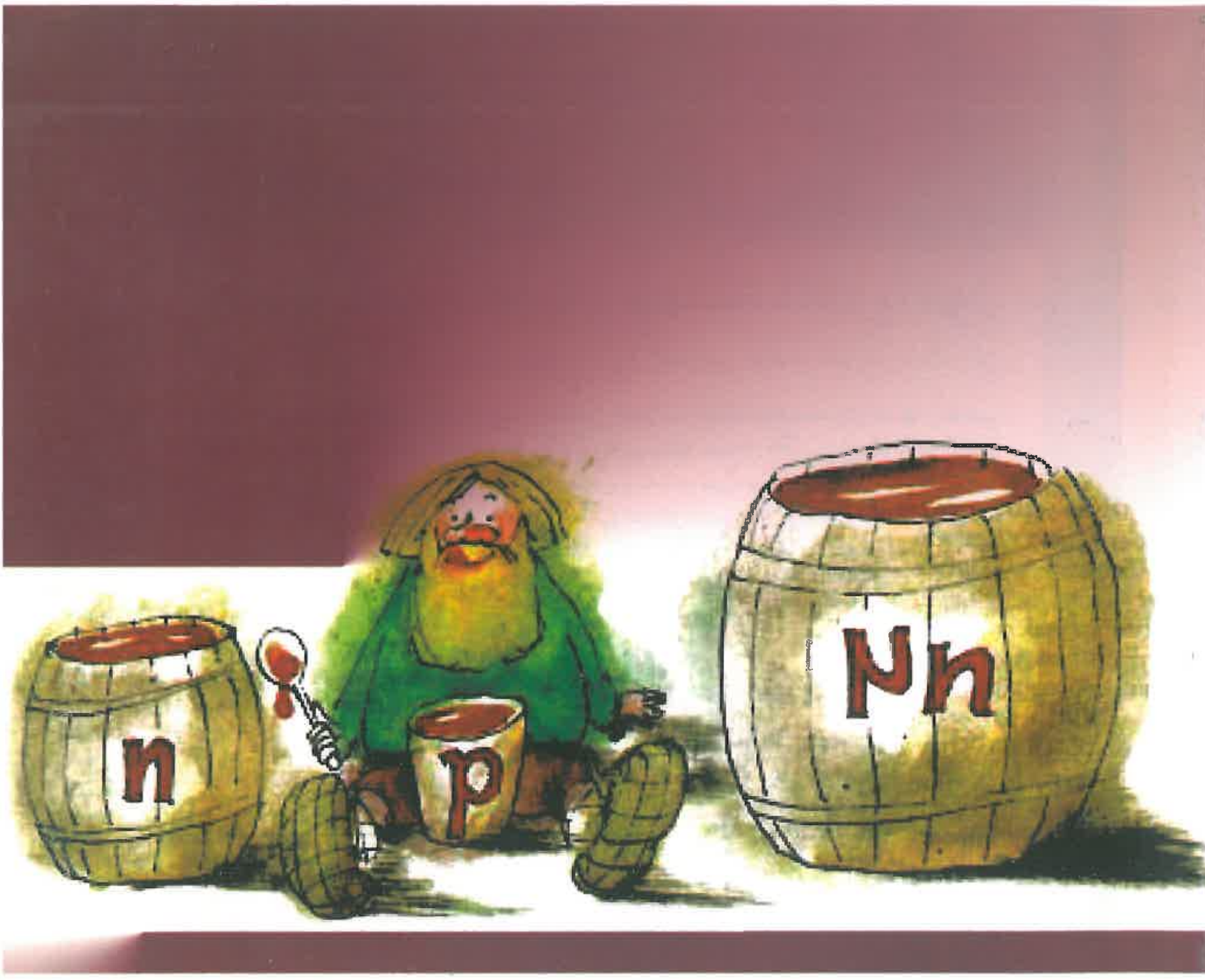
نشریهٔ
ریاضیات
برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال چهارم/ ۳
شمارهٔ پیاپی: ۱۴
تیر ۱۳۸۳
قیمت: ۹۰۰ تومان



به نام خدا

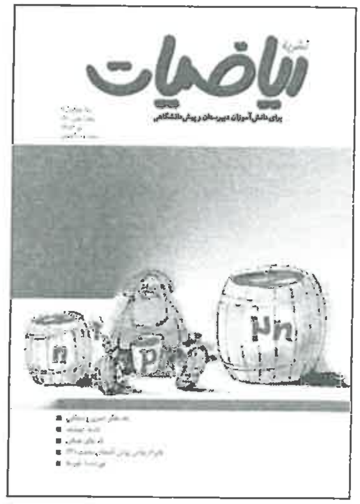
نشریهٔ ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال چهارم/۳ • شمارهٔ پیاپی: ۱۴ • تیر ۱۳۸۳

فهرست:

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان



روی جلد: همواره عددی اول بین n و 2n وجود دارد.

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، محمد مهدی عابدی‌نژاد

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: معراج

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ ۸۹۷۱۵۸۳

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

عددهای جبری و متعالی

ناؤم فلدمن

عددهای طبیعی، صحیح، گویا، حقیقی و مختلط، این زنجیر صعودیِ

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

مدت زمان مدیدی است که نزد ریاضی‌دانان شناخته شده است.

احتمالاً وصف آن را خوانده‌اید که چقدر دشوار بود عددهای منفی ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$) و مختلط ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) در این زنجیر بیایند. در این مقاله به بخش دیگر این زنجیر یعنی شمول $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ خواهیم پرداخت.

بی‌شک چیزهایی دربارهٔ عددهای گنگ (یعنی عددهایی که نمی‌توان آنها را به شکل کسری مانند $\frac{m}{n}$ نمایش داد که $m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$) شنیده‌اید؛ این عددها قبلاً در دوران باستان کشف شده‌اند. این حقیقت که قطر مربع را نمی‌توان با ضلعش اندازه گرفت (به زبان جبر، یعنی $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است) یکی از هیجان‌انگیزترین (و در عین حال ناراحت‌کننده‌ترین) کشفیات علمی آن زمان بوده است. امروزه اثبات این مطلب در کتابهای درسی مقدماتی هم آمده است. اگر از اندک تجربهٔ تفکر ریاضی بی‌بهره نباشید، ممکن نیست زیبایی و سادگی اغواکنندهٔ این اثبات در شما تأثیر نگذارد.

می‌توان عددهای حقیقی را، علاوه بر تقسیم‌بندی به عددهای گویا و گنگ، به عددهای جبری (مانند $\frac{۲}{۳}$، $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۷} - ۵$ یا $\sqrt[۳]{۴}$) و متعالی (مانند π، e یا $\log ۲$) هم تقسیم‌بندی کرد. این تقسیم‌بندی به‌اندازهٔ قبلی معروف نیست اما با وجود این خیلی اهمیت دارد. در این مقاله این دو دسته از عددها، ویژگیها و تاریخچهٔ (در حال تکوین) آنها را بررسی می‌کنیم.

عددهای جبری

هر عدد گویا مانند $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$، $b \in \mathbb{N}$) ریشهٔ چندجمله‌ایی با ضریبهای صحیح، مثلاً چندجمله‌ای $bx - a$، است. هر عدد گنگ به شکل $\sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbb{Z}$) هم ریشهٔ چندجمله‌ایی از این دست، مثلاً چندجمله‌ای $x^n - a$، است. اکنون می‌خواهیم فقط به این جور عددها، یعنی ریشه‌های چندجمله‌ایها با ضریبهای صحیح، بپردازیم.

بنابر تعریف، عددی حقیقی را در صورتی جبری می‌نامند که ریشهٔ چندجمله‌ایی با ضریبهای صحیح که برابر با چندجمله‌ای صفر نیست، باشد.[۱] مجموعهٔ همهٔ عددهای جبری را با A نشان می‌دهیم. همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم

۱) مجموعهٔ چندجمله‌ایهایی را که ضریبهایشان عددهایی صحیح‌اند با $\mathbb{Z}[x]$ نشان می‌دهند. در این مقاله بی‌آنکه هربار این مطلب را صراحتاً ذکر کنیم، فقط چندجمله‌ایهایی را در نظر می‌گیریم که برابر با چندجمله‌ای صفر نیستند. به آن دسته از خوانندگانی که با عددهای مختلط آشنا هستند متذکر می‌شویم که می‌توان عددهای جبری مختلط را هم تعریف و مطالعه کرد.

$\mathbb{Q} \subset A \subset \mathbb{R}$. برای اینکه با مفهوم عددهای جبری بیشتر آشنا شوید، حکمهای زیر را ثابت کنید.

۱. اگر $\alpha \in A$ $(\alpha \neq 0)$، آن‌وقت $\frac{1}{\alpha} \in A$.

۲. اگر α ریشهٔ چندجمله‌ایی با ضریبهای گویا باشد، آن‌وقت $\alpha \in A$.

۳. اگر $\alpha \in A$ و $a \in \mathbb{Q}$، آن‌وقت $a\alpha \in A$ و $a + \alpha \in A$.

می‌توان ثابت کرد که اگر $\alpha \in A$ و $\beta \in A$، آن‌وقت $\alpha + \beta \in A$، $\alpha - \beta \in A$، $\alpha \cdot \beta \in A$ و $\frac{\alpha}{\beta} \in A$ (در مورد آخری، β نباید برابر با صفر باشد). به‌بیان دیگر، با عملهای اصلی حساب روی مجموعهٔ عددهای جبری از این مجموعه بیرون نمی‌رویم.[۲] (اثبات این موضوع از راه‌حلهای سه مسألهٔ اول پیچیده‌تر است و از این‌رو، آن را در اینجا نمی‌آوریم.) بنابراین مجموعهٔ A با عملهای $+$ و $\times$، همانند مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ با همان عملها، میدان اعداد تشکیل می‌دهد؛ یعنی مجموعه‌ای از عددها که هر چهار عمل اصلی حساب، البته بجز تقسیم بر ۰، روی آن تعریف شده است و همهٔ این عملها، عملکردشان مانند حساب معمولی است.

در اینجا خود به خود این سؤال مطرح می‌شود که آیا عددهای حقیقی وجود دارند که جبری نباشند؟ برای پاسخگویی به این سؤال نمادگذاری‌ای لازم است که در بخش بعد شرح داده می‌شود.

درجهٔ عدد جبری

اگر α ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، آن‌وقت به‌ازای هر چندجمله‌ای دلخواه مانند $Q(x)$، α ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x)Q(x)$ هم است. بنابراین هر عدد جبری مانند α ریشهٔ مجموعه‌ای نامتناهی از چندجمله‌ایهای $\mathbb{Z}[x]$ است. روشن است که در میان آنها چندجمله‌ایهایی از کمترین درجه می‌توان یافت. اگر کمترین درجهٔ ممکن n باشد، می‌گوییم α عددی جبری از درجهٔ n است و می‌نویسیم $\deg\ \alpha = n$. به‌آسانی معلوم می‌شود که وقتی و فقط وقتی $\deg \alpha = 1$ که $\alpha \in \mathbb{Q}$. همچنین معلوم است که درجهٔ عددی گنگ به شکل $\sqrt{a}$ $(a \in \mathbb{Z})$، ۲ است، یعنی $\deg \sqrt{a} = 2$.

برای ادامهٔ کار، قضیهٔ ساده و در عین حال مهم زیر را لازم داریم.

قضیهٔ باقیمانده (۱۷۹۹). باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - \gamma$، $P(\gamma)$ است.

اثبات. $P(x)$ را بر $x - \gamma$ تقسیم می‌کنیم؛ باقیماندهٔ تقسیم عددی ثابت است که آن را با c نشان می‌دهیم:

$$P(x) = (x - \gamma)P_0(x) + c$$

که در آن $P_0(x)$ چندجمله‌ای است. در این دستور قرار می‌دهیم $x = \gamma$ و به‌دست می‌آوریم $C = P(\gamma)$.

اکنون براساس این قضیه به‌آسانی می‌توانیم لم زیر را ثابت کنیم.

۲) یعنی این مجموعه نسبت به عملهای اصلی حساب بسته است (یادداشت مترجم).

لم. اگر عددی جبری مانند α از درجهٔ n، که $n \geq ۲$، ریشه‌ای از چندجمله‌ای درجهٔ nام $P(x)$ باشد که $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$، آن‌وقت $P(x)$ هیچ ریشهٔ گویایی ندارد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد و مثلاً $P\left(\frac{a}{b}\right) = ۰$، که در آن $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$. بنابر قضیهٔ باقیمانده، باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x - \frac{a}{b}$ صفر است. بنابراین، $P(x)$ بر $x - \frac{a}{b}$ بخش‌پذیر است؛ درنتیجه

$$P(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) P_۰(x)$$

در اینجا معلوم است که ضریبهای $P_۰(x)$ عددهایی گویا هستند. اگر M مضرب مشترکی از مخرجهای ضریبهای $P_۰(x)$ باشد، آن‌وقت $P_۱(x) = MP_۰(x) \in \mathbb{Z}[x]$. چون $P(\alpha) = ۰$ و $\alpha \neq \frac{a}{b}$ (درجهٔ α از ۱ بزرگتر است)، پس $P_۰(\alpha) = ۰$. بنابراین $P_۱(\alpha) = ۰$. با این اوصاف، درجهٔ چندجمله‌ای $P_۱(x)$، $n - ۱$ است و $\deg \alpha = n > n - ۱$. درنتیجه به تناقض رسیدیم.

گام تعیین‌کننده در جستجو برای یافتن عددهایی که جبری نیستند قضیهٔ زیر بوده است.

قضیهٔ لیوویل

در نگاه اول صورت‌بندی این قضیه با وجود عددهای «غیرجبری» بی‌ربط است.

قضیهٔ لیوویل (۱۸۴۴). اگر α عدد جبری درجهٔ nای، که $n \geq ۲$، باشد، آن‌وقت عددی مثبت مانند c وجود دارد که به‌ازای هر عدد صحیح مانند p و هر عدد طبیعی مانند q،

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$$

در این قضیه درواقع بیان شده است که عددهای جبری گنگ مانند α را نمی‌توان با کسرهای گویا «خیلی دقیق» تقریب زد. بنابراین اگر عددی گنگ بیابیم که بتوان آن را با عددهای گویا «خیلی دقیق» تقریب زد آن عدد جبری نیست.

اثبات. فرض کنید α عدد جبری درجهٔ nای باشد که $n \geq ۲$. در این صورت چندجمله‌ایی مانند

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰, \qquad (a_n \neq ۰)$$

وجود دارد که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند و $P(\alpha) = ۰$. بزرگترین عدد در میان قدرمطلقهای $|a_۱|$، $|a_۲|$، ...، $|a_n|$ را با H نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که عدد

$$c = \frac{۱}{n^۲ H(۱ + |\alpha|)^{n-۱}}$$

ویژگی موردنظر را دارد. توجه کنید که $c < ۱$. اکنون عددی صحیح مانند p و عددی طبیعی مانند q به دلخواه انتخاب می‌کنیم. در این صورت

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-۱} p^{n-۱} q + \cdots + a_۱ p q^{n-۱} + a_∘ q^n}{q^n} = \frac{a}{q^n}$$

که در اینجا صورت کسر را که عددی صحیح است با a نشان داده‌ایم.

بنابر لم قبل،

$$P\left(\frac{p}{q}\right) \neq ∘$$

بنابراین، $a \neq ∘$؛ چون $a \in \mathbb{Z}$، پس $|a| \geq ۱$. درنتیجه

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{۱}{q^n}$$

چون $P(\alpha) = ∘$، پس

$$\begin{aligned}\frac{۱}{q^n} &\leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \\ &= \left|a_n \left(\alpha^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right) + a_{n-۱} \left(\alpha^{n-۱} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-۱}\right) + \cdots + a_۱ \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right|\end{aligned}$$

اکنون اگر

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq ۱$$

آن‌وقت

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq ۱ \geq \frac{۱}{q^n} > \frac{c}{q^n}$$

و حکم قضیه درست است. از طرف دیگر، اگر

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < ۱$$

آن‌وقت

$$\left|\frac{p}{q}\right| < |\alpha| + ۱$$

بدیهی است که

$$|\alpha| < |\alpha| + ۱$$

در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k که $۱ \leq k \leq n$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\left|\alpha^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k\right| &= \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \left|\alpha^{k-۱} + \alpha^{k-۲}\frac{p}{q} + \cdots + \left(\frac{p}{q}\right)^{k-۱}\right| \\ &\leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| k(|\alpha| + ۱)^{k-۱} \\ &\leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| n(|\alpha| + ۱)^{n-۱}\end{aligned}$$

و از آن نتیجه می‌گیریم

$$\frac{۱}{q^n} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| n^۲ (|\alpha| + ۱)^{n-۱} H = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \frac{۱}{c}$$

و یا

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$$

بنابراین قضیه ثابت شده است.

می‌توان قضیهٔ لیوویل را طوری صورت‌بندی کرد که شرط $\deg \alpha \geq ۲$ حذف شود.

قضیه. اگر α عدد جبری درجهٔ nای باشد، آن‌وقت عددی مثبت مانند $c_۰$ وجود دارد که به‌ازای هر عدد صحیح مانند p و هر عدد طبیعی مانند q که $\alpha \neq \frac{p}{q}$،

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c_۰}{q^n} \qquad (۱)$$

اثبات. حالتی که در آن $\deg \alpha \geq ۲$ پیش از این در بالا بررسی شد. اکنون فرض کنید $\deg \alpha = ۱$، یعنی $\alpha = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$). در این صورت اگر $c' = \frac{۱}{b}$، c' ویژگی موردنظر را دارد. درواقع، اگر $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$، آن‌وقت $|pb - qa| \neq ۰$ و درنتیجه $|pb - qa| \geq ۱$. بنابراین

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|pb - qa|}{bq} \geq \frac{۱}{bq} = \frac{c'}{q}$$

اکنون اگر از میان عددهای c و c' کوچکترینشان را برابر با $c_۰$ اختیار کنیم، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

قضیهٔ لیوویل را می‌توان با بررسی تفاضل $P(\alpha) - P(\frac{p}{q})$ و استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین لاگرانژ هم ثابت کرد. سعی کنید این اثبات را پیدا کنید!

تقریب عددهای جبری با عددهای گویا

می‌گوییم عدد α از مرتبهٔ m تقریب‌پذیر است، هرگاه به‌ازای عددی ثابت مانند γ، تعدادی متناهی کسر گویا مانند

$\frac{p}{q}$ وجود داشته باشد که در نابرابری

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\gamma}{q^m} \qquad (2)$$

صدق کنند.

بنابر قضیهٔ لیوویل، عددهای جبری درجهٔ n از مرتبهٔ بزرگتر از n تقریب‌پذیر نیستند. درواقع، اگر α از مرتبهٔ m تقریب‌پذیر باشد، آن‌وقت از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که به‌ازای دنباله‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی مانند q نابرابری

$$\frac{c}{q^n} < \frac{\gamma}{q^m}$$

یا

$$\frac{1}{q^{m-n}} > \frac{c}{\gamma}$$

برقرار است. اما، اگر $m > n$، به‌ازای مقدارهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ از q چنین چیزی ممکن نیست.

مثالی از یک عدد متعالی[1]

اکنون برای ساختن عددهای حقیقی‌ای که جبری نیستند (چنین عددهایی را متعالی می‌نامند) ابزاری در اختیار داریم. برای این منظور کافی است عددی بسازیم که از هر مرتبهٔ به دلخواه بزرگ تقریب‌پذیر باشد. چنین عددی را به‌صورت دنبالهٔ اعشاری نامتناهی‌ای مانند $\alpha = 0/a_1a_2a_3\cdots$ این‌طور تعریف می‌کنیم:

$$a_t = \begin{cases} 1 & t = m! \quad (m = 1, 2, \ldots) \\ 0 & t \neq m! \end{cases} \qquad (3)$$

(در اینجا $m!$ حاصل‌ضرب $m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ است که آن را «m فاکتوریل» می‌نامند.)

به‌ویژه

$$a_1 = a_2 = a_6 = a_{24} = a_{120} = a_{720} = \cdots = 1$$

و

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = \cdots = a_{23} = a_{25} = \cdots = a_{119} = a_{121} = \cdots = 0$$

در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m که $m > 1$،

$$\alpha = 0/a_1a_2a_3\cdots a_{(m-1)!} + 0/0\cdots 0a_{m!}a_{m!+1}\cdots = \frac{p_m}{q_m} + \beta_m$$

۱) اگر با مفهوم شمارایی آشنا باشید می‌توانید به‌آسانی ثابت کنید که مجموعهٔ عددهای جبری شماراست. اگر هم بدانید که مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی ناشماراست می‌توانید بی‌درنگ نتیجه بگیرید که عددهای متعالی وجود دارند. با وجود این، این استدلال حتی یک تک مثال عینی از عددهای متعالی به‌دست نمی‌دهد.

