۳}+۸abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^{۳}+۸abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^{۳}+۸abc} \\ &\leq \sqrt{a+b+c}\sqrt{a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۲۴abc} \end{aligned}$$

از طرف دیگر، همان‌طورکه در راه‌حل اول ثابت کردیم،

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}+۲۴abc \leq (a+b+c)^{۳}$$

پس

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^{۲}+۸bc}+b\sqrt{b^{۲}+۸ca}+c\sqrt{c^{۲}+۸ab} &\leq \sqrt{a+b+c}\sqrt{(a+b+c)^{۳}} \\ &= (a+b+c)^{۲} \end{aligned}$$

■

مراجع

۱. ارشک حمیدی، المپیادهای ریاضی چین، ۲۰۰۰_۱۹۸۶، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۳.

۲. ارشک حمیدی، نابرابری تجدید آرایش، نشریهٔ ریاضیات، سال سوم، تک‌شماره، اسفند ۱۳۸۱.

۳. ارشک حمیدی، نابرابریهایی برای تابعهای محدب، نشریهٔ ریاضیات، سال چهارم، شمارهٔ اول، آبان ۱۳۸۲.

آزمون دعوتی ریاضیات امریکا

از سال ۱۹۸۳ از دانش‌آموزان برگزیدهٔ آزمونهای ریاضی دبیرستانی امریکا، که هر سال به‌شکل آزمونی چندگزینه‌ای در میان دانش‌آموزان دبیرستانهای امریکای شمالی برگزار می‌شود، برای شرکت در آزمون دعوتی ریاضیات امریکا دعوت می‌شود. هدف از برگزاری این آزمونها شناسایی دقیقتر بهترین دانش‌آموزان برای شرکت در المپیاد ریاضی ایالات متحدهٔ امریکا و درنهایت انتخاب اعضای تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی است. معلوم است که به‌طور طبیعی سؤالهای این آزمون از مسأله‌های آزمونهای ریاضی دبیرستانی دشوارترند و از مسأله‌های المپیادهای ریاضی ساده‌ترند. ویژگی منحصربه‌فرد آزمون دعوتی ریاضیات امریکا این است که جواب هر مسأله‌اش عددی صحیح از ۰ تا ۹۹۹ است! در اینجا برای آشنایی خوانندگان نشریهٔ ریاضیات با نوع مسأله‌های این آزمون، از هر سال یک مسأله برای نمونه آورده‌ایم.

۱. (۱۹۸۳) مجموع یکی در میان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و هر یک از زیرمجموعه‌هایش را این‌طور تعریف می‌کنیم: عددهای این زیرمجموعه را به‌ترتیب نزولی مرتب کنید و ابتدا از بزرگترین عدد، عددها را به‌ترتیب یکی در میان زیاد و کم کنید. (مثلاً، مجموع یکی در میان مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۴, ۶, ۹\}$ برابر با $۹ - ۶ + ۴ - ۲ + ۱$ و مجموع یکی در میان مجموعهٔ $\{۵\}$ برابر با ۵ است.) مجموع همهٔ مجموعهای یکی در میان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۷\}$ را حساب کنید.

۲. (۱۹۸۴) بزرگترین عدد زوجی که نمی‌توان آن‌را به شکل مجموع دو عدد فرد مرکب نوشت چیست؟

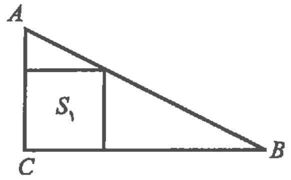
۳. (۱۹۸۵) چندتا از عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰ را می‌توان به‌شکل

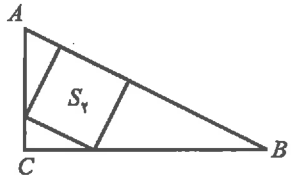
$$\lfloor ۲x \rfloor + \lfloor ۴x \rfloor + \lfloor ۶x \rfloor + \lfloor ۸x \rfloor$$

نوشت؟

۴. (۱۹۸۶) مجموع هر مجموعه از عددها مجموع عضوهای این مجموعه است. فرض کنید S مجموعه‌ای از عددهای صحیح باشد که هیچ‌کدام از ۱۵ بزرگتر نیستند. فرض کنید مجموع هیچ دو زیرمجموعهٔ متمایزی از S برابر نباشد. بیشترین مقدار ممکن مجموع S چقدر است؟

۵. (۱۹۸۷) مربعهای $S_۱$ و $S_۲$ مانند شکل صفحهٔ بعد در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC محاط شده‌اند. اگر مساحت $S_۱$ برابر با ۴۴۱ و مساحت $S_۲$ برابر با ۴۴۰ باشد، $AC + CB$ را حساب کنید.





۶. (۱۹۸۸) وجه‌های چندوجهی‌ای محدب ۱۲ مربع، ۸ شش‌ضلعی منتظم و ۶ هشت‌ضلعی منتظم‌اند. در هر رأس این چندوجهی یک مربع، یک شش‌ضلعی و یک هشت‌ضلعی به هم رسیده‌اند. چندتا از پاره‌خطهایی که رأسهای این چندوجهی را به هم وصل می‌کنند درون چندوجهی قرار دارند، یعنی نه یال‌اند و نه روی وجهی از چندوجهی قرار دارند؟

۷. (۱۹۸۹) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۹۸۹\}$ باشد که تفاضل هیچ دوعضوی از آن ۴ یا ۷ نیست. تعداد عضوهای S حداکثر چندتاست؟

۸. (۱۹۹۰) توجه کنید که $۶! = ۸ \times ۹ \times ۱۰$. بزرگترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که بتوان $n!$ را به‌شکل حاصل‌ضرب $n - ۳$ عدد طبیعی متوالی نوشت.

۹. (۱۹۹۱) r عددی حقیقی است و

$$\left\lfloor r + \frac{۱۹}{۱۰۰} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{۲۰}{۱۰۰} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{۹۱}{۱۰۰} \right\rfloor = ۵۴۶$$

$\lfloor ۱۰۰r \rfloor$ را حساب کنید.

۱۰. (۱۹۹۲) در مثلث ABC نقطه‌های A'، B' و C' به‌ترتیب روی ضلعهای BC، AC و AB قرار دارند. می‌دانیم AA'، BB' و CC' در نقطهٔ O متقاطع‌اند و

$$\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} = ۹۲$$

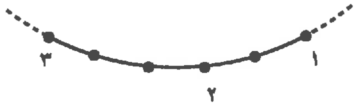
مقدار

$$\frac{AO}{OA'} \times \frac{BO}{OB'} \times \frac{CO}{OC'}$$

را حساب کنید.

۱۱. (۱۹۹۳) دوهزار نقطه روی دایره‌ای مفروض‌اند. شمارهٔ یکی از این نقطه‌ها را ۱ بگذارید. از این نقطه در جهت ساعتگرد دو نقطه بشمارید و شمارهٔ این نقطه را ۲ بگذارید. از نقطهٔ شمارهٔ ۲ در جهت ساعتگرد سه نقطه بشمارید و شمارهٔ این نقطه را ۳ بگذارید (شکل زیر را ببینید). این کار را ادامه دهید تا از همهٔ عددهای ۱، ۲، ... و ۱۹۹۳ استفاده شود. برخی نقطه‌های روی دایره بیش از یک شماره دارند و برخی اصلاً شماره ندارند.

کوچکترین عددی که شمارهٔ نقطه‌ای است که شماره‌اش ۱۹۹۳ است چیست؟



۱۲. (۱۹۹۴) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید $p(n)$ برابر با حاصل‌ضرب رقمهای غیرصفر n باشد. (اگر n عددی یک‌رقمی باشد، $p(n)$ را برابر با همین رقم می‌گیریم.) فرض کنید

$$S = p(۱) + p(۲) + \cdots + p(۹۹۹)$$

بزرگترین مقسوم‌علیه اول S چیست؟

۱۳. (۱۹۹۵) فرض کنید $f(n)$ نزدیکترین عدد صحیح به $\sqrt[۴]{n}$ باشد. $\sum_{k=۱}^{۱۹۹۵} \frac{۱}{f(k)}$ را حساب کنید.

۱۴. (۱۹۹۶) مکعب‌مستطیلی به ابعاد $۳۷۵ \times ۳۲۴ \times ۱۵۰$ از چسباندن مکعبهای $۱ \times ۱ \times ۱$ ساخته شده است. هر قطر این مکعب‌مستطیل از درون چندتا از این مکعبهای $۱ \times ۱ \times ۱$ می‌گذرد؟

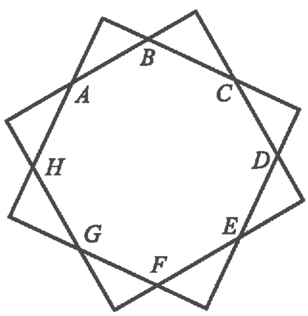
۱۵. (۱۹۹۷) نقطهٔ B بیرون nضلعی منتظم $A_۱A_۲\ldots A_n$ قرار دارد و $A_۱A_۲B$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است. بزرگترین مقدار n که به‌ازای آن A_n، $A_۱$ و B رأسهای متوالی چندضلعی‌ای منتظم‌اند چیست؟

۱۶. (۱۹۹۸) بجز دو جملهٔ اول دنبالهٔ

$$۱۰۰۰, x, ۱۰۰۰ - x, \ldots$$

بقیهٔ جمله‌ها تفاضل جملهٔ قبلی از جملهٔ قبل از آن‌اند. جملهٔ آخر این دنباله تنها جملهٔ منفی آن است. به‌ازای کدام عدد طبیعی مانند x طول این دنباله بیشترین مقدار ممکن است؟

۱۷. (۱۹۹۹) مرکز دو مربعی که در شکل زیر نشان داده شده‌اند بر هم منطبق است و طول ضلع مربعها برابر با ۱ است. طول پاره‌خط AB برابر با $\frac{۴۳}{۹۹}$ و مساحت هشت‌ضلعی $ABCDEFGH$ برابر با $\frac{m}{n}$ است، که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند. $m+n$ را حساب کنید.