که در آن

$$p_m = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{(m-1)!}, \quad q_m = 10^{(m-1)!}, \quad \beta_m = 0/0 \cdots 0 a_{m!} a_{m!+1} \cdots$$

و درنتیجه

$$0 < \beta_m = 10^{-m!} \cdot a_{m!}/a_{m!+1} \cdots = 10^{-m!} \cdot 1/\cdots < 2 \cdot 10^{-m!} = \frac{2}{(q_m)^m}$$

بنابراین

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{2}{(q_m)^m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

یعنی α از هر مرتبه‌ای، هرچه که باشد، تقریب‌پذیر است. پس این عدد جبری نیست.

تمرینها

۴. ثابت کنید اگر در دستور (۳)،

$$a_t = \begin{cases} 1 & t = m^m \quad (m = 1, 2, \ldots) \\ 0 & t \neq m^m \end{cases}$$

آن‌وقت α باز هم متعالی است.

۵. با استفاده از قضیهٔ لیوویل چند عدد متعالی دیگر پیدا کنید.

قضیهٔ دیریشله

در سال ۱۹۵۵ میلادی ریاضی‌دان انگلیسی کلاوس روث ثابت کرد که هیچ عدد جبری گنگی را نمی‌توان از مرتبه‌ای بزرگتر از ۲ تقریب زد.

در همان حال، هر عدد گنگ را می‌توان از مرتبهٔ ۲ تقریب زد. این حکم را پیتر دیریشله، ریاضی‌دان آلمانی، با استفاده از اصلی که اکنون نام وی را بر خود دارد، ثابت کرد. این اصل، ساده و در عین حال بسیار مفید است: اگر n شیء در $n-1$ جعبه توزیع شوند، آن‌وقت دست‌کم یکی از جعبه‌ها شامل ۲ یا چند شیء خواهد بود.

تمرین ۶. با استفاده از قضیهٔ روث چند عدد متعالی بسازید.

قضیهٔ دیریشله (۱۸۲۴). به‌ازای هر عدد حقیقی مانند α و هر عدد طبیعی مانند m، عددی صحیح مانند p و عددی طبیعی مانند q وجود دارد که $q \leq m$ و

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qm} \tag{۴}$$

اثبات. بازهٔ $[\circ, \text{۱})$ اجتماعی از m بازهٔ

$$\left[\circ, \frac{\text{۱}}{m}\right), \left[\frac{\text{۱}}{m}, \frac{\text{۲}}{m}\right), \dots, \left[\frac{m-\text{۲}}{m}, \frac{m-\text{۱}}{m}\right), \left[\frac{m-\text{۱}}{m}, \text{۱}\right) \qquad (\text{۵})$$

است. عددهای $\{k\alpha\}$ $(k = \circ, \text{۱}, \dots, m)$ را در نظر بگیرید (در اینجا $\{x\}$ جزء کسری x است. یادآوری می‌کنیم که بنابر تعریف، $\{x\} = x - [x]$ که در آن $[x]$ جزء صحیح x است، یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از x بزرگتر نیست). هر کدام از این عددها متعلق به یکی از بازه‌های (۵) هستند. اکنون $m + \text{۱}$ عدد و m بازه داریم. پس، بنابر اصل دیریشله، دست‌کم یکی از این بازه‌های (۵) شامل دو یا چند عدد است. فرض کنید این عددها $\{k_\text{۱}\alpha\}$ و $\{k_\text{۲}\alpha\}$ باشند $(k_\text{۱} > k_\text{۲})$. در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{\text{۱}}{m} &> \left|\{k_\text{۱}\alpha\} - \{k_\text{۲}\alpha\}\right| \\ &= \left|k_\text{۱}\alpha - [k_\text{۱}\alpha] - k_\text{۲}\alpha + [k_\text{۲}\alpha]\right| \\ &= \left|(k_\text{۱} - k_\text{۲})\alpha - \left([k_\text{۱}\alpha] - [k_\text{۲}\alpha]\right)\right|\end{aligned}$$

اکنون اگر فرض کنیم $q = k_\text{۱} - k_\text{۲}$ و $p = [k_\text{۱}\alpha] - [k_\text{۲}\alpha]$، با تقسیم دو طرف نابرابری بالا بر q و در نظر داشتن اینکه $\circ \leq k_\text{۲} < k_\text{۱} \leq m$، نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

نتیجه. هر عدد گنگ مانند α را می‌توان به مرتبهٔ ۲ تقریب زد.

اثبات. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m، عددی صحیح مانند p و عددی طبیعی مانند q وجود دارد که $q \leq m$ و نابرابری (۴) برقرار است. چون $q \leq m$ و α عددی گنگ است از نابرابری (۴) به‌دست می‌آوریم که

$$\circ < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\text{۱}}{q^\text{۲}} \qquad (\text{۶})$$

وقتی مقدار m افزایش می‌یابد باز هم از نابرابری (۴) نتیجه می‌شود که مقدار $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ به‌اندازهٔ دلخواه کوچک می‌شود. چون مقدار این عبارت صفر نیست، وقتی مقدار m افزایش می‌یابد کسر $\frac{p}{q}$ به α نزدیک و نزدیکتر می‌شود. از این‌رو، نابرابری (۶) به‌ازای تعدادی نامتناهی از عددهای گویا مانند $\frac{p}{q}$ برقرار است.

عددهای متعالی معروف

اگرچه قضیه‌های لیوویل و روث این امکان را برایمان فراهم می‌کنند که تعدادی نامتناهی عدد متعالی بسازیم، اما برای اینکه بتوانیم متعالی بودن عددهای معروفی مانند π، e، $\ln \text{۲}$ ، $\log \text{۲}$ و غیره را مستقیماً با استفاده از آنها ثابت کنیم دیگر از آنها کاری برنمی‌آید. این عددها قرنها بسیار مورد توجه بوده‌اند.

در میان آنها، به‌ویژه عدد π خیلی معروف است. ریاضیدانان یونان باستان مسألهٔ تربیع دایره را مطرح کردند: به‌ازای هر دایرهٔ مفروض با خط‌کش و پرگار مربعی هم مساحت با آن بسازید. این مسأله را می‌توان به شکل ساده‌تر بیان کرد: پاره‌خطی به طول واحد داده شده است؛ پاره‌خطی به طول π بسازید. به مدت ۲۰۰۰ سال همهٔ تلاشها برای حل این مسألهٔ معروف ناکام ماند. دستِ آخر، ثابت شد که وجود هرگونه راه‌حلی برای این مسأله غیرممکن است و برای اثبات این مطلب کافی است که متعالی بودن عدد π ثابت شود (درحقیقت کافی است ثابت شود که π عددی جبری از نوعی خاص نیست).

گنگ بودن عددهای e و π را ژ. لامبرت در سال ۱۷۶۶ میلادی ثابت کرد. در سال ۱۸۷۳ میلادی ش. ارمیت متعالی بودن e را ثابت کرد. روشی که وی برای این منظور به‌وجود آورد هنوز هم نقشی مهم در نظریهٔ اعداد ایفا می‌کند. در سال ۱۸۸۲ میلادی ف. لیندمان روش ارمیت را تکمیل و ثابت کرد که π متعالی است. وی همچنین ثابت کرد که اگر $\alpha \in A$ $(\alpha \neq 0)$، آن‌وقت عدد e^α متعالی است. از این مطلب نتیجه می‌شود که لگاریتمهای طبیعی همهٔ عددهای جبری مخالفِ ۱ متعالی‌اند (سعی کنید این مطلب را ثابت کنید).

در سال ۱۷۴۸ میلادی اویلر عنوان کرد که اگر $a, b \in \mathbb{Q}$ و $\log_a b$ عددی گنگ باشد، آن‌وقت این عدد متعالی هم هست. بی‌شک روشن است که $\log_a b$ ممکن است عددی گویا باشد، مثلاً $\log_4 8 = \frac{3}{2}$. این حدس در قرنهای هجدهم و نوزدهم ثابت نشد.

در سال ۱۹۰۰ میلادی داوید هیلبرت درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در پاریس بیست و سه مسأله را که فکر می‌کرد باعث رشد و شکوفایی ریاضیات می‌شوند مطرح کرد. هفتمین مسألهٔ هیلبرت این بود: اگر α و β عددهایی جبری باشند، α هیچ‌کدام از عددهای ۰ یا ۱ نباشد و β عددی گنگ باشد، آن‌وقت α^β عددی متعالی است. به‌ویژه هیلبرت پیشنهاد کرد که کسی ثابت کند $2^{\sqrt{2}}$ و e^π عددهایی متعالی‌اند (عدد دومی را می‌توان به شکل α^β درآورد که در آن $\alpha, \beta \in A$؛ ولی برای این کار کمی معلومات از تابعهایی از یک متغیر مختلط لازم است).

تمرین ۷. ثابت کنید که از حکم هیلبرت، فرض اویلر نتیجه می‌شود.

نخستین راه‌حل مسألهٔ هفتم هیلبرت را که البته کامل هم نبود، در سال ۱۹۲۹ میلادی، ا. او. گلفوند، دانشجوی دورهٔ دکترای دانشگاه مسکو، به‌دست آورد. علاوه‌بر کلی مطالب دیگر، وی متعالی بودن e^π را ثابت کرد. یک سال بعد، ر. او. کوزمین، ریاضیدان روسی، ثابت کرد که می‌توان روش گلفوند را با اندکی تغییرات برای اثبات متعالی بودن عددهایی مانند α^β تحت این شرطها به‌کار برد: α عددی جبری باشد، α هیچ‌کدام از عددهای ۰ و ۱ نباشد و $\beta = \sqrt{d}$ که در آن d عددی طبیعی است که مربع کامل نیست. به‌ویژه وی متعالی بودن $2^{\sqrt{2}}$ را ثابت کرد.

راه‌حل کاملی از مسألهٔ هفتم هیلبرت را گلفوند در سال ۱۹۳۴ میلادی با روشی جدید که روش دوم گلفوند نام گرفت، پیدا کرد.

قضیهٔ گلفوند. فرض کنید $\alpha, \beta \in A$؛ α هیچ‌کدام از عددهای ۰ و ۱ نیست و β عددی گنگ است. در این

صورت α^β عددی متعالی است.

تمرین ۸. ثابت کنید اگر عددهای α، β و ρ چنان باشند که عبارت $\frac{\log_\rho \alpha}{\log_\rho \beta}$ تعریف‌شده باشد و $\alpha, \beta \in A$، آن‌وقت عدد $\frac{\log_\rho \alpha}{\log_\rho \beta}$ یا متعالی است یا گویا.

به کمک روش دوم گلفوند می‌توان قضیه‌های بسیار دیگری را ثابت کرد. آ. بیکر در سال ۱۹۶۶ این روش را اصلاح و کامل کرد که به پیشرفتهای چشمگیری در نظریهٔ اعداد انجامید. کار در این زمینه خیلی مانده است تا به پایان برسد.

● ترجمهٔ مهرداد مسافر

N. Feldman, Algebraic and transcendental numbers, *Quantum*, July/August 2000, pp. 22-26.

دو، سه، پنج، هفت، عددهای اول همیناست!

قضیهٔ چبیشف

ویکتور اوفناروفسکی

خیلی هیجان‌انگیز است که نوک دماغتان را نگاه کنید و راه بروید: بی‌هدف قدم می‌زنید که ناگاه با چیزی که اصلاً انتظارش را ندارید، چیزی که در شروع حرکتتان هرگز به ذهنتان هم خطور نکرده است، مواجه می‌شوید. در این مقاله شما را به گردشی از این دست در مسیری که از دل ریاضیات می‌گذرد می‌برم.

از آزمون معروف بخش‌پذیری بر ۹ شروع به حرکت می‌کنیم: عدد n وقتی و فقط وقتی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقمهایش بر ۹ بخش‌پذیر باشند، یا برای اینکه این را باابهت‌تر نشان دهیم: اگر $\sigma(n)$، مجموع رقمهای n، را از n کم کنیم، نتیجه بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

بگذارید در همین ابتدا لختی درنگ کنیم و کمی دربارهٔ نمادگذاری صحبت کنیم. نحوهٔ نمادگذاری، هرچند هم که ناآشنا به‌نظر برسد، خیلی چیزها را مشخص می‌کند. برای همین است که ریاضیدانان در این مورد نسبتاً سنت‌گرا هستند. مثلاً، نماد n برای اغلب ریاضیدانان به این معنی است که داریم دربارهٔ عددهای صحیح، و قریب به یقین دربارهٔ عددهای طبیعی، بحث می‌کنیم. (راستی، در بند قبلی منظورمان از n چه بود؟) نماد σ هم از آسمان نیامده است: از زمانهای قدیم، حرف یونانی کوچک «سیگما» و حرف بزرگ سیگما، یعنی Σ، برای نشان دادن مجموع به‌کار می‌رفته‌اند. مجموع موردنظر ما کوچک است و درنتیجه از حرف کوچک سیگما استفاده کرده‌ایم.

از زاویه‌ای دیگر به نمادگذاری نگاه می‌کنیم. فارسی و عربی را از راست به چپ می‌نویسند، در حالی که زبانهای لاتین را از چپ به راست می‌نویسند. آیا توجه کرده‌اید که در زبانهای لاتین عددها را به سبک فارسی‌زبانها و اعراب از راست به چپ بررسی می‌کنند؟ با این همه، عددها را از چپ به راست می‌نویسیم. اما چگونه آنها را با هم جمع می‌کنیم؟ ابتدا از کدام رقم شروع به جمع کردن می‌کنیم: اولی یا آخری؟ در مورد ضرب چطور؟ از هر طرف که می‌خواهید امتحان کنید! درحقیقت، راحت‌تر است که رقمها را از راست به چپ بنویسیم، اما در این مورد کاری نمی‌توانیم بکنیم، چون که از چپ به راست نوشتن رقمها جزء عادتهای ما درآمده است. برای اینکه از دست این وضعیت خلاص شویم، به‌جای اینکه عددها را به شکل رشته‌ای از رقمها بنویسیم بسط آنها را به توانهای ده می‌نویسیم، مثلاً به‌جای ۲۳۴ می‌نویسیم $۴ + ۳ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰۰$. چنین کاری با عادتهای ما تضادی ندارد، بنابراین n را به شکل $a_۰ + a_۱ \times ۱۰ + a_۲ \times ۱۰^۲ + \cdots + a_k \times ۱۰^k$ می‌نویسیم، که در آن $a_۰$ رقم آخر n است، $a_۱$ رقم یکی مانده به آخر است، ... و a_k رقم اول است و درنتیجه کلاً $k + ۱$ رقم داریم که مجموعشان برابر است با

$$\sigma(n) = a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$$

اکنون اثبات حکمی که می‌خواهیم کاری ندارد:

$$n - \sigma(n) = (a_0 - a_0) + a_1(10 - 1) + a_2(10^2 - 1) + \cdots + a_k(10^k - 1)$$
$$= 0 + 9a_1 + 99a_2 + \cdots + 99\cdots9a_k$$

که البته سمت راست این تساوی بر ۹ بخش‌پذیر است. (راستی در آخرین ضریب چندتا ۹ وجود دارد؟)

اکنون که به آنچه می‌خواستیم رسیدیم، گردشمان را از سر می‌گیریم. چه چیز دیگری را می‌توانیم به‌همین سادگی و بی‌هیچ زحمتی به‌دست بیاوریم؟ می‌توانیم صورت مسأله، راه‌حل آن یا نمادگذاری را تغییر دهیم. به راه‌حل کاری نداریم. آیا می‌توانیم مسألهٔ را تغییر دهیم؟ بله، به‌سادگی می‌توانیم آزمونی برای بخش‌پذیری بر ۱۱ پیدا و آن را ثابت کنیم ـ فقط کافی است مجموع متناوب

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

را در نظر بگیریم. اگر آنچه را گفتیم به‌دقت بررسی کنیم به آزمونی کلی برای بخش‌پذیری می‌رسیم (خودتان این مطلب را ثابت کنید): فرض کنید m عددی طبیعی و p_1، p_2، ... و p_k به‌ترتیب باقیمانده‌های تقسیم ۱۰، 10^2، ... و 10^k بر m باشند. در این صورت عدد

$$n - (a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_kp_k)$$

بر m بخش‌پذیر است.

به‌ازای $m = 9$ به آنچه در بالا ثابت کردیم می‌رسیم. (در مورد ۱۱ چطور؟) به‌ازای $m = 7$ به دنبالهٔ باقیمانده‌های

$$3, 2, 6, 4, 5, 3, 2, \ldots$$

می‌رسیم که متناوب است. بنابراین باقیماندهٔ تقسیم ۱۹۹۴ بر ۷ با باقیماندهٔ تقسیم $4 + 9 \times 3 + 9 \times 1 + 1 \times 6$ یا ۵۵ بر ۷ برابر است، و این هم با باقیماندهٔ تقسیم $3 \times 5 + 5$ یا ۲۰ بر ۷ برابر است، و این هم .... البته در اینجا می‌توانیم کار را متوقف کنیم و بگوییم که این باقیمانده ۶ است. خیلی جالب نبود ....

در مسیری دیگر قدم می‌گذاریم و سعی می‌کنیم نمادگذاری را عوض کنیم. چگونه؟ کسانی که حتی کمی با برنامه‌نویسی آشنا هستند بی‌درنگ پیشنهاد می‌کنند که از دستگاه عددنویسی دیگری استفاده کنیم، مثلاً نمایش دودویی:

$$n = b_0 + b_1 \times 2 + b_2 \times 2^2 + \cdots + b_m \times 2^m$$

که در آن b_iها صفر و یک‌اند. مثلاً،

$$25 = 1 + 0 \times 2 + 0 \times 4 + 1 \times 8 + 1 \times 16$$

همچنین، می‌توانیم مجموع رقمهای نمایش دودویی را حساب کنیم:

$$\sigma_۲(n) = b_۰ + b_۱ + \cdots + b_m$$

(البته، اندیس ۲ اشاره به پایهٔ دستگاه عددنویسی دارد، پس سیگمایی که در بالا از آن استفاده کردیم $\sigma_{۱۰}$ بوده است.) قضیهٔ نظیر قبلی چنین می‌شود: عدد $n - \sigma_۲(n)$ بر ... بخش‌پذیر است .... به‌راستی، بر چی؟ در دستگاه دهدهی تفاضل موردنظر بر ۱ − ۱۰ یا ۹ بخش‌پذیر است، درنتیجه در اینجا باید بر ۱ − ۲ یا ۱ بخش‌پذیر باشد. این مطلب درست است اما خیلی باارزش نیست. در حالت کلی، مربوط به نمایش pای در دستگاه عددنویسی در مبنای p، چه پیش می‌آید؟ فرض کنید

$$n = a_۰ + a_۱ p + a_۲ p^۲ + \cdots + a_k p^k$$

که در آن $a_i < p$، $۰ \leq i \leq k$، و

$$\sigma_p(n) = a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$$

در این صورت به قضیهٔ زیبای زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۱. عدد $n - \sigma_p(n)$ بر $p - ۱$ بخش‌پذیر است.

این قضیه را ثابت می‌کنیم. استدلالمان اساساً همان قبلی است:

$$n - \sigma_p(n) = (a_۰ - a_۰) + a_۱(p - ۱) + a_۲(p^۲ - ۱) + \cdots + a_k(p^k - ۱)$$

سمت راست این تساوی بر $p - ۱$ بخش‌پذیر است، زیرا به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m،

$$p^m - ۱ = (p - ۱)(p^{m-۱} + p^{m-۲} + \cdots + ۱)$$

مثلاً، در مبنای هشت، عدد ۱۲۴ بر ۷ بخش‌پذیر است (زیرا، اگر $n = ۱۲۴$، $n - \sigma_۸(n)$ یا $n - ۷$ بر ۷ − n بخش‌پذیر است). بررسی کنیم؟ توجه کنید که

$$۴ + ۲ \times ۸ + ۱ \times ۶۴ = ۸۴$$

و ۸۴ بر ۷ بخش‌پذیر است. بنابراین آزمونی جدید برای بخش‌پذیری بر ۷ یافته‌ایم. حیف است که از مبنای هشت استفاده نمی‌کنیم.

دیگر به کجا می‌توانیم برویم؟ چه چیز دیگری می‌توان از بخش‌پذیری به‌دست آورد؟ اگر ... تقسیم کنیم چه می‌شود؟ واقعاً سؤال خوبی است: نسبت

$$\delta_n(n) = \frac{n - \sigma_p(n)}{p - ۱}$$

برابر با چیست؟ جالب است ... خوب است که ابتدا حالت $p = ۲$ را بررسی کنیم که ساده‌تر است، دست‌کم دیگر نمی‌خواهد چیزی را تقسیم کنیم. به جدول زیر نگاه کنید.

$n_{۱۰}$	$n_{۲}$	$\sigma_{۲}(n)$	$\delta(n) = n - \sigma_{۲}(n)$
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰
۲	۱۰	۱	۱
۳	۱۱	۲	۱
۴	۱۰۰	۱	۳
۵	۱۰۱	۲	۳
۶	۱۱۰	۲	۴
۷	۱۱۱	۳	۴
۸	۱۰۰۰	۱	۷
۹	۱۰۰۱	۲	۷
۱۰	۱۰۱۰	۲	۸
۱۱	۱۰۱۱	۳	۸
۱۲	۱۱۰۰	۲	۱۰

چه می‌بینید؟ $\delta(n)$ وقتی که n فرد است تغییر نمی‌کند، اما وقتی که n زوج است تغییر می‌کند. چه‌قدر؟ آهان! دقیقاً به‌اندازهٔ تعداد صفرهای آخر نمایش دودویی n و همان‌طور که معلوم است این تعداد برابر با نمای بزرگترین توان دو است که n را می‌شمارد. مثلاً، اگر $n = ۱۲$، بزرگترین توان دو که n را می‌شمارد $۲^{۲}$ است و از ۸ (به‌ازای $n = ۱۱$) دوتا بالا می‌رویم و به ۱۰ (به‌ازای $n = ۱۲$) می‌رسیم. بنابراین می‌توانیم بگوییم که $\delta(n)$ تعداد دوهایی است که کلاً در تجزیهٔ عددهای ۱، ۲، ... و n یا در حاصل‌ضرب $۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$، که آن را n فاکتوریل می‌نامند و با $n!$ نشان می‌دهند، وجود دارند. بنابراین به‌نظر می‌رسد که مطلب زیر درست باشد: $\delta_{۲}(n)$، که برابر است با $n - \delta_{۲}(n)$، نمای بزرگترین توان دو است که $n!$ را می‌شمارد. اثبات این مطلب چگونه است؟

به‌طور طبیعی اثبات به استقرا به ذهن می‌رسد. در مورد مقدارهای کوچک n همه‌چیز از جدول بالا معلوم است. «گام استقرایی» را برمی‌داریم. فرض کنید که می‌دانیم حکم به‌ازای $n - ۱$ درست است؛ یعنی، $(n - ۱) - \sigma_{۲}(n - ۱)$ نمای بزرگترین توان دو است که $(n - ۱)!$ را می‌شمارد. برای اینکه $n!$ را به‌دست بیاوریم باید $(n - ۱)!$ را در n ضرب کنیم. با این کار تعداد دوها در $(n - ۱)!$ را به‌اندازهٔ تعداد دوها در n، یعنی به‌اندازهٔ تعداد صفرهای انتهای نمایش دودویی n، زیاد می‌کنیم. اما تفاضل $(n - ۱) - \sigma_{۲}(n - ۱)$ چه تغییری می‌کند؟ $n - ۱$ یکی زیاد می‌شود. $\sigma_{۲}(n - ۱)$ چه تغییری می‌کند؟

فرض کنید در انتهای نمایش دودویی n، kتا صفر وجود داشته باشد ($k \geq ۰$): $n = \cdots ۱۰۰ \cdots ۰$. در این صورت نمایش دودویی $n - ۱$ به دقیقاً kتا یک ختم می‌شود: $n - ۱ = \cdots ۰۱۱ \cdots ۱$ (ممکن است

که $n - ۱$ فقط از این یک‌ها تشکیل شده باشد). بنابراین تعداد یک‌ها $(k - ۱)$تا کم می‌شود و کل تغییر برابر است با $(-(k-۱)) - ۱$ یا k. استقرا کامل شده است.

بعد چی؟ خوب، جالب است که تحقیق کنیم که آیا این حکم در حالت کلی درست است، یعنی آیا $\delta_p(n)$، که برابر است با $\frac{n - \sigma_p(n)}{p - ۱}$، نمای بزرگترین توان p است که $n!$ را می‌شمارد؟

تمرین ۱ . این حکم را به‌ازای $p = ۳$ ثابت کنید.

افسوس که حالت $p = ۴$ ناامیدکننده است. $۶!$ بر $۴^۲$ بخش‌پذیر است، اما چون نمایش ۶ در مبنای ۴، ۱۲ است،

$$\delta_۴(۶) = \frac{۶ - ۳}{۳} = ۱ \neq ۲$$

دلیلش را همین الآن می‌گویم: p باید اول باشد.

تمرین ۲ . حکم موردنظر را وقتی که p عددی اول است ثابت کنید.

خوشبختانه برای پاسخ گفتن به سؤالهای مربوط به بخش‌پذیری کافی است جواب را در مورد عددهای اول بدانیم. اما با فاکتوریلها چه می‌توانیم بکنیم؟ کجا می‌توانیم از آنچه هم‌اکنون یاد گرفتیم استفاده کنیم؟ اول همه، بی‌شک، در مورد ضریبهای دوجمله‌ای، یعنی $\binom{n}{k}$ یا $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

دستوری که این ضریبها را کاملاً به هم مربوط می‌کند قضیهٔ دوجمله‌ای است:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{۱} x^{n-۱}y + \binom{n}{۲} x^{n-۲}y^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱} xy^{n-۱} + y^n$$

توجه کنید که

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!m!}$$

به کمک آنچه آموختیم، می‌توانیم نمای بزرگترین توان p را که در تجزیهٔ $\binom{m+n}{n}$ وجود دارد حساب کنیم. این نما برابر است با $\delta_p(m+n) - \delta_p(m) - \delta_p(n)$، یا

$$\frac{(m+n) - \sigma_p(m+n) - (m - \sigma_p(m)) - (n - \sigma_p(n))}{p-۱} = \frac{\sigma_p(m) + \sigma_p(n) - \sigma_p(m+n)}{p-۱}$$

زیباست، نه؟ مثلاً اگر $\sigma_p(m+n) = \sigma_p(m) + \sigma_p(n)$، آن‌وقت $\binom{m+n}{n}$ بر p بخش‌پذیر نیست و برعکس. اما چه زمانی این وضعیت پیش می‌آید؟ خوب، دست‌کم وقتی که موقع جمع کردن m و n در مبنای p انتقالی نداشته باشیم. مثلاً، اگر ۲۳ و ۳۲ را در مبنای ۷ جمع کنیم، ۵۵ به‌دست می‌آید و انتقالی نداریم. نتیجه: چون

$$۳ + ۲ \times ۷ = ۱۷, \qquad ۲ + ۳ \times ۷ = ۲۳$$

$\binom{40}{17}$ بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

اگر انتقالی داشته باشیم چی؟ فرض کنید رقمهای iام m و n به‌ترتیب r و s باشند و مجموعشان از p بزرگتر باشد. در این صورت باید ۱ را به رقم قبلی منتقل کنیم و در رقم iام $r+s$ را با $r+s-p$ عوض کنیم. بنابراین، سهم این رقم در $\sigma_p(m)+\sigma_p(n)-\sigma_p(m+n)$ برابر با $p-1$ است. اما این مقدار را بر $p-1$ تقسیم می‌کنیم. فوق‌العاده است! بی‌درنگ می‌توان حدس زد که قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ ۲. اگر p عددی اول باشد، نمای بزرگترین توان p که $\binom{m+n}{n}$ را می‌شمارد برابر است با تعداد انتقالیها به هنگام جمع کردن m و n در مبنای p.

این همان قضیهٔ مهمی است که می‌خواستیم به آن برسیم! از این مطلب نابدیهی چه چیزی می‌توان به‌دست آورد؟ معلوم نیست که ابتدا باید به دنبال چه گشت! برای راحتی کار، ابتدا $\binom{2n}{n}$ را که بزرگترین ضریب میان همهٔ ضریبهایی است که در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^{2n}$ وجود دارند بررسی می‌کنیم. (راستی، می‌توانید ثابت کنید که این ضریب واقعاً بزرگترین است؟) نمای بزرگترین توان p که $\binom{2n}{n}$ را می‌شمارد برابر است با تعداد انتقالیها وقتی که n را با خودش در مبنای p جمع می‌کنیم.

فرض کنید $n<p<2n$. در این صورت n در مبنای p یک رقمی است (رقم n) و $2n$ دو رقمی است، مثلاً $2n=r+1\times p$. بنابراین دقیقاً یک انتقالی داریم و در $\binom{2n}{n}$ یک‌بار p ظاهر می‌شود. (می‌توانید درستی این مطلب ساده را مستقیماً تحقیق کنید.) درنتیجه، حاصل‌ضرب عددهای اول بین n و $2n$ از $\binom{2n}{n}$ بیشتر نیست. آیا می‌توانید نتیجه‌ای جالبتر را تصور کنید؟ $\binom{2n}{n}$ را به‌طور تقریبی برآورد می‌کنیم.

اگر در قضیهٔ دوجمله‌ای فرض کنیم $x=y=1$ به‌دست می‌آید

$$1+\binom{2n}{1}+\binom{2n}{n}+\cdots+\binom{2n}{2n-1}+1=2^{2n}$$

درنتیجه

$$\binom{2n}{n}<4^n$$

مانند آنچه در قبل گفتیم معلوم می‌شود که حاصل‌ضرب عددهای اول میان $\frac{n}{2}$ و n از $4^{\frac{n}{2}}$ کمتر است؛ حاصل‌ضرب عددهای اول میان $\frac{n}{4}$ و $\frac{n}{2}$ از $4^{\frac{n}{4}}$ کمتر است، و همین‌طور تا آخر. به این ترتیب، حاصل‌ضرب عددهای اول میان ۱ و n از

$$4^{\frac{n}{2}}\times4^{\frac{n}{4}}\times4^{\frac{n}{8}}\times\cdots$$

کمتر است. چون

$$4^{\frac{n}{2}}\times4^{\frac{n}{4}}\times4^{\frac{n}{8}}\times\cdots<4^n$$

قضیهٔ زیر را که ابداً بدیهی نیست به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳. حاصل‌ضرب عددهای اول کمتر از n از ۴^n کمتر است.

تمرین ۳. این قضیه را دقیق و کامل ثابت کنید. (در تقسیم بر دو خیلی بی‌دقتی کرده‌ایم و فراموش کرده‌ایم که برخی از عددها ممکن است فرد باشند. شاید دقیقترین شیوهٔ اثبات استفاده از استقرا باشد.)

اکنون فرض کنید $n > p$. در این صورت نمایش n دست‌کم دو رقم از مبنای p دارد. اگر $۲n$ دقیقاً دورقمی باشد، آن‌وقت $۲n < p^۲$ و مطمئناً بیش از یک انتقالی نداریم. به این ترتیب، حکم زیر را ثابت کرده‌ایم.

لم ۱. اگر $p > \sqrt{۲n}$، نمای بزرگترین توان p که $\binom{۲n}{n}$ را می‌شمارد از ۱ بیشتر نیست.

اگر $\binom{۲n}{n}$ بر p بخش‌پذیر نبود چی؟ چون $۲n < p^۲$، می‌توان نوشت

$$n = a_۰ + a_۱ p, \qquad a_۰ < p, \quad a_۱ < \frac{r}{۲}$$

برای اینکه انتقالی نداشته باشیم لازم است که $a_۰ < \frac{p}{۲}$. به‌ویژه اگر $a_۰ = n - p < \frac{p}{۲}$، $\binom{۲n}{n}$ بر p بخش‌پذیر نیست. به این ترتیب، لم زیر را به‌دست آورده‌ایم.

لم ۲. اگر $\frac{۲n}{۳} < p \le n$، آن‌وقت $\binom{۲n}{n}$ بر p بخش‌پذیر نیست $(n > ۲)$.

برای اثبات این حکم کافی است توجه کنید که شرط $n - p < \frac{p}{۲}$ هم‌ارز با $n < \frac{۳p}{۲}$ یا $p > \frac{۲n}{۳}$ است.

اکنون ببینیم که در مورد مقدارهای کوچک p، $p \le \sqrt{۲n}$، چه اتفاقی می‌افتد. در این مورد ممکن است چندین انتقالی داشته باشیم، که اگر

$$۲n = a_۰ + a_۱ p + a_۲ p^۲ + \cdots + a_k p^k$$

تعدادشان از k بیشتر نیست. چون $۲n \ge p^k$، پس $\log_p ۲n \ge k$ و درنتیجه نمای بزرگترین توان p که $\binom{۲n}{n}$ را می‌شمارد از $\log_p ۲n$ بیشتر نیست. یعنی اگر p عددی اول باشد لم زیر درست است.

لم ۳. اگر $N = p^m$ و N مقسوم‌علیه $\binom{۲n}{n}$ باشد، $N \le ۲n$.

درحقیقت،

$$p^m \le p^{\log_p ۲n} = ۲n$$

اکنون کمابیش ساختار $\binom{۲n}{n}$ را می‌شناسیم. تجزیهٔ $\binom{۲n}{n}$ به حاصل‌ضرب توانهای عددهای اول از سه نوع عامل تشکیل شده است:

۱. عددهای اول بزرگتر از n (و البته کوچکتر از $۲n$)، که هر یک در تجزیهٔ موردنظر یک‌بار آمده‌اند.

۲. عددهای اول کوچکتر از $\frac{۲n}{۳}$ و بزرگتر از $\sqrt{۲n}$، که هر یک حداکثر یک‌بار در تجزیهٔ موردنظر آمده‌اند.

۳. عددهای اول کوچکتر از $\sqrt{۲n}$. در این حالت بخش‌پذیری بر توانی از عددی اول با نمای بزرگتر از ۱ ممکن است، اما نمای این توان در کل از $۲n$ بیشتر نیست.

آیا ممکن است که گروه اول حذف شود، یعنی هیچ عدد اولی میان n و $۲n$ نباشد؟ در این صورت همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول باید در گروههای دوم و سوم جای بگیرند. آیا می‌توانیم سهم واقعی آنها را برآورد کنیم؟ بنابر قضیهٔ ۳، حاصل‌ضرب عددهای گروه دوم از $۴^{\frac{۲n}{۳}}$ بیشتر نیست. تعداد عددهای اول در گروه سوم از $\sqrt{۲n} - ۱$ کمتر است، پس سهم آنها از $(۲n)^{\sqrt{۲n}-۱}$ بیشتر نیست. نتیجه اینکه اگر هیچ عدد اولی میان n و $۲n$ وجود نداشته باشد، نابرابری

$$\binom{۲n}{n} < ۴^{\frac{۲n}{۳}}(۲n)^{\sqrt{۲n}-۱} \qquad (۱)$$

درست است.

چه ایده‌ای! اگر ثابت کنیم که این نابرابری درست نیست، اصل معروف برتران را ثابت کرده‌ایم: بین n و $۲n$ دست‌کم یک عدد اول وجود دارد.

$\binom{۲n}{n}$ را تخمین می‌زنیم. چون $\binom{۲n}{n}$ بزرگترین ضریب دوجمله‌ای در $(۱+۱)^{۲n}$ است و چون در کل $۲n+۱$ ضریب داریم و $۴n > ۲n + ۱$، پس مطمئناً

$$\binom{۲n}{n} > \frac{۴^n}{۴n}$$

با توجه به نابرابری (۱) معلوم می‌شود که (به‌ازای nهایی که به‌قدر کافی بزرگ‌اند)

$$\frac{۴^n}{۴n} < ۴^{\frac{۲n}{۳}}(۲n)^{\sqrt{۲n}-۱}$$

$$۴^{\frac{n}{۳}} < ۲(۲n)^{\sqrt{۲n}}$$

$$\frac{n}{۳} < \sqrt{۱۸}\log_۴ ۲n + \frac{۱}{۲}$$

و سرانجام

$$\sqrt{n} < \sqrt{۱۸}\log_۴ ۲n + \frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

اما لگاریتم تابعی است که آهسته رشد می‌کند و درنتیجه دیر یا زود $\sqrt{n}$ از آن پیشی می‌گیرد. چیزی که باید بدانیم این است که کی این اتفاق می‌افتد. ۱۰۰۰ را آزمایش می‌کنیم. معلوم است که $۳۰ < \sqrt{۱۰۰۰}$، اما

$$\log_۴ ۲۰۰۰ < \log_۴ ۴۰۹۶ = \log_۴ ۴^۶ = ۶$$

چون $\frac{۱}{۲} + ۶ \times \sqrt{۱۸} < ۳۰$، نابرابری موردنظر به‌ازای $n = ۱۰۰۰$ و به‌ازای $n > ۱۰۰۰$ درست نیست

(امیدوارم که خودتان بتوانید این مطلب را با استفاده از مشتق ثابت کنید). بنابراین قضیهٔ زیر به‌ازای این مقدارهای n درست است.

قضیهٔ چبیشف (فرض برتران). همواره بین n و $۲n$ دست‌کم یک عدد اول وجود دارد.

این قضیه بسیار زیباست، اما با مقدارهای کوچک n چه بکنیم؟ به‌نظر می‌رسد که نابرابری (۲) به‌ازای این مقدارها درست نباشد. مهم نیست! فرض برتران در مورد آنها هم درست است. می‌توانیم با مراجعه به جدول عددهای اول یا نوشتن یک برنامهٔ کامپیوتری ساده از این بابت مطمئن شویم. شاید اصلاً در تخمین زدن فوق‌العاده دقیق‌اید و بخواهید که نابرابری دقیقتری به‌دست بیاورید. این مورد ارزش امتحان کردن را دارد.

به هر حال، خیلی وقت است که درگشت و گذاریم. فکر نمی‌کنید که وقت آن رسیده باشد که کمی استراحت کنیم. اما اگر می‌خواهید گشت و گذار دیگری را شروع کنید چند مسأله را برایتان مهیا کرده‌ایم.

مسأله‌ها

۱. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد اول مانند p و هر دو عدد طبیعی مانند x و y، $x^p - y^p$ بر p بخش‌پذیر است.

۲. مسألهٔ قبل را به حالتی که چند عدد داریم تعمیم دهید و قضیهٔ «کوچک» فرما را نتیجه بگیرید: $x^p - x$ بر p بخش‌پذیر است (البته p عددی اول است).

۳. ثابت کنید که اگر ضریب دوجمله‌ای $\binom{۲n}{n}$ بر p^m (p اول است) بخش‌پذیر باشد، $p^m \leq n$.

۴. ثابت کنید که اگر $n > ۵$، بین n و $۲n$ دست‌کم دو عدد اول وجود دارد.

۵. فرض کنید p_k، kامین عدد اول باشد. ثابت کنید $p_{k+۲} < ۲p_k$.

۶. ثابت کنید $n!$ ($n > ۱$) توان هیچ عدد صحیحی نیست.

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

Victor Ufnarovsky, Strolling to chebyshev's theorem, *Quantum*, November-December, 1994, pp. 5-8.

بازیهای همگن

سید عباس موسوی

در این مقاله بازیهایی را بررسی می‌کنیم که به بازیهای همگن معروف‌اند. بازی همگن بازی‌ای است که در آن حرکتهای ممکن برای هر دو بازیکن یکسان باشد.

بازی سادهٔ زیر را در نظر بگیرید. ۲۱ سکه روی میز قرار دارند. هر بازیکن در نوبت خودش می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ سکه از روی میز بردارد (و دست‌کم باید یک سکه بردارد). برنده کسی است که آخرین سکه را برمی‌دارد. برای بررسی این بازی نقطهٔ پایانش را در نظر می‌گیریم: اگر ۱، ۲ یا ۳ سکه باقی مانده باشد، بازیکنی که حرکت بعد را انجام می‌دهد (با برداشتن همهٔ سکه‌ها) برنده است؛ اگر ۴ سکه باقی مانده باشد، بازیکنی که حرکت بعدی را انجام می‌دهد مجبور است ۱، ۲ یا ۳ سکه را بردارد و درنتیجه، حریفش با برداشتن بقیهٔ سکه‌ها برنده می‌شود. پس می‌توانیم موقعیتهای مختلف بازی را به دو دسته تقسیم کنیم، یکی موقعیتهایی که در آنها بازیکن بعدی برنده است و دیگری موقعیتهایی که در آنها بازیکن قبلی برنده است. این موقعیتها را به‌ترتیب N و P می‌نامیم. به این ترتیب، موقعیتهایی که تعداد سکه‌های آنها مضرب ۴ نیست N و موقعیتهایی که تعداد سکه‌های آنها مضرب ۴ است P هستند. بنابراین، در بازی با ۲۱ سکه، نفر اول استراتژی برد دارد. به کمک الگوریتم زیر می‌توانیم از این روش برای بررسی تعداد زیادی از بازیها استفاده کنیم.

- موقعیت پایانی را به‌عنوان موقعیت P در نظر بگیرید.
- هر موقعیت را که با یک حرکت به یک موقعیت P می‌رسد به‌عنوان موقعیت N در نظر بگیرید.
- موقعیتهایی را که فقط به موقعیتهای N تبدیل می‌شوند به‌عنوان موقعیت P در نظر بگیرید. این کار را آنقدر ادامه دهید تا موقعیت P جدیدی بیابید.

بنابراین، برای برنده شدن در بازیهای همگن می‌توانیم استراتژی رفتن به یک موقعیت P را برگزینیم، زیرا حریف از هر موقعیت P (براساس الگوریتم بالا) فقط می‌تواند به موقعیت N برود و از آنجا می‌توانیم در حرکت بعدی دوباره به یک موقعیت P برویم. دستِ آخر، بازی در یک موقعیت P به پایان می‌رسد و برنده خواهیم شد.

اکنون بازیهای زیر را به روشی که گفتیم بررسی کنید.