۱۸. (۲۰۰۰) دربارهٔ تابع f می‌دانیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(x) = f(۳۹۸ - x) = f(۲۱۵۸ - x) = f(۳۲۱۴ - x)$$

حداکثر چند عدد متمایز ممکن است در میان عددهای $f(۰)$، $f(۱)$، ... و $f(۹۹۹)$ وجود داشته باشد؟

۱۹. (۲۰۰۱) مجموعه‌ای از عددهای مثبت را مثلثی می‌نامیم، هرگاه سه عضو متمایز از آن وجود داشته باشند که طول ضلعهای یک مثلث باشند. مجموعه‌هایی مانند $\{۴, ۵, ۶, \ldots, n\}$ از عددهای طبیعی متوالی را درنظر بگیرید که همهٔ زیرمجموعه‌های ده‌عضوی آنها مثلثی‌اند. بزرگترین مقدار ممکن n چیست؟

۲۰. (۲۰۰۲) کوچکترین عدد صحیح مانند k را طوری پیدا کنید که بیش از یک دنباله با ویژگیهای زیر وجود داشته باشد:

الف) $a_۱$، $a_۲$، ...، دنباله‌ای غیرصعودی از عددهای طبیعی است.

ب) اگر $n > ۲$، $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$.

ج) $a_۹ = k$.

۲۱. (۲۰۰۳) در مثلث ABC، $AB = ۳۶۰$، $BC = ۵۰۷$ و $CA = ۷۸۰$. فرض کنید M وسط CA و BD نیمساز زاویهٔ ABC باشد. فرض کنید F نقطه‌ای روی BC باشد که $DF \perp BD$. فرض کنید DF، BM را در نقطهٔ E قطع کند. نسبت $\frac{DE}{EF}$ را می‌توان به‌شکل $\frac{m}{n}$ نوشت، که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند. $m + n$ را حساب کنید.

(پاسخ در صفحهٔ ۵۸)

سی و دومین المپیاد ریاضی امریکا

۲۹ و ۳۰ آوریل، ۲۰۰۳

۱. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، عددی nرقمی وجود دارد که بر 5^n بخش‌پذیر است و همهٔ رقمهایش عددهایی فردند.

۲. چندضلعی محدب P را با رسم کردن همهٔ قطرهایش به چندضلعیهای محدب کوچکتری تقسیم کرده‌ایم. طول هر یک از ضلعها و هر یک از قطرهای P عددی گویاست. ثابت کنید طول ضلعهای هر یک از چندضلعیهایی که در این تقسیم به‌وجود آمده‌اند هم عددی گویاست.

۳. فرض کنید $n \neq 0$. به‌ازای هر دنباله از عددهای صحیح مانند

$$A:\ a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

که در آن $0 \le a_i \le i$، $0 \le i \le n$، دنبالهٔ دیگری را مانند

$$t(A):\ t(a_0), t(a_1), t(a_2), \ldots, t(a_n)$$

این‌طور تعریف می‌کنیم: $t(a_i)$ برابر با تعداد جمله‌هایی در دنبالهٔ A است که قبل از a_i قرار دارند و برابر با a_i نیستند. ثابت کنید که اگر در ابتدا دنباله‌ای مانند دنبالهٔ A در بالا داشته باشیم، می‌توانیم کمتر از n بار از تبدیل t استفاده کنیم و به دنباله‌ای مانند B برسیم که $t(B) = B$.

۴. ABC مثلث است. دایره‌ای که از A و B گذشته است پاره‌خطهای AC و BC را به‌ترتیب در نقطه‌های D و E قطع کرده است. نیمخطهای BA و ED یکدیگر را در نقطهٔ F و خطهای BD و CF یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی $MF = MC$ که $MB \times MD = MC^2$.

۵. فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

۶. روی رأسهای شش‌ضلعی‌ای منتظم شش عدد صحیح نامنفی که مجموعشان ۲۰۰۳ است نوشته‌ایم. برت می‌تواند در هر حرکت یکی از رأسها را انتخاب کند و عدد روی آن را با قدرمطلق تفاضل عددهای نوشته شده روی دو رأس مجاورش عوض کند. ثابت کنید برت می‌تواند چندبار این کار را طوری تکرار کند که پس از آنها روی هر شش رأس عدد صفر نوشته شده باشد.

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۸)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌ها

۴۱. ثابت کنید دست‌کم ۹۹٪ عددهای

$$۱۰^۱ + ۱, ۱۰^۲ + ۱, \ldots, ۱۰^{۲۰۰۰} + ۱$$

مرکب‌اند.

۴۲. a، b، c و d عددهای حقیقی‌اند و اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد، $an^۳ + bn^۲ + cn + d$ عددی صحیح است. ثابت کنید $۶a$، $۶b$، $۶c$ و $۶d$ عددهایی صحیح‌اند.

۴۳. آیا عددهایی گویا و مثبت مانند a و b وجود دارند که $a + b + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۴۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که

$$\lfloor \sqrt[۴]{۱} \rfloor + \lfloor \sqrt[۴]{۲} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[۴]{n} \rfloor = ۲n$$

۴۵. همهٔ عددهای صحیح و متمایز مانند m و n را طوری پیدا کنید که

$$m^۴ - ۳m^۳ + ۵m^۲ - ۹m = n^۴ - ۳n^۳ + ۵n^۲ - ۹n$$

۴۶. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که بتوان مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که

$$\{ma: \ a \in A\} = \{nb: \ b \in B\}$$

۴۷. آیا می‌توان هر یک از عددهای صحیح را با یکی از رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد طوری رنگ کرد که اگر عددهای صحیح a، b، c و d همرنگ باشند و دست‌کم یکی از آنها غیرصفر باشد، آن‌وقت $۳a - ۲b \neq ۲c - ۳d$؟

۴۸. در یک باشگاه شطرنج هرکس یا با یکی دیگر از اعضای باشگاه بازی می‌کند یا با کامپیوتر. جمعهٔ گذشته n نفر به باشگاه آمده‌اند. هیچ‌یک از آنها بیش از nبار بازی نکرده است و هر دو نفر از آنها که با هم بازی نکرده‌اند، روی‌هم بیش از nبار بازی نکرده‌اند. ثابت کنید در این روز اعضا روی‌هم بیش از $\frac{n(n+۱)}{۲}$ بار بازی نکرده‌اند.

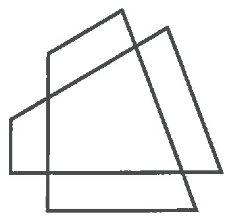
۴۹. ۱۰۰ گلوله داریم که مجموع وزنهایشان برابر با $۲S$ است. عدد طبیعی k را مناسب می‌نامیم، هرگاه بتوان kتا

از این گلوله‌ها را طوری انتخاب کرد که مجموع وزنهایشان برابر با S باشد. حداکثر چند عدد مناسب ممکن است وجود داشته باشد؟

۵۰. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنجی ۱۳×۱۳ را با ۴۲ کاشی ۴×۱ طوری پوشاند که فقط خانهٔ وسط صفحهٔ شطرنج پوشانده نشود؟

۵۱. n عددی طبیعی است. دو نفر به طریق زیر بازی می‌کنند. نفر اول چند عدد طبیعی که از ۲۵ بزرگتر نیستند و مجموعشان دست‌کم ۲۰۰ است می‌نویسد (لزومی ندارد عددها متمایز باشند). اگر نفر دوم بتواند تعدادی از این عددها را طوری انتخاب کند که مجموعشان از $n - ۲۰۰$ کمتر و از $n + ۲۰۰$ بیشتر نباشد می‌برد. کوچکترین عدد طبیعی مانند n که به‌ازای آن نفر دوم استراتژی برد دارد چیست؟

۵۲. در شکل زیر ضلعهای متناظر چهارضلعیها با هم موازی‌اند و فاصلهٔ آنها از هم برابر با ۱ است. ثابت کنید محیط چهارضلعیها برابر است.



۵۳. دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ در نقطه‌های P و Q متقاطع‌اند. خطی راست از P گذشته است و دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را به‌ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کرده است و نقطهٔ X وسط AB است. خط راستی که از نقطه‌های Q و X می‌گذرد، دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را برای بار دوم به‌ترتیب در نقطه‌های Y و Z قطع کرده است. ثابت کنید X وسط YZ است.

۵۴. $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABCاند و نقطه‌های $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ به‌ترتیب وسط این ارتفاعها هستند. مجموع زاویه‌های $B_۲A_۱C_۲$، $C_۲B_۱A_۲$ و $A_۲C_۱B_۲$ را حساب کنید.

۵۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که nضلعی‌ای محدب وجود داشته باشد که قطرهایش برابر باشند.

۵۶. نقطهٔ M درون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA$$

۵۷. a، b، c، d، e و f عددهایی صحیح و متمایزند. ثابت کنید

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-f)^۲ + (f-a)^۲ \geq ۱۸$$

۵۸. فرض کنید $x_1 = ۱$، $y_1 = ۲$، $z_1 = ۳$ و اگر n عددی طبیعی باشد،

$$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}$$
$$y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}$$
$$z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$$

ثابت کنید دست‌کم یکی از عددهای x_{200}، y_{200} و z_{200} از ۲۰ بزرگتر است.