- همان بازی با سکه‌ها را که در بالا آمد، با این تفاوت که به‌جای اینکه ۱، ۲ یا ۳ سکه را برداریم می‌توانیم مثلاً ۱، ۲ یا ۷ سکه برداریم.

- (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹) بازی SOS. صفحهٔ بازی ستونی از n خانه است. هر یک از دو بازیکن در نوبت خودش خانه‌ای را انتخاب می‌کند و در آن یک S یا یک O می‌نویسد. بازیکنی که اولین SOS را در سه خانهٔ متوالی بسازد برنده است. فرض کنید $n = ۴$ و نفر اول در خانهٔ اول S را می‌نویسد. ثابت کنید نفر دوم استراتژی برد دارد. ثابت کنید اگر $n = ۷$، نفر اول و اگر $n = ۲۰۰۰$، نفر دوم استراتژی برد دارد.

مشهورترین بازی همگن بازی نیم است. نیم را به شکل زیر بازی می‌کنند. چند دسته مهره وجود دارند. هر یک از دو بازیکن در نوبت خود یکی از دسته‌ها را انتخاب می‌کند و تعداد دلخواهی از مهره‌های این دسته را برمی‌دارد. برنده بازیکنی است که آخرین مهره را برمی‌دارد. در این بازی فقط یک موقعیت نهایی، یعنی خالی بودن همهٔ دسته‌ها، وجود دارد که طبیعتاً یک موقعیت P است. بنابراین هر موقعیتی شامل فقط یک دستهٔ غیرخالی یک موقعیت N است. هر موقعیتی که در آن دو دستهٔ غیرخالی با تعداد مهره‌های برابر داریم یک موقعیت P است، زیرا بازیکن قبلی می‌تواند با تقلید حرکات بازیکن بعدی در دستهٔ دیگر برنده شود.

برای دسته‌بندی کامل موقعیتهای بازی نیم از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم. پیش از اینکه این قضیه را بیان کنیم چند اصطلاح را معرفی می‌کنیم. جمع نیمی دو عدد x و y را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: نمایش دودویی این دو عدد را به‌صورت ستونی زیر هم می‌نویسیم و زیر هر ستون مجموع رقمها را به‌پیمانهٔ ۲ می‌نویسیم. جمع نیمی x و y را با $x \oplus y$ نشان می‌دهیم. مثلاً،

$$\begin{array}{c} ۲۲ = ۱۰۱۱۰ \\ ۵۵ = ۱۱۰۰۱۱ \\ \hline ۲۲ \oplus ۵۵ = ۱۰۰۱۰۱ = ۳۷ \end{array}$$

قضیه. در بازی نیم، یک موقعیت وقتی و فقط وقتی موقعیت P است که مجموع نیمی تعداد سکه‌های دسته‌ها برابر با صفر باشد.

نکتهٔ جالب این است که تعداد حرکتهای برنده از هر موقعیت N برابر است با تعداد یک‌ها در چپ‌ترین ستونی که تعداد فردی یک دارد و همیشه تعداد حرکتهای برنده عددی فرد است.

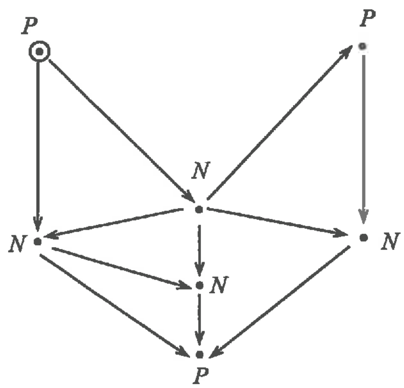
اکنون دو بازی را معرفی می‌کنیم که شباهت زیادی به بازی نیم دارند.

- n سکه در یک ردیف کنار هم چیده شده‌اند و به تصادف شیر یا خط هستند. در هر حرکت می‌توانیم یکی از سکه‌ها را پشت و رو کنیم و اگر بخواهیم می‌توانیم یکی از سکه‌های سمت چپ این سکه را هم پشت و رو کنیم. این بازی چه شباهتی به نیم دارد؟ (راهنمایی: هر شیر در جای iام را به‌عنوان دسته‌ای iتایی در نظر بگیرید.) در موقعیت زیر حرکتی برنده پیدا کنید.

خ ش خ ش ش خ خ خ ش خ خ ش خ

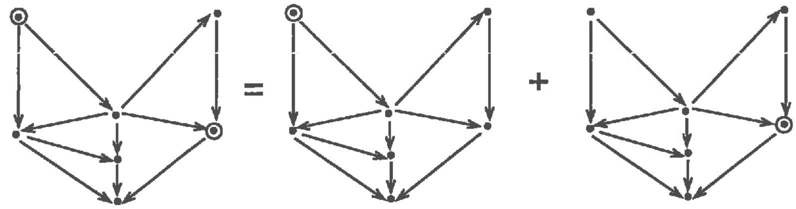
- بازی نورثکات. روی صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ در هر سطر یک مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ سفید قرار دارد. بازیکن سیاه مهره‌های سیاه و بازیکن سفید مهره‌های سفید را حرکت می‌دهد. هر مهره را می‌توان در سطری که روی آن قرار دارد جلو یا عقب برد، به شرط اینکه از روی مهره‌ای نپرد یا جای مهره‌ای دیگر را اشغال نکند. بازنده کسی است که قادر به انجام حرکت غیرتکراری نباشد. البته این بازی همگن نیست، اما آشنایی با نیم کمک بزرگی برای تحلیل این بازی است.

در اینجا می‌خواهیم از روی نامگذاری موقعیتها برای بررسی بازی دیگری استفاده کنیم. این بازی روی گرافی جهتدار که فقط یک رأس بدون خروجی به‌عنوان نقطهٔ پایان دارد انجام می‌شود. یک مهره روی یکی از رأسها قرار داده می‌شود و هر بازیکن در هر حرکت می‌تواند این مهره را از طریق یکی از یالها به یکی از رأسهای همسایه منتقل کند. برنده کسی است که مهره را به نقطهٔ پایان می‌رساند. معلوم است که می‌توانیم با علامتگذاری رأسها که همان موقعیتهای بازی هستند (با N و P) وضعیت بازی را روشن کنیم.



نقطهٔ پایان

اکنون اگر یک مهرهٔ دیگر به بازی اضافه کنیم (دو مهره می‌توانند همزمان روی یک رأس باشند و هر بازیکن می‌تواند هرکدام از مهره‌ها را که خواست حرکت دهد)، تکنیک نامگذاری کمک زیادی به ما نخواهد کرد. اما می‌توانیم این بازی جدید را به‌عنوان ترکیبی از دو بازی یک مهره‌ای در نظر بگیریم، همان‌طور که نیم دو دسته‌ای ترکیبی از دو نیم یک دسته‌ای است.



برای دقیق کردن مفهوم این ترکیب، جمع دو بازی را تعریف می‌کنیم. جمع دو بازی، بازی‌ای است که در آن هر بازیکن در نوبتِ خود یکی از دو بازی را انتخاب می‌کند و یک حرکت مجاز در این بازی انجام می‌دهد. برنده کسی است که آخرین حرکت را انجام می‌دهد.

می‌خواهیم نشان دهیم که همهٔ بازیهای همگن از قواعدی شبیه نیم پیروی می‌کنند، یعنی به کمک جمع نیمی می‌توان تکلیف موقعیتهایی را که از مجموع دو موقعیت در دو بازی به‌دست می‌آیند روشن کرد. برای این کار، به‌جای نسبت دادن N و P به موقعیتها باید از معیار دقیقتری استفاده کنیم.

توجه کنید که چون برای هر بازی همگن می‌توان گرافی در نظر گرفت که در آن رأسها موقعیتهای ممکن بازی و یالها حرکتهای مجاز بازی هستند، پس بحث دربارهٔ این بازی خاص را می‌توان به همهٔ بازیهای از این دست تعمیم داد.

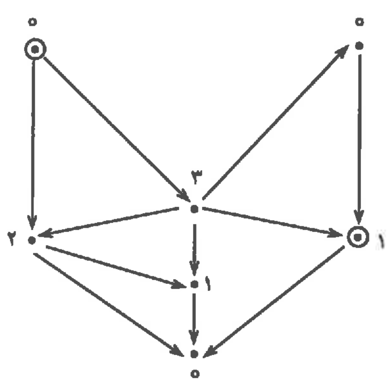
SG هر موقعیت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: SG موقعیتهای پایانی صفر است و SG هر موقعیت دیگر برابر با کمترین عدد نامنفی است که در بین SG موقعیتهایی که این موقعیت با یک حرکت به آنها تبدیل می‌شود موجود نیست.

به سادگی معلوم می‌شود که

- اگر X موقعیتی پایانی باشد، $SG(X) = ۰$.
- اگر $SG(X) = ۰$ و X با یک حرکت به Y تبدیل شود، آن‌وقت $SG(Y) \neq ۰$.
- اگر $SG(X) \neq ۰$، آن‌وقت در بین موقعیتهایی که X با یک حرکت به آنها تبدیل می‌شود دست‌کم یک موقعیت مانند Y وجود دارد که $SG(Y) = ۰$. بنابراین موقعیتهایی که SG آنها صفر است همان موقعیتهای P و موقعیتهایی که SG آنها صفر نیست همان موقعیتهای N هستند.

قضیه. اگر $A + B$ مجموع دو بازی A و B باشد، آنگاه $SG(X, Y)$ در بازی $A + B$، که در آن X موقعیت بازی A و Y موقعیت بازی B است، برابر است با $SG(X) \oplus SG(Y)$.

مثلاً، در مثال قبل،



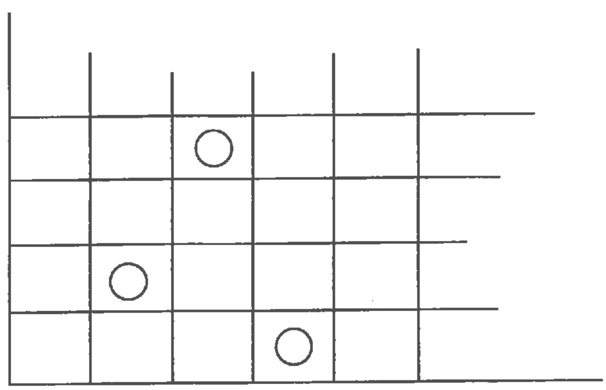
SG موقعیت فعلی این بازی برابر با ۱ $\oplus$ ۰ یا ۱ است. پس این موقعیت یک موقعیت N است.

یکی از نتیجه‌های قضیهٔ قبل این است که هر بازی همگن را که به‌عنوان یکی از عاملهای جمع در جمع بازیها ظاهر می‌شود می‌توان به‌عنوان یک نیم یک دسته‌ای با تعداد مهره‌های مناسب (که برابر با SG موقعیت متناظرش است) در نظر گرفت.

در پایان چند بازی دیگر را معرفی می‌کنیم. به کمک روشهایی که در این مقاله یاد گرفتید این بازیها را تحلیل کنید.

- دوازده بطری در یک ردیف روی زمین قرار گرفته‌اند. دو بولینگ‌باز بازی زیر را انجام می‌دهند. هر کدام در نوبتش یک بطری تکی یا دو بطری کنار هم را با توپ هدف قرار می‌دهد. کسی که آخرین بطری را هدف قرار بدهد برنده است. SG همهٔ موقعیتهای این بازی را بیابید. (راهنمایی: بازی زیر معادل این بازی است: دو دسته مهره داریم و در هر حرکت می‌توانیم یک مهره یا دو مهره از یک دسته برداریم و اگر بخواهیم می‌توانیم این دسته را به دو دستهٔ غیرخالی تقسیم کنیم. کسی که نتواند حرکتی کند بازنده است.)

- نیم دوبعدی: صفحه‌ای به شکل زیر داریم که تعدادی مهره روی آن قرار دارد. در هر حرکت می‌توان یکی از مهره‌ها را به مقدار دلخواه به سمت چپ منتقل کرد یا آن را به خانه‌ای دلخواه در یک سطر پایین منتقل کرد. بازیکنی که آخرین حرکت را می‌کند برنده است. (می‌توان در یک خانه چند مهره گذاشت.)



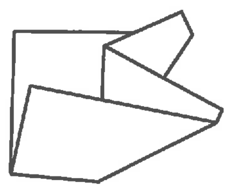
SG خانه‌های این صفحه را پیدا کنید. موقعیت بالا موقعیت N است یا P؟

از باب تفریح

۱. ابتدا رقمهای عدد 2^{1383} و سپس رقمهای عدد 5^{1383} را نوشته‌ایم. روی هم چند رقم نوشته‌ایم؟

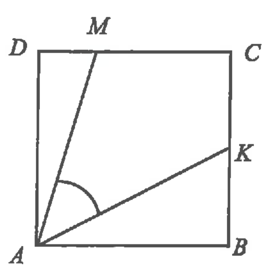
۲. دانش‌آموزی چند عدد طبیعی روی تخته نوشته است که جمله‌های متوالی تصاعدی حسابی‌اند. او سپس ویرگول میان این عددها را پاک کرده است و به این ترتیب عددی هفت‌رقمی به‌دست آمده است. بیشترین مقدار ممکن این عدد چقدر است؟

۳. مانند شکل زیر برگه‌ای کاغذی را تا و بعد آن را صاف کرده‌ایم. اگر این برگه را باز کنیم، معلوم می‌شود که خطهای تا نیمخطهایی هستند که رأسشان مشترک است. می‌دانیم که اندازهٔ دو تا از زاویه‌های مجاور هم که با این نیمخطها تشکیل شده‌اند $45°$ و $130°$ است. اندازهٔ دو زاویهٔ دیگر را حساب کنید.



۴. آیا می‌توان خطی شکسته و شش‌تکه‌ای رسم کرد که از همهٔ رأسهای مکعب بگذرد؟

۵. در شکل زیر $ABCD$ مربع است، $BK = KC$ و $CM = 2DM$. اندازهٔ زاویهٔ MAK را حساب کنید.



(راه‌حل در صفحهٔ ۶۰)

نابرابریهایی برای تابعهای محدب (۲)

ارشک حمیدی

در [۲] تابع محدب را تعریف و نابرابری ینسن برای تابعهای محدب را ثابت کردیم. در [۳] دیدیم که بیشتر نابرابریهای کلاسیک نتیجه‌ای از نابرابری ینسن‌اند. در این مقاله چند نابرابری «ریز و درشت» دیگر برای تابعهای محدب آورده‌ایم.

اولین نابرابری‌ای که ثابت می‌کنیم چندان معروف نیست. فرض کنید f تابعی محدب روی مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد. همچنین، فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n ($n \geq ۲$) عددهایی حقیقی باشند و

$$x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$$

در این صورت

$$x_۱ f(x_۲) + x_۲ f(x_۳) + \cdots + x_n f(x_۱) \geq x_۲ f(x_۱) + x_۳ f(x_۲) + \cdots + x_۱ f(x_n)$$

این نابرابری را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۲$، درستی حکم معلوم است. اگر $n = ۳$، توجه کنید که

$$\begin{aligned} & x_۱ f(x_۲) + x_۲ f(x_۳) + x_۳ f(x_۱) - x_۲ f(x_۱) - x_۳ f(x_۲) - x_۱ f(x_۳) \\ & \quad = (x_۳ - x_۲) f(x_۱) + (x_۲ - x_۱) f(x_۳) - (x_۳ - x_۱) f(x_۲) \\ & \quad = (x_۳ - x_۱) \left(\frac{x_۳ - x_۲}{x_۳ - x_۱} f(x_۱) + \frac{x_۲ - x_۱}{x_۳ - x_۱} f(x_۳) - f(x_۲) \right) \geq ۰ \end{aligned}$$

زیرا از اینکه f محدب است و

$$\frac{x_۳ - x_۲}{x_۳ - x_۱} + \frac{x_۲ - x_۱}{x_۳ - x_۱} = ۱$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} & \frac{x_۳ - x_۲}{x_۳ - x_۱} f(x_۱) + \frac{x_۲ - x_۱}{x_۳ - x_۱} f(x_۳) \\ & \qquad \leq f \left(\frac{x_۳ - x_۲}{x_۳ - x_۱} x_۱ + \frac{x_۲ - x_۱}{x_۳ - x_۱} x_۳ \right) = f(x_۲) \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید حکم به‌ازای مقدارهای کمتر از k درست باشد ($k \geq ۳$). در این صورت از درستی حکم به‌ازای $n = k$ و $n = ۳$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} & x_۱ f(x_۲) + x_۲ f(x_۳) + \cdots + x_k f(x_{k+۱}) + x_{k+۱} f(x_۱) \\ & \quad = (x_۱ f(x_۲) + \cdots + x_k f(x_۱)) + (x_k f(x_{k+۱}) + x_{k+۱} f(x_۱) - x_k f(x_۱)) \end{aligned}$$

$$\geq (x_۲ f(x_۱) + \cdots + x_۱ f(x_k)) + (x_{k+۱} f(x_k) + x_۱ f(x_{k+۱}) - x_۱ f(x_k))$$
$$= x_۲ f(x_۱) + \cdots + x_{k+۱} f(x_k) + x_۱ f(x_{k+۱})$$

یعنی حکم به‌ازای $n = k + ۱$ درست است.

مسألهٔ ۱ . (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۷) فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی حقیقی باشند و

$$a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$$

ثابت کنید

$$a_۱ a_۲^۴ + a_۲ a_۳^۴ + \cdots + a_{n-۱} a_n^۴ + a_n a_۱^۴ \geq a_۲ a_۱^۴ + a_۳ a_۲^۴ + \cdots + a_n a_{n-۱}^۴ + a_۱ a_n^۴$$

راه‌حل. کافی است توجه کنید که تابع $f(x) = x^۴$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی محدب است و از نابرابری‌ای که ثابت کردیم استفاده کنید. ∎

مسألهٔ ۲ . (مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۷) a، b، c و d عددهایی حقیقی و مثبت‌اند و $a \leq b \leq c \leq d$. ثابت کنید

$$a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $a < b < c < d$. اکنون توجه کنید که تابع $f(x) = - \ln x$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت محدب است. درنتیجه، از نابرابری‌ای که ثابت کردیم نتیجه می‌شود

$$-(a \ln b + b \ln c + c \ln d + d \ln a) \geq -(b \ln a + c \ln b + d \ln c + a \ln d)$$

بنابراین

$$-(b^a c^b d^c a^d) \geq -(a^b b^c c^d d^a)$$

پس

$$a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$$

∎

تمرین ۱ . $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند و

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_n$$

ثابت کنید

$$\frac{a_۱}{a_۲} + \frac{a_۲}{a_۱} + \cdots + \frac{a_{n-۱}}{a_n} + \frac{a_n}{a_۱} \leq \frac{a_۲}{a_۱} + \frac{a_۳}{a_۲} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-۱}} + \frac{a_۱}{a_n}$$

نابرابری بعدی هم چندان معروف نیست، اما نتیجه‌ای را در بر دارد که نابرابری معروفی است. فرض کنید تابع f روی مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت محدب باشد و مقدارهایش عددهایی غیرمنفی باشند. در این صورت، اگر x، y و z عددهایی حقیقی و مثبت باشند،

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y)\geq ۰$$

اثبات این نابرابری ساده است و از خواننده می‌خواهیم که خودش این نابرابری را ثابت کند.
اگر فرض کنیم $f(x)=x^r$، که در آن r عددی حقیقی و مثبت است، نابرابری زیر به‌دست می‌آید.

نابرابری شور. فرض کنید x، y، z و r عددهایی حقیقی و مثبت باشند. در این صورت

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y)\geq ۰$$

معروفترین حالت خاص نابرابری شور به‌ازای $r=۱$ به‌دست می‌آید: اگر x، y و z عددهایی مثبت باشند، آن‌وقت

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geq ۰$$

این نابرابری را می‌توان به شکل

$$x^۳+y^۳+z^۳+۳xyz-(x^۲y+x^۲z+y^۲z+y^۲x+z^۲x+z^۲y)\geq ۰ \qquad (۱)$$

نوشت.

در اینجا، برای سهولت کار، دو نماد را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $p(x,y,z)$ چندجمله‌ایی سه‌متغیره باشد. در این صورت، مجموع دوری و مجموع متقارن $p(x,y,z)$ را به‌ترتیب با $\sum\limits_{\text{دوری}} p(x,y,z)$ و $\sum\limits_{\text{متقارن}} p(x,y,z)$ نشان می‌دهیم و این‌طور تعریف می‌کنیم

$$\sum_{\text{دوری}} p(x,y,z)=p(x,y,z)+p(z,x,y)+p(y,z,x)$$

$$\sum_{\text{متقارن}} p(x,y,z)=p(x,y,z)+p(x,z,y)+p(y,x,z)+p(y,z,x)+p(z,x,y)+p(z,y,x)$$

به این ترتیب، مثلاً،

$$\sum_{\text{دوری}} x^۳=x^۳+y^۳+z^۳,\qquad \sum_{\text{دوری}} xyz=۳xyz,\qquad \sum_{\text{متقارن}} x^۳=۲x^۳+۲y^۳+۲z^۳$$

$$\sum_{\text{متقارن}} xyz=۶xyz,\qquad \sum_{\text{متقارن}} x^۲y=x^۲y+x^۲z+y^۲z+y^۲x+z^۲x+z^۲y$$

بنابراین، نابرابری (۱) را می‌توان به شکل

$$\sum_{\text{دوری}} x^{3} + \sum_{\text{دوری}} xyz - \sum_{\text{متقارن}} x^{2}y \geq 0$$

یا به شکل خلاصه‌تر

$$\sum_{\text{متقارن}} (x^{3} + xyz - 2x^{2}y) \geq 0$$

نوشت.

مسألهٔ ۳ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۰) a، b و c عددهایی مثبت‌اند و $abc = 1$. ثابت کنید

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

راه‌حل. چون $abc = 1$، می‌توانیم فرض کنیم

$$a = \frac{x}{y}, \qquad b = \frac{y}{z}, \qquad c = \frac{z}{x}$$

که در آن x، y و z عددهایی مثبت‌اند. در این صورت نابرابری موردنظر را می‌توان به شکل

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \leq 1$$

یا

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz$$

نوشت. این نابرابری هم از نابرابری شور نتیجه می‌شود، زیرا

$$\begin{aligned} &xyz - (x + y - z)(x + z - x)(z + x - y) \\ &= x(x - y)(x - z) + y(y - x)(y - z) + z(z - x)(z - y) \end{aligned}$$

■

تمرین ۲ . (المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۴) x، y و z عددهایی نامنفی‌اند و $x + y + z = 1$. ثابت کنید

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

تمرین ۳ . (المپیاد ریاضی انگلستان، ۱۹۹۹) a، b و c عددهایی نامنفی‌اند و $a + b + c = 1$. ثابت کنید

$$7(ab + bc + ca) \leq 2 + 9abc$$

مسألهٔ ۴. (المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۶) x، y و z عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^{2}}+\frac{1}{(y+z)^{2}}+\frac{1}{(z+x)^{2}}\right)\geq\frac{9}{4}$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)\Big((x+y)^{2}(y+z)^{2}+(y+z)^{2}(z+x)^{2}+(z+x)^{2}(x+y)^{2}\Big)\\ =\sum_{\text{متقارن}}\left(x^{5}y+2x^{4}y^{2}+\frac{5}{2}x^{4}yz+13x^{3}y^{2}z+4x^{2}y^{2}z^{2}\right)\end{aligned}$$

و

$$(x+y)^{2}(y+z)^{2}(z+x)^{2}=\sum_{\text{متقارن}}\left(x^{4}y^{2}+x^{4}yz+x^{3}y^{3}+6x^{3}y^{2}z+\frac{5}{3}x^{2}y^{2}z^{2}\right)$$

با ضرب کردن پرانتزها در هم و دسته‌بندی جمله‌ها معلوم می‌شود که نابرابری موردنظر با نابرابری

$$\sum_{\text{متقارن}}\left(4x^{5}y-x^{4}y^{2}-3x^{3}y^{3}+x^{4}yz-2x^{3}y^{2}z+x^{2}y^{2}z^{2}\right)\geq 0$$

هم‌ارز است. بنابر نابرابری شور،

$$\sum_{\text{متقارن}}\left(x^{3}-2x^{2}y+xyz\right)\geq 0$$

اگر این نابرابری را در xyz ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$\sum_{\text{متقارن}}\left(x^{4}yz-2x^{3}y^{2}z+x^{2}y^{2}z^{2}\right)\geq 0 \tag{۲}$$

از طرف دیگر، اگر دو بار از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کنیم معلوم می‌شود

$$\sum_{\text{متقارن}}\left((x^{5}y-x^{4}y^{2})+3(x^{5}y-x^{3}y^{3})\right)\geq 0 \tag{۳}$$

اکنون از ترکیب کردن نابرابریهای (۲) و (۳) نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید. ■

تمرین ۴. (المپیاد ریاضی ژاپن، ۱۹۹۷) a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{(b+c-a)^{2}}{(b+c)^{2}+a^{2}}+\frac{(c+a-b)^{2}}{(c+a)^{2}+b^{2}}+\frac{(a+b-c)^{2}}{(a+b)^{2}+c^{2}}\geq\frac{3}{5}$$

تمرین ۵. (المپیاد ریاضی امریکا، ۲۰۰۳) a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{(۲a+b+c)^۲}{۲a^۲+(b+c)^۲}+\frac{(۲b+c+a)^۲}{۲b^۲+(c+a)^۲}+\frac{(۲c+a+b)^۲}{۲c^۲+(a+b)^۲}\leq ۸$$

نابرابری پوپوویسیو. فرض کنید تابع f روی بازهٔ I محدب باشد و x، y و z سه عدد از این بازه باشند. در این صورت

$$\frac{۱}{۳}(f(x)+f(y)+f(z))+f\left(\frac{x+y+z}{۳}\right)\geq\frac{۲}{۳}\left(f\left(\frac{x+y}{۲}\right)+f\left(\frac{y+z}{۲}\right)+f\left(\frac{z+x}{۲}\right)\right)$$

برای اثبات این نابرابری، ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $x\leq y\leq z$. درضمن، چون وقتی $x=y=z$ درستی نابرابری معلوم است، می‌توانیم فرض کنیم $x\leq y<z$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $y\leq\frac{x+y+z}{۳}$. در این صورت

$$\frac{x+y+z}{۳}\leq\frac{x+z}{۲}<z,\qquad \frac{x+y+z}{۳}\leq\frac{y+z}{۲}<z$$

بنابراین عددهایی مانند s و t در بازهٔ $(۰,۱)$ وجود دارند که

$$\frac{x+z}{۲}=s\frac{x+y+z}{۲}+(۱-s)z,\qquad \frac{y+z}{۲}=t\frac{x+y+z}{۲}+(۱-t)z$$

اگر این تساویها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود

$$\frac{x+y-۲z}{۲}=(s+t)\frac{x+y-۲z}{۳}$$

اکنون توجه کنید که چون $x\leq y<z$، پس $x+y-۲z\neq ۰$ و درنتیجه $s+t=\frac{۳}{۲}$. از طرف دیگر، چون تابع f محدب است،

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x+z}{۲}\right)&=f\left(s\frac{x+y+z}{۳}+(۱-s)z\right)\\&\leq sf\left(\frac{x+y+z}{۳}\right)+(۱-s)f(z)\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$f\left(\frac{y+z}{۲}\right)\leq tf\left(\frac{x+y+z}{۳}\right)+(۱-t)f(z)$$

همچنین،

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right)\leq\frac{۱}{۲}f(x)+\frac{۱}{۲}f(y)$$

اگر این نابرابریها را جمع کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

حالت ۲. $y > \frac{x+y+z}{3}$. در این صورت

$$x < \frac{x+z}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}, \qquad x < \frac{x+y}{2} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

اکنون می‌توان درستی نابرابری موردنظر را مانند حالت قبل ثابت کرد.

مسألهٔ ۵ . x، y و z عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \geq 2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3)$$

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم x، y و z عددهایی مثبت‌اند. اکنون توجه کنید که تابع $f(x) = e^x$ محدب است و از نابرابری پوپوویسیو در مورد عددهای $6\ln x$، $6\ln x$، $6\ln z$ و $6\ln z$ استفاده کنید. ■

مسألهٔ ۶ . x، y و z عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{3}(x+y+z)(xyz)^{\frac{2}{3}}$$

راه‌حل. توجه کنید که تابع $f(x) = -\ln x$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت محدب است و از نابرابری پوپوویسیو استفاده کنید. ■

تمرین ۶ . x، y و z عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$|x| + |y| + |z| - |x+y| - |y+z| - |z+x| + |x+y+z| \geq 0$$

نابرابری بعدی نابرابری معروفی است و نتیجه‌های مهمی هم دارد. پیش از اینکه این نابرابری را بیان کنیم، اصطلاحی را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ دو دنبالهٔ مرتب از عددهای حقیقی باشند و

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

می‌گوییم $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بر $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ مسلط است، هرگاه

$$x_1 \geq y_1$$

$$x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2$$

$$\vdots$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

اگر $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بر $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ مسلط باشد، می‌نویسیم

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

نابرابری مسلط‌سازی. فرض کنید تابع f روی بازهٔ I محدب باشد و

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

که در اینجا $x_i, y_i \in I$، $1 \leq i \leq n$. در این صورت

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$$

احتمالاً اکنون آنقدر در اثبات این‌گونه نابرابریها به استقرا تجربه پیدا کرده‌اید که بتوانید از پس این یکی هم برآیید. پس خودتان این نابرابری را (البته به هر روشی که می‌خواهید!) ثابت کنید.

توجه کنید که اگر تابع f مقعر باشد، نابرابری مسلط‌سازی به نابرابری

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$$

تبدیل می‌شود.

تمرین ۷ . فرض کنید تابع f روی بازهٔ I محدب باشد و x_1، x_2، ... و x_n عددهایی در بازهٔ I باشند. ثابت کنید

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$$

مسألهٔ ۷ . A، B و C زاویه‌های مثلثی حاده‌اند. ثابت کنید

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

راه‌حل. توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $A \leq B \leq C$. بنابراین $A \leq \frac{\pi}{3}$ و $C \geq \frac{\pi}{3}$. همچنین،

$$C < \frac{\pi}{2}, \qquad \pi > C + B \geq \frac{2\pi}{3}$$

بنابراین

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \succ (C, B, A) \succ \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$$

و چون تابع $f(x)=\cos x$ روی بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ مقعر است، پس از نابرابری مسلط‌سازی نتیجه می‌شود

$$\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0 \geq \cos A+\cos B+\cos C \geq \cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}$$

و درنتیجه

$$1 \leq \cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$$ ∎

مسألهٔ ۸ . x_1، x_2، ... و x_n عددهایی در بازهٔ $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$اند. ثابت کنید

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+\cdots+\cos(2x_n-x_1) \leq \cos x_1+\cdots+\cos x_n$$

راه‌حل. عددهای $2x_1-x_2$، $2x_2-x_3$، ... و $2x_n-x_1$ را به‌طور نزولی مرتب کنید. فرض کنید، مثلاً،

$$2x_{m_1}-x_{m_1+1} \geq 2x_{m_2}-x_{m_2+1} \geq \cdots \geq 2x_{m_n}-x_{m_n+1}$$

(فرض کرده‌ایم $x_{n+1}=x_1$) اکنون عددهای x_1، x_2 و ... و x_n را به‌طور نزولی مرتب کنید و فرض کنید، مثلاً،

$$x_{k_1} \geq x_{k_2} \geq \cdots \geq x_{k_n}$$

توجه کنید که

$$2x_{m_1}-x_{m_1+1} \geq 2x_{k_1}-x_{k_1+1} \geq x_{k_1}$$

همچنین،

$$(2x_{m_1}-x_{m_1+1})+(2x_{m_2}-x_{m_2+1}) \geq (2x_{k_1}-x_{k_1+1})+(2x_{k_2}-x_{k_2+1}) \geq x_{k_1}+x_{k_2}$$

اگر همین نحوهٔ استدلال را تکرار کنیم، چون

$$(2x_{m_1}-x_{m_1+1})+\cdots+(2x_{m_n}-x_{m_n+1}) = x_{k_1}+\cdots+x_{k_n}$$

نتیجه می‌شود که

$$(2x_{m_1}-x_{m_1+1},\ldots,2x_{m_n}-x_{m_n+1}) \succ (x_{k_1},\ldots,x_{k_n})$$

اکنون توجه کنید که تابع $f(x)=\cos x$ روی بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ مقعر است و درنتیجه، نابرابری موردنظر از نابرابری مسلط‌سازی به‌دست می‌آید. ∎

مسألهٔ ۹ . a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

راه‌حل. فرض کنید $x_i = \ln a_i$، $1 \leq i \leq n$. در این صورت نابرابری موردنظر را می‌توان به شکل

$$e^{3x_1-x_2} + e^{3x_2-x_3} + \cdots + e^{3x_n-x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + \cdots + e^{2x_n}$$

نوشت. مانند مسألهٔ قبل می‌توان ثابت کرد که دنباله‌ای که از مرتب کردن نزولی عددهای

$$3x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, \ldots, 3x_n - x_1$$

به‌دست می‌آید بر دنباله‌ای که از مرتب کردن نزولی عددهای

$$2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n$$

به‌دست می‌آید مسلط است. درنتیجه، چون تابع $f(x) = e^x$ روی مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت محدب است، نابرابری موردنظر از نابرابری مسلط‌سازی به‌دست می‌آید.

تمرین ۸. (تورنمنت شهرها، ۱۹۹۴) a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$$

تمرین ۹. a، b، c و d عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

مراجع

۱. ارشک حمیدی، برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۸.

۲. ارشک حمیدی، نابرابریهایی برای تابعهای محدب، نشریهٔ ریاضیات، سال چهارم، شمارهٔ اول، آبان ۱۳۸۲.

۳. ارشک حمیدی، چند نابرابری کلاسیک، نشریهٔ ریاضیات، سال چهارم، شمارهٔ دوم، بهمن ۱۳۸۲.

بیست و پنجمین تورنمنت شهرها

دور پاییزی، ۲۰۰۳

سؤالهای دو سال اول

سطح معمولی

۱. وجه‌های مکعب‌مستطیلی $5 \times 4 \times 3$ را به مربعهایی 1×1 تقسیم کرده‌ایم. آیا می‌توان در این مربعها عددهایی را طوری نوشت که مجموع عددهای هر نواری (به پهنای یکی از مربعها) که دور مکعب‌مستطیل را گرفته است برابر با ۱۲۰ باشد؟

۲. در هفت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ طول قطرهای A_1A_3، A_2A_4، A_3A_5، A_4A_6، A_5A_7، A_6A_1 و A_7A_2 با یکدیگر و طول قطرهای A_1A_4، A_2A_5، A_3A_6، A_4A_7، A_5A_1، A_6A_2 و A_7A_3 نیز با یکدیگر برابر است. آیا این هفت‌ضلعی لزوماً منتظم است؟

۳. n عددی طبیعی است. بزرگترین مقسوم‌علیه فرد هر یک از عددهای $n+1$، ... و $2n$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید مجموع همهٔ این مقسوم‌علیه‌ها برابر با n^2 است.

۴. N نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. هر دو تا از این نقطه‌ها را با یک پاره‌خط به هم وصل می‌کنیم. برخی از این پاره‌خطها را قرمز و بقیه را آبی می‌کنیم. پاره‌خطهای قرمز، خط شکستهٔ بسته‌ای تشکیل داده‌اند که خودش را قطع نمی‌کند (هر پاره‌خط قرمز فقط در دو سرش با پاره‌خطهای مجاورش اشتراک دارد و نقطهٔ مشترک دیگری با بقیهٔ پاره‌خطها ندارد)، پاره‌خطهای آبی هم همین‌طور. همهٔ مقدارهای ممکن N را پیدا کنید که N نقطه در صفحه و راهی برای انتخاب پاره‌خطهای قرمز و آبی با این ویژگیها وجود داشته باشد.

۵. ۲۵ سرباز را روی ۲۵ خانهٔ سمت چپ صفحه‌ای $N \times 1$ قرار داده‌ایم. هر سرباز می‌تواند به خانهٔ خالی سمت راستش برود یا از روی سرباز مجاورش در سمت راستش بپرد و به خانهٔ بعدی‌اش (اگر خالی بود) برود. حرکت به سمت چپ مجاز نیست. کمترین مقدار N را پیدا کنید که بتوان همهٔ سربازها را در ۲۵ خانهٔ پشت سر هم طوری ردیف کرد که ترتیبشان برعکس باشد.

سطح پیشرفته

۱. تصاعدی حسابی و صعودی از یکصد عدد طبیعی تشکیل شده است. آیا ممکن است که هر دو تا از این عددها نسبت به هم اول باشند؟

۲. همهٔ عددهای طبیعی مانند k را طوری پیدا کنید که عددهایی طبیعی مانند m و n وجود داشته باشند که $m(m+k)=n(n+1)$.

۳. در بازی شطرنج، هر فیل همهٔ خانه‌هایی را که روی دو قطری که این فیل روی آن قرار دارد، و خود این خانه، تهدید می‌کند. تعدادی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 15×15 را طوری علامت گذاشته‌ایم که هر فیلی که روی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج بگذاریم دست‌کم دو تا از خانه‌های علامتدار را تهدید می‌کند. کمترین تعداد خانه‌های علامتدار را تعیین کنید.

۴. O نقطه‌ای درون مربع $ABCD$ است. ثابت کنید

$$135^\circ \leq \angle AOB + \angle OBC + \angle OCD + \angle ODA \leq 225^\circ$$

۵. مورچه‌ای روی سطح بیرونی جعبه‌ای مکعب‌مستطیل‌شکل راه می‌رود. فاصلهٔ دو نقطه روی سطح بیرونی جعبه، طول کوتاهترین مسیری است که مورچه باید طی کند تا از یکی از این نقطه‌ها به نقطهٔ دیگر برود. آیا درست است که اگر مورچه در یک رأس جعبه ایستاده باشد، رأس روبه‌روی این رأس نقطه‌ای از سطح بیرونی جعبه است که فاصله‌اش تا جایی که مورچه ایستاده است بیشترین مقدار ممکن است؟

۶. در یک بازی، علی ۱۰۰۰ کارت دارد که با عددهای ۲، ۴، . . . و ۲۰۰۰ شماره خورده‌اند و احمد ۱۰۰۱ کارت دارد که با عددهای ۱، ۳، . . . و ۲۰۰۱ شماره‌خورده‌اند. بازی ۱۰۰۰ دور طول می‌کشد. در دورهایی که شمارهٔ آنها عددی فرد است، علی یکی ازکارتهایش را روی میز می‌اندازد. احمد این کارت را می‌بیند و یکی از کارتهای خودش را روی میز می‌اندازد. بازیکنی که شمارهٔ کارتش بزرگتر است این دور را می‌برد و هر دو کارت را کنار می‌گذارند. در دورهایی که شمارهٔ آنها عددی زوج است، به‌همین ترتیب بازی می‌کنند، منتها احمد ابتدا بازی می‌کند. در پایان بازی، احمد کارتی را که استفاده نکرده است کنار می‌گذارد. بیشترین تعداد دورهایی که هر بازیکن می‌تواند مطمئن باشد که می‌برد، بدون توجه به اینکه حریفش چگونه بازی می‌کند، چقدر است؟

سؤالهای دو سال آخر

سطح معمولی

۱. n عددی طبیعی است. بزرگترین مقسوم‌علیه فرد هر یک از عددهای $n+1$، . . . و $2n$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید مجموع همهٔ این مقسوم‌علیه‌ها برابر با n^2 است.

۲. کمترین تعداد ممکن مربعهای 1×1 که باید بکشیم تا شکل مربعی 25×25 که به ۶۲۵ مربع 1×1 تقسیم شده است کشیده شده باشد چقدر است؟

۳. فروشنده و خریدار روی هم ۱۹۹۹ تومان سکه و اسکناس ۱، ۵، ۱۰، ۵۰، ۱۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ تومانی دارند. خریدار پول کافی برای خرید گربه‌ای که در توبره افتاده است و قیمتش برحسب تومان عددی صحیح است دارد. ثابت کنید خریدار می‌تواند گربه را بخرد و بقیهٔ پولش را هم درست بگیرد.

۴. هر ضلع مربعی 1×1 وتر مثلثی قائم‌الزاویه است که بیرون مربع قرار دارد. فرض کنید A، B، C و D رأسهای قائمهٔ مثلثها و O_1، O_2، O_3 و O_4 مرکز دایره‌های محاطی این مثلثها باشند.

الف) ثابت کنید مساحت چهارضلعی $ABCD$ از ۲ بیشتر نیست.

ب) ثابت کنید مساحت چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ از ۱ بیشتر نیست.

۵. چهاروجهی‌ای کاغذی را در امتداد برخی از یالهایش به‌گونه‌ای بریده‌ایم که می‌توان آن را روی صفحه پهن کرد. آیا ممکن است که نتوان چهاروجهی را یک‌لا روی صفحه پهن کرد؟

سطح پیشرفته

۱. ثابت کنید هر عدد طبیعی را می‌توان به شکل

$$3^{u_1}2^{v_1} + 3^{u_2}2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k}2^{v_k}$$

نوشت که در آن u_iها و v_iها عددهایی صحیح‌اند و

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_k \geq 0, \qquad 0 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_k$$

۲. مورچه‌ای روی سطح بیرونی جعبه‌ای مکعب‌مستطیل‌شکل راه می‌رود. فاصلهٔ دو نقطه روی سطح بیرونی جعبه، طول کوتاهترین مسیری است که مورچه باید طی کند تا از یکی از این نقطه‌ها به نقطهٔ دیگر برود. آیا درست است که اگر مورچه در یک رأس جعبه ایستاده باشد، رأس روبه‌روی این رأس نقطه‌ای از سطح بیرونی جعبه است که فاصله‌اش تا جایی که مورچه ایستاده است بیشترین مقدار ممکن است؟

۳. محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC نقطهٔ H، مرکز دایرهٔ محاطی آن I و مرکز دایرهٔ محیطی‌اش O است. K نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلع BC است. ثابت کنید اگر IO با BC موازی باشد، AO با HK موازی است.