۵۹. x، y و z عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + (y-z)^2} < \sqrt{4y^2 + 4y(z+x) + (z-x)^2} + \sqrt{4z^2 + 4z(x+y) + (x-y)^2}$$

۶۰. a، b، c، A، B و C عددهایی حقیقی‌اند، $a \neq 0$، $A \neq 0$ و به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

ثابت کنید

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

راه‌حلها

۲۱. عددهای ۱، ۲، . . . و ۹۹۹۹۹۹ را به دو گروه تقسیم کرده‌ایم، یک گروه عددهایی که نزدیکترین مربع کامل به آنها عددی فرد است و گروه دیگر عددهایی که نزدیکترین مربع کامل به آنها عددی زوج است. مجموع عددهای کدام گروه بزرگتر است؟

راه‌حل. مجموع عددهای هر دو گروه برابر است. توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد، از عددهای

$$n^2, n^2+1, \ldots, (n+1)^2 - 1$$

عددهای n^2، n^2+1، . . . و n^2+n متعلق به یک گروه و عددهای n^2+n+1، n^2+n+2، . . . و n^2+2n متعلق به گروه دیگرند. از طرف دیگر،

$$n^2 + (n^2+1) + \cdots + (n^2+n) = (n+1)n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$(n^2+n+1) + (n^2+n+2) + \cdots + (n^2+2n) = n(n^2+n) + \frac{n(n+1)}{2}$$

اکنون کافی است از این نتیجه به‌ازای $n = ۱$، $n = ۲$، ... و $n = ۹۹۹$ استفاده کنید.

۲۲. دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (۴x)_۵ + ۷y = ۱۴ \\ (۲y)_۵ - (۳x)_۷ = ۷۴ \end{cases}$$

را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید (در اینجا، $(n)_k$ نزدیکترین مضرب k به n است).

راه‌حل. فرض کنید (x, y) جواب دستگاه معادله‌های موردنظر باشد. توجه کنید که اگر t عددی صحیح باشد،

$$t - ۲ \le (t)_۵ \le t + ۲$$

$$t - ۳ \le (t)_۷ \le t + ۳$$

درنتیجه

$$۱۲ \le ۴x + ۷y \le ۱۶$$

$$۶۹ \le ۲y - ۳x \le ۷۹$$

اکنون توجه کنید که $۲۹y = ۳(۴x + ۷y) + ۴(۲y - ۳x)$ و درنتیجه

$$۲۹y \le ۳ \times ۱۶ + ۴ \times ۷۹ = ۳۶۴, \qquad ۲۹y \ge ۳ \times ۱۲ + ۴ \times ۶۹ = ۳۱۲$$

بنابراین $۳۱۲ \le ۲۹y \le ۳۶۴$. پس یا $y = ۱۱$ یا $y = ۱۲$. اگر $y = ۱۱$، آن‌وقت $(۴x)_۵ = -۶۳$، که درست نیست. بنابراین $y = ۱۲$ و $(۴x)_۵ = -۷۰$. پس $-۷۲ \le ۴x \le -۶۸$ و درنتیجه یا $x = -۱۸$ یا $x = -۱۷$. اگر $x = -۱۸$، آن‌وقت

$$(۲y)_۵ - (۳x)_۷ = ۲۵ + ۵۶ = ۸۱$$

که درست نیست. پس $x = -۱۷$، به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $x = -۱۷$ و $y = ۱۲$، (x, y) جواب دستگاه معادله‌های موردنظر است.

۲۳. من عددی از میان عددهای ۰، ۱، ... و ۱۵ انتخاب کرده‌ام. شما می‌توانید هفت سؤال از من بکنید و من به‌صورت «بله» و «خیر» جوابتان را می‌دهم. درضمن، می‌توانم یک‌بار دروغ بگویم. عددی را که انتخاب کرده‌ام پیدا کنید.

راه‌حل. هر یک از عددهای ۰، ۱، ... و ۱۵ در مبنای دو حداکثر چهاررقمی است. بنابراین باید چهاررقم را مشخص کنیم. در سه سؤال اول دربارهٔ سه رقم اول می‌پرسیم. بعد می‌پرسیم «آیا تا اینجا دروغ گفته‌اید؟» اگر پاسخ «خیر» باشد، جواب درست بوده است (در غیر این صورت یک دروغ اینجا و یک دروغ هم قبلاً

گفته شده است). اکنون می‌توانیم سه سؤال دیگر بکنیم و رقم آخر را مشخص کنیم، که کار ساده‌ای است. اگر پاسخ «بله» باشد، حتماً در چهار سؤال اول دروغ گفته شده است. می‌توانیم با دوبار سؤال کردن مشخص کنیم که چه وقت دروغ گفته شده است و با آخرین سؤال رقم آخر را هم مشخص کنیم.

۲۴. تکه‌ای مقوای مستطیل‌شکل را در امتداد خطی راست می‌بریم و آن را به دو تکه تقسیم می‌کنیم. یکی از این دو قسمت را هم به‌همین ترتیب به دو تکه تقسیم می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. کمترین تعداد برشهای لازم را پیدا کنید که در میان همهٔ تکه‌های موجود، هزارتا ۱۳۸۲ضلعی وجود داشته باشد.

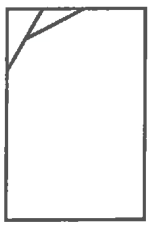
راه‌حل. هر برش جدید چندضلعی‌ای کاغذی تعداد تکه‌ها را یکی افزایش می‌دهد. اگر N برش انجام دهیم، $N+۱$ تکه به‌دست می‌آوریم. اگر تعدادی چندضلعی کاغذی داشته باشیم و یکی از آنها را ببریم، تعداد رأسهای مجموعهٔ جدید حداکثر چهارتا از قبلی بیشتر است. چون در ابتدا چهار رأس داریم، پس از N برش، تعداد رأسهای همهٔ تکه‌ها حداکثر $۴N+۴$ است. فرض کنید پس از N برش، Pتا Sضلعی به‌دست آورده باشیم. چون $N+۱$ چندضلعی داریم، $P-۱+N$تا از آنها Sضلعی نیستند. از طرف دیگر، هر یک از این $N+۱$ چندضلعی دست‌کم سه رأس دارد، بنابراین تعداد رأسهای همهٔ تکه‌ها دست‌کم $P\times S+۳(N+۱-P)$ است. به این ترتیب

$$P\times S+۳(N+۱-P)\leq ۴N+۴$$

یعنی

$$P\times S-۳P-۱\leq N$$

بنابراین، برای اینکه Pتا Sضلعی به‌دست بیاوریم باید دست‌کم $P\times S-۳P-۱$ برش انجام بدهیم. ثابت می‌کنیم که همین تعداد برش مقصود ما را برآورده می‌کند. توجه کنید که با $P-۱$ برش می‌توان مستطیل را به P مستطیل دیگر تبدیل تقسیم کرد و از هر مستطیل هم می‌توان با $S-۴$ برش یک Sضلعی به‌دست آورد (شکل زیر را ببینید). بنابراین با $(S-۴)P+P-۱$ برش می‌توان pتا Sضلعی به‌دست آورد.



در مسألهٔ خودمان، $P=۱۰۰۰$ و $S=۱۳۸۲$، پس تعداد برشهای لازم برابر است با ۱۳۷۸۹۹۹.

۲۵. $(a_n)_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی است، به‌طوری که اگر $i\neq j$، $(a_i,a_j)=(i,j)$ ((a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است). ثابت کنید $a_n=n$، $n\geq ۱$.

راه‌حل. توجه کنید که اگر n عددی طبیعی باشد،

$$(a_n, a_{۲n}) = (n, ۲n) = n$$

پس $n \mid a_n$. بنابراین

$$(a_{a_n}, a_n) = (a_n, n) = n$$

از طرف دیگر، چون $a_n \mid a_{a_n}$، پس

$$(a_{a_n}, a_n) = a_n$$

پس $a_n = n$.

۲۶. ثابت کنید از میان هر ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز، می‌توان ۹۸ عدد طوری انتخاب کرد که مجموع آنها بر مجموع دو عدد دیگر بخش‌پذیر نباشد.

راه‌حل. ۱۰۰ عدد طبیعی دلخواه در نظر بگیرید و فرض کنید مجموع آنها برابر با S باشد. اگر حکم مسأله درست نباشد، S بر مجموع هر جفت از این ۱۰۰ عدد طبیعی بخش‌پذیر است. فرض کنید بزرگترین عدد در میان ۱۰۰ عدد طبیعی موردنظر برابر با M باشد. ۹۹ زوج که یکی از عضوهای هر یک از آنها M و عضو دیگر یکی از عددهای باقی‌مانده است در نظر بگیرید. چون $M > \frac{S}{۱۰۰}$، پس مجموع عددهای هر یک از این زوجها از $\frac{S}{۱۰۰}$ بزرگتر و از S کوچکتر است. اکنون توجه کنید که مقسوم‌علیه‌های S که میان $\frac{S}{۱۰۰}$ و S قرار دارند باید در میان عددهای $\frac{S}{۲}$، $\frac{S}{۳}$، ... و $\frac{S}{۹۹}$ باشند، که تعدادشان ۹۸تاست و ما ۹۹ زوج داریم. پس مجموع دست‌کم یکی از زوجها مقسوم‌علیه S نیست، که تناقض است.

۲۷. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر سه عدد حقیقی مانند x، y و z،

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq ۳f(x + ۲y + ۳z)$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگی موردنظر را داشته باشد. اگر در نابرابری

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq ۳f(x + ۲x + ۳z)$$

فرض کنیم $x = y = -z$، نتیجه می‌شود $f(۲x) \geq f(۰)$ و اگر فرض کنیم $x = -y = z$، نتیجه می‌شود $f(۰) \leq f(۲x)$. به این ترتیب

$$f(۰) \leq f(۲x) \leq f(۰)$$

بنابراین $f(۲x) = f(۰)$؛ پس $f(x) = f(۰)$ و درنتیجه f تابعی ثابت است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که هر تابع ثابت ویژگی موردنظر را دارد.

۲۸. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(x^۳ + x) \leq x \leq (f(x))^۳ + f(x)$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(x)=x^۳+x$ یک‌به‌یک و پوشا و صعودی اکید است. پس تابع وارون آن، $g^{-۱}$، هم یک‌به‌یک و پوشا و صعودی اکید است.

اکنون فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. در این صورت به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$f(g(x))\le x\le g(f(x))$$

بنابراین

$$f\left(g\left(g^{-۱}(x)\right)\right)\le g^{-۱}(x)$$

پس $f(x)\le g^{-۱}(x)$. همچنین

$$g^{-۱}(x)\le g^{-۱}\left(g\left(f(x)\right)\right)$$

پس $g^{-۱}(x)\le f(x)$. بنابراین $f(x)=g^{-۱}(x)$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که تابع $g^{-۱}$ ویژگیهای موردنظر را دارد.

۲۹. $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ چندجمله‌ایهایی درجهٔ دوم‌اند. آیا ممکن است عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۸ ریشه‌های معادلهٔ $f(g(h(x)))=۰$ باشند؟

راه‌حل. خیر، ممکن نیست. فرض کنید عددهای ۱، ۲، ... و ۸ ریشه‌های معادلهٔ $f\left(g\left(h(x)\right)\right)=۰$ باشند. اگر خط $x=a$ محور سهمی $y=h(x)$ باشد، آن‌وقت $h(x_۱)=h(x_۲)$ اگر و فقط اگر $x_۱+x_۲=۲a$. چون عددهای $h(۱)$، $h(۲)$، ... و $h(۸)$ ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ چهارم $f(g(x))$ هستند و این چندجمله‌ای حداکثر چهار ریشه دارد، پس $a=\frac{۹}{۲}$ و

$$h(۱)=h(۸),\qquad h(۲)=h(۷),\qquad h(۳)=h(۶),\qquad h(۴)=h(۵)$$

علاوه بر این، یا $h(۱)<h(۲)<h(۳)<h(۴)$ یا $h(۱)>h(۲)>h(۳)>h(۴)$.

به‌همین ترتیب، چون $g(h(۱))$، $g(h(۲))$، $g(h(۳))$ و $g(h(۴))$ ریشه‌های $f(x)$ هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$h(۱)+h(۴)=۲b,\qquad h(۲)+h(۳)=۲b$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم محور سهمی $y=g(x)$ خط $x=b$ است. پس

$$h(۱)+h(۴)=h(۲)+h(۳)$$

اکنون به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر $h(x)=Ax^۲+Bx+C$، آن‌وقت $A=۰$، که تناقض است.

۳۰. $ABCD$ لوزی است و $\angle B=۶۰^\circ$. M نقطه‌ای درون مثلث ADC است و $\angle AMC=۱۲۰^\circ$. خطهای BA و CM در نقطهٔ P و خطهای BC و AM در نقطهٔ Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید D روی خط PQ قرار دارد.

راه‌حل. چون $ABCD$ لوزی است و $\angle B = 60^\circ$، پس

$$\angle ADC = \angle DAC = \angle DCA = \angle PAD = \angle DCQ = 60^\circ$$

اکنون توجه کنید که چون $\angle AMC = 120^\circ$، پس $\angle CAM + \angle ACM = 60^\circ$. از طرف دیگر، $\angle DCM = \angle ACM = 60^\circ$. پس $\angle CAM = \angle DCM$. درنتیجه، چون AB و CD موازی‌اند،

$$\angle APC = \angle DCM = \angle CAQ$$

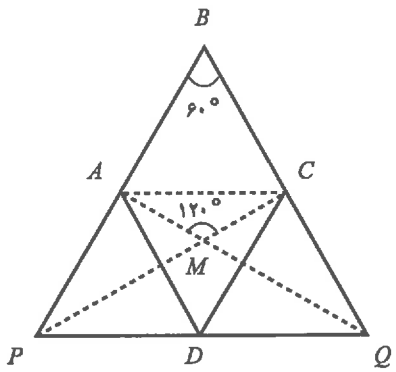
همچنین، $\angle PAC = \angle QCA = 120^\circ$؛ پس مثلثهای PAC و QCA متشابه‌اند و درنتیجه $\frac{PA}{AC} = \frac{AC}{QC}$. چون $AC = AD = CD$، پس

$$\frac{PA}{AD} = \frac{CD}{QC}$$

همچنین، $\angle PAD = \angle DCQ = 60^\circ$؛ پس مثلثهای PAD و DCQ متشابه‌اند. درنتیجه

$$\angle PDA + \angle ADC + \angle CDQ = \angle PDA + \angle PAD + \angle APD = 180^\circ$$

یعنی P، D و Q روی یک خط راست قرار دارند.



۳۱. در مثلث حادهٔ ABC نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 را روی ارتفاعهای AA'، BB' و CC' طوری انتخاب کرده‌ایم که هیچ‌یک از آنها بر نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعها، منطبق نیست. درضمن،

$$S_{ABC_1} + S_{BCA_1} + S_{CAB_1} = S_{ABC}$$

ثابت کنید نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و H روی یک دایره قرار دارند.

راه‌حل. فرض کنید دایره‌ای که از نقطه‌های H، A_1 و B_1 می‌گذرد پاره‌خط CH را در نقطهٔ C'_1 قطع کند. ثابت می‌کنیم C'_1 و C_1 بر هم منطبق‌اند.

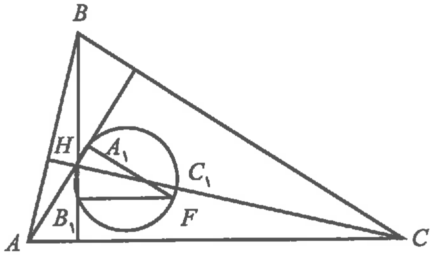
فرض کنید نقطهٔ F سر دیگر قطری باشد که یک سرش نقطهٔ H است (شکل زیر را ببینید). توجه کنید که زاویه‌های HA_1F، HB_1F و HC'_1F قائمه‌اند. بنابراین $BC \parallel A_1F$، $AC \parallel B_1F$ و $AB \parallel C'_1F$. درنتیجه

$$S_{BFC} = S_{BA_1C}, \quad S_{AFC} = S_{AB_1C}, \quad S_{AFB} = S_{AC'B}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AFB} + S_{BFC} + S_{AFC} \\ &= S_{AC'_1B} + S_{BA_1C} + S_{AB_1C} \end{aligned}$$

پس $S_{AC'_1B} = S_{AC_1B}$ و درنتیجه C'_1 و C_1 بر هم منطبق‌اند.



۳۲. شش نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید دو مثلث وجود دارند که رأسهایشان از این شش نقطه هستند و بلندترین ضلع یکی از آنها، کوتاهترین ضلع مثلث دیگر است.

راه‌حل. نقطه‌ها را A، B، C، D، E و F بنامید. بلندترین ضلع هر مثلثی را که رأسهایش از این نقطه‌ها هستند قرمز کنید (اگر ضلعهایی با طول برابر بلندترین بودند، یکی را به‌دلخواه قرمز می‌کنیم). اگر مثلثی قرمز وجود داشته باشد، آن‌وقت کوتاهترین ضلع این مثلث، بلندترین ضلع مثلثی دیگر است. بنابراین کافی است ثابت کنیم مثلثی قرمز وجود دارد. اگر سه ضلع قرمز مانند AB، AC و AD وجود داشته باشد، آن‌وقت چون یکی از ضلعهای مثلث BCD هم قرمز است، می‌توان مثلثی قرمز به‌دست آورد. بنابراین کافی است ثابت کنیم که نقطه‌ای وجود دارد که سه‌تا از پاره‌خطهای منتهی به آن قرمزند.

فرض کنید، مثلاً، کوتاهترین پاره‌خط میان نقطه‌های مفروض AB باشد. چهار مثلث وجود دارد که دوتا از رأسهایشان A و B است. بنابراین چهار پاره‌خط قرمز وجود دارند که یا به A ختم می‌شوند یا به B. اگر دست‌کم سه‌تا از این پاره‌خطها به A ختم شوند، بنابر آنچه قبلاً گفتیم، مثلثی قرمز وجود دارد. فرض کنید چنین نباشد و مثلاً AC، AD، BE و BF قرمز باشند. مثلث BCD را در نظر بگیرید. اگر بلندترین ضلع این مثلث CD باشد، مثلث ACD قرمز است. اگر BC یا BD بلندترین ضلع باشد، سه پاره‌خط قرمز وجود دارند که به B ختم می‌شوند، پس باز هم مثلثی قرمز وجود دارد.

۳۳. تعدادی دایره درون مربعی به ضلع ۱ قرار داده‌ایم. مجموع محیطهای دایره‌ها برابر با ۱۰ است. ثابت کنید خط

راستی وجود دارد که موازی یکی از ضلعهای مربع است و دست‌کم سه‌تا از دایره‌ها را قطع می‌کند.