۴. در یک بازی، علی ۱۰۰۰ کارت دارد که با عددهای ۲، ۴، ... و ۲۰۰۰ شماره خورده‌اند و احمد ۱۰۰۱ کارت دارد که با عددهای ۱، ۳، ... و ۲۰۰۱ شماره خورده‌اند. بازی ۱۰۰۰ دور طول می‌کشد. در دورهایی که

شمارهٔ آنها عددی فرد است، علی یکی از کارتهایش را روی میز می‌اندازد. احمد این کارت را می‌بیند و یکی از کارتهای خودش را روی میز می‌اندازد. بازیکنی که شمارهٔ کارتش بزرگتر است این دور را می‌برد و هر دو کارت را کنار می‌گذارند. در دورهایی که شمارهٔ آنها عددی زوج است، به‌همین ترتیب بازی می‌کنند، منتها احمد ابتدا بازی می‌کند. در پایان بازی، احمد کارتی را که استفاده نکرده است کنار می‌گذارد. بیشترین تعداد دورهایی که هر بازیکن می‌تواند مطمئن باشد که می‌برد، بدون توجه به اینکه حریفش چگونه بازی می‌کند، چقدر است؟

۵. فرض کنید O مرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی $ABCD$ باشد که در آن مجموع مساحتهای وجه‌های ABC و ABD برابر است با مجموع مساحتهای وجه‌های CDA و CDB. ثابت کنید وسطهای BC، AD، AC و BD روی صفحه‌ای قرار دارند که از O می‌گذرد.

۶. در هر خانهٔ جدولی $m \times n$ یک علامت «$+$» یا یک علامت «$-$» گذاشته‌ایم. چنین جدولی را تحویلناپذیر می‌نامیم، هرگاه نتوانیم همهٔ علامتهای «$-$» را با انجام عملیاتی مجاز، هرقدر که بخواهیم، به علامت «$+$» تبدیل کنیم.

الف) فرض کنید عملیات مجاز، تغییر علامت همهٔ خانه‌های یک سطر یا یک ستون به علامت مخالف باشد. ثابت کنید که هر جدول تحویلناپذیر شامل جدولی ۲ × ۲ و تحویلناپذیر است.

ب) فرض کنید عملیات مجاز، تغییر علامت همهٔ خانه‌های یک سطر، یک ستون یا یک قطر (از هر طولی، حتی آنهایی که طولشان ۱ است و خانه‌های گوشه‌ای هستند) باشد. ثابت کنید هر جدول تحویلناپذیر شامل جدولی ۴ × ۴ و تحویلناپذیر است.

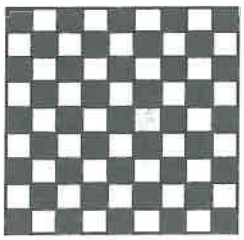
سی و ششمین المپیاد ریاضی کانادا

۳۱ مارس، ۲۰۰۴

۱. همهٔ سه‌تاییهای مرتب از عددهای حقیقی مانند (x, y, z) را طوری پیدا کنید که

$$\begin{cases} xy = z - x - y \\ xz = y - x - z \\ yz = x - y - z \end{cases}$$

۲. به چند طریق می‌توان ۸ رخ را روی صفحهٔ شطرنجی ۹ × ۹ زیر طوری قرار داد که همگی در خانه‌های یکرنگ باشند و هیچ دوتایی از آنها یکدیگر را تهدید نکنند.



۳. فرض کنید A، B، C و D چهار نقطه روی دایره باشند (که به‌ترتیب ساعتگرد قرارگرفته‌اند) و $AB < AD$ و $BC > CD$. فرض کنید نیمساز زاویهٔ BAD دایره را در نقطهٔ X و نیمساز زاویهٔ BCD دایره را در نقطهٔ Y قطع کند. شش‌ضلعی‌ای را که با این نقطه‌های روی دایره تشکیل شده است در نظر بگیرید. اگر طول چهارتا از شش ضلع این شش‌ضلعی برابر باشند، ثابت کنید BD قطر دایره است.

۴. فرض کنید p عددی اول و فرد باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^{2p-1} \equiv \frac{p(p+1)}{2} \quad (\text{به‌پیمانهٔ } p^2)$$

۵. فرض کنید T مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت $۲۰۰۴^{۱۰۰}$ باشد. بیشترین تعداد ممکن عضوهای زیرمجموعه‌ای از T مانند S که هیچ عضوی از S مضرب عضو دیگری از S نباشد چقدر است؟

(راه‌حل در صفحهٔ ۶۱)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌ها

۶۱. همهٔ عددهای حقیقی مانند a، b و c را طوری پیدا کنید که

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \leq ۶ + \min\left\{a^۲ - \frac{۸}{a^۴}, b^۲ - \frac{۸}{b^۴}, c^۲ - \frac{۸}{c^۴}\right\}$$

۶۲. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند $(n \geq ۳)$ و

$$a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_n$$

ثابت کنید

$$\frac{a_n a_۱}{a_۲} + \frac{a_۱ a_۲}{a_۳} + \cdots + \frac{a_{n-۱} a_n}{a_۱} \geq a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

۶۳. a، b و c عددهایی نامنفی‌اند و $a + b + c = ۱$. ثابت کنید

$$۲ \leq (۱ - a^۲)^۲ + (۱ - b^۲)^۲ + (۱ - c^۲)^۲ \leq (۱ + a)(۱ + b)(۱ + c)$$

۶۴. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\left|\left\{\frac{n}{۱}\right\} - \left\{\frac{n}{۲}\right\} + \left\{\frac{n}{۳}\right\} - \cdots - (-۱)^n \left\{\frac{n}{n}\right\}\right| < \sqrt{۲n}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

۶۵. دربارهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ می‌دانیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$P(۲x^۲ - ۱) = \frac{P(x)^۲}{۲} - ۱$$

ثابت کنید این چندجمله‌ای ثابت است.

۶۶. همهٔ تابعهای یک‌به‌یک مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{۲}$$

۶۷. همهٔ تابعها مانند $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر سه عدد صحیح مانند x، y و z،

$$f(x^۳+y^۳+z^۳)=f(x)^۳+f(y)^۳+f(z)^۳$$

۶۸. a، b، c، d و e عددهایی طبیعی‌اند و $a<b<c<d<e$. ثابت کنید

$$\frac{۱}{[a,b]}+\frac{۱}{[b,c]}+\frac{۱}{[c,d]}+\frac{۱}{[d,e]}\leq\frac{۱۵}{۱۶}$$

($[m,n]$ کوچکترین مضرب مشترک m و n است.)

۶۹. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$n!=\prod_{i=۱}^{n}\left[۱,۲,\ldots,\left[\frac{n}{i}\right]\right]$$

($[a_۱,a_۲,\ldots,a_n]$ کوچکترین مضرب مشترک $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n است.)

۷۰. n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰ است. ثابت کنید عددی طبیعی مانند m وجود دارد که می‌توان آن را به شکل مجموع دو مربع کامل نوشت و $۰<m-n<۳\sqrt[۴]{n}$.

۷۱. کدام عددهای طبیعی را می‌توان به شکل $\frac{(a+b+c)^۲}{abc}$ نوشت، که در آن a، b و c عددهایی طبیعی‌اند؟

۷۲. a و b عددهایی حقیقی و متمایزند و عددهای

$$a-b,a^۲-b^۲,a^۳-b^۳,\ldots$$

همگی عددهایی صحیح‌اند. ثابت کنید a و b عددهایی صحیح‌اند.

۷۳. در هر یک از خانه‌های جدولی ۲۰۰۰×۲۰۰۰ یکی از عددهای ۱− و ۱ را نوشته‌ایم. معلوم شده است که مجموع همهٔ عددهای نوشته شده منفی نیست. ثابت کنید ۱۰۰۰ سطر و ۱۰۰۰ ستون وجود دارند که مجموع عددهای خانه‌هایی که در آنها یکدیگر را قطع کرده‌اند از ۱۰۰۰ کمتر نیست.

۷۴. در هر یک از خانه‌های جدولی $n^۲\times n^۲$ عددی طبیعی نوشته‌ایم. تفاضل عددهای هر دو خانهٔ مجاور (که یک ضلع مشترک دارند) از n بیشتر نیست. ثابت کنید دست‌کم در $\left[\frac{n}{۲}\right]+۱$ خانه عددی یکسان را نوشته‌ایم.

۷۵. در هر حرکت می‌توانیم از چهارتایی (a,b,c,d) به یکی از چهارتاییهای

$$(c,d,a,b),(b,a,d,c),(a+nc,b+nd,c,d),(a+nb,b,c+nd,d)$$

برسیم، که در آنها n عددی صحیح و دلخواه است. آیا می‌توان از چهارتایی $(۱,۲,۳,۴)$ به چهارتایی $(۳,۴,۵,۷)$ رسید؟

۷۶. بزرگترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان هر n عدد متمایز از بازهٔ $[۱, ۱۰۰۰]$ بتوان دو عدد مانند a و b پیدا کرد که

$$۰ < a - b < ۱ + ۳\sqrt[۳]{ab}$$

۷۷. مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ را با شش دایرهٔ برابر به شعاع r پوشانده‌ایم. ثابت کنید $r \geq \frac{\sqrt{۳}}{۱۰}$.

۷۸. دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب به مرکزهای $O_۱$ و $O_۲$ یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. نیمخط $O_۱B$ دایرهٔ $C_۲$ را در نقطهٔ F و نیمخط $O_۲B$ دایرهٔ $C_۱$ را در نقطهٔ E قطع کرده است. از B خطی موازی EF رسم کرده‌ایم که $C_۱$ و $C_۲$ را به‌ترتیب در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید $MN = AE + AF$.

۷۹. $ABCD$ چهارضلعی‌ای محدب است و M و N به‌ترتیب وسط AD و BC هستند. همچنین، A، B، M و N روی یک دایره قرار دارند و AB بر دایرهٔ محیطی مثلث BMC مماس است. ثابت کنید AB بر دایرهٔ محیطی مثلث AND هم مماس است.

۸۰. $ABCD$ چهارضلعی‌ای محدب و N وسط BC است. درضمن، $\angle AND = ۱۳۵^\circ$. ثابت کنید

$$AB + CD + \frac{۱}{\sqrt{۲}}BC > AD$$

راه‌حلها

۴۱. ثابت کنید دست‌کم ۹۹٪ عددهای

$$۱۰^۱ + ۱, ۱۰^۲ + ۱, \dots, ۱۰^{۲۰۰۰} + ۱$$

مرکب‌اند.

راه‌حل. فرض کنید عدد طبیعی n توانی از ۲ نباشد. در این صورت n مقسوم‌علیه فردی مانند s دارد که از ۱ بزرگتر است. درنتیجه، $۱۰^n + ۱$ مرکب است، زیرا $۱ < ۱۰^{\frac{n}{s}} + ۱ < ۱۰^n + ۱$ و

$$۱۰^n + ۱ = (۱۰^{\frac{n}{s}} + ۱)(۱۰^{s-۱} - ۱۰^{s-۲} + \dots - ۱۰ + ۱)$$

در میان عددهای ۱، ۲، ... و ۲۰۰۰ فقط ۱۱ توان ۲ وجود دارد. بنابراین، اگر n یکی از ۱۹۸۹ عدد دیگر باشد، $۱۰^n + ۱$ مرکب است. چون $۲۰۰۰ \times \frac{۹۹}{۱۰۰} = ۱۹۸۰ < ۱۹۸۹$، دست‌کم ۹۹٪ عددهای موردنظر مرکب‌اند

۴۲. a، b، c و d عددهایی حقیقی‌اند و اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد، $an^۳ + bn^۲ + cn + d$ عددی صحیح است. ثابت کنید $۶a$، $۶b$، $۶c$ و $۶d$ عددهایی صحیح‌اند.

راه‌حل. فرض کنید $f_۱(n) = an + b$ و اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد، $f_۱(n)$ عددی

صحیح باشد. در این صورت، چون

$$f_۱(n+۱) - f_۱(n) = a$$

پس a عددی صحیح است. بنابراین b هم عددی صحیح است.

اکنون فرض کنید $f_۲(n) = an^۲ + bn + c$ و اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد، $f_۲(n)$ عددی صحیح باشد. در این صورت، چون

$$f_۲(n+۱) - f_۲(n) = ۲an + (a+b)$$

بنابر آنچه قبلاً ثابت کردیم، $۲a$ و $a+b$ عددهایی صحیح‌اند.

اکنون فرض کنید $f_۳(n) = an^۳ + bn^۲ + cn + d$. در این صورت، چون به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ مانند n، $f_۳(n)$ عددی صحیح است و

$$f_۳(n+۱) - f_۳(n) = ۳an^۲ + (۳a+۲b)n + (a+b+c)$$

بنابر آنچه قبلاً ثابت کردیم، $۶a$ و $(۳a+۲b)$ + $۳a$ عددهایی صحیح‌اند. بنابراین $۲b$ هم عددی صحیح است. اکنون $۶f_۳(n)$ را در نظر بگیرید. چون دو جملهٔ اول $۶f_۳(n)$ به‌ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ مانند n عددهایی صحیح‌اند، پس به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰۰۰ مانند n، $۶cn + ۶d$ عددی صحیح است. درنتیجه، بنابر آنچه در ابتدای راه‌حل ثابت کردیم، $۶c$ و $۶d$ عددهایی صحیح‌اند.

۴۳. آیا عددهایی گویا و مثبت مانند a و b وجود دارند که $a + b + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

راه‌حل. خیر، وجود ندارند. فرض کنید عددهای گویا و مثبت a و b ویژگیهای موردنظر را داشته باشند و $a = \frac{p}{q}$ و $b = \frac{r}{s}$، که در آنها p، q، r و s عددهایی طبیعی‌اند و $(p,q) = ۱$ و $(r,s) = ۱$. در این صورت عددی طبیعی مانند n وجود دارد که

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \frac{q}{p} + \frac{s}{r} = ۳n$$

پس

$$(p^۲ + q^۲)rs + (r^۲ + s^۲)pq = ۳npqrs \qquad (*)$$

درنتیجه $rs \mid (r^۲ + s^۲)pq$. چون $(r,s) = ۱$، پس $(rs, r^۲ + s^۲) = ۱$ و درنتیجه $rs \mid pq$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $pq \mid rs$ و درنتیجه $rs = pq$. بنابراین، یا هیچ‌یک از عددهای p، q، r و s بر ۳ بخش‌پذیر نیست، یا دقیقاً دوتا از آنها بر ۳ بخش‌پذیرند. از طرف دیگر، تساوی $(*)$ را می‌توان به شکل

$$p^۲ + q^۲ + r^۲ + s^۲ = ۳npq$$

نوشت. بنابراین $p^۲+q^۲+r^۲+s^۲$ بر ۳ بخش‌پذیر است. اما به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که باقیماندهٔ تقسیم $p^۲+q^۲+r^۲+s^۲$ بر ۳ یا ۱ است یا ۲. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و عددهایی با ویژگیهای موردنظر وجود ندارند.

۴۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که

$$\lfloor\sqrt[۴]{۱}\rfloor+\lfloor\sqrt[۴]{۲}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt[۴]{n}\rfloor=۲n$$

راه‌حل. می‌خواهیم همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنیم که میانگین عددهای

$$\lfloor\sqrt[۴]{۱}\rfloor,\lfloor\sqrt[۴]{۲}\rfloor,\dots,\lfloor\sqrt[۴]{n}\rfloor$$

برابر با ۲ باشد. توجه کنید که

$$\lfloor\sqrt[۴]{k}\rfloor=۱,\quad ۱\le k\le ۱۵$$
$$\lfloor\sqrt[۴]{k}\rfloor=۲,\quad ۱۶\le k\le ۸۰$$
$$\lfloor\sqrt[۴]{k}\rfloor=۳,\quad ۸۱\le k\le ۲۵۵$$

بنابراین کافی است از عددهایی که برابر با ۳ هستند ۱۵ عدد انتخاب کنیم تا میانگین عددهای موردنظر برابر با ۲ شود. بنابراین، اگر $n=۹۵$، عدد n ویژگی موردنظر را دارد. به‌سادگی معلوم می‌شود که اگر $n<۹۵$، میانگین عددهای موردنظر از ۲ کمتر است و اگر $n>۹۵$، میانگین عددهای موردنظر از ۲ بیشتر است.

۴۵. همهٔ عددهای صحیح و متمایز مانند m و n را طوری پیدا کنید که

$$m^۴-۳m^۳+۵m^۲-۹m=n^۴-۳n^۳+۵n^۲-۹n$$

راه‌حل. فرض کنید $p(x)=x^۴-۳x^۳+۵x^۲-۹x$. در این صورت

$$p(x)=(x-۱)(x-۲)(x^۲+۳)-۶$$

بنابراین، اگر $n>۲$،

$$\begin{aligned}p(n)+۶&=(n-۱)(n-۲)(n^۲+۳)\\&=(n^۲-۳n+۲)(n^۲+۳)\\&<(n^۲-۲n+۴)(n^۲+n)\\&=n(n+۱)\big((n-۱)^۲+۳\big)\\&=p(-n+۱)+۶\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $n > ۲$،

$$p(-n+۱)+۶ < (n^۲-n)(n^۲+۲n+۴) = n(n-۱)\big((n+۱)^۲+۳\big)$$
$$= p(n+۱)+۶$$

درنتیجه،

$$p(۳) < p(-۲) < p(۴) < p(-۳) < p(۵) < p(-۴) < p(۶) < \cdots$$

پس مقدارهای $p(n)$ به‌ازای -۲، ±۳، ±۴، ... با هم فرق می‌کنند. چون

$$p(-۱) = ۱۸, \quad p(۰) = ۰, \quad p(۱) = -۶, \quad p(۲) = -۶, \quad p(۳) = ۱۸$$

پس تنها جوابها عبارت‌اند از

$$(m,n) = (-۱,۳), (۳,-۱), (۱,۲), (۲,۱)$$

۴۶. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که بتوان مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند A و B طوری افراز کرد که

$$\{ma:\ a \in A\} = \{nb:\ b \in B\}$$

راه‌حل. فرض کنید عددهای طبیعی m و n ویژگی موردنظر را داشته باشند. چون A و B اشتراکی ندارند، پس m و n متمایزند. فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n برابر با d باشد و

$$m = dm_۱, \quad n = dn_۱$$

در این صورت $m_۱$ و $n_۱$ نسبت به هم اول‌اند و

$$\{m_۱a : a \in A\} = \{n_۱b : b \in B\}$$

بنابراین عددهای $m_۱$ و $n_۱$ هم ویژگی موردنظر را دارند؛ بنابراین کافی است جوابهایی را پیدا کنیم که نسبت به هم اول‌اند.

اگر $۱ \in A$، آن‌وقت

$$m \in \{ma : a \in A\} = \{nb : b \in B\}$$

پس m مضرب n است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $۱ \in B$، آن‌وقت n مضرب m است. درنتیجه، چون m و n نسبت به هم اول‌اند، پس یکی از آنها برابر با ۱ است. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq ۲$، عددهای ۱ و n ویژگی موردنظر را دارند. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k فرض کنید $f(k)$ بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد که $n^{f(k)} \mid k$. در این صورت، اگر

$$A = \{k:\ f(k) \text{ فرد است}\}, \quad B = \{k:\ f(k) \text{ زوج است}\}$$

آن‌وقت A و B مجموعهٔ عددهای طبیعی را افراز می‌کنند و

$$A = \{nb:\ b \in B\}$$

۴۷. آیا می‌توان هر یک از عددهای صحیح را با یکی از رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد طوری رنگ کرد که اگر عددهای صحیح a، b، c و d همرنگ باشند و دست‌کم یکی از آنها غیرصفر باشد، آن‌وقت $۳a - ۲b \neq ۲c - ۳d$؟

راه‌حل. بله، می‌توان. به‌ازای هر عدد صحیح مانند k فرض کنید $k = ۵^m k^*$، که در آن m عددی صحیح و نامنفی است و $۵ \nmid k^*$. دو عدد صحیح مانند $k_۱$ و $k_۲$ را وقتی و فقط وقتی به یک رنگ می‌کنیم که

$$k_۱^* \equiv k_۲^* \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

فرض کنید $۳a - ۲b = ۲c - ۳d$، یعنی $۳a - ۲b - ۲c + ۳d = ۰$. اگر دو طرف این تساوی را بر بزرگترین توانی از ۵ که a، b، c و d را می‌شمارد تقسیم کنیم، می‌توانیم این تساوی را به شکل

$$۳ \times ۵^A a^* - ۲ \times ۵^B b^* - ۲ \times ۵^C c^* + ۳ \times ۵^D d^* = ۰$$

بنویسیم، که در آن A، B، C و D عددهایی صحیح و نامنفی‌اند و دست‌کم یکی از آنها صفر است. بنابراین

$$۳(۵^A a^* + ۵^B b^* + ۵^C c^* + ۵^D d^*) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

اگر a، b، c و d همگی به یک رنگ باشند، آن‌وقت

$$a^* \equiv b^* \equiv c^* \equiv d^* \not\equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

بنابراین

$$۵^A + ۵^B + ۵^C + ۵^D \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

که درست نیست، زیرا دست‌کم یکی از عددهای A، B، C و D صفر است.

۴۸. در یک باشگاه شطرنج هرکس یا با یکی دیگر از اعضای باشگاه بازی می‌کند یا با کامپیوتر. جمعهٔ گذشته n نفر به باشگاه آمده‌اند. هیچ‌یک از آنها بیش از nبار بازی نکرده است و هر دو نفر از آنها که با هم بازی نکرده‌اند، روی‌هم بیش از nبار بازی نکرده‌اند. ثابت کنید در این روز اعضا روی‌هم بیش از $\frac{n(n+۱)}{۲}$بار بازی نکرده‌اند.

راه‌حل. حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۱$، معلوم است که حکم درست است. فرض کنید حکم در مورد $n - ۱$ عضو درست باشد و حالتی را در نظر بگیرید که n عضو داریم. فرض کنید A بازیکنی باشد که تعداد بازیهایش بیشترین مقدار ممکن است. اگر A حداکثر $\frac{n+۱}{۲}$بار بازی کرده باشد، بقیهٔ اعضا هم حداکثر $\frac{n+۱}{۲}$بار بازی کرده‌اند و تعداد بازیهای انجام شده حداکثر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

فرض کنید A بیش از $\frac{n+1}{2}$ بار بازی کرده است. هر بازی را که A در آن شرکت نکرده است بد می‌نامیم. کافی است ثابت کنیم که تعداد بازیهای بد حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ است. اگر ثابت کنیم با کنار گذاشتن A بقیهٔ اعضا شرطهای مسأله را دارند، مطلب موردنظر از فرض استقرا نتیجه می‌شود. اگر B با A بازی کرده باشد، آن‌وقت B حداکثر در $n-1$ بازی بد شرکت کرده است و اگر B با A بازی نکرده باشد، آن‌وقت تعداد بازیهای B از $n-\frac{n+1}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ کمتر است. فرض کنید B و C با A بازی نکرده‌اند. اگر هیچ‌یک از آنها با A بازی نکرده باشد، تعداد بازیهایشان روی‌هم از $\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}$ یا $n-1$ کمتر است. اگر دست‌کم یکی از آنها با A بازی کرده باشد، روی‌هم در حداکثر $n-1$ بازی بد شرکت کرده‌اند.

۴۹. ۱۰۰ گلوله داریم که مجموع وزنهایشان برابر با $2S$ است. عدد طبیعی k را مناسب می‌نامیم، هرگاه بتوان kتا از این گلوله‌ها را طوری انتخاب کرد که مجموع وزنهایشان برابر با S باشد. حداکثر چند عدد مناسب ممکن است وجود داشته باشد؟

راه‌حل. توجه کنید که ۱۰۰ عددی مناسب نیست؛ همچنین، اگر k عددی مناسب باشد، $100-k$ هم مناسب است و اگر ۱ عددی مناسب باشد تنها عدد مناسب دیگر ۹۹ است. بنابراین حداکثر ۹۷ عدد مناسب وجود دارد.

مثالی از مجموعه‌ای می‌آوریم که ۹۷ عدد مناسب دارد. فرض کنید

$$a_1=a_2=1,\qquad a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\qquad 3\le n\le 99$$

و

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_{98},\qquad a_{100}=S-a_{99}$$

در این صورت

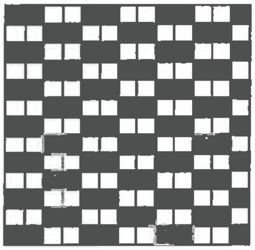
$$\begin{aligned}S&=a_{100}+a_{99}\\&=a_{100}+a_{98}+a_{97}\\&\ \vdots\\&=a_{100}+a_{98}+a_{96}+\cdots+a_4+a_3+a_2\end{aligned}$$

بنابراین ۲، ۳، ... و ۵۱ و درنتیجه a_{98}، a_{99}، ... و a_{52} عددهایی مناسب‌اند.

۵۰. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنجی 13×13 را با ۴۲ کاشی 4×1 طوری پوشاند که فقط خانهٔ وسط صفحهٔ شطرنج پوشانده نشود؟

راه‌حل. خیر، نمی‌توان.

راه‌حل اول. خانه‌های صفحه را مانند شکل زیر با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کنید.



توجه کنید که تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیشتر است. هرکاشی ۴ × ۱ هم دو خانهٔ سیاه و دو خانهٔ سفید را می‌پوشاند. بنابراین، اگر صفحه را با ۴۲ کاشی ۴ × ۱ فرش کنیم، خانه‌ای که باقی می‌ماند باید سیاه باشد. اما خانهٔ وسط صفحه سفید است و درنتیجه نمی‌توان صفحه را به شکل موردنظر پوشاند.

راه‌حل دوم. خانه‌های ستون اول را با سبز، خانه‌های ستون دوم را با آبی، خانه‌های ستون سوم را با سفید، خانه‌های ستون چهارم را با سیاه، خانه‌های ستون پنجم را با سبز، خانه‌های ستون ششم را با آبی، . . . و خانه‌های ستون سیزدهم را با سبز رنگ کنید و فقط خانهٔ وسط صفحه را رنگ نکنید.

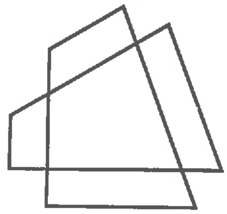
درکل ۱۳ × ۳ یا ۳۹ خانهٔ سیاه و ۱ − ۱۳ × ۳ یا ۳۸ خانهٔ سفید وجود دارد. اگر بتوانیم صفحه را به شکل موردنظر بپوشانیم، چون هرکاشی ۴ × ۱ یا چهار خانهٔ یکرنگ را می‌پوشاند یا چهار خانه به رنگهای مختلف، تفاضل تعداد خانه‌های سیاه و تعداد خانه‌های سفید بر ۴ بخش‌پذیر است. اما این تفاضل برابر با ۱ است و درنتیجه به تناقض رسیده‌ایم.

۵۱. n عددی طبیعی است. دو نفر به طریق زیر بازی می‌کنند. نفر اول چند عدد طبیعی که از ۲۵ بزرگتر نیستند و مجموعشان دست‌کم ۲۰۰ است می‌نویسد (لزومی ندارد عددها متمایز باشند). اگر نفر دوم بتواند تعدادی از این عددها را طوری انتخاب کند که مجموعشان از n − ۲۰۰ کمتر و از n + ۲۰۰ بیشتر نباشد می‌برد. کوچکترین عدد طبیعی مانند n که به‌ازای آن نفر دوم استراتژی برد دارد چیست؟

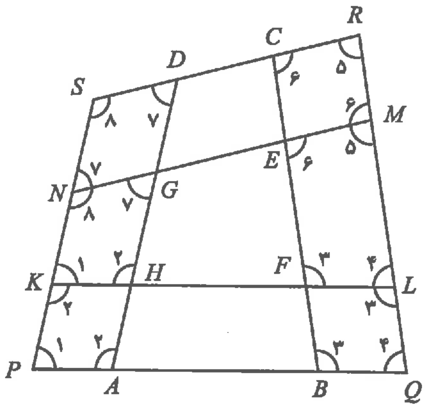
راه‌حل. ثابت می‌کنیم کوچکترین عدد موردنظر ۱۱ است. اگر ۱۱ = n، بازیکن دوم می‌تواند ابتدا کوچکترین عدد را حذف کند و این کار را آنقدر ادامه دهد تا اینکه مجموع عددهای باقی‌مانده از ۲۱۲ کمتر شود. اگر آخرین عددی که حذف می‌شود ۲۴ یا ۲۵ نباشد، مجموع عددهای باقی‌مانده دست‌کم ۲۳ − ۲۱۲ یا ۱۸۹ است. اگر آخرین عددی که حذف می‌شود ۲۴ یا ۲۵ باشد، هر یک از عددهایی که باقی مانده است یا ۲۴ است یا ۲۵ و باید دقیقاً ۸ عدد باقی مانده باشد، زیرا مجموعشان باید از ۲۱۲ کمتر باشد و از ۲۴ − ۲۱۲ یا ۱۸۸ کمتر نباشد. بنابراین مجموع این عددها از ۸ × ۲۴ یا ۱۹۲ کمتر نیست و از ۸ × ۲۵ یا ۲۰۰ هم بیشتر نیست. در هر حالت بازیکن دوم استراتژی برد دارد.

از طرف دیگر، اگر $n \geq$ ۱۰، بازیکن اول می‌تواند دوتا ۲۵ و هفت‌تا ۲۳ بنویسد. در این صورت مجموع عددها ۲۱۱ است و اگر یکی از این عددها را حذف کنیم، مجموع عددهای باقی‌مانده حداکثر ۱۸۸ است، پس بازیکن دوم استراتژی برد ندارد.

۵۲. در شکل زیر ضلعهای متناظر چهارضلعیها با هم موازی‌اند و فاصلهٔ آنها از هم برابر با ۱ است. ثابت کنید محیط چهارضلعیها برابر است.

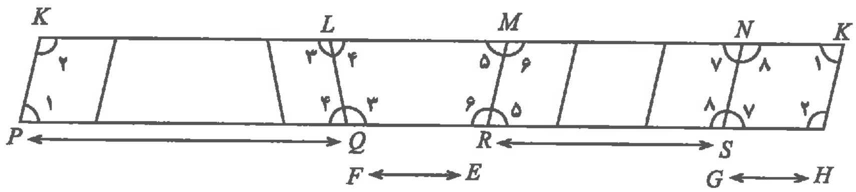


راه‌حل. چهارضلعیها را $ABCD$ و $KLMN$ بنامید (شکل زیر را ببینید).



توجه کنید که شکل زیر متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه محیط $KLMN$ برابر است با

$$PQ + EF + RS + GH$$



اکنون توجه کنید که $PAHK$ و $BQLF$ لوزی‌اند. پس

$$PQ = PA + AB + BQ = HA + AB + BF$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

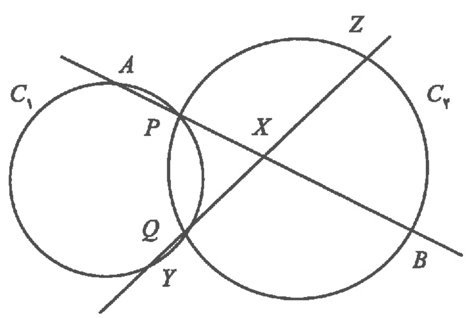
$$RS = RC + CD + DS = EC + CD + DG$$

اگر از این تساویها استفاده کنیم معلوم می‌شود که $PQ + EF + RS + GH$ برابر با محیط $ABCD$ است. بنابراین محیط $KLMN$ و $ABCD$ برابر است.

۵۳. دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ در نقطه‌های P و Q متقاطع‌اند. خطی راست از P گذشته است و دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را به‌ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کرده است و نقطهٔ X وسط AB است. خط راستی که از نقطه‌های Q و X می‌گذرد، دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را برای بار دوم به‌ترتیب در نقطه‌های Y و Z قطع کرده است. ثابت کنید X وسط YZ است.

راه‌حل. برحسب اینکه شعاع دایره‌ها چقدر باشد، یا فاصلهٔ میان مرکزهایشان چقدر باشد، یا وضعیت خط راستی که از P گذشته است چگونه باشد، چند حالت برای قرارگرفتن نقطه‌های A، B، P و Y، Z، Q وجود دارد. ثابت می‌کنیم که در هر حالت، مثلثهای AXY و BXZ همنهشت‌اند و درنتیجه $YX = XZ$.

حالت ۱. نقطهٔ P روی پاره‌خط AB و نقطهٔ Q روی پاره‌خط YZ قرار دارد (شکل زیر را ببینید).

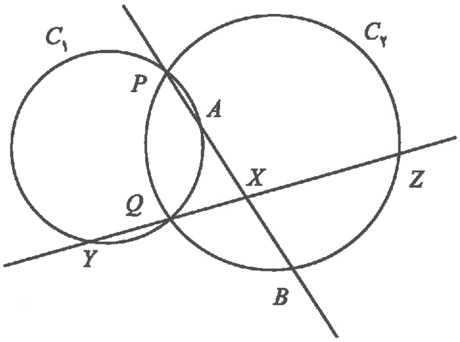


در این صورت

$$\angle AYX = \angle AYQ = ۱۸۰^\circ - \angle APQ = \angle BPQ = \angle BZQ = \angle BZX$$

همچنین، $\angle AXY = \angle BXZ$ و $AX = XB$. پس مثلثهای AXY و BXZ همنهشت‌اند.

حالت ۲. نقطهٔ P بیرون پاره‌خط AB و نقطهٔ Q روی پاره‌خط YZ قرار دارد (شکل صفحهٔ بعد را ببینید).

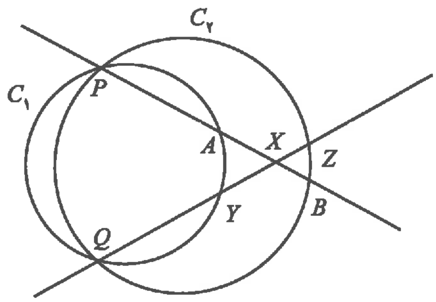


در این صورت

$$\angle AYX = \angle AYQ = \angle APQ = \angle BPQ = \angle BZQ = \angle BZX$$

اکنون مانند حالت ۱ معلوم می‌شود که مثلثهای XY و BXZ همنهشت‌اند.

حالت ۳. نقطهٔ P بیرون پاره‌خط AB و نقطهٔ Q بیرون پاره‌خط YZ قرار دارد (شکل زیر را ببینید).



در این صورت

$$\angle AYX = ۱۸۰^\circ - \angle AYQ = \angle APQ = \angle BPQ = \angle BZQ = \angle BZX$$

اکنون مانند حالت ۱ معلوم می‌شود که مثلثهای AXY و BXZ همنهشت‌اند.

حالت ۴. نقطهٔ P روی پاره‌خط AB و نقطهٔ Q بیرون پاره‌خط YZ قرار دارد. این حالت، مانند حالت ۲ است: نقش نقطه‌های P و Q، A و Y، و B و Z را عوض کنید.

۵۴. AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABCاند و نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 به‌ترتیب وسط این ارتفاعها هستند. مجموع زاویه‌های $B_2A_1C_2$، $C_2B_1A_2$ و $A_2C_1B_2$ را حساب کنید.

راه‌حل. فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد و X، Y و Z به‌ترتیب وسط BC، CA و AB باشند. در این صورت مثلثهای AZA_2 و ABA_1 متشابه‌اند و درنتیجه ZA_2 بر A_2H

عمود است. بنابراین دایرهٔ به قطر ZH از $A_۲$ می‌گذرد. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که این دایره از $B_۲$ هم می‌گذرد. همچنین، چون $HC_۱$ بر $C_۱Z$ عمود است، این دایره از $C_۱$ هم می‌گذرد. بنابراین $\angle A_۲C_۱B_۲ = \angle A_۲ZB_۲$. چون $A_۲$ روی YZ و $B_۲$ روی XZ قرار دارد، $\angle A_۲C_۱B_۲$ همچنین برابر است با $\angle YZX$. اگر همین استدلال را تکرار کنیم معلوم می‌شود که مجموع زاویه‌های موردنظر برابر است با مجموع زاویه‌های مثلث XYZ یا ۱۸۰°.

۵۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که nضلعی‌ای محدب وجود داشته باشد که قطرهایش برابر باشند.

راه‌حل اول. ابتدا ثابت می‌کنیم $n < ۶$. فرض کنید $n \geq ۶$ و nضلعی‌ای محدب با رأسهای $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n وجود داشته باشد که قطرهایش برابر باشند. در این صورت

$$A_۱A_۵ = A_۲A_۵ = A_۱A_۴ = A_۲A_۴$$

درنتیجه مثلثهای $A_۱A_۲A_۵$ و $A_۱A_۲A_۴$ متساوی‌الساقین‌اند و $A_۴$ و $A_۵$ روی عمودمنصف $A_۱A_۲$ قرار دارند. چون چندضلعی موردنظر محدب است، پس $A_۴$ و $A_۵$ باید در یک طرف $A_۱A_۲$ قرار داشته باشند، که در این صورت متمایز نیستند. پس به تناقض رسیده‌ایم.

در حالتی که $n = ۳$، هیچ قطری وجود ندارد. اگر $n = ۴$، مربع و اگر $n = ۵$، پنج‌ضلعی منتظم ویژگی موردنظر را دارد.

راه‌حل دوم. فرض کنید $n \geq ۶$ و nضلعی‌ای محدب با رأسهای $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n وجود داشته باشد که قطرهایش برابر باشند. فرض کنید $A_۱A_{n-۲}$ و $A_۲A_{n-۱}$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. در این صورت، بنابر نابرابری مثلث،

$$A_۱O + OA_{n-۱} > A_۱A_{n-۱}, \qquad A_۲O + OA_{n-۲} > A_۲A_{n-۲}$$

و درنتیجه

$$\begin{aligned} A_۱A_{n-۲} + A_۲A_{n-۱} &= A_۱O + OA_{n-۲} + A_۲O + OA_{n-۱} \\ &> A_۱A_{n-۱} + A_۲A_{n-۱} \end{aligned}$$

بنابراین طول همهٔ قطرها برابر نیست و این هم تناقض است. به این ترتیب $n \leq ۵$. اکنون می‌توان مانند راه‌حل اول عمل کرد.

۵۶. نقطهٔ M درون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA$$

راه‌حل. فرض کنید D، E و F به‌ترتیب وسط BC، CA و AB باشند. بدون اینکه ازکلی بودن استدلالمان

چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم M درون ذوزنقه‌های $ABDE$ و $BCEF$ (یا روی آنها) قرار دارد. در این صورت، اگر ثابت کنیم

$$MA + MB < BD + DE + EA, \qquad MB + MC < BF + FE + EC$$

نتیجه می‌شود

$$MA + ۲MB + MC < AB + BC + CA$$

اکنون ثابت می‌کنیم $MA + MB < BD + DE + EA$. پاره‌خط GH را طوری رسم کنید که G روی پاره‌خط BD و H روی پاره‌خط AE باشد و $DE \parallel GH$ و M روی پاره‌خط GH باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} AM + MB &< AH + HM + MG + GB = AH + HG + GB \\ &< AH + HD + DG + GB = AH + HD + DB \\ &< AH + HE + ED + DB = EA + DE + BD \end{aligned}$$

نابرابری دیگر را هم می‌توان به همین ترتیب ثابت کرد.

۵۷. a، b، c، d، e و f عددهایی صحیح و متمایزند. ثابت کنید

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-d)^۲ + (d-e)^۲ + (e-f)^۲ + (f-a)^۲ \geq ۱۸$$

راه‌حل. چون مجموع عددهای

$$a-b, b-c, c-d, d-e, e-f, f-a \qquad (*)$$

برابر با صفر است، تعداد عددهای فرد در میان آنها عددی زوج است و درنتیجه، در مجموع سمت چپ نابرابری موردنظر، تعداد عددهایی که مربع عددی فردند عددی زوج است. اگر مجموع سمت چپ نابرابری موردنظر عددی کوچکتر از ۱۸ باشد، باید یکی از عددهای ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۶ باشد. از این عددها فقط ۶، ۱۲ و ۱۴ را می‌توان به شکل مجموع شش مربع کامل غیرصفر نوشت:

$$\begin{aligned} ۶ &= ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ \\ ۱۲ &= ۲^۲ + ۲^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ \\ ۱۴ &= ۳^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ \end{aligned}$$

چون مجموع عددهای $(*)$ برابر با صفر است، پس مجموعهٔ این عددها یکی از مجموعه‌های

$$\{۱, ۱, ۱, -۱, -۱, -۱\}, \qquad \{۲, ۲, -۱, -۱, -۱, -۱\}, \qquad \{۳, ۱, -۱, -۱, -۱, -۱\}$$

است (ترتیب و علامت عددها را در نظر نگرفته‌ایم). چون a، b، c، d، e و f متمایزند، تفاضل بزرگترین آنها و کوچکترینشان دست‌کم ۵ است. این تفاضل برابر است با مجموع تفاضلهای هر دو عدد کنار هم؛ اما می‌توان تحقیق کرد که در هر حالت، این مجموع از ۵ کمتر است. می‌توان تحقیق کرد که به‌ازای $\{۲, ۴, ۵, ۳, ۱, ۰\}$، سمت چپ نابرابری موردنظر برابر با ۱۸ است.