راه‌حل. دایره‌ها را بر یک ضلع مربع تصویر کنید. طول تصویر هر دایره برابر با قطر آن است. فرض کنید قطر دایره‌ها برابر با $d_۱$، $d_۲$، ... و d_n باشند ($n \geq ۴$). چون مجموع محیطهای دایره‌ها برابر با ۱۰ است، پس

$$d_۱ + d_۲ + \cdots + d_n = \frac{۱۰}{\pi} > ۳$$

بنابراین، چون طول ضلع مربع برابر با ۱ است، نقطه‌ای روی ضلعی که دایره‌ها را بر آن تصویر کرده‌ایم وجود دارد که دست‌کم در سه‌تا از تصویرها مشترک است. خطی که از این نقطه بر ضلع موردنظر عمود رسم شود دست‌کم سه‌تا از دایره‌ها را قطع می‌کند.

۳۴. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\frac{n^۲ - n}{۲} \leq \{\sqrt{۱}\} + \{\sqrt{۲}\} + \cdots + \{\sqrt{n^۲}\} \leq \frac{n^۲ - ۱}{۲}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

راه‌حل. ابتدا نابرابری سمت چپ را ثابت می‌کنیم. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۱$، معلوم است که حکم درست است. فرض کنید که حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. توجه کنید که اگر $۱ \leq i \leq k$، آنگاه

$$\{\sqrt{k^۲ + i}\} + \{\sqrt{(k+۱)^۲ - i}\} > ۱ \qquad (*)$$

درحقیقت، می‌توان نوشت

$$\sqrt{k^۲ + i} = k + \{\sqrt{k^۲ + i}\}, \qquad \sqrt{(k+۱)^۲ - i} = k + \{\sqrt{(k+۱)^۲ - i}\}$$

اگر دو طرف این تساویها را به توان دو برسانیم و تساویهای به‌دست آمده را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} ۲k + ۱ &= ۲k\left(\{\sqrt{k^۲ + i}\} + \{\sqrt{(k+۱)^۲ - i}\}\right) \\ &\quad + \{\sqrt{k^۲ + i}\}^۲ + \{\sqrt{(k+۱)^۲ - i}\}^۲ \\ &< (۲k + ۱)\left(\{\sqrt{k^۲ + i}\} + \{\sqrt{(k+۱)^۲ - i}\}\right) \end{aligned}$$

پس نابرابری $(*)$ درست است. به این ترتیب

$$\sum_{i=۱}^{(k+۱)^۲} \{\sqrt{i}\} = \sum_{i=۱}^{k^۲} \{\sqrt{i}\} + \sum_{i=k^۲+۱}^{(k+۱)^۲} \{\sqrt{i}\}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{k^۲-k}{۲}+\sum_{i=۱}^{k}\left(\{\sqrt{k^۲+i}\}+\{\sqrt{(k+۱)^۲-i}\}\right)+۰\\
&> \frac{k^۲-k}{۲}+k\\
&= \frac{(k+۱)^۲-(k+۱)}{۲}
\end{aligned}$$

پس حکم به‌ازای $n=k+۱$ هم درست است.

نابرابری سمت راست را هم به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n=۱$، معلوم است که حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای $n=k$ درست باشد. توجه کنید که اگر $۱\leq i\leq ۲k$، آنگاه

$$\begin{aligned}
\{\sqrt{k^۲+i}\} &= \sqrt{k^۲+i}-k\\
&< \sqrt{k^۲+i+\frac{i^۲}{۲k^۲}}-k\\
&= \frac{i}{۲k}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{(k+۱)^۲}\{\sqrt{i}\} &= \sum_{i=۱}^{k^۲}\{\sqrt{i}\}+\sum_{i=k^۲+۱}^{(k+۱)^۲}\{\sqrt{i}\}\\
&< \frac{k^۲-۱}{۲}+\frac{۱}{۲k}\sum_{i=۱}^{۲k} i+۰\\
&= \frac{k^۲-۱}{۲}+\frac{۲k+۱}{۲}\\
&= \frac{(k+۱)^۲-۱}{۲}
\end{aligned}$$

پس حکم به‌ازای $n=k+۱$ هم درست است.

۳۵. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$(a+b+c+d)^۳\leq ۴(a^۳+b^۳+c^۳+d^۳)+۲۴\left(ab(c+d)+cd(a+b)\right)$$

راه‌حل. فرض کنید $S=a+b+c+d$ و

$$A=a^۳+b^۳+c^۳+d^۳,\qquad B=ab(c+d)+cd(a+b)$$

در این صورت $S^3 = A + 6B + 3Q$، که در آن

$$\begin{aligned} Q &= a^2(b+c+d) + b^2(c+d+a) + c^2(d+a+b) + d^2(a+b+c) \\ &= a^2(S-a) + b^2(S-b) + c^2(S-c) + d^2(S-d) \\ &= a(aS-a^2) + b(bS-b^2) + c(cS-c^2) + d(dS-d^2) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، اگر x عددی حقیقی باشد،

$$0 \le \left(x - \frac{S}{2}\right)^2 = x^2 - xS + \frac{S^2}{4}$$

بنابراین

$$Sa - a^2 \le \frac{S^2}{4}, \quad Sb - b^2 \le \frac{S^2}{4}, \quad Sc - c^2 \le \frac{S^2}{4}, \quad Sd - d^2 \le \frac{S^2}{4}$$

پس

$$Q \le (a+b+c+d)\frac{S^2}{4} = \frac{S^3}{4}$$

و درنتیجه

$$S^3 \le A + 6B + \frac{3S^3}{4}$$

یعنی $S^3 \le 4A + 24B$، که همان نابرابری موردنظر است.

۳۶. a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند ($n \ge 2$). ثابت کنید

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1) \ge (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\cdots(a_n^2a_1+1)$$

راه‌حل اول. ابتدا ثابت می‌کنیم

$$(a_1^3+1)^2(a_2^3+1) \ge (a_1^2a_2+1)^3 \qquad (*)$$

این نابرابری با نابرابری

$$2a_1^3a_2^3 + a_2^3 + a_1^6 + 2a_1^3 \ge 3a_1^4a_2^2 + 3a_1^2a_2 \qquad (**)$$

هم‌ارز است. اکنون توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$2a_1^3a_2^6 + a_1^6 \ge 3\sqrt[3]{a_1^{12}a_2^6} = 3a_1^4a_2^2$$

$$a_2^3 + 2a_1^3 \ge 3\sqrt[3]{a_2^3a_1^6} = 3a_1^2a_2$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نابرابری (**) به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$(a_i^۳+۱)^۲(a_{i+۱}^۳+۱)\ge(a_i^۲a_{i+۱}+۱)^۳,\qquad ۲\le i\le n$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم $a_{n+۱}=a_۱$. اگر این نابرابریها و نابرابری (*) را در هم ضرب کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. توجه کنید که بنابر نابرابری هُلدر،

$$(a_i^۳+۱)^{\frac{۲}{۳}}(a_{i+۱}^۳+۱)^{\frac{۱}{۳}}\ge(a_i^۳)^{\frac{۲}{۳}}(a_{i+۱}^۳)^{\frac{۱}{۳}}+۱,\qquad ۱\le i\le n$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم $a_{n+۱}=a_۱$. اگر این نابرابریها را در هم ضرب کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

۳۷. چهارضلعی محدب $ABCD$ درون دایره‌ای به شعاع واحد محاط شده است و $AB\times BC\times CD\times DA\ge ۴$. ثابت کنید $ABCD$ مربع است.

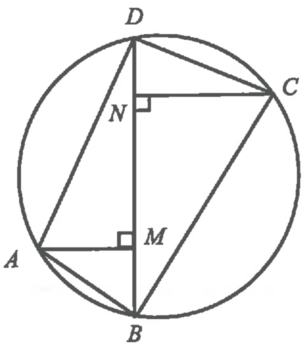
راه‌حل اول. فرض کنید طول ضلعهای مثلثی a، b و c باشد، طول ارتفاع وارد بر ضلع به طول c برابر با h_c و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث R باشد. در این صورت، مساحت این مثلث هم برابر است با $\frac{ch_c}{۲}$ هم برابر است با $\frac{abc}{۴R}$. بنابراین $ab=۲Rh_c$.

بنابراین، در مسألهٔ خودمان، با نمادگذاریهای شکل زیر،

$$AB\times DA=۲AM,\qquad CB\times CD=۲CN$$

درنتیجه

$$۲AM\times ۲CN=AB\times BC\times CD\times DA\ge ۴$$



پس $AM\times CN\ge ۱$ و درنتیجه $CN\ge\frac{۱}{AM}$. چون $AM+CN$ حداکثر برابر با قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ است، پس $AM+CN\le ۲$. بنابراین $AM+\frac{۱}{AM}\le ۲$. اکنون توجه کنید که اگر x عددی مثبت باشد، $x+\frac{۱}{x}\ge ۲$ و تساوی وقتی پیش می‌آید که $x=۱$. پس $AM=۱$ و درنتیجه

$CN = ۱$. بنابراین AC و BD قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی $ABCD$ و بر هم عمودند. پس $ABCD$ مربع است.

راه‌حل دوم. توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\sqrt{(AB \times CD)(BC \times DA)} \leq \frac{AB \times CD + BC \times DA}{۲}$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی محاطی $ABCD$،

$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$$

بنابراین

$$۴ \leq \left(\sqrt{(AB \times CD)(BC \times DA)}\right)^۲ \leq \left(\frac{AB \times CD + BC \times DA}{۲}\right)^۲$$
$$= \left(\frac{AC \times BD}{۲}\right)^۲ \leq \left(\frac{۲ \times ۲}{۲}\right)^۲ = ۴$$

(چون AC و BD حداکثر برابر با قطر دایره‌اند، پس $AC, BD \leq ۲$.) درنتیجه

$$AC = BD = ۲$$
$$AB \times CD = BC \times DA$$

بنابراین AC و BD قطرند و $ABCD$ مستطیل است. پس $AB = CD$ و $BC = DA$. بنابراین $AB^۲ = BC^۲$ و درنتیجه $AB = BC$. پس $ABCD$ مربع است.

۳۸. x عددی حقیقی است و $۲ > x > ۱$. ثابت کنید در میان عددهای

$$\lfloor x \rfloor,\ \lfloor ۲x \rfloor,\ \lfloor ۳x \rfloor, \ldots$$

بی‌نهایت توان ۲ وجود دارد.

راه‌حل. فرض کنید

$$a_n = \frac{۲^n}{x} - \left\lfloor \frac{۲^n}{x} \right\rfloor, \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

در این صورت $۰ \leq a_n < ۱$، $n \geq ۱$، و

$$a_{n+۱} = \begin{cases} ۲a_n & a_n < \frac{۱}{۲} \\ ۲a_n - ۱ & a_n \geq \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

اگر به‌ازای nای $a_n = 0$، آن‌وقت به‌ازای $m \geq n$،

$$\left\lfloor \frac{2^m}{x} \right\rfloor x = 2^m$$

و درنتیجه

$$\left\lfloor \left\lfloor \frac{2^m}{x} \right\rfloor x \right\rfloor = 2^m$$

پس حکم درست است.

فرض کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_n \neq 0$. فرض کنید عددی طبیعی مانند N وجود دارد که به‌ازای $m \geq N$، $a_m \leq \frac{1}{2}$. در این صورت

$$\lim_{m \to +\infty} a_m = \lim_{m \to +\infty} 2^{m-N} a_N = +\infty$$

که تناقض است، زیرا همواره $a_m < 1$. پس بی‌نهایت عدد طبیعی مانند m وجود دارد که $a_m > \frac{1}{2}$. اگر $a_m \geq \frac{1}{2}$، آنگاه

$$0 < \left(\left\lfloor \frac{2^m}{x} \right\rfloor + 1 \right) x - 2^m = (1 - a_m)x < \frac{1}{2}x < 1$$

و

$$\left\lfloor \left(\left\lfloor \frac{2^m}{x} \right\rfloor + 1 \right) x \right\rfloor = 2^m$$

۳۹. a و b دو عدد طبیعی متمایزند و $ab(a+b)$ بر $a^2 + ab + b^2$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

راه‌حل. فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b برابر با d باشد. در این صورت عددهایی طبیعی مانند a_1 و b_1 وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند و $a = da_1$ و $b = db_1$. توجه کنید که $da_1b_1(a_1 + b_1)$ بر $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2$ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر،

$$a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = a_1(a_1 + b_1) + b_1^2 = b_1(a_1 + b_1) + a_1^2$$

پس $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2$ نسبت به a_1، b_1 و $a_1 + b_1$ اول است. بنابراین d بر $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2$ بخش‌پذیر است. درنتیجه

$$d \geq a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 > a_1b_1$$

پس $d^3 \geq ab$. به این ترتیب $|a-b| \geq d > \sqrt[3]{ab}$.

۴۰. a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند و $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. ثابت کنید $a + b + c + d$ مرکب است.

راه‌حل. فرض کنید حکم درست نباشد و $a+b+c+d$ برابر با عددی اول مانند p باشد ($p \geq ۵$). توجه کنید که یکی از عددهای $a+b$ یا $c+d$ زوج است. می‌توانیم فرض کنیم $a+b$ زوج است. فرض کنید $a+b=۲A$ و $ab=B$. در این صورت $c+d=p-۲A$ و

$$(۲A)^۲-ab=a^۲+b^۲+ab=c^۲+d^۲+cd$$
$$=(p-۲A)^۲-cd=p(p-۴A)+(۲A)^۲-cd$$

درنتیجه، ab و cd به‌پیمانهٔ p همنهشت‌اند. بنابراین

$$c^۲+(۲A)c+B\equiv c^۲-(c+d)c+cd\equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که $d^۲+(۲A)d+B$ بر p بخش‌پذیر است. بنابراین عددهای

$$(c+A^۲)+(B-A^۲),\qquad (d+A)^۲+(B-A^۲)$$

بر p بخش‌پذیرند.

ثابت می‌کنیم در میان عددهای ۱، ۲، ... و $p-۱$ تعداد عددهایی مانند k که $(k+A)^۲+(B-A^۲)$ بر p بخش‌پذیر است دوتاست. فرض کنید عددهای $k_۱$، $k_۲$ و $k_۳$ ویژگی موردنظر را داشته باشند. در این صورت، اگر $i\neq j$،

$$\Big((k_i+A)^۲+(B-A^۲)\Big)-\Big((k_j+A)^۲+(B-A^۲)\Big)=(k_i+k_j+۲A)(k_i-k_j)$$

سمت چپ این تساوی و درنتیجه سمت راست آن بر p بخش‌پذیر است. درنتیجه، چون $|k_i-k_j|<p$، پس $k_i+k_j+۲A$ بر p بخش‌پذیر است. به این ترتیب، چون

$$(k_۱+k_۲+۲A)-(k_۱+k_۳+۲A)=k_۲-k_۳$$

پس $k_۲-k_۳$ بر p بخش‌پذیر است، که درست نیست.

اکنون توجه کنید که

$$(p-a+A)^۲+(B-A^۲)=p(p-۲a+۲A)+a^۲-(۲A)a+B$$
$$=p(p-۲a+۲A)$$

پس $(p-a+A)^۲+(B-A^۲)$ بر p بخش‌پذیر است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $(p-b+A)^۲+(B-A^۲)$ بر p بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\{c,d\}=\{p-a,p-b\}$$

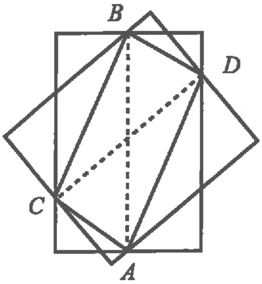
و درنتیجه $c+d=۲p-(a+b)$. پس $a+b+c+d=۲p$، که درست نیست.

راه‌حلها

از باب تفریح

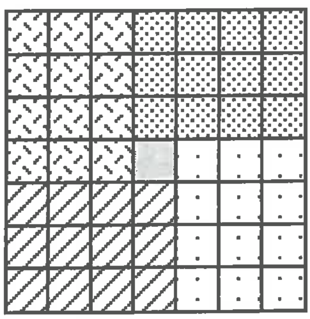
۱. هشت بازیکن. درحقیقت، از بازی ششم به بعد دو نفری که باید بازی کنند براساس نتیجهٔ بازیهای قبلی مشخص می‌شوند. در بازی ششم، بازندهٔ بازی اول با برندهٔ بازی سوم بازی می‌کند؛ در بازی هفتم، بازندهٔ بازی دوم با برندهٔ بازی چهارم بازی می‌کند و همین‌طور تا آخر. به این ترتیب، پس از پنج بازی اول هیچ بازیکن جدیدی نمی‌تواند در بازیها شرکت کند. در پنج بازی اول، هشت بازیکن در بازیها شرکت می‌کنند: دو نفر در بازی اول، دو نفر در بازی دوم، دو نفر در بازی سوم، یک نفر در بازی چهارم و یک نفر در بازی پنجم.

۲. بله. افراد حاضر را به دو گروه به‌طور دلخواه تقسیم کنید، بعد اگر کسی در گروهش بیش از یک نفر دشمن داشت، بجز یک نفر از آنها بقیه را به گروه دیگر منتقل کنید.



۳. بله. ابتدا توجه کنید که اگر P نقطه‌ای روی ضلع KL از مستطیل $KLMN$ باشد، مساحت مثلث MPN برابر با نصف مساحت مستطیل است. اکنون توجه کنید که با نمادگذاری شکل مقابل، مساحت یکی از مستطیلها برابر است با $۲S_{ACD} + ۲S_{BCD}$ و مساحت مستطیل دیگر برابر است با $۲S_{ABD} + ۲S_{ABC}$. پس مساحت هر یک از مستطیلها دو برابر مساحت چهارضلعی $ACBD$ است.

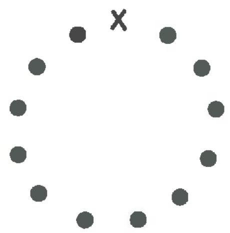
۴. خانهٔ وسط را حذف کنید (شکل زیر را ببینید).



۵. از علامت ضربدر (جای شمارهٔ ۱۳) در شکل زیر در جهت ساعتگرد شروع به حرکت کنید و نقطه‌ها را سیزده‌تا در میان حذف کنید:

۱۳, ۱, ۳, ۶, ۱۰, ۵, ۲, ۴, ۹, ۱۱, ۱۲, ۷, ۸

موش سفید را در جای شمارهٔ ۸ قرار دهید. ملوس باید ابتدا موش پنجم در جهت ساعتگرد نسبت به موش سفید را بخورد.



آزمون دعوتی ریاضیات امریکا

.۱	۴۴۸	.۲	۳۸	.۳	۶۰۰	.۴	۶۱		
.۵	۴۶۲	.۶	۸۴۰	.۷	۹۰۵	.۸	۲۳		
.۹	۷۴۳	.۱۰	۹۴	.۱۱	۱۱۸	.۱۲	۱۰۳		
.۱۳	۴۰۰	.۱۴	۷۶۸	.۱۵	۴۲	.۱۶	۶۱۸		
.۱۷	۱۸۵	.۱۸	۱۷۷	.۱۹	۲۵۳	.۲۰	۷۸۴	.۲۱	۲۸۹

سی و دومین المپیاد ریاضی امریکا

۱. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = 1$، معلوم است که حکم درست است. فرض کنید $N = a_1a_2\dots a_n$ و N بر 5^n بخش‌پذیر باشد و همهٔ رقمهایش عددهایی فرد باشند. فرض کنید

$$N_1 = 1a_1a_2\dots a_n = 1\times 10^n + 5^nM = 5^n(1\times 2^n + M)$$

$$N_2 = 3a_1a_2\dots a_n = 3\times 10^n + 5^nM = 5^n(3\times 2^n + M)$$

$$N_3 = 5a_1a_2\dots a_n = 5\times 10^n + 5^nM = 5^n(5\times 2^n + M)$$

$$N_4 = 7a_1a_2\dots a_n = 7\times 10^n + 5^nM = 5^n(7\times 2^n + M)$$

$$N_5 = 9a_1a_2\dots a_n = 9\times 10^n + 5^nM = 5^n(9\times 2^n + M)$$

باقیمانده‌های تقسیم عددهای $1\times 2^n+M$، $3\times 2^n+M$، $5\times 2^n+M$، $7\times 2^n+M$ و $9\times 2^n+M$

بر ۵ عددهایی متمایزند، زیرا در غیر این صورت تفاضل دوتا از این عددها بر ۵ بخش‌پذیر است که ممکن نیست. بنابراین دست‌کم یکی از عددهای N_1، N_2، N_3، N_4 و N_5 بر 5×5^n بخش‌پذیر است.

۲. ابتدا فرض کنید چهارضلعی $ABCD$ محدب باشد و طول ضلعها و قطرهایش عددهایی گویا باشند. فرض کنید P نقطه‌های برخوردهای قطرهای AC و BD باشد. ثابت می‌کنیم طول هر یک از پاره‌خطهای AP، BP، CP و DP گویاست.

فرض کنید $\angle DAP = A_1$ و $\angle BAP = A_2$. از قانون کسینوسها در مثلثهای ADC، ABC و ADB نتیجه می‌شود که کسینوس هر یک از زاویه‌های A_1، A_2 و $A_1 + A_2$ عددی گویاست. چون

$$\sin A_1 \sin A_2 = \cos A_1 \cos A_2 - \cos(A_1 + A_2)$$

پس $\sin A_1 \sin A_2$ هم گویاست. چون

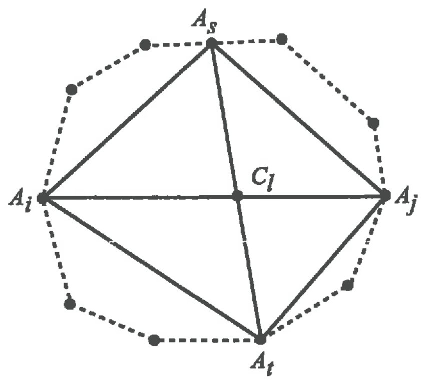
$$\frac{\sin A_2}{\sin A_1} = \frac{\sin A_2 \sin A_1}{\sin^2 A_1} = \frac{\sin A_2 \sin A_1}{1 - \cos^2 A_1}$$

پس $\frac{\sin A_2}{\sin A_1}$ هم گویاست. اکنون توجه کنید که

$$\frac{BP}{PD} = \frac{S_{ABP}}{S_{ADP}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times AP \times \sin A_2}{\frac{1}{2} AD \times AP \times \sin A_1} = \frac{AB}{AD} \times \frac{\sin A_2}{\sin A_1}$$

پس $\frac{BP}{PD}$ هم عددی گویاست. چون $BP + PD = BD$ و BD گویاست، BP و PD هر دو گویا هستند. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که AP و PC گویا هستند.

اکنون فرض کنید که P چندضلعی $A_1 A_2 \ldots A_n$ باشد ($n \geq 3$). اگر $n = 3$، معلوم است که حکم درست است. اگر $n = 4$، درستی حکم را در ابتدای راه‌حل ثابت کردیم. قطر $A_i A_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) را در نظر بگیرید و فرض کنید C_1، C_2، ... و C_m نقطه‌های متوالی تقسیم روی این قطر باشند (C_1 به A_i نزدیکتر است و C_m به A_j). فرض کنید C_l نقطه‌ای باشد که قطر $A_i A_j$ قطر $A_s A_t$ را قطع کرده است (شکل زیر را ببینید).



توجه کنید که طول هر یک از ضلعها و هر یک از قطرهای چهارضلعی محدب $A_iA_sA_jA_t$ عددی گویاست. پس بنابر آنچه در ابتدای راه‌حل ثابت کردیم، طول A_iC_l، C_lA_j گویاست. بنابراین طول A_iC_1، A_iC_2، ... و A_jC_m گویاست. چون $C_lC_{l+1} = A_iC_{l+1} - A_iC_l$، پس طول C_lC_{l+1} هم گویاست. چون i، j و l دلخواه بودند، پس طول هر یک از ضلهای هر یک از چندضلعیهای موردنظر هم عددی گویاست.

۳. ابتدا توجه کنید که $0 \leq t(a_i) \leq i$، $0 \leq i \leq n$. همچنین، $a_i \leq t(a_i)$، $0 \leq i \leq n$. درحقیقت، اگر $a_i = 0$، این نابرابری درست است. اگر $a_i > 0$ و $a_i = k$، چون هر یک از عددهای a_0، a_1، ... و a_{k-1} از k کوچکتر است، پس $a_i \leq t(a_i)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $a_i = t(a_i)$، هیچ تبدیل دیگری جملهٔ iام را تغییر نمی‌دهد. اگر $a_i = t(a_i) = 0$، همهٔ جمله‌های قبل از a_i صفرند و درنتیجه همهٔ جمله‌های قبل از $t(a_i)$ هم صفرند. یعنی همهٔ جمله‌های نظیر در تبدیلهای بعدی هم صفرند. اگر $a_i = t(a_i) = k > 0$، چون a_0، a_1، ... و a_{k-1} مخالف a_i هستند، بقیهٔ جمله‌ها (در صورت وجود)، یعنی a_k، a_{k+1}، ... و a_{i-1}، برابر با a_i هستند. بنابراین $t(a_k)$، $t(a_{k+1})$، ... و $t(a_{i-1})$ برابر با a_i هستند و درنتیجه در تبدیل بعدی هم $t(t(a_i)) = a_i$.

اکنون از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = 1$، یا $(a_0, a_1) = (0, 0)$ یا $(a_0, a_1) = (0, 1)$؛ پس در تبدیل اول جملهٔ اول تغییر نمی‌کند. فرض کنید جملهٔ iام در تبدیل iام تغییر نکند. اگر جملهٔ $(i+1)$ام در تبدیل $(i+1)$ام تغییر کند، باید در همهٔ تبدیلهای قبلی هم تغییر کرده باشد. پس باید در ابتدا صفر بوده باشد و در هر تغییر یکی زیاد شده باشد.

۴. ابتدا فرض کنید $MB \times MD = MC^2$. چون $\frac{MC}{MD} = \frac{MB}{MC}$ و $\angle CMD = \angle BMC$، مثلثهای CMD و BMC متشابه‌اند. درنتیجه $\angle MCD = \angle MBC$. چون چهارضلعی $ABED$ محاطی است، $\angle DAE = \angle DBE$. بنابراین

$$\angle FCA = \angle MCD = \angle MBC = \angle DBE = \angle DAE = \angle CAE$$

و درنتیجه $\angle AEF = \angle CFE$، پس $AE \parallel CF$. چون چهارضلعی $ABED$ محاطی است، $\angle ABD = \angle AED$. بنابراین

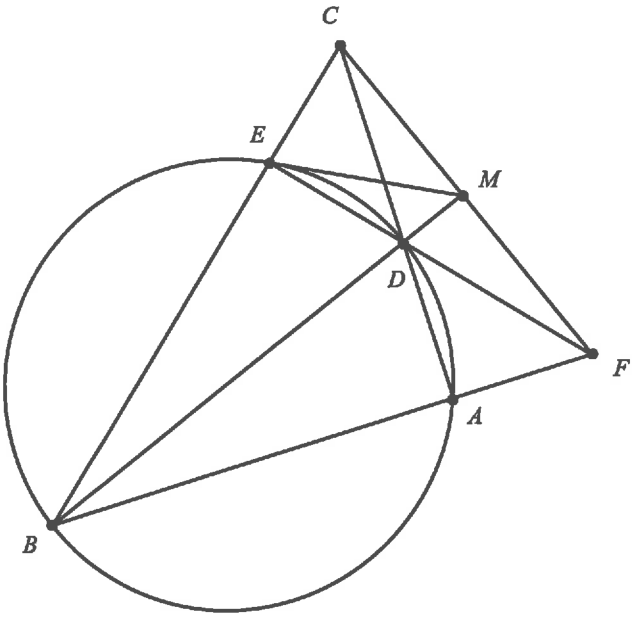
$$\angle FBM = \angle ABD = \angle AED = \angle AEF = \angle CFE = \angle MFD$$

چون $\angle FBM = \angle DFM$ و $\angle FMB = \angle DMF$، مثلثهای BFM و FDM متشابه‌اند. درنتیجه

$$\frac{FM}{DM} = \frac{BM}{FM} \quad \text{یا} \quad FM^2 = BM \times DM = MC^2$$

بنابراین

$$MF = MC$$



اکنون فرض کنید $MF = MC$. از قضیهٔ سوا در مثلث BCF و در مورد خطهای سوایی BM، CA، EF نتیجه می‌شود

$$\frac{BA}{AF} \times \frac{FM}{MC} \times \frac{CE}{EB} = ۱$$

پس $\frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AF}$ و درنتیجه $AE \parallel CF$. بنابراین $\angle DCM = \angle DAE$. چون چهارضلعی $ABED$ محاطی است، $\angle DAE = \angle DBE$. بنابراین

$$\angle DCM = \angle DAE = \angle DBE = \angle CBM$$

چون $\angle CBM = \angle DCM$ و $\angle CMB = \angle DMC$، مثلثهای BCM و CDM متشابه‌اند. درنتیجه $\frac{MB}{MC} = \frac{MC}{MD}$ یا $MB \times MD = MC^۲$.

۵. می‌توانیم a، b و c را در ضریبی مناسب ضرب کنیم و مسأله را به حالتی تبدیل کنیم که $a + b + c = ۳$. در این صورت نابرابری موردنظر را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{(a+۳)^۲}{۲a^۲ + (۳-a)^۲} + \frac{(b+۳)^۲}{۲b^۲ + (۳-b)^۲} + \frac{(c+۳)^۲}{۲c^۲ + (۳-c)^۲} \leq ۸$$

توجه کنید که

$$\frac{(a+۳)^۲}{۲a^۲ + (۳-a)^۲} = \frac{a^۲ + ۶a + ۹}{۳(a^۲ - ۲a + ۳)} = \frac{۱}{۳} \times \frac{a^۲ + ۶a + ۹}{a^۲ - ۲a + ۳}$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(۱ + \frac{۸a + ۶}{a^۲ - ۲a + ۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(۱ + \frac{۸a + ۶}{(a-۱)^۲ + ۲}\right)$$

$$\leq \frac{۱}{۳}\left(۱ + \frac{۸a + ۶}{۲}\right) = \frac{۱}{۳}(۴a + ۴)$$

اگر نابرابریهای مشابهی را برای b و c بنویسیم و هر سه نابرابری را با هم جمع کنیم، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

۶. هر موقعیت را با

$$\begin{array}{ccccc} & B & & C & \\ A & & & & D \\ & F & & E & \end{array}$$

نشان می‌دهیم، که در آن A، B، C، D، E و F عددهای نوشته شده روی رأسهای شش‌ضلعی‌اند. همچنین، اگر عددها را به پیمانهٔ ۲ در نظر بگیریم می‌نویسیم

$$\begin{array}{ccccc} & B & & C & \\ A & & & & D \\ & F & & E & \end{array} \qquad (\text{به‌پیمانهٔ ۲})$$

منظورمان از مجموع و ماکسیمم هر موقعیت، مجموع شش عدد نوشته شده روی رأسها و بزرگترین این عددهاست. ثابت می‌کنیم که از هر موقعیتی که مجموعش عددی فرد است می‌توان به موقعیتی رسید که همهٔ عددها صفرند. روشمان این است که یکی در میان

الف) از موقعیتی با مجموع فرد به موقعیتی برسیم که دقیقاً یک عدد فرد دارد.

ب) از موقعیتی که فقط یک عدد فرد دارد به موقعیتی برسیم که مجموعش فرد است و ماکسیممش کوچکتر شده است، یا موقعیتی است که همهٔ عددها صفرند.

توجه کنید که در هیچ حرکتی ماکسیمم زیادتر نمی‌شود، پس این روش به نتیجه می‌رسد، زیرا هر گام از نوع (ب) ماکسیمم را دست‌کم یکی کاهش می‌دهد و فقط وقتی به انتها می‌رسد که همهٔ عددها صفر باشند.

ابتدا موقعیتی مانند

$$\begin{array}{ccccc} & B & & C & \\ A & & & & D \\ & F & & E & \end{array}$$

را در نظر بگیرید که مجموعش فرد است. در این صورت یا $A + C + E$ فرد است یا $B + D + F$. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $A + C + E$ فرد است. اگر دقیقاً یکی

از A، C و E، مثلاً A، فرد باشد، می‌توانیم حرکتهای

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} & B & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & \\ 1 & & & D & \to & 1 & & & 0 & \to & 0 & & & 0 & \to & 0 & & & 0 \\ & F & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 0 & 0 & \end{array}$$
(به‌پیمانهٔ ۲)

را انجام بدهیم، که در آنها عددهای سیاه نشان‌دهندهٔ رأسهایی هستند که حرکت در آنها انجام شده است. اگر A، C و E هر سه فرد باشند، می‌توانیم حرکتهای

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & B & 1 & & & & 0 & 1 & & & & 0 & 0 & \\ 1 & & & D & \to & 1 & & & 0 & \to & 1 & & & 0 \\ & F & 1 & & & & 0 & 1 & & & & 0 & 0 & \end{array}$$
(به‌پیمانهٔ ۲)

را انجام بدهیم. پس نحوهٔ برداشتن گام (الف) را نشان داده‌ایم.

اکنون فرض کنید که در موقعیتی مانند

$$\begin{array}{cccc} & B & C & \\ A & & & D \\ & F & E & \end{array}$$

هستیم که در آن A عددی فرد است و بقیهٔ عددها زوج‌اند. می‌خواهیم به موقعیتی برسیم که ماکسیممش کوچکتر است. فرض کنید ماکسیمم این موقعیت برابر با M باشد. دو حالت وجود دارد:

حالت اول. M عددی زوج است. در این صورت ماکسیمم یکی از عددهای B، C، D، E و F است. به‌ویژه، $M > A$. ادعا می‌کنیم که پس از انجام حرکت به‌ترتیب در B، C، D، E و F به موقعیتی می‌رسیم که مجموعش فرد است و ماکسیممش از M کوچکتر است. درحقیقت، می‌توانیم حرکتهای

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccc} & 0 & 0 & & & & 1 & 0 & & & & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & & & & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 & \to & 1 & & & 0 & \to & 1 & & & 0 & \to & 1 & & & 1 & \to & 1 & & & 1 & \to & 1 & & & 1 \\ & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 1 & & & & 0 & 1 & \end{array}$$
(به‌پیمانهٔ ۲)

را انجام دهیم. موقعیت جدید را

$$\begin{array}{cccc} & B' & C' & \\ A' & & & D' \\ & F' & E' & \end{array}$$

بنامید. توجه کنید که مجموع این موقعیت فرد است، زیرا پنج عدد فرد در آن وجود دارند. عددهای A'، B'، C'، D' و E' همگی از M کوچکترند، زیرا عددهایی فردند و M زوج است و ماکسیمم هیچ‌گاه زیاد نمی‌شود. همچنین،

$$F' = |A' - E'| \leq \max\{A', E'\} < M$$

پس ماکسیمم کوچکتر شده است.

حالت دوم. M عددی فرد است. در این صورت $M = A$ و بقیهٔ عددها از M کوچکترند. اگر $C > 0$، می‌توانیم به‌ترتیب در B، F، A و F حرکت انجام دهیم. دنبالهٔ حرکتها

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ & 1 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ & 1 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \end{array} \quad (\text{به‌پیمانهٔ ۲})$$

است. موقعیت جدید را

$$\begin{array}{cccc} & B' & C' & \\ A' & & & D' \\ & F' & E' & \end{array}$$

بنامید. مجموع این موقعیت فرد است، زیرا دقیقاً یک عدد فرد در آن وجود دارد. مانند قبل، تنها حالتی که ممکن است ماکسیمم کوچکتر نشود وقتی است که $B' = A$؛ اما چنین چیزی ممکن نیست، زیرا $B' = |A - C| < A$ ($0 < C < M = A$). اگر $E > 0$، می‌توانیم مانند قبل استدلال کنیم (B را با F و C را با E عوض می‌کنیم). اگر $C = E = 0$، دنبالهٔ حرکتهای

$$\begin{array}{cccc} & B & 0 & \\ A & & & D \\ & F & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & \mathbf{A} & 0 & \\ A & & & 0 \\ & \mathbf{A} & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & \mathbf{A} & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ & \mathbf{A} & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & 0 & 0 & \\ 0 & & & 0 \\ & 0 & 0 & \end{array}$$

را انجام می‌دهیم و به موقعیتی می‌رسیم که همهٔ عددها صفرند (در اینجا عددها و حرفهای سیاه نشان‌دهندهٔ رأسهایی هستند که حرکت در آنها انجام شده است).

چون ۲۰۰۳ عددی فرد است، حکم مسأله را هم ثابت کرده‌ایم.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیرنظر: دکتر یحیی تابش / دکتر امیدعلی کرمزاده

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای باارزش به ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این‌رو مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به انتشار مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهای مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای میانه و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است.

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

منتشر می‌کند:

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
انتشارات فاطمی
جدید
منتشر کرده است:
کتابهای درسی دانشگاهی
توابع مختلط
تورنمنت شهرها
منتشر می‌کند:
تورنمنت شهرها
تورنمنت شهر
کتابهای موضوعی ریاضی
آشنایی با نظریهٔ گراف
علی‌رضا علیپور
جبر
مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی
کارگاه اعداد
دکتر آرش رستگار