۵۸. فرض کنید $x_1 = 1$، $y_1 = 2$، $z_1 = 3$ و اگر n عددی طبیعی باشد،

$$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}, \qquad y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}, \qquad z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}$$

ثابت کنید دست‌کم یکی از عددهای x_{200}، y_{200} و z_{200} از ۲۰ بزرگتر است.

راه‌حل. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید $a_n = x_ny_n + y_nz_n + z_nx_n$. در این صورت $a_1 = 11$ و اگر n عددی طبیعی باشد،

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 3 + \left(\frac{y_n}{x_n} + \frac{z_n}{y_n} + \frac{x_n}{z_n}\right) + \left(\frac{1}{x_ny_n} + \frac{1}{y_nz_n} + \frac{1}{z_nx_n}\right) \\ &> a_n + 6 \end{aligned}$$

زیرا بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{y_n}{x_n} + \frac{z_n}{y_n} + \frac{x_n}{z_n} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y_n}{x_n} \times \frac{z_n}{y_n} \times \frac{x_n}{z_n}} = 3$$

درنتیجه $a_{n+1} > a_1 + 6n$. پس

$$a_{200} > 11 + 6 \times 199 > 1200$$

بنابراین دست‌کم یکی از عددهای $x_{200}y_{200}$، $y_{200}z_{200}$ و $z_{200}x_{200}$ از ۴۰۰ بزرگتر است. یعنی دست‌کم یکی از عددهای x_{200}، y_{200} و z_{200} از ۲۰ بزرگتر است.

۵۹. x، y و z عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\begin{aligned} &\sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + (y-z)^2} \\ &\quad < \sqrt{4y^2 + 4y(z+x) + (z-x)^2} + \sqrt{4z^2 + 4z(x+y) + (x-y)^2} \end{aligned}$$

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + (y-z)^2} < \sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + (y+z)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x + y + z = (2y + x - z) + (2z + x - y) \\
&\leq |2y + x - z| + |2z + x - y| \\
&= \sqrt{4y^2 + 4y(x - z) + (z - x)^2} \\
&\quad + \sqrt{4z^2 + 4z(x - y) + (x - y)^2} \\
&< \sqrt{4y^2 + 4y(x + z) + (z - x)^2} \\
&\quad + \sqrt{4z^2 + 4z(x + y) + (x - y)^2}
\end{aligned}
$$

۶۰. a، b، c، A، B و C عددهایی حقیقی‌اند، $a \neq 0$، $A \neq 0$ و به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

ثابت کنید

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$$

راه‌حل. بدون اینکه از کلی بودن اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a > 0$، زیرا در غیر این صورت می‌توانیم (a, b, c) را با $(-a, -b, -c)$ عوض کنیم و این تعویض مقدار $|ax^2 + bx + c|$ و $|b^2 - 4ac|$ را تغییر نمی‌دهد. به‌همین ترتیب می‌توانیم فرض کنیم $A > 0$. درنتیجه،

$$\lim_{x \to \infty} \left| \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right| = a, \qquad \lim_{x \to \infty} \left| \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2} \right| = A$$

بنابراین $a \leq A$. سه حالت وجود دارد.

حالت ۱. $B^2 - 4AC > 0$. در این صورت $Ax^2 + Bx + C$ دو ریشهٔ متمایز مانند r_1 و r_2 دارد. درنتیجه، r_1 و r_2 ریشه‌های $ax^2 + bx + c$ نیز هستند. یعنی $b^2 - 4ac > 0$. اکنون توجه کنید که

$$
\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= A^2(r_1 - r_2)^2 \\
&\geq a^2(r_1 - r_2)^2 \\
&= a^2 - 4bc
\end{aligned}
$$

حالت ۲. $B^2 - 4AC \leq 0$ و $b^2 - 4ac \leq 0$. بدون اینکه از کلی بودن اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a > 0$ و $B = 0$. در این صورت به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$Ax^2 + Bx + C \geq ax^2 + bx + c$$

به‌ویژه، $C \geq c \geq ۰$. بنابراین

$$۴AC - B^۲ = ۴AC \geq ۴ac \geq ۴ac - b^۲$$

حالت ۳. $B^۲ - ۴AC \leq ۰$ و $b^۲ - ۴ac > ۰$. چون نمودار $Ax^۲ + Bx + C$ محور x را قطع نمی‌کند، نمودار $(Ax^۲ + Bx + C) \pm (ax^۲ + bx + c)$ هم محور x را قطع نمی‌کند. بنابراین

$$(B - b)^۲ - ۴(A - a)(C - c) \leq ۰$$

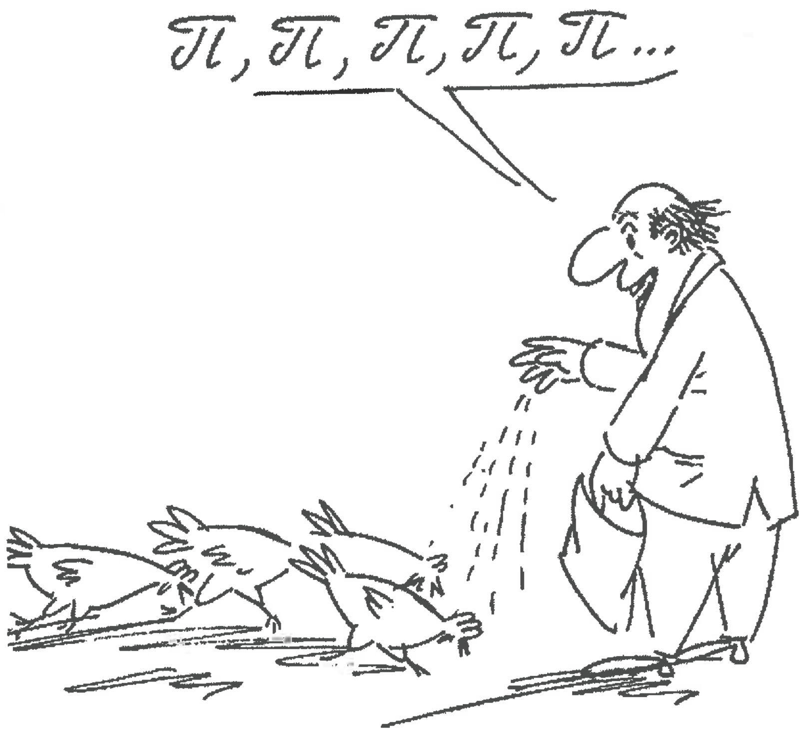
$$(B + b)^۲ - ۴(A + a)(C + c) \leq ۰$$

اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$۲(B^۲ - ۴AC) + ۲(b^۲ - ۴ac) \leq ۰$$

بنابراین

$$b^۲ - ۴ac \leq ۴AC - B^۲$$



راه‌حلها

از باب تفریح

۱. فرض کنید تعداد رقمهای $۲^{۱۳۸۳}$ برابر با m و تعداد رقمهای $۵^{۱۳۸۳}$ برابر با n باشد. در این صورت

$$۱۰^{m-۱} < ۲^{۱۳۸۳} < ۱۰^{m}, \qquad ۱۰^{n-۱} < ۵^{۱۳۸۳} < ۱۰^{n}$$

بنابراین

$$۱۰^{m-۱+n-۱} < ۲^{۱۳۸۳} \times ۵^{۱۳۸۳} < ۱۰^{m+n}$$

یعنی $۱۰^{m+n-۲} < ۱۰^{۱۳۸۳} < ۱۰^{m+n}$. پس $m+n-۲ < ۱۳۸۳ < m+n$ و درنتیجه $m+n-۱ = ۱۳۸۳$. بنابراین $m+n = ۱۳۸۴$ و روی‌هم ۱۳۸۴ رقم نوشته‌ایم.

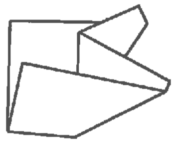
۲. برای اینکه عدد هفت‌رقمی موردنظر بیشترین مقدار ممکن باشد باید تا جایی که ممکن است رقمهای سمت چپ آن ۹ باشند. به‌سادگی معلوم می‌شود که ممکن نیست چهار رقم اول ۹ باشند: سه رقم دیگر را هر طور که انتخاب کنیم، تفاضل دو عددی که باید تشکیل دهند آنقدر کوچک است که نمی‌توانیم تصاعدی حسابی درست کنیم.

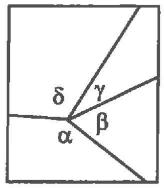
بنابراین سعی می‌کنیم عددی پیدا کنیم که سه رقم اولش ۹ باشند. فرض کنید این عدد $۹۹۹ABCD$ باشد. از استدلالی شبیه قبلی نتیجه می‌شود که آخرین عدد باید تک‌رقمی باشد، درنتیجه تصاعد حسابی موردنظر

$$۹۹۹, ABC, D$$

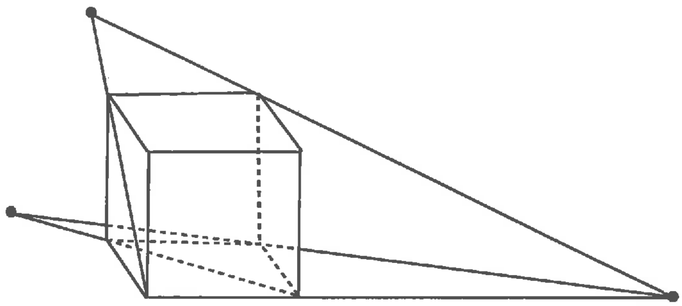
است. بنابراین $D = ۲(ABC) - ۹۹۹$. برای اینکه D بیشترین مقدار ممکن باشد، باید ABC بیشترین مقدار ممکن باشد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $D = ۹$. عددهای موردنظر ۹۹۹، ۵۰۴ و ۹ هستند و عدد هفت‌رقمی موردنظر ۹۹۹۵۰۴۹ است.

۳. با توجه به نمادگذاری شکل سمت راست صفحهٔ بعد، از صفحهٔ کاغذی تا نشده نتیجه می‌شود $\alpha + \beta + \gamma + \delta = ۳۶۰^\circ$ و از صفحهٔ کاغذی تا شده نتیجه می‌شود $\alpha - \beta + \gamma - \delta = ۰^\circ$. اگر این دو تساوی را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که زاویه‌های روبه‌رو به هم مکمل‌اند. بنابراین زاویهٔ روبه‌رو به زاویهٔ ۴۵° برابر با ۱۳۵° و زاویهٔ روبه‌رو به زاویهٔ ۱۳۰° برابر با ۵۰° است.

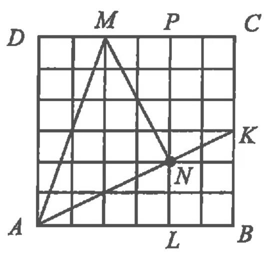


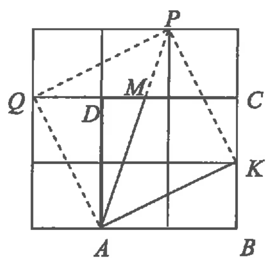


۴. بله، شکل زیر را ببینید.



۵. در شکل سمت راست توجه کنید که $AKPQ$ مربع و AP قطر این مربع است. بنابراین $\angle MAK = ۴۵^\circ$. راه‌حلی دیگر را در شکل سمت چپ نشان داده‌ایم. در این شکل مثلثهای ANL و NMP همنهشت‌اند. بنابراین $\angle ANL + \angle MNP = ۹۰^\circ$. پس $\angle ANM = ۹۰^\circ$ و چون مثلث ANM متساوی‌الساقین است، پس $\angle MAN = ۴۵^\circ$.





سی و ششمین المپیاد ریاضی کانادا

۱. اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم به‌دست می‌آید $xy - xz = ۲z - ۲y$. درنتیجه،

$$(x + ۲)(y - z) = ۰$$

بنابراین یا $x = -۲$ یا $y = z$.

اگر $x = -۲$، از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $-۲y = z + ۲ - y$ یا $y + z = -۲$. بنابراین از معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود $yz = ۰$. بنابراین یا y صفر است یا z. پس اگر $x = -۲$، جوابها عبارت‌اند از $(-۲, ۰, -۲)$ و $(-۲, -۲, ۰)$.

اگر $y = z$، از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $-x = xy$ یا $x(y + ۱) = ۰$. اگر $x = ۰$ و $y = z$، از معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود $y^۲ = -۲y$، پس یا $y = ۰$ یا $y = -۲$. اگر $y = -۱$ و $z = y = -۱$، از معادلهٔ سوم نتیجه می‌شود $x = -۱$. در این حالتها جوابها عبارت‌اند از $(۰, ۰, ۰)$، $(۰, -۲, -۲)$ و $(-۱, -۱, -۱)$.

۲. ابتدا تعداد حالتهایی را می‌شماریم که رخها روی خانه‌های سیاه قرار دارند. ۸ رخ داریم و ۹ سطر، پس دقیقاً یک سطر خالی می‌ماند. دو حالت وجود دارد، یا این سطر خالی ۵ خانهٔ سیاه دارد یا این سطر خالی ۴ خانهٔ سیاه دارد. با جایگشت سطرها می‌توان فرض کرد که این سطر یا سطر آخر است یا سطر یکی مانده به آخر.

در حالت اول، ۵ انتخاب برای سطر خالی داریم، بعد می‌توانیم در یکی از خانه‌های سیاه سطر اول یک رخ قرار دهیم (۵ انتخاب) و همین‌طور در یکی از خانه‌های سیاه سطر دوم هم یک رخ قرار دهیم (۴ انتخاب). وقتی که در سطر سوم رخی را قرار می‌دهیم باید مواظب باشیم که در ستونی که رخ سطر اول قرار دارد رخی نگذاریم، پس ۴ انتخاب داریم. اگر در مورد سطرهای بعدی هم همین استدلال را تکرار کنیم معلوم می‌شود که تعداد حالتهای ممکن در حالت اول برابر است با

$$۵ \times ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ = (۵!)^۲$$

در حالت دوم، برای سطر خالی ۴ انتخاب داریم. اگر مانند قبل استدلال کنیم معلوم می‌شود که تعداد حالتهای ممکن در حالت دوم برابر است با

$$۴ \times ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴ \times ۵! \times ۴!$$

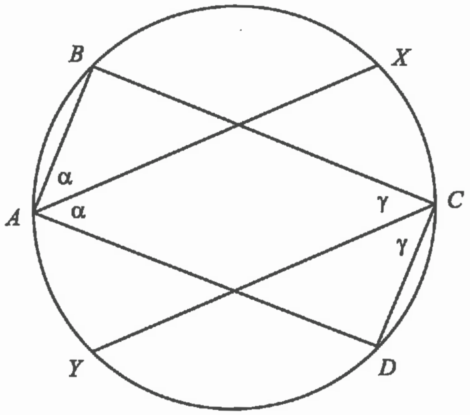
اگر همین نحوهٔ استدلال را برای خانه‌های سفید هم تکرار کنیم، معلوم می‌شود که اگر سطری با ۴ خانهٔ سفید خالی باشد، تعداد حالتها برابر است با $(۵!)^۲$ و ممکن نیست که سطری با ۵ خانهٔ سفید خالی باشد. بنابراین تعداد کل حالتهای ممکن برابر است با

$$(۵!)^۲ + ۴ \times ۵! \times ۴! + (۵!)^۲ = ۱۴ \times ۵! \times ۴!$$

۳. چون CY نیمساز زاویهٔ BCD است، پس $BY = YD$ و درنتیجه روی دایره، Y میان A و D قرار دارد (شکل صفحهٔ بعد را ببینید) و $DY > YA$ و $DY > AB$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که X میان B و C قرار دارد و $BX > XC$ و $BX > CD$. درنتیجه، اگر چهار ضلع $ABXCDY$ برابر

باشند باید

$$YA = AB = XC = CD$$



بنابراین کمان YB با کمان XD برابر است و درنتیجه $YB = XD$. چون $\angle BAX = \angle XAD$، پس $BX = XD$ و چون $\angle YCB = \angle DCY$، پس $DY = YB$. بنابراین $BXDY$ مربع است و قطرش، یعنی BD، باید قطر دایره باشد.

۴. چون $p - ۱$ عددی زوج است، می‌توان نوشت

$$\sum_{k=۱}^{p-۱} k^{۲p-۱} = \sum_{k=۱}^{\frac{p-۱}{۲}} \left(k^{۲p-۱} + (p-k)^{۲p-۱}\right)$$

از قضیهٔ دوجمله‌ای نتیجه می‌شود

$$(p-k)^{۲p-۱} = p^{۲p-۱} - \cdots - \binom{۲p-۱}{۲} p^۲ k^{۲p-۳} + \binom{۲p-۱}{۱} pk^{۲p-۲} - k^{۲p-۱}$$

در سمت راست این تساوی، بجز دو جملهٔ آخر، بقیهٔ جمله‌ها بر $p^۲$ بخش‌پذیرند. بنابراین

$$\begin{aligned} k^{۲p-۱} + (p-k)^{۲p-۱} &\equiv k^{۲p-۱} + \binom{۲p-۱}{۲} pk^{۲p-۲} - k^{۲p-۱} \\ &\equiv (۲p-۱)pk^{۲p-۲} \ (\text{به‌پیمانهٔ } p^۴) \end{aligned}$$

اگر $۱ \leq k < p$، چون k و p نسبت به هم اول‌اند، از قضیهٔ کوچک فرما نتیجه می‌شود

$$k^{p-۱} \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

بنابراین

$$(۲p-۱)k^{۲p-۲} \equiv (۲p-۱)(۱^۲) \equiv -۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

پس عددی صحیح مانند m وجود دارد که $(۲p-۱)k^{۲p-۲} = mp-۱$. بنابراین

$$(۲p-۱)pk^{۲p-۲} = mp^۲ - p \equiv -p \ (\text{به‌پیمانهٔ } p^۲)$$

به این ترتیب

$$\sum_{k=۱}^{p-۱} k^{۲p-۱} \equiv \sum_{k=۱}^{\frac{p-۱}{۲}} (-p) \equiv \left(\frac{p-۱}{۲}\right)(-p)$$

$$\equiv \frac{p-p^۲}{۲} + p^۲ \equiv \frac{p(p+۱)}{۲} \ (\text{به‌پیمانهٔ } p^۲)$$

۵. چون $۲۰۰۴ = ۲^۲ \times ۳ \times ۱۶۷$، پس

$$T = \{۲^a ۳^b ۱۶۷^c : ۰ \leq a \leq ۲۰۰, ۰ \leq b, c \leq ۱۰۰\}$$

فرض کنید

$$S = \{۲^{۲۰۰-b-c} ۳^b ۱۶۷^c : ۰ \leq b, c \leq ۱۰۰\}$$

اگر $۰ \leq b, c \leq ۱۰۰$، $۰ \leq ۲۰۰-b-c \leq ۲۰۰$، پس S زیرمجموعه‌ای از T است. چون ۱۰۱ انتخاب برای b و ۱۰۱ انتخاب برای c داریم، تعداد عضوهای S برابر است با $۱۰۱^۲$. ثابت می‌کنیم هیچ عضوی از S مضرب عضوی دیگر از آن نیست و هیچ زیرمجموعهٔ دیگری از T این ویژگی را ندارد.

فرض کنید $۲^{۲۰۰-b-c} ۳^b ۱۶۷^c$ مضرب $۲^{۲۰۰-j-k} ۳^j ۱۶۷^k$ باشد. در این صورت

$$۲۰۰-b-c \geq ۲۰۰-j-k, \quad b \geq j, \quad c \geq k$$

در این صورت $b+c \leq j+k$، و چون $b \geq j$ و $c \geq k$، پس $b = j$ و $c = k$. پس هیچ عضوی از S مضرب عضوی دیگر از آن نیست.

فرض کنید U زیرمجموعه‌ای از T باشد که بیش از $۱۰۱^۲$ عضو دارد. چون فقط $۱۰۱^۲$ زوج مانند (b, c) داریم که $۰ \leq b, c \leq ۱۰۰$، بنابر اصل لانه کبوتری، U باید دو عضو مانند $۲^{a_۱} ۳^{b_۱} ۱۶۷^{c_۱}$ و $۲^{a_۲} ۳^{b_۲} ۱۶۷^{c_۲}$ داشته باشد که در آنها $b_۱ = b_۲$، $c_۱ = c_۲$ اما $a_۱ \neq a_۲$. درنتیجه، یکی از این عددها مضرب دیگری است. پس U ویژگی موردنظر را ندارد. بنابراین بیشترین مقدار موردنظر $۱۰۱^۲$ است.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
انتشارات فاطمی
منتشر کرده است:
تورنمنت شهرها
جدید
کتابهای
موضوعی
ریاضی
آشنایی با نظریهٔ گراف
علیرضا علیپور
جدید
مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی
کارگاه
اعداد
دکتر آرش رستگار
جدید
جبر
جدید
منتشر می‌کند:
تورنمنت شهرها
تورنمنت شهرها
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا
۲۰۰۴-۱۹۸۳
گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی
مسابقه‌های ریاضی مدارس راهنمایی امریکا
۲۰۰۳-۱۹۸۶
گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی