نشریهٔ

ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال پنجم / ۱
شماره پیاپی: ۱۵
شهریور ۱۳۸۳
قیمت: ۹۰۰ تومان

- مسأله‌های ریاضی
- راه‌حلی از ناپلئون
- بازی جوانه‌ها
- المپیاد چهل و پنجم، المپیاد بیست و یکم

به نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال پنجم/ ۱ ◦ شمارهٔ پیاپی: ۱۵ ◦ شهریور ۱۳۸۳

فهرست:

روی جلد: داوید هیلبرت

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، محمد مهدی عابدی‌نژاد

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

تیراژ: ۳۵۰۰ نسخه

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: معراج

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۹۷۱۵۸۳ـ۸۹۷۱۵۸۴

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

مسأله‌های ریاضی

داوید هیلبرت

داوید هیلبرت، یکی از بزرگترین ریاضیدانان اواخر قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم به‌شمار می‌آید. او علاوه بر حل چند مسألهٔ مهم و معروف ریاضیات، در گسترش و تعمیق بسیاری از شاخه‌های ریاضیات هم نقش مهمی داشته است؛ از جمله در آنالیز، نظریهٔ اعداد و هندسه. او در سخنرانی‌اش در دومین کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان که در سال ۱۹۰۰ در پاریس برگزار شد، بیست و سه مسأله مطرح کرد که به‌زعم او مهمترین مسأله‌های پیش روی ریاضیدانان در قرن بیستم بودند.

آنچه در زیر می‌خوانید مقدمهٔ این سخنرانی است که هیلبرت در آن اهمیت بنیادی نقش مسأله را در ریاضیات نشان داده است.

کدام‌یک از ما علاقه‌مند نیست که حجابی را که آینده را پنهان می‌کند بردارد و نگاهی به پیشرفتهای علممان و رموز توسعه‌اش در قرنهای آینده بیندازد؟ ریاضیدانان پیشرو نسلهای آینده، برای رسیدن به کدامین هدف می‌کوشند؟ در قرنهای آینده، کدام روشها و حقایق نو در میدان گسترده و غنی تفکر ریاضی آشکار خواهند شد؟

تاریخ، پیوستگی توسعهٔ علم را به ما می‌آموزد. ما می‌دانیم که هر عصری، مسأله‌های خاص خودش را داشته و در اعصار بعد، این مسأله‌ها یا حل شده‌اند و یا بی‌اهمیت شناخته شده‌اند و مسأله‌های دیگری جایگزین آنها شده‌اند. اگر می‌شد ایده‌ای دربارهٔ چگونگی توسعهٔ دانش ریاضی در آیندهٔ نزدیک به‌دست بیاوریم، می‌توانستیم سؤالهای مغشوش را از ذهنمان بزداییم و در پی مسأله‌هایی باشیم که در علم امروز مطرح است و حلشان را از آیندگان توقع داریم. گمان می‌کنم که اکنون، که در پایان یک قرن و آغاز قرنی جدید قرار داریم، برای مرور مسأله‌ها با این دید زمان مناسبی است؛ زیرا پایان این عصر، نه فقط ما را به مرور گذشته می‌خواند، بلکه فکرمان را به آیندهٔ مجهول هم معطوف می‌کند.

اهمیت ژرف مسأله‌ها را در پیشرفت علوم ریاضی و نقش آنها را در کار محققان نباید نادیده گرفت. هر شاخه از علم، مادام که به فراوانی مسأله مطرح بکند، زنده است و کمبود مسأله، یا سایهٔ نابودی بر آن شاخه می‌اندازد و یا توسعهٔ مستقل آن را متوقف می‌کند.

همان‌طور که هر عمل انسانی‌ای به دنبال هدفی است، پژوهش ریاضی هم در پی حل مسأله‌های ریاضی است. با حل مسأله است که محقق آبدیدگی سلاحش را می‌آزماید، روشها و دیدگاههای جدیدی پیدا می‌کند و به افقهای وسیعتر و آزادتری دست می‌یابد.

قضاوت درست و جامع دربارهٔ ارزش یک مسأله، دشوار و اغلب غیرممکن است. با این حال، می‌توانیم دنبال

محکهای کلی‌ای برای تشخیص مسألهٔ خوب بگردیم. یک ریاضیدان قدیمی فرانسوی می‌گوید: «در ریاضیات، هیچ نظریه‌ای را نباید کامل بدانید، مگر اینکه آن را چنان ساده کرده باشید که بتوانید آن را برای اولین کسی که در خیابان می‌بینید توضیح بدهید». من این سادگی و آسانی درک را، که در اینجا برای نظریه‌های ریاضی لازم دانسته شده است، یکی از مهمترین شرطهای یک مسألهٔ خوب ریاضی می‌دانم: زیرا هر چه ساده باشد و به‌راحتی قابل درک باشد جذاب است و برعکس، آنچه پیچیده باشد ما را می‌رماند.

به‌علاوه، مسأله برای اینکه ما را به‌دنبال خود بکشاند، باید دشوار باشد تا بتواند در مقابل تلاشهای ما مقاومت کند؛ اما نباید به کلی دست‌نیافتنی باشد. باید علامتی در مسیرهای هزارتو برای رسیدن به حقایق برایمان موجود باشد و بالاخره، تذکاری برای لذت حل موفق آن.

ریاضیدانان قرنهای پیش، عادت کرده بودند که خودشان را با تعصب و شور فراوان وقف مسألهٔ دشوار مشخصی بکنند. آنها ارزش مسأله‌های دشوار را می‌دانستند. من تنها به مسألهٔ «خم سریعترین نزول»[1] اشاره می‌کنم که یوهان برنولی آن را مطرح کرده است. برنولی، هنگام اعلان عام این مسأله، توضیح می‌دهد که تجربه، نشان داده است که ذهنهای برتر، پیش از هر چیز، با باقی گذاشتن مسأله‌هایی که دشوار و در عین حال مفید هستند به پیشرفت علم کمک می‌کند و از این‌رو، او امیدوار است که بتواند همچون مردانی مثل مرسن، پاسکال، فرما، ویویانی و دیگران، مسأله‌ای پیش روی آنالیزدانان برجستهٔ همعصرش بگذارد که همچون سنگ محک، بتوانند روشهایشان را با آن بسنجند و قدرتشان را با آن اندازه بگیرند و از این راه، تحسین دنیای ریاضیات را برانگیزاند. حساب تغییرات، از همین مسألهٔ برنولی و مسأله‌های مشابه آن به‌وجود آمده است.

فرما، چنان که مشهور است، ادعا کرده بود که معادلهٔ دیوفانتی

$$x^n + y^n = z^n$$

که در آن x، y و z عددهایی صحیح هستند، قابل حل نیست ـ مگر در حالتهای بدیهی خاص. تلاشهایی که برای اثبات این حل‌ناپذیری انجام شده‌اند، نمونه‌ای تکان‌دهنده از تأثیری است که چنین مسألهٔ خاص و به‌ظاهر بی‌اهمیتی می‌تواند بر علم بگذارد. مثلاً کومر در تلاش برای حل همین مسأله، مفهوم ایده‌آلهای اعداد را مطرح کرد و قانون تجزیهٔ یکتای اعداد میدانی دوری به ایده‌آلهای اعداد اول را کشف کرد ـ قانونی که تعمیم آن به میدانهای جبری (که به وسیلهٔ ددکیند و کرونکر انجام شد) در مرکز نظریهٔ مدرن اعداد قرار دارد و اهمیت آن، بسیار فراتر از مرزهای نظریهٔ اعداد، در حیطهٔ جبر و نظریهٔ توابع هم مشخص شده است.

در حوزهٔ دیگری از پژوهش، که به کلی با حوزهٔ قبلی متفاوت است، مسألهٔ سه جسم[2] است. روشهای پربار و اصول دور از ذهنی که پوآنکاره در مکانیک سماوی به‌کار گرفت و اکنون در ستاره‌شناسی عملی استفاده می‌شوند،

۱. خم سریعترین نزول، از نقطه‌ای مثل A به نقطه‌ای مثل B، خمی است که اگر ذره‌ای از A شروع به حرکت کند و در مسیرش تحت تأثیر هیچ نیرویی غیر از جاذبه نباشد، در کوتاهترین زمان ممکن به نقطهٔ B برسد. م.

۲. مسألهٔ سه جسم، مسألهٔ تعیین حرکت سه جسم است که بدون هیچ نیروی خارجی و فقط تحت تأثیر نیروی جاذبهٔ یکدیگر حرکت می‌کنند. م.

نتیجهٔ شرایطی بود که او در آن قرار گرفته بود و می‌خواست به‌شیوهٔ دیگری به این مسألهٔ دشوار بپردازد و توانست به حل مسأله نزدیک شود.

به‌نظر می‌رسد که دو مسألهٔ آخری که به آنها اشاره کردم، مسألهٔ فرما و مسألهٔ سه جسم، در دو قطب مختلف قرار دارند. اولی نتیجهٔ استدلال محض است و به حوزهٔ نظریهٔ مجرد اعداد تعلق دارد و دومی، مسأله‌ای است که از نجوم آمده و برای درک ساده‌ترین پدیدهٔ طبیعت لازم است.

اما اغلب اتفاق می‌افتد که همین مسألهٔ خاص هم در شاخهٔ غیرمحتملی از دانش ریاضی کاربردی پیدا کند. مثلاً، مسألهٔ خم سریعترین نزول نقشی اساسی در مبانی هندسه، در نظریهٔ خمها و رویه‌ها، در مکانیک و در حساب تغییرات دارد که به‌لحاظ تاریخی بسیار مهم است. فلیکس کلاین در کارش دربارهٔ دوازده‌وجهی منتظم، اهمیت مسألهٔ چندوجهیهای منتظم در هندسهٔ مقدماتی را در نظریهٔ گروهها، در نظریهٔ معادلات و در حوزهٔ معادلات دیفرانسیل خطی به‌خوبی نشان داده است.

اکنون که اهمیت کلی مسأله‌ها در ریاضیات را دریافته‌ایم، می‌خواهم به این بپردازم که این علم، مسأله‌هایش را از چه منابعی می‌آورد. بی‌شک، اولین و قدیمیترین مسأله‌ها در همهٔ شاخه‌های ریاضیات از تجربه و پدیده‌های جهان واقع برخاسته‌اند. حتی قواعد حساب اعداد صحیح هم باید به‌همین شیوه در رده‌های پایینتری از تمدن انسانی کشف شده باشند، مثل کودک امروزی که کاربرد این قواعد را با روشهای تجربی می‌آموزد. همین امر در مورد اولین مسأله‌های هندسه هم که به ما به ارث رسیده‌اند صادق است. مسأله‌هایی مثل مسألهٔ تضعیف مکعب[3] و مسألهٔ تربیع دایره[4]، قدیمیترین مسأله‌های نظریهٔ حل معادلات عددی، نظریهٔ خمها و حساب دیفرانسیل و انتگرال، حساب تغییرات، نظریهٔ سریهای فوریه و نظریهٔ پتانسیل هم چنین هستند. می‌توان دید که مسأله‌هایی که کاملاً به مکانیک، نجوم و فیزیک متعلق‌اند چقدر فراوان هستند.

با این حال، در جریان بسط شاخه‌ای از ریاضیات، ذهن بشر هوشیارانه استقلالش را حفظ می‌کند. ذهن بشر، به خودی خود و اغلب بدون تأثیرگرفتن قابل توجه از بیرون، با استفاده از ترکیبهای منطقی، تعمیم، در نظرگرفتن حالتهای خاص و جدا کردن و انتخاب ایده‌ها، مسأله‌هایی جدید و سودمند می‌پرورد و آنگاه خودش به جستجوگری واقعی تبدیل می‌شود. مسألهٔ اعداد اول و مسأله‌های دیگر نظریهٔ اعداد، نظریهٔ گالوا برای معادلات، نظریهٔ ناورداهای جبری، نظریهٔ توابع آبلی و خودریخت، همه همین‌طور به‌وجود آمده‌اند. درواقع، تقریباً همهٔ مسأله‌های زیبای نظریهٔ اعداد مدرن و نظریهٔ توابع همین‌طور به‌وجود آمده‌اند.

در همین حین، در حالی که قوهٔ خلاق استدلال محض در کار است، جهان خارج هم مسأله‌هایی از تجربهٔ واقعی به‌میان می‌آورد، شاخه‌های جدیدی از ریاضیات می‌گشاید و اغلب، در همان حال که این حوزه‌های جدید دانش را برای قلمرو تفکر محض می‌گشاییم، پاسخهایی هم برای مسأله‌های حل نشدهٔ قدیمی می‌یابیم و درنتیجه، نظریه‌های قدیمی را هم گسترش می‌دهیم. به‌گمان من، همانندیهای متعدد و شگفتی که ریاضیدان در بسیاری از

۳. ترسیم مکعبی که حجمش نصف حجم مکعب داده شده‌ای باشد. م.
۴. ترسیم مربعی که مساحتش برابر با مساحت دایرهٔ داده شده‌ای باشد. م.

سؤالها، روشها و ایده‌های شاخه‌های مختلف این علم می‌بیند و این همه هماهنگی پیش‌ساخته، ریشه در همین تعامل دائمی تفکر و تجربه دارند.

باید دربارهٔ ملزومات کلی حل مسأله‌های ریاضی هم کمی صحبت کنیم. پیش از هر چیز، باید به این یکی اشاره کنم: باید حصول صحت حل در چند گام متناهی بر پایهٔ چند فرض که در صورت مسأله تصریح شده‌اند و دقیقاً صورت‌بندی شده‌اند ممکن باشد. این الزام استنتاج منطقی به‌وسیلهٔ چند فرایند متناهی، همان الزام دقت در استدلال است. درحقیقت، الزام دقت، که ریاضیات مظهر آن به‌حساب می‌آید، به الزامات فلسفی درک ما مربوط است و از طرف دیگر، فقط با برآوردن این نیاز محتوای تفکر و الهام مسأله به تمامی رخ می‌نمایانند. هر مسألهٔ تازه، مخصوصاً اگر از جهان واقع گرفته شده باشد، مثل نهالی جوان است که فقط وقتی رشد می‌کند و به‌بار می‌نشیند که با دقت و مطابق قواعد صریح باغبانی، به درختی ریشه‌دار ـ که همان دستاوردهای استوار ریاضیدانان است ـ پیوند بخورد.

ناگفته نماند که اعتقاد به اینکه اثبات دشمن سادگی است، خطاست. برعکس، نمونه‌های متعددی وجود دارند که نشان می‌دهند که روش دقیق، هم ساده‌تر است و هم قابل درکتر. کوشش برای دقیق کردن راه‌حل، مجبورمان می‌کند که روشهای ساده‌تری برای اثبات پیدا کنیم و به‌علاوه، اغلب روشهایی پیدا می‌شوند که نسبت به روشهای قدیمی‌ای که دقت کمتری دارند، ظرفیت و قابلیت توسعهٔ بیشتری دارند. مثلاً، نظریهٔ خمهای جبری، با استفاده از روشهای دقیق نظریهٔ توابع و ارائهٔ منسجم ابزار متعالی، هم ساده‌تر شد و هم منسجمتر. از این مثال بگذریم، اثبات اینکه می‌توان چهار عمل اصلی را روی سریهای توانی انجام داد و اینکه می‌توان از آنها جمله به جمله مشتق و یا انتگرال گرفت و درک کاربرد سریهای توانی که نتیجهٔ این اثبات بود، نقشی اساسی در ساده کردن آنالیز داشت، مخصوصاً در نظریهٔ حذف و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل و قضیه‌های وجودی این دو نظریه. اما تکان‌دهنده‌ترین مثال ادعای من، حساب تغییرات است. بررسی تغییرات اول و دوم انتگرال معین محتاج محاسبات بسیار پیچیده‌ای بود و روشهایی که ریاضیدانان قدیمی به‌کار می‌بردند از دقت لازم برخوردار نبود. وایرشتراس پایه‌های جدید و قابل اطمینانی برای حساب تغییرات گذاشت و من، با آوردن نمونه‌هایی از انتگرال ساده و دوگانه، در ارتباط با سخنرانی‌ام نشان می‌دهم که این مبانی، چگونه به‌طرز شگفتی‌آوری حساب تغییرات را ساده می‌کنند: در تحقیق شرط لازم و کافی وقوع ماکزیمم و مینیمم، محاسبهٔ تغییر دوم و استدلال خسته‌کنندهٔ مربوط به تغییر اول را می‌توان کاملاً بی‌اهمیت دانست ـ تازه، از پیشرفتی که بر اثر حذف محدودیت روی تغییراتی که تغییر ضرایب دیفرانسیل تابع در مورد آنها اندک است حاصل شده، صحبت نمی‌کنیم.

با اینکه اصرار دارم که دقت برهان یکی از الزامهای حل کامل مسأله است، با اینکه فقط مفاهیم آنالیز و یا مفاهیم حساب قابلیت پذیرش چنین دقتی را دارند هم مخالفم، من گمان می‌کنم که این نظر، که گاهی از طرف ریاضیدانان برجسته ابراز می‌شود، به کلی خطاست. چنین تفسیر یک جانبه‌ای از لزوم دقت، به سرعت به نادیده گرفته شدن تمام مفاهیمی می‌انجامد که از هندسه، مکانیک و فیزیک گرفته شده‌اند، به توقف جریان مواد و مصالح جدید از دنیای خارج منجر می‌شود و بالاخره، به رد ایدهٔ پیوستار و مفهوم عدد گنگ ختم می‌شود. اما در این صورت، با

از دست رفتن هندسه و فیزیک ریاضی، یکی از حیاتی‌ترین شریانهای ریاضیات قطع می‌شود! برعکس، من فکر می‌کنم که ایده‌های ریاضی از هر کجا که آمده باشند، خواه از جنبه‌های نظری و هندسه و خواه از طبیعت و علوم فیزیکی، مسأله‌ای پیش روی علوم ریاضی می‌گذارند که همان بررسی اصول پشت این ایده‌هاست و گنجاندن آنها در دستگاهی چنان ساده و کامل از اصول موضوع که دقیق بودن این ایده‌های جدید و کاربردشان در استنتاج به هیچ‌وجه مشکوکتر از همان مفاهیم قدیمی حساب نباشد.

برای مفهومهای جدید، حتماً علامتهای جدید می‌گذاریم و این علامتها را طوری انتخاب می‌کنیم که ما را به یاد آنچه که دلیل شکل‌گیری آن مفهوم بوده است بیندازد. مثلاً، شکلهای هندسی علامت و نشان‌دهندهٔ شهود ما از فضا هستند و همهٔ ریاضیدانها به‌همین منظور از آنها استفاده می‌کنند. کیست که همراه نابرابری مضاعف $a > b > c$ از تصویر خطی که سه نقطهٔ پشت سر هم روی آن هستند و نشان‌دهندهٔ ایدهٔ «بین» هستند استفاده نکند؟ کیست که هنگام اثبات دقیق قضیه‌ای دشوار دربارهٔ پیوستگی توابع و یا وجود نقطه‌های تجمع، چند پاره‌خط و مستطیل و دایرهٔ تو در تو نکشد؟ یا کیست که در هندسهٔ دیفرانسیل، در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل، در مبانی حساب تغییرات و سایر علوم ریاضی، از خیر نمایش میدانهای برداری، تصویر خانواده‌ای از خمها یا رویه‌ها و نقش مهم و اساسی آن بگذرد؟

نمادهای حساب، نمودارهایی هستند که نوشته می‌شوند و شکلهای هندسی، فرمولهای تصویری هستند. هیچ ریاضیدانی نمی‌تواند از این فرمولهای تصویری چشم بپوشد، همان‌طور که نمی‌تواند از گذاشتن و حذف پرانتزها و یا نمادهای تحلیلی دیگر صرف‌نظر کند.

به‌کار بردن علایم هندسی برای اثبات، دانش و تسلط کامل بر اصول موضوعهٔ پنهان در پس آنها را می‌طلبد و برای اینکه این شکلها به گنجینهٔ علامتهای ریاضی بپیوندند، لازم است که بررسی اصل موضوعی دقیقی دربارهٔ مفهومی که دربر دارند انجام شود؛ همان‌طور که وقتی دو عدد را جمع می‌کنیم، اصول حساب معین می‌کنند که چه رقمی را کجا باید گذاشت و کاربرد درست رقمها را نشان می‌دهند، کارکرد علامتهای هندسی را هم اصول حاکم بر مفاهیم هندسی و ترکیبهایشان تعیین می‌کنند.

یک شباهت دیگر بین تفکر هندسی و تفکر حسابی این است که بنا به عادت، نه در حساب و نه در هندسه، زنجیره‌ای از استدلالها را که از اصول موضوعه شروع می‌شود به‌کار نمی‌بریم. برعکس، مخصوصاً در اولین برخورد با مسأله و اولین تلاشها برای حل آن، از احساس اولیه‌مان که ناخودآگاه است و نادقیق و فقط بر پایهٔ نوعی اعتماد به برخی خواص نمادهای مربوط به حساب به‌وجود می‌آید، استفاده می‌کنیم که می‌توان بعداً آن را نادیده گرفت، همان‌طور که تصور هندسی در هندسه چنین است. به‌عنوان نظریهٔ حسابی‌ای که به‌طور دقیق با ایده‌ها و علامتهای هندسی کار می‌کند، می‌توانم به‌کار مینکوفسکی، هندسهٔ اعداد صحیح، اشاره کنم.

در اینجا، بد نیست که چند نکته دربارهٔ دشواریهایی که مسأله‌ها ممکن است پیش رو بگذارند و ابزار غلبه بر آنها بیاوریم.

اگر نتوانستیم مسأله‌ای را حل کنیم، علت معمولاً درک نادرست جایگاه مسأله به‌عنوان حلقه‌ای از زنجیرهٔ

مسأله‌های مرتبط با آن است. بعد از پیدا کردن این جایگاه، نه تنها خود این مسأله دست‌یافتنی‌تر می‌شود، اغلب روشهایی هم پیدا می‌شوند که می‌توانیم از آنها برای حل مسأله‌های مرتبط هم استفاده کنیم. معرفی مسیرهای مختلط انتگرال‌گیری به‌وسیلهٔ کوشی و مفهوم ایده‌آلها در نظریهٔ اعداد که به‌وسیلهٔ کومر معرفی شد، مثالهایی از این نوع هستند. این شیوهٔ یافتن روشهای کلی، بی‌شک عملیترین و مطمئنترین شیوهٔ ممکن است؛ چرا که کسی که بدون در ذهن داشتن مسأله‌ای معین در پی یافتن روش است، عمدهٔ کارش پوچ است و بیهوده.

من معتقدم که وقتی با مسأله‌های ریاضی سروکار داریم، در نظر گرفتن حالتهای خاص از تعمیم مهمتر است. تقریباً در همهٔ مواردی که بی‌نتیجه در پی پاسخ پرسشی هستیم، علت شکست در این حقیقت نهفته است که مسأله‌هایی ساده‌تر از آن که در پی حلش هستیم، یا اصلاً حل نشده‌اند و یا حلشان ناتمام است. در این صورت، همه‌چیز به پیدا کردن و حل کردن این مسأله‌های ساده‌تر به کمک ابزارهای تا حد ممکن کامل و مفاهیم قابل تعمیم بستگی دارد. این قانون، یکی از مهمترین ابزارهای تفوق بر دشواریهای ریاضیات است و به‌نظر من همیشه، هر چند ناخودآگاهانه، به‌کار برده می‌شود.

گاهی هم پیش می‌آید که راه‌حلی را با فرضهایی ناکافی به‌دست می‌آوریم و به‌همین دلیل شکست می‌خوریم. در این صورت، مسألهٔ جدیدی به‌وجود می‌آید: اثبات اینکه حل مسأله با فرضهای داده شده ممکن نیست. این اثباتهای عدم امکان، قدما را می‌آزرد؛ مثل وقتی که ثابت کردند نسبت طول وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به طول ضلعش نمی‌تواند گویا باشد. در دوره‌های بعد، این اثباتهای عدم امکان وجود راه‌حل هم به نوبهٔ خود جایگاه ممتازی پیدا کردند و به این ترتیب، مسأله‌های قدیمی و دشواری مثل اثبات اصل توازی، تربیع دایره و یا حل معادلهٔ درجهٔ پنج با استفاده از رادیکالها هم به‌شیوهٔ کاملاً قانع‌کننده و دقیقی حل شدند؛ هر چند نه به آن مفهوم که انتظار داشتیم. شاید همین حقیقت مهم است که در کنار سایر استدلالهای فلسفی و غیره، به این اعتقاد راسخ (که همهٔ ریاضیدانها در آن سهیم هستند، هر چند که هنوز ثابت نشده) منجر شده است که تکلیف هر مسألهٔ معین ریاضی حتماً به نوعی روشن می‌شود، یا به‌صورت پاسخی درخور به سؤال پرسیده شده و یا با برهانی برای حل‌ناپذیری که نشان می‌دهد که هر تلاشی در باب حل مسأله محکوم به شکست است. مسألهٔ حل نشدهٔ دلخواهی را، مثل اصمیت ثابت اویلر-ماسکه‌رونی[5] و یا وجود بی‌نهایت عدد اول به شکل $۱ + ۲^n$، در نظر بگیرید. هر قدر که مسأله‌ها برایمان دست‌نایافتنی به‌نظر برسند و هر قدر در مقابل این مسأله‌ها ناتوان باشیم، اعتقاد خلل‌ناپذیری داریم که حتماً حل مسأله با استفاده از چند روال کاملاً منطقی به‌دست خواهد آمد.

این اصل حل‌پذیری هر مسأله، صرفاً خاصیت ذاتی تفکر ریاضی است یا اینکه هر سؤالِ ذهن پاسخی دارد که از طبیعت ذهن نشأت می‌گیرد؟ فراموش نکنید که در علوم دیگر هم مسأله‌های قدیمی‌ای می‌بینیم که اثبات حل‌ناپذیری‌شان برای علم مربوطه مفید بوده است. من مسألهٔ حرکت دائم را مثال می‌زنم. پس از تلاش عبث برای ساخت ماشین با حرکت دائم، رابطه‌هایی که در صورت امکان و یا عدم امکان ساخت چنین ماشینی می‌بایست

۵. مقدار $\lim_{n\to\infty} ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} - \ln n$

بین نیروها برقرار می‌بود بررسی شد و این سؤال تغییریافته به کشف قانون پایستاری انرژی منجر شد که به نوبهٔ خود، توانست عدم امکان حرکت دائم را به آن صورتی که از ابتدا موردنظر بود توجیه کند.

اعتقاد به حل‌پذیری همهٔ مسأله‌های ریاضی، محرکی قوی برای کسانی است که در این رشته کار می‌کنند. دائماً ندایی از درون‌مان می‌شنویم: مسأله‌ای هست. حلش را پیدا کن. تو می‌توانی حل را با استدلال محض پیدا کنی، زیرا در ریاضیات «هرگز نخواهیم دانست» وجود ندارد.

• ترجمهٔ بردیا حسام

David Hilbert, Mathematical Problems, *Bull. AMS*, 8 (July 1902), pp. 437-479.

سرنوشت مسأله‌ای مشهور

ارشک حمیدی

لئونارد اویلر، ریاضیدان پرآوازهٔ سوئیسی، زمانی گفته است: «گاهی قلمم از ذهنم باهوشتر است.» در این گفتهٔ اویلر صداقت موج می‌زند. اویلر از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ اعصار است، صاحب بصیرتی شگرف در ریاضیات و پایه‌گذار چندین شاخه از ریاضیات بوده است. علاوه بر این، آثار او الهام‌بخش نسلهای متعددی از ریاضیدانان بوده‌اند، به‌طوری که لاپلاس، ریاضیدان معروف فرانسوی، به دانشجویانش پی‌درپی توصیه می‌کرده که «آثار اویلر را بخوانید، آثار اویلر را بخوانید، او استاد همهٔ ماست.» اویلر همچنین در جایی نوشته است [۱]: «من هیچ استدلال دیگری جز استقرای طولانی ندارم. به‌نظر می‌رسد که وقتی قانونی مثلاً در ۲۰ مورد پشت سر هم درست باشد، غیرممکن است در موردهای بعدی نادرست از آب درآید.» با اینکه این عقیدهٔ اویلر در میان ریاضیدانان هم‌دورهٔ او هم رایج بوده است، اما خودش جزء نخستین کسانی است که اهمیت یافتن اثبات برای حکمهایی را که از طریق استقرا به‌دست آمده‌اند گوشزد کرده‌اند. مثلاً، اویلر می‌دانسته که این ادعای فرما که اگر n عددی طبیعی باشد، $۲^{۲^n} + ۱$ عددی اول است درست نیست، زیرا خود او نخستین‌بار دریافته بود که

$$۲^{۲^۵} + ۱ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

مسلماً فرما با توجه به اینکه عددهای

$$۲^{۲^۱} + ۱, \quad ۲^{۲^۲} + ۱, \quad ۲^{۲^۳} + ۱, \quad ۲^{۲^۴} + ۱$$

اول‌اند چنین ادعایی را مطرح کرده است.

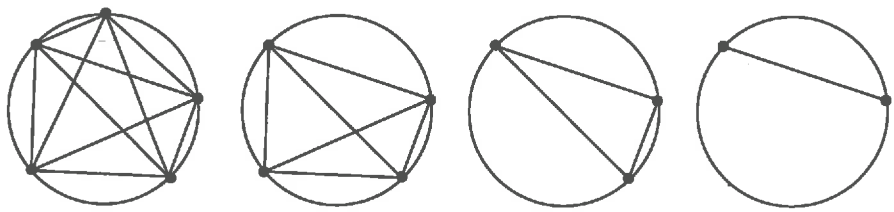
نمونهٔ مشهور دیگری که باز هم خود اویلر پیدا کرده است این است که مقدارهای چندجمله‌ای $x^۲ - x + ۴۱$ به‌ازای $x = ۱, ۲, \ldots, ۴۰$ عددهایی اول‌اند، اما مقدار این چندجمله‌ای به‌ازای $x = ۴۱$ برابر با $۴۱^۲$ است، که اول نیست.

هدف اصلی ما در این مقاله یافتن جواب مسألهٔ زیر است که نمونهٔ مشهور دیگری از آن دسته مسأله‌هاست که الگویی که در ابتدا به‌نظر می‌رسد درست از آب درنمی‌آید.

مسأله. n نقطهٔ ($n \geq ۲$) روی دایره‌ای انتخاب کرده‌ایم و وترهای میان هر دو تا از این نقطه‌ها را رسم کرده‌ایم. اگر هیچ سه‌تایی از این وترها یکدیگر را در یک نقطه درون دایره قطع نکنند، دایره به چند ناحیه تقسیم شده است؟

ممکن است قلم ما هم از ذهنمان باهوشتر باشد! بنابراین شکل چند حالت اول را می‌کشیم تا شاید الگویی مناسب بیابیم. در شکلهای ۱ (الف) تا ۱ (د) نقطه‌ها و وترها را به‌ترتیب در حالتهای $n = ۱$ تا $n = ۴$ کشیده‌ایم.

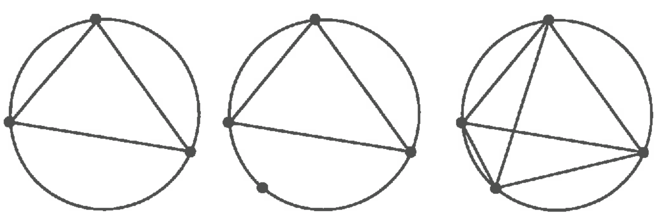
از روی شکلها به‌سادگی معلوم می‌شود که تعداد ناحیه‌ها به‌ترتیب برابر است با ۲، ۴، ۸ و ۱۶. بنابراین ممکن است حدس بزنیم که تعداد ناحیه‌ها در حالت کلی برابر است با 2^{n-1}.



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۱

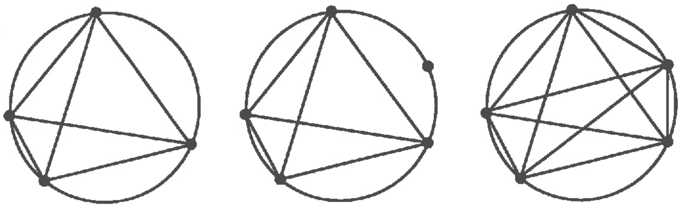
راهی برای اثبات این حدس استفاده از استقرای ریاضی است. مهمترین کار برداشتن گام استقرایی است. برای این منظور باید ببینیم که در هر مرحله ناحیه‌های جدید چگونه ایجاد می‌شوند و الگویی برای محاسبهٔ تعداد ناحیه‌ها براساس تعداد ناحیه‌های قبلی بیابیم. باز هم چند مرحلهٔ اول را بررسی می‌کنیم. تعداد ناحیه‌ها را در حالت کلی R_n بنامید. در شکل ۲ حالتی را نشان داده‌ایم که سه نقطه داریم و نقطهٔ چهارمی هم اضافه می‌شود. (شکل ۳ را ببینید) توجه کنید که پس از اینکه نقطهٔ چهارم اضافه می‌شود، سه وتر میان این نقطه و نقطه‌های قبلی اضافه می‌شود. این وترها ناحیهٔ مجاور به نقطهٔ چهارم را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند، پس به تعداد ناحیه‌های قبلی سه‌تا اضافه می‌کنند. یکی از این وترها یکی از وترهای قبلی را درون دایره قطع می‌کند، پس یکی از ناحیه‌های قبلی را به دو ناحیه تقسیم می‌کند و درنتیجه، به تعداد ناحیه‌های قبلی یکی اضافه می‌کند.



شکل ۲

اکنون فرض کنید که چهار نقطه داریم و نقطهٔ پنجمی هم اضافه می‌شود. توجه کنید که چهار وتر میان نقطهٔ پنجم و نقطه‌های قبلی اضافه می‌شود. این وترها ناحیهٔ مجاور به نقطهٔ پنجم را به پنج ناحیه تقسیم می‌کنند، پس به تعداد ناحیه‌های قبلی چهارتا اضافه می‌کنند. دوتا از این وترها هرکدام دوتا از وترهای قبلی را قطع می‌کنند. هربار که یکی از این وترها یکی از وترهای قبلی را قطع می‌کند یکی از ناحیه‌های قبلی را هم به دو ناحیه تقسیم می‌کند و درنتیجه، درکل تعداد ناحیه‌های قبلی چهارتا اضافه می‌شود.

به‌طور کلی، وقتی نقطه‌ای را اضافه می‌کنیم دو نوع ناحیه به‌وجود می‌آیند، یکی ناحیه‌هایی که مجاور به این



شکل ۳

نقطه‌اند و دیگری ناحیه‌هایی که از برخورد وترهای تازه رسم شده با وترهای قبلی به‌وجود می‌آیند. تعداد ناحیه‌های نوع اول $n+۱$ ناحیه است، پس به تعداد ناحیه‌های قبلی nتا اضافه می‌شود. هر یک از ناحیه‌های دیگر نظیر یکی از نقطه‌های قبلی و یکی از وترهای قبلی است، یعنی نظیر سه‌تا از نقطه‌های قبلی است. بنابراین، اگر $n \geq ۳$،

$$R_{n+۱} = R_n + n + \binom{n}{۳} \qquad (*)$$

به این ترتیب، مثلاً،

$$R_۶ = R_۵ + ۵ + \binom{۵}{۳} = ۲^{۵-۱} + ۵ + ۱۰ = ۳۱$$

اما انتظار داشتیم که $R_۶ = ۳۲$. البته جای نگرانی نیست، فقط تعداد ناحیه‌ها را درست حدس نزده‌ایم و می‌توانیم با استفاده از تساوی $(*)$ و استقرایی ساده ثابت کنیم که

$$R_n = n + \binom{n-۱}{۲} + \binom{n-۱}{۳} + \binom{n-۱}{۴}$$

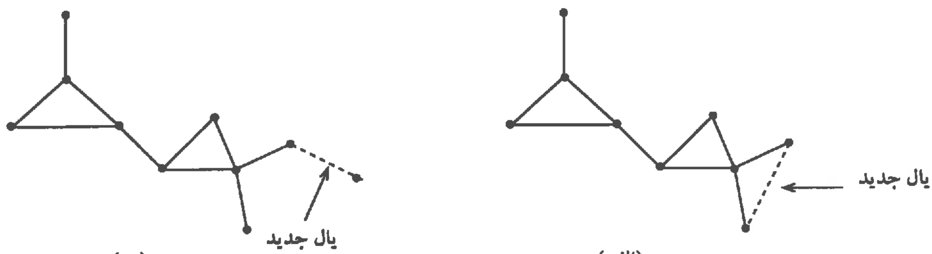
(در اینجا فرض کرده‌ایم که اگر $k > m$، $\binom{m}{k} = ۰$.)

راه‌حلی دیگر برای مسألهٔ موردنظر از قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید که دکارت از آن اطلاع داشته اما نخستین‌بار اویلر آن را ثابت کرده است.

قضیهٔ دکارت ـ اویلر. فرض کنید V نقطه در صفحه داریم که با E پاره‌خط طوری به هم وصل شده‌اند که می‌توان از طریق این پاره‌خطها از هر نقطه به‌هر نقطهٔ دیگر رفت. درضمن، پاره‌خطها یکدیگر را بجز در نقطه‌های مفروض قطع نمی‌کنند و نقطه‌ها فقط در یکی از دو سر پاره‌خطها قرار دارند. فرض کنید F تعداد ناحیه‌هایی باشد که در صفحه ایجاد شده‌اند. در این صورت $V - E + F = ۲$.

به‌سادگی می‌توانید این قضیه را به استقرا روی E ثابت کنید. درحقیقت، کافی است توجه کنید که وقتی یک یال اضافه می‌شود، یا هیچ رأسی اضافه نمی‌شود اما یک ناحیه اضافه می‌شود (شکل ۴ (الف) را ببینید) یا هیچ ناحیه‌ای اضافه نمی‌شود اما یک رأس اضافه می‌شود (شکل ۴ (ب) را ببینید).

توجه کنید که در مسألهٔ خودمان $n + \binom{n}{۴}$ نقطه داریم، n نقطه که همان نقطه‌های مفروض روی دایره‌اند و



(الف) (ب)

شکل ۴

$\binom{n}{۴}$ نقطهٔ دیگر که نقطه‌های تقاطع وترها هستند (هر چهار نقطه، نظیر یک نقطهٔ تقاطع وترها هستند). در هر نقطهٔ روی دایره $n + ۱$ پاره‌خط (یا کمان) و در هر نقطهٔ تقاطع وترها هم چهار پاره‌خط به هم می‌رسند. بنابراین تعداد پاره‌خطها (یا پاره‌خطها و کمانها) برابر است با $\frac{۱}{۲}n(n+۱) + ۲\binom{n}{۴}$. درنتیجه، بنابر قضیهٔ دکارت ـ اویلر، تعداد ناحیه‌های موردنظر برابر است با (ناحیهٔ بیرون دایره را حساب نکرده‌ایم)

$$\frac{۱}{۲}n(n+۱) + ۲\binom{n}{۴} - \left(n + \binom{n}{۴}\right) + ۱ = \binom{n}{۴} + \binom{n}{۲} + ۱$$

خودتان تحقیق کنید که این جواب با جوابی که قبلاً به‌دست آوردیم برابر است.

راه‌حل سوم راه‌حلی سرراست و ترکیبیاتی است. وترها را یکی‌یکی اضافه می‌کنیم. در ابتدا که یک ناحیه داریم، یعنی خود دایره، اگر یک وتر اضافه کنیم یک ناحیهٔ دیگر اضافه می‌شود. هر وتری که اضافه می‌کنیم به تعداد وترهایی که قطع می‌کند ناحیه اضافه می‌کند. البته این تعداد به وتری که رسم می‌کنیم بستگی دارد، اما در آخر کار به‌ازای هر وتر یک ناحیهٔ جدید و به‌ازای هر نقطهٔ تقاطع وترها هم یک ناحیهٔ جدید داریم. تعداد وترها برابر با $\binom{n}{۲}$ و تعداد نقطه‌های تقاطع وترها برابر با $\binom{n}{۴}$ است. پس تعداد کل ناحیه‌ها برابر است با $\binom{n}{۴} + \binom{n}{۲} + ۱$.

مرجع

۱. پرویز شهریاری، روش استقرای ریاضی، سازمان چاپ و نشر مشهد و رز نشر، ۱۳۶۸.

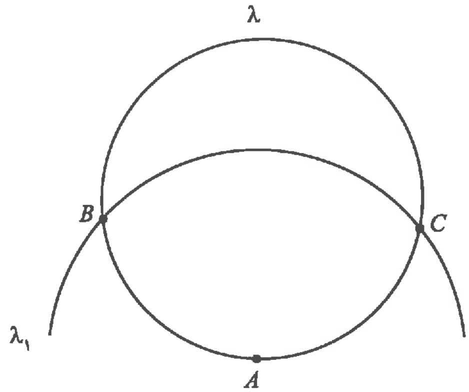
راه‌حل ناپلئون برای یافتن مرکز دایره

امیرعباس عابدی

در این مقاله مسأله‌ای قدیمی را مطرح می‌کنیم و راه‌حلی برای آن می‌آوریم که منسوب به ناپلئون بناپارت است.

مسأله. دایرهٔ λ در صفحه رسم شده است و مرکز دایره مشخص نیست. تنها با استفاده از پرگار، مرکز دایره را مشخص کنید.

راه‌حل. روی دایرهٔ λ، نقطهٔ دلخواهی مانند A انتخاب می‌کنیم و به مرکز A دایره‌ای مانند λ_1 چنان رسم می‌کنیم که با دایرهٔ λ متقاطع باشد و محل تلاقی دایره‌های λ و λ_1 را B و C می‌نامیم (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱

واضح است که

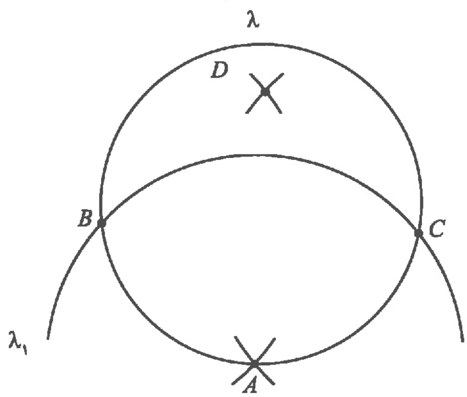
$$AB = AC$$

حال به مرکز B و به شعاع BA دایرهٔ λ_2 و به مرکز C و به شعاع CA دایرهٔ λ_3 را رسم می‌کنیم. معلوم است که این دو دایره در نقطهٔ A مشترک‌اند و چون نقطه‌های A و B و C بر یک استقامت نیستند، این دایره‌ها بر هم مماس نیستند؛ پس متقاطع‌اند. نقطهٔ تقاطع دوم را D می‌نامیم (شکل ۲ را ببینید).

معلوم است که

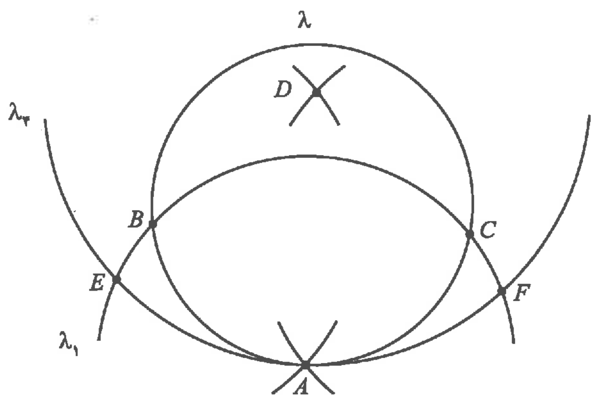
$$AB = AC = BD = CD$$

یعنی چهارضلعی $ABCD$ لوزی است. حال به مرکز D و به شعاع DA دایرهٔ λ_4 را رسم می‌کنیم و محلهای



شکل ۲

تلاقی دو دایرهٔ $\lambda_۱$ و $\lambda_۴$ را E و F می‌نامیم (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳

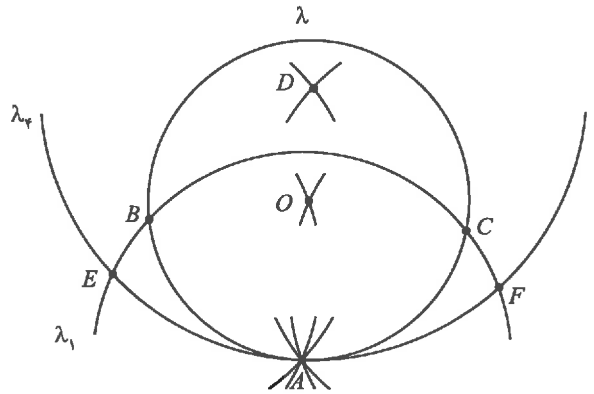
معلوم است که

$$DA = DE = DF$$

چون نقطه‌های E و F روی دایرهٔ $\lambda_۱$ قرار دارند،

$$AE = AF$$

حال به مرکز E و به شعاع EA دایرهٔ $\lambda_۵$ و به مرکز F و به شعاع FA دایرهٔ $\lambda_۶$ را رسم می‌کنیم. با استدلالی مشابه استدلال متقاطع بودن دو دایرهٔ $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$، ثابت می‌شود که دایره‌های $\lambda_۵$ و $\lambda_۶$ هم در نقطه‌ای غیر از A متقاطع‌اند. نقطهٔ تقاطع دیگر را O می‌نامیم (شکل ۴ را ببینید).

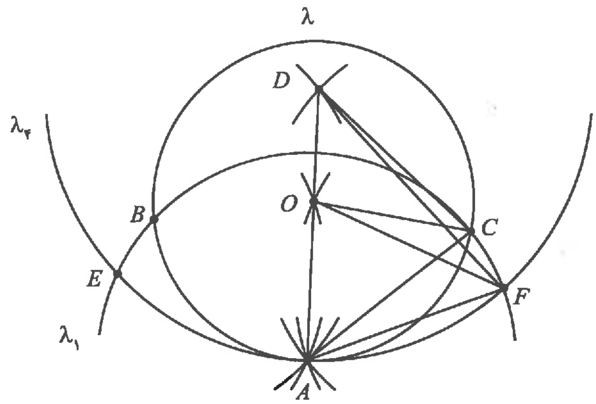


شکل ۴

معلوم است که

$$AE = AF = EO = FO$$

یعنی چهارضلعی $AEOF$ لوزی است. نقطهٔ O، همان مرکز دایرهٔ λ است [۱]. برای اثبات این موضوع به شکل۴ مثلثهای FAO، DAF، OAC و CAD را اضافه می‌کنیم (شکل ۵ را ببینید).



شکل ۵

چون چهارضلعی $AEOF$ لوزی است و AO قطر آن است، AO نیمساز زاویهٔ EAF است. از طرفی $DA = DE = DF$ و $AE = AF$، پس دو مثلث DAE و DAF به حالت تساوی سه ضلع با هم همنهشت‌اند. بنابراین $\angle DAE = \angle DAF$، یعنی AD نیمساز زاویهٔ EAF است (برای شلوغ نشدن شکل ۵، بعضی از پاره‌خطها در آن رسم نشده‌اند). از یکتا بودن نیمساز زاویهٔ EAF نتیجه می‌شود که نقطه‌های A و O و D بر یک استقامت‌اند.

چون $AF = FO$ و $DA = DF$، دو مثلث FAO و DAF متساوی‌الساقین‌اند و چون

$$\angle DAF = \angle OAF$$

زاویه‌های روبه‌رو به دو ساق در این دو مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند. پس این دو مثلث به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و درنتیجه

$$\frac{AF}{AO} = \frac{AD}{AF}$$

یعنی $AF^{۲} = AO \cdot AD$ و چون $AF = AC$، پس $AC^{۲} = AO \cdot AD$. بنابراین

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AO}{AC}$$

و چون $\angle DAC = \angle OAC$، دو مثلث OAC و CAD به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین آنها با هم متشابه‌اند. پس $\angle OCA = \angle DAC$ و چون $\angle DAC = \angle OAC$، پس $\angle OCA = \angle OAC$؛ یعنی مثلث OAC متساوی‌الساقین است و درنتیجه $OA = OC$. با استدلالی مشابه، می‌توان ثابت کرد که $OA = OB$؛ پس $OA = OB = OC$ و درنتیجه، نقطهٔ O روی عمودمنصف هر یک از ضلعهای مثلث ABC است. پس O محل همرسی عمودمنصفهای مثلث ABC است که همان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

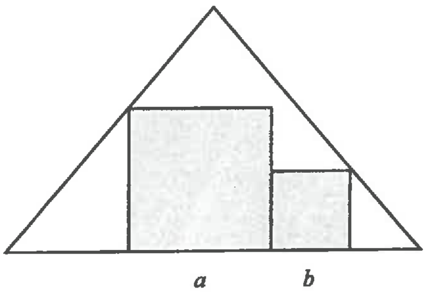
مرجع

۱. کاظم فائقی، ریاضی برای سرگرمی، انتشارات میر (گوتنبرگ)، تهران، ۱۳۶۳.

شکلهای مجموع ـ ثابت

لی تین

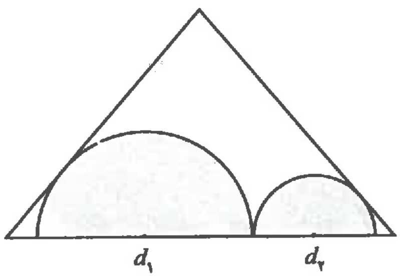
دو مربع درون مثلثی متساوی‌الساقین در نظر بگیرید (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱

وقتی یکی از این مربعها بزرگتر می‌شود دیگری کوچکتر می‌شود. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموع طول ضلعهای این دو مربع ثابت می‌ماند.

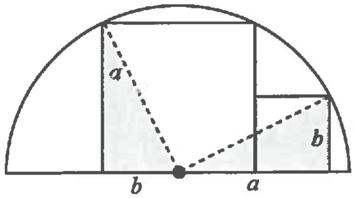
همین مطلب در مورد دو نیمدایرهٔ مماس بر هم درون مثلثی متساوی‌الساقین درست است.



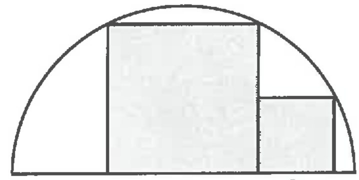
شکل ۲

در اینجا مجموع قطرها ثابت می‌ماند. (توجه کنید که مرکز نیمدایره‌ها روی قاعدهٔ مثلث است.) این مسأله هم تمرینی ساده است.

مسأله‌ای کمی دشوارتر این است که ثابت کنیم مجموع مربعهای طولهای دو مربع که درون نیمدایره‌ای محاط شده‌اند (شکل ۳ را ببینید) مقداری ثابت است.



شکل ۴

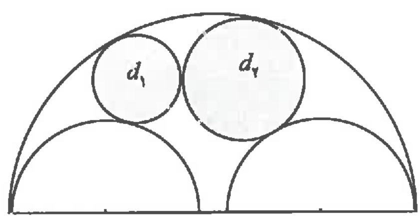


شکل ۳

برای اینکه ببینیم چرا چنین است، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت که طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ آنها a و b است رسم می‌کنیم (شکل ۴ را ببینید). این کار ممکن است، زیرا ضلعهای پایینی مربعها پاره‌خطی به‌طول $a+b$ می‌سازند که می‌توان آن را به پاره‌خطهایی به طولهای a و b تقسیم کرد.

طول وتر هر دو مثلث برابر است با $\sqrt{a^۲+b^۲}$ و این وترها بر هم عمودند. بنابراین رأس مشترک این مثلثها مرکز نیمدایره است و شعاع نیمدایره برابر با $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

اکنون آخرین مثالمان را می‌آوریم که احتمالاً جالبترین آنها نیز هست (این مسأله از خودم است). دو نیمدایرهٔ کوچک و برابر داریم که مرکزهایشان روی قطر نیمدایرهٔ بزرگ قرار دارند. دایره‌های سایه‌دار محکم جا رفته‌اند و جایی برای حرکت ندارند. در این صورت $d_۱+d_۲$ مقداری ثابت است.

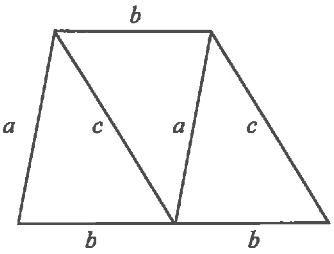


شکل ۵

چرا؟ اثباتی زیبا برای این مطلب وجود دارد. فرض کنید شعاع نیمدایره‌های کوچک برابر با r و شعاع نیمدایرهٔ بزرگ برابر با R باشد. این شعاعها تغییر نمی‌کنند، اما شعاعهای $r_۱$ و $r_۲$، که به‌ترتیب برابرند با $\frac{d_۱}{۲}$ و $\frac{d_۲}{۲}$ (شکل ۵ را ببینید)، تغییر می‌کنند.

ادعا می‌کنم که همواره $R = r + r_۱ + r_۲$. برای اینکه دلیل این مطلب را روشن کنیم شکل را «از آخر به اول» می‌کشیم. کاغذی سفید بردارید و سه مثلث همنهشت بکشید که طول ضلعهایشان برابر است با $a = r + r_۱$، $b = r_۱ + r_۲$ و $c = r + r_۲$ (شکل ۶ را ببینید). سپس دایره‌هایی به شعاعهای r، $r_۱$ و $r_۲$ و باز هم r رسم کنید که مرکزهایشان در رأسهای این مثلثها، بجز رأس مشترک آنها، باشند (شکل ۷ را ببینید).

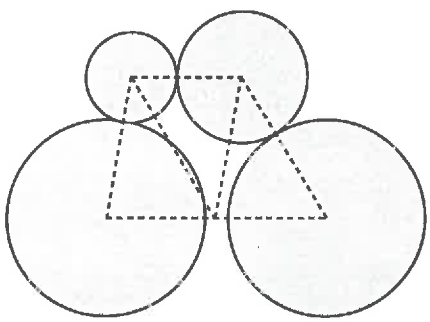
به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که شعاعها و طول ضلعها طوری انتخاب شده‌اند که این چهار دایره (بجز دایره‌هایی که شعاعشان r است) بر یکدیگر مماس باشند. علاوه بر این، این دایره‌ها بر دایره‌ای که شعاعش برابر است با



شکل ۶

$R = r + r_1 + r_2$ و مرکزش رأس مشترک مثلثهاست مماس است و به این ترتیب به همان شکلی که در ابتدا داشتیم می‌رسیم (یعنی شکل ۵).

خوانندگان با دقت می‌توانند گلایه کنند که ادعایم را ثابت نکرده‌ام. چیزی که ثابت کرده‌ام این است که اگر $R = r + r_1 + r_2$، می‌توان شکل موردنظر را رسم کرد، اما عکس این مطلب را ثابت نکرده‌ام. استدلال زیر راه‌حل را کامل می‌کند. فرض کنید $R \neq r + r_1 + r_2$. در این صورت (مثلاً) r_1 را تغییر می‌دهیم و r'_1ای به‌دست می‌آوریم که $R = r + r'_1 + r_2$. پیش از این ثابت کردیم که می‌توان درون دایره‌ای به شعاع R دایره‌هایی به شعاعهای r، r_1، r_2 و r به همان شکلی که می‌خواهیم رسم کرد. اکنون دو تا شکل داریم که در آنها همهٔ دایره‌ها بجز یکی برابرند؛ این هم ممکن نیست، زیرا «حفره» اندازهٔ دایره‌ای را که باید درون این حفره جا برود به‌طور یکتا مشخص می‌کند.



شکل ۷

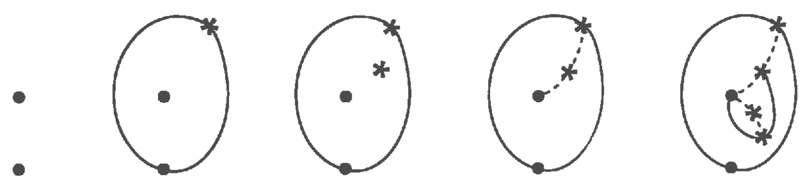
• ترجمهٔ نامدار بامداد

Li Tien, Constant-Sum Figures, *Math. Intelligencer*, Vol. 23, No 2, 2001, pp. 15-16.

بازی جوانه‌ها

سید عباس موسوی

بازی جوانه‌ها در سال ۱۹۶۷ به‌وسیلهٔ دو ریاضیدان، جان کانوی و مایکل پترسون، در دانشگاه کمبریج ابداع شد. قواعد این بازی ساده‌اند و برای انجام آن، فقط به کاغذ و قلم احتیاج دارید. برای شروع بازی، باید چند نقطه روی صفحهٔ کاغذ بگذارید. هر یک از بازیکنها، در نوبت خودش، دو نقطه از این نقطه‌ها را با یک خم به هم وصل می‌کند و نقطهٔ جدیدی روی این خط می‌گذارد. هیچ خمی نباید خمهای قبلی را قطع کند و خم، می‌تواند نقطه‌ای را به خودش وصل کند؛ اما هیچ‌کدام از نقطه‌ها، نباید به بیش از سه خط وصل شده باشد. بازندهٔ بازی کسی است که نتواند حرکتی انجام بدهد. در شکل ۱ بازی‌ای را می‌بینید که در آن، بازیکن دوم برنده شده است (حرکتهای نفر دوم با خط‌چین نشان داده شده است).

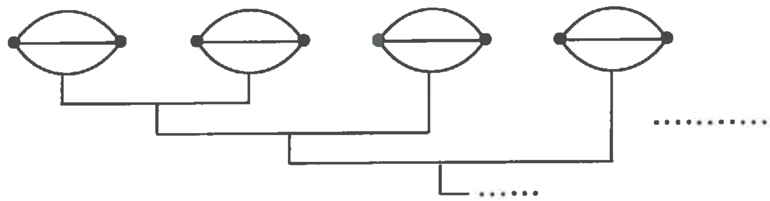


شکل ۱

در نگاه اول، ممکن است به‌نظر برسد که چون تعداد نقطه‌ها در هر مرحله بیشتر می‌شود، بازی تمام نمی‌شود. اما با توجه به اینکه حداکثر سه خم می‌توانند به یک نقطه وصل شوند و هر حرکت دو امکان اتصال را از بین می‌برد و فقط یک محل اتصال جدید ایجاد می‌کند، بازی حتماً تمام می‌شود. درواقع، اگر در پایان بازی l نقطهٔ زنده (یعنی نقطه‌ای که همهٔ محلهای اتصالش پر نشده است) وجود داشته باشند و بازی با n نقطه شروع شده باشد، بازی حداکثر $3n - l$ مرحله طول کشیده است (چرا؟) و چون در پایان بازی دست‌کم یک نقطهٔ زنده وجود دارد، بازی‌ای که با n نقطه شروع شده باشد، حداکثر $3n - 1$ مرحله طول می‌کشد. در شکل زیر، طرحی می‌بینید که می‌توان از آن برای ساختن بازی‌ای با حداکثر طول ممکن (با هر تعداد نقطهٔ شروع) استفاده کرد.

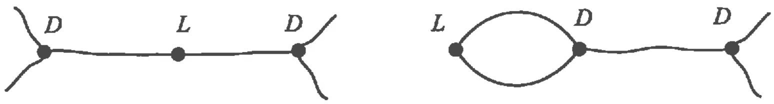
برای برنده شدن در این بازی چه باید کرد؟ بدون شک، این که کدام‌یک از بازیکنها برنده می‌شود، به زوج یا فرد بودن تعداد حرکتهای بازی وابسته است. پس اگر بازیکنی بتواند تعداد کل حرکتها را به نفع خودش کنترل کند، برنده خواهد شد.

برای درک چگونگی کنترل تعداد حرکتها، به وضعیت پایانی بازی نگاه می‌کنیم. فرض کنید بازی با n نقطه شروع



شکل ۲

شده باشد و در m حرکت تمام شده باشد. در این صورت، در پایان بازی $m + n$ نقطه داریم و تعداد محلهای اتصال آزاد، که آن را با r نشان می‌دهیم، برابر است با $۳n - m$؛ چون از اول $۳n$ محل اتصال داریم و هر حرکت، یک محل اتصال اضافه می‌کند و دو محل را از بین می‌برد. در پایان بازی، هر نقطهٔ زنده حداکثر یک محل اتصال دارد (در غیر این صورت، می‌توانیم نقطه را به خودش وصل کنیم) و دو نقطهٔ مرده به یکی از صورتهای زیر وجود دارند (در شکل، نقطهٔ زنده را با L و نقطهٔ مرده را با D مشخص کرده‌ایم).



شکل ۳

درضمن، هیچ نقطهٔ مرده‌ای نمی‌تواند به دو نقطهٔ زنده وصل باشد (در غیر این صورت، می‌توانیم این دو نقطه را به هم وصل کنیم). به نقطه‌های مرده‌ای که همسایهٔ هیچ نقطهٔ زنده‌ای نیستند، نقطهٔ رها می‌گوییم. در این صورت، تعداد نقطه‌های رها، که آن را با p نشان می‌دهیم، برابر است با

$$(m+n) - (r - ۲r) = (m+n) - ۳(۳n - m)$$
$$= ۴m - ۸n$$

پس

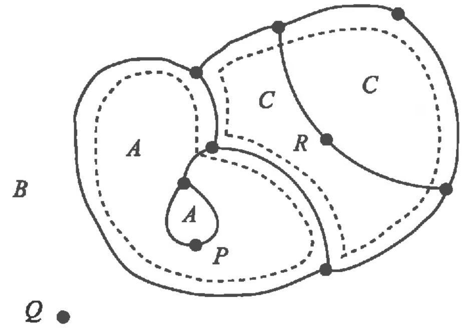
$$m = ۲n + \frac{۱}{۴}p$$

درنتیجه،

- تعداد حرکتهای بازی، حداقل $۲n$ است (آیا می‌توانید بازی‌ای با این تعداد حرکت پیدا کنید؟)
- تعداد نقطه‌های رها، مضرب ۴ است.
- اگر طی بازی به‌نحوی مشخص شود که در پایان بازی دست‌کم p نقطهٔ رها وجود خواهد داشت، تعداد حرکتهای بازی دست‌کم $۲n + \frac{۱}{۴}p$ خواهد بود. علاوه بر این، از قبل می‌دانیم که اگر طی بازی به‌نحوی

مشخص شود که در پایان بازی دست‌کم l نقطهٔ زنده وجود خواهد داشت، بازی در حداکثر $3n - l$ حرکت تمام می‌شود. با این حساب، با ایجاد نقطه‌های رها، بازی طولانیتر می‌شود و با تولید نقطه‌هایی که در پایان بازی زنده می‌مانند، می‌توان بازی را کوتاه کرد.

برای تبدیل یک نقطه به نقطه‌ای رها، می‌توان همسایه‌های آن را کشت و برای تخمین تعداد نقطه‌های زنده در پایان بازی، راه ساده‌ای وجود دارد: اگر ناحیه‌ای با خمها محصور شده باشد و نقطهٔ زنده‌ای در داخل آن وجود داشته باشد، در پایان بازی هم نقطهٔ زنده‌ای در آن ناحیه وجود خواهد داشت (چرا؟). مثلاً، در شکل زیر، نقطهٔ P در ناحیهٔ A، نقطهٔ Q در ناحیهٔ B و نقطهٔ R در ناحیهٔ C زنده هستند:



شکل ۴

پس این بازی که با چهار نقطه شروع شده و یک نقطهٔ رها دارد، در پایان دست‌کم سه نقطهٔ زنده هم خواهد داشت؛ پس این بازی، در حداکثر ۳ − ۴ × ۳ حرکت و حداقل $\frac{1}{4}$ + ۴ × ۲ حرکت تمام می‌شود و درنتیجه، دقیقاً در ۹ حرکت تمام می‌شود و برندهٔ آن هم بازیکن اول است.

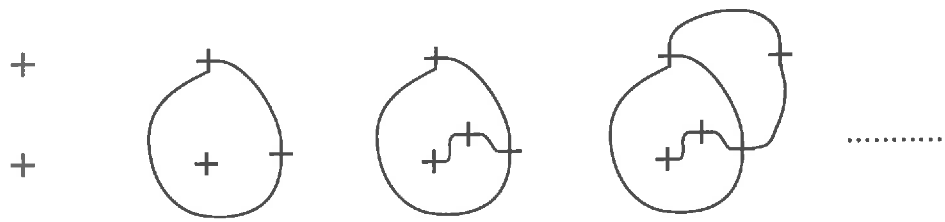
با استفاده از این روش و بررسی حالتهای اولیهٔ مختلف بازی، می‌توانیم بازیهایی را که با تعداد کمی از نقطه‌های اولیه شروع می‌شوند بررسی کنیم. جدول زیر، نتیجهٔ این بررسیها را برای بازیهایی که با کمتر از هفت نقطه شروع می‌شوند نشان می‌دهد.

تعداد نقطه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶
بازیکن برنده	دوم	دوم	اول	اول	اول	دوم
حداقل تعداد حرکتها	۲	۴	۷	۹	۱۱	۱۴

آیا می‌توانید این بازیها را پیدا کنید؟

در پایان، بازی‌ای مشابه بازی جوانه معرفی می‌کنیم که با کمی دقت، می‌توانید استراتژی‌ای برای برنده شدن در

آن پیدا کنید. فرض کنید که به‌جای نقطه‌های اولیه، چند صلیب در صفحه وجود دارد و هر مرحلهٔ بازی، عبارت است از وصل کردن بازویی از یک صلیب به بازویی از صلیبی دیگر یا همان صلیب و گذاشتن صلیبی جدید روی خمی که دو بازو را به هم وصل می‌کند. در شکل زیر، نمونه‌ای از این بازی را می‌بینید.



شکل ۵

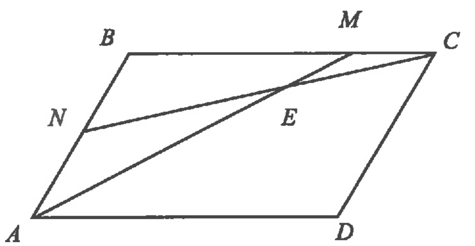
به‌نظر شما، اگر در بازی جوانه‌ها حداکثر تعداد محلهای اتصال را از ۳ به ۴ تبدیل کنیم، به همین بازی می‌رسیم؟

از باب تفریح

۱. سی نفر در مسابقه‌ای شرکت کرده‌اند. نفر اول ۸۰ امتیاز و نفر دوم ۶۰ امتیاز گرفته است، امتیاز نفر سوم میانگین امتیازهای نفرات اول و دوم است و امتیاز هر یک از نفرات بعدی میانگین امتیازهای نفرات پیش از اوست. امتیاز نفر آخر چقدر است؟

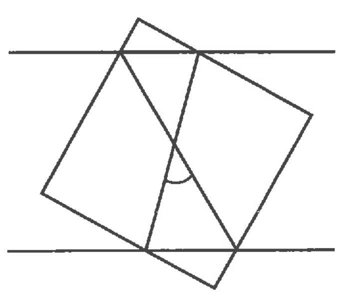
۲. آیا می‌توان چهار رقم به‌سمت راست عدد ۹۹۹۹ طوری اضافه کرد که عدد هشت‌رقمی به‌دست آمده مربع کامل باشد؟

۳. در شکل زیر $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و $AM = CN$. ثابت کنید نیمساز زاویهٔ AEC از نقطهٔ D می‌گذرد.



۴. ثابت کنید در میان هر ۱۸ عدد طبیعی سه‌رقمی متوالی دست‌کم یکی بر مجموع رقمهایش بخش‌پذیر است.

۵. در شکل زیر عرض نوار با طول ضلع مربعی که روی نوار قرار گرفته است برابر است. اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده را حساب کنید.



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۸)

المپیاد چهل و پنجم، المپیاد بیست و یکم

یحیی تابش

برگزیدگان بیست و یکمین المپیاد ملی ریاضی در قالب تیمی شش‌نفره، در چهل و پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی که از ۴ تا ۱۸ جولای ۲۰۰۴ در شهر آتن (یونان) برگزار شد، شرکت کردند.

المپیادهای دانش‌آموزی، به‌ویژه المپیاد ریاضی، جایگاه ویژه‌ای در بستر توسعهٔ علمی یافته است، هر چند که پله اول آن باشد. المپیاد ریاضی در سطح ملی، همه‌ساله هزاران دانش‌آموز را به یک رقابت سالم علمی فرا می‌خواند که بر اثر آن، دانش‌آموزان علاقه‌مند به آموزشهای فوق برنامه رو می‌آورند که این خود دستاورد ارزشمندی محسوب می‌شود. برگزیدگان مسابقات ملی نیز در فضایی که به یک مدرسهٔ ریاضیات می‌ماند، آموزش ویژه می‌بینند، که صرفاً هدف آن تربیت گلادیاتورهای مسأله حل کن برای رقابت در المپیاد بین‌المللی نیست، بلکه به تربیت ریاضی ذهنهای مستعدی می‌پردازد که در التذاذ ریاضی شریک شده‌اند و این فرصت را مغتنم شمرده‌اند تا پله‌های بعدی پیشرفت را سریعتر و سهلتر طی کنند.

المپیادیها در ادامهٔ تحصیل نیز به مدارج عالی رسیده‌اند، گروهی در دورهٔ دکتری در داخل کشور مشغول تحصیل‌اند که موجب رونق هر چه بیشتر این دوره شده‌اند، تعدادی که درجهٔ دکتری خود را اخذ کرده‌اند در داخل کشور به فعالیتهای آموزشی و پژوهشی مشغول‌اند، و بعضی از آنان نیز که در خارج از کشور به فعالیتهای پژوهشی مشغول‌اند خوش درخشیده و نوید دستیابی به دستاوردهایی ارزنده در سطح جهانی را می‌دهند. این‌گونه است که قصهٔ مکرر المپیاد همه‌ساله سرشار از تازگیهاست.

شهر دلفی در شمال یونان که معبد آپولو، خدای عشق و موسیقی (فرهنگ و همسازی)، را از روزگار باستان درکنار خود جای داده، سرپرستان تیمهای المپیاد ریاضی ۸۵ کشور را فراخوانده بود که دور از غوغای شهرهای بزرگ و فراسوی دسترسی دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد به مشاوره، به طرح مسأله‌های مسابقه بپردازند. هر کشور می‌تواند حداکثر ۶ مسأله را تا زمانی معین به دبیرخانه علمی المپیاد پیشنهاد کند وکمیتهٔ علمی حدود ۲۵ مسأله از بین این مسأله‌ها را به جمع سرپرستان ارائه می‌کند که در ظرف یکی دو روز ۶ مسأله را برای دو جلسه مسابقهٔ ۴/۵ ساعته در دو روز متوالی برگزینند. در این بین، بحثهای کارشناسی بسیار دقیقی با رعایت پروتکلهای ویژه درمی‌گیرد، مسأله‌ها از لحاظ موضوعی و از لحاظ دشواری و آسانی دسته‌بندی می‌شوند و با وسواس خاصی شش مسأله که همهٔ موضوعات موردنظر را دربر گیرند و طیف مناسبی از مسائل آسان تا دشوار را شامل شوند، با رأی اکثریت برگزیده می‌شوند. در سالهای اخیر از طرف کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی کشورمان نیز این فرصت غنیمت شمرده شده و همه ساله ۶ مسأله برای کمیتهٔ علمی بین‌المللی ارسال می‌شود. ظهور مسأله‌های هر کشور

در لیست برگزیدهٔ ۲۵ مسألهای خود اعتباری محسوب می‌شود. سال گذشته ما دو مسأله در این لیست داشتیم و امسال سه مسأله! از این سه مسأله یکی از مسأله‌ها به‌عنوان مسألهٔ ششم برگزیده شد. مسألهٔ ششم علی‌الاصول دشوارترین مسألهٔ مسابقه است. این دومین باری بود که یکی از مسأله‌های پیشنهادی ما در بین شش مسألهٔ نهایی ظاهر می‌شد. هرچند که به لحاظ دشواری زیاد این مسأله، امیدی به اینکه امتیازی برای دانش‌آموزانمان محسوب شود نمی‌رفت (و درواقع نیز چنین شد). ولی این امر خود بسیار اعتبارآفرین است و موجب اعتماد به نفس هر چه بیشتر فعالان کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی درکشورمان خواهد شد.

آتن در فرهنگ یونان باستان خدای خرد است، ولی شهر آتن دانش‌آموزان را در خود جای داده بود تا همچون روزگار باستان که فلاسفه و شعرا و زورمندان در پای کوه المپ به بازیها و رقابتهای سالانه می‌پرداختند، در آستانهٔ بازیهای المپیک ۲۰۰۴ که در چند هفتهٔ آینده در یونان برگزار می‌شود، المپیاد ریاضی نیز مکمل تاریخی بازیها باشد. درواقع کوه المپ واژهٔ المپیک و المپیاد را در عصر جدید نیز به ارمغان آورد تا بازیها و رقابتهایی را تداعی کند که قبل از هر چیز تأکید بر صلح و دوستی داشته باشند.

پس از دو روز آزمون و مسابقه‌ای سخت و نفس‌گیر، سرپرستان نیز از دلفی به آتن باز آمدند تا با بررسی ورقه‌های امتحانی دانش‌آموزان با گروههای ارزیابی‌کننده همکاری کنند. بازیابی دستاوردهای دانش‌آموزان زبده از لابه‌لای ورقه‌های امتحانی آنان، که در پاسخ به مسأله‌های بس دشوار داده شده‌اند، و ارزیابی و داوری دقیق آنها نیز بسیار دشوار است. این کار چند روزی ساعتهای زیادی از روز و شب را به خود اختصاص می‌دهد، تا بالاخره نتیجهٔ کار همهٔ دانش‌آموزان ارزشیابی و به‌صورت کمی رده‌بندی می‌شود و بعد مدالها زینندهٔ قامتهای افراشته. حاصل تلاش بچه‌های ما یک مدال طلا و ۵ مدال نقره به قرار زیر بود:

- بهزاد مهرداد از تهران با ۳۳ امتیاز، مدال طلا.
- محمدباقر ایرجی ازگرگان با ۳۱ امتیاز، مدال نقره.
- عادل جوانمرد از اصفهان با ۲۷ امتیاز، مدال نقره.
- علی‌اکبر دائمی از تهران با ۳۱ امتیاز، مدال نقره.
- عرفان صلواتی از تهران با ۲۶ امتیاز، مدال نقره.
- محمد قراخانی از شهر ری با ۳۰ امتیاز، مدال نقره.

مرز برش نمرات برای تعیین رنگ مدالها همه‌ساله برحسب توزیع نمرات دانش‌آموزان تعیین می‌شود. امسال مرز برش برای طلا، ۳۲ امتیاز بود، سه تا از بچه‌ها با ۳۱ و ۳۰ امتیاز پشت مرز طلا ماندند ولی در مجموع عملکرد تیم بسیار درخشان بود. به‌ویژه پس از دو سه سالی که از بین ده تیم برگزیده خارج شده بودیم مجدداً با مجموع ۱۷۸ امتیاز در جایگاه نهم قرار گرفتیم که خود اعتباری بس تحسین‌برانگیز است. جالب اینکه بچه‌ها کمترین امتیاز را از

همان مسألهٔ ششم که خودمان پیشنهاد کرده بودیم آوردند، که خود اعتباری برای حیثیت ملی ما شد، زیرا اصول را فدای هیچ‌چیز نکرده‌ایم، کاری که عدم رعایت آن گاهی موجب بی‌اعتباری سایرین می‌شود.

در رده‌بندی تیمی (که درواقع غیررسمی است، چه المپیاد رقابتی فردی محسوب می‌شود نه رقابتی بین ملتها) تیم ما در جایگاه نهم قرارگرفت و چین با ۲۲۰ امتیاز اول، امریکا با ۲۱۲ امتیاز دوم و روسیه با ۲۰۵ امتیاز سوم شد. البته جایگاه ما نیز با اعتبار تلقی می‌شود و باید به بچه‌های عضو تیم دست‌مریزاد گفت که نهایت تلاش خود را کردند و نشان دادند که دانش و توانایی ویژه‌ای دارند، چه اوراق امتحانی آنان اکثر مواقع تحسین گروههای ارزیابی‌کننده را برانگیخت. با غوری در ورقهٔ امتحانی بچه‌ها به‌ویژه باید عرفان صلواتی را تحسین کرد. عرفان هرچند که کمترین امتیاز را در تیم کسب کرد، ولی آنچه که بر روی برگهٔ امتحانی خود ثبت کرده است نشان‌دهندهٔ دانش عمیق، قدرت ذهنی و توانایی برجستهٔ ریاضی اوست؛ چشم به عرفان دوخته‌ایم تا شاهد موفقیتهای روزافزون او در بازگشودن رمز و راز ناشناخته‌ها باشیم، به‌عون الله.

سرپرست تیم المپیاد ریاضی کشورمان امسال نیز دکتر آرش رستگار بود که خود المپیادی بوده و در سال ۱۹۹۱ در المپیاد بین‌المللی ریاضی که درکشور چین برگزار شده بود مدال نقره گرفته است. او پس از اخذ درجهٔ دکتری از دانشگاه پرینستن در داخل کشور مشغول آموزش و پژوهش است. آرش را امید نقشینه وکسری علیشاهی همراهی می‌کردند که هر دو نیز المپیادی بوده‌اند، با مدالهای برنز و طلا، و هر دو در حال حاضر دانشجوی دورهٔ دکتری ریاضی در داخل کشورند. این ترکیب نیز از عرفان صلواتی تا دکتر رستگار خود طیف مناسبی ساخته است که پایداری فرایند المپیاد همراه با دستاوردهای مثبت آن را نشان می‌دهد.

یونان در دوران باستان سرزمین ریاضیات محسوب می‌شده است. هرچند که ریاضیات به‌عنوان وسیلهٔ تربیت فکر که هارمونی درونی دارد ابزاری برای تربیت فلاسفه بوده، اما امروزه نیز در فرایند جهانی شدن باز هم یونان برادریِ فیثاغورسی را سنگ بنای توسعهٔ پایدار قرار داده است و المپیاد چهل و پنجم نویدبخش آن است که تلاش سنگین بچه‌های ما همچنان پویاست و دستاوردهای مثبت آن همهٔ ما را به همراهی و پشتیبانی هر چه بیشتر فرایند المپیاد می‌خواند.

حل کردن مسأله‌های المپیادی مستلزم تلاش سنگینی است که دانش و بینش ریاضی سطح بالایی را طلب می‌کند، تلاش سنگینی که رضایت خاطر ناشی از آن از هیچ راه دیگری حاصل نمی‌شود، تلاشی که راز و رمز پیشرفت و توسعه است و همهٔ دوستداران علم و دانش را فرا می‌خواند.

برای آشنایی با یکی از این تلاشها، به مسألهٔ ۴ المپیاد ۲۰۰۴ آتن نگاهی می‌اندازیم:

مسألهٔ ۴ . فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $n \geq 3$ و t_1، t_2، ... و t_n عددهایی حقیقی و مثبت باشند که

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

ثابت کنید به‌ازای هر i، j و k که $1 \leq i < j < k \leq n$، t_i، t_j و t_k طول ضلعهای یک مثلث‌اند.

اعضای تیم ما شش راه‌حل مختلف برای این مسأله ارائه کردند و هر شش نفر از این مسأله نمرهٔ کامل گرفتند. نگاهی به راه‌حلهای مختلف این شش نفر خالی از لطف نیست، که نمودی از این تلاشهای زیباست؛ بعضی از این راه‌حلها واقعاً در خور تحسین است، چه نشانی از زیباییهای تفکر ریاضی را دربر دارد.

راه‌حل اول، از علی‌اکبر دائمی

ابتدا درستی حکم را به‌ازای $n=3$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$10 > (t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)$$

و حکم درست نباشد، یعنی t_1، t_2 و t_3 طول ضلعهای هیچ مثلثی نباشند. در این صورت یکی از این سه عدد، مثلاً t_3، از مجموع دو عدد دیگر، یعنی t_1 و t_2، بزرگتر یا با آن برابر است. فرض کنید $t_3=t_1+t_2+\alpha$، که در آن α عددی حقیقی است و $\alpha \geq 0$. اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned}
A &= (t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)\\
&= 3+\left(\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right)+\left(\frac{t_1+t_2}{t_3}\right)+\left(\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_3}{t_2}\right)\\
&= 3+\left(\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right)+\left(\frac{t_1+t_2}{t_1+t_2+\alpha}\right)+\left(\frac{t_1+t_2+\alpha}{t_1}+\frac{t_1+t_2+\alpha}{t_2}\right)\\
&= 3+\left(\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{t_1+t_2+\alpha}\right)+\left(2+\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}+\frac{\alpha}{t_1}+\frac{\alpha}{t_2}\right)\\
&= 6+2\left(\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right)+\alpha\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1+t_2+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

درضمن، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1} \geq 2\sqrt{\frac{t_1}{t_2}\times\frac{t_2}{t_1}}=2$$

همچنین،

$$\frac{1}{t_1} > \frac{1}{t_1+t_2+\alpha}$$

و چون $\alpha \geq 0$ و $\frac{1}{t_2} > 0$، پس

$$\alpha\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1+t_2+\alpha}\right) \geq 0$$

به این ترتیب،

$$A = ۶ + ۲\left(\frac{t_۱}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۱}\right) + \alpha\left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} - \frac{۱}{t_۱ + t_۲ + \alpha}\right) \geq ۶ + ۲ \times ۲ = ۱۰$$

که این هم با فرض مسأله تناقض دارد. پس در حالتی که $n = ۳$ حکم درست است.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $n > ۳$، باز هم حکم مسأله درست است. فرض کنید

$$n^۲ + ۱ > (t_۱ + t_۲ + \cdots + t_n)\left(\frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۲} + \cdots + \frac{۱}{t_n}\right)$$

بنابر تقارن، کافی است ثابت کنیم که $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ طول ضلعهای یک مثلث‌اند. فرض کنید چنین نباشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned}A &= (t_۱ + t_۲ + \cdots + t_n)\left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} + \cdots + \frac{۱}{t_n}\right)\\ &= (t_۱ + t_۲ + t_۳)\left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۳}\right) + (t_۱ + t_۲ + t_۳)\sum_{i=۴}^{n}\frac{۱}{t_i}\\ &\quad + \left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۳}\right)\sum_{i=۴}^{n} t_i + \left(\sum_{i=۴}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=۴}^{n}\frac{۱}{t_i}\right)\end{aligned}$$

فرض کنید جمله‌های سمت راست این تساوی به‌ترتیب $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ باشند. بنابر آنچه در ابتدا ثابت کردیم، چون $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ طول ضلعهای هیچ مثلثی نیستند، $A_۱ \geq ۱۰$.

همچنین، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین توافقی،

$$\frac{t_۴ + \cdots + t_n}{n - ۳} \geq \frac{n - ۳}{\frac{۱}{t_۴} + \cdots + \frac{۱}{t_n}}$$

یا

$$\left(\sum_{i=۴}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=۴}^{n}\frac{۱}{t_i}\right) \geq (n - ۳)^۲$$

پس $A_۴ \geq (n - ۳)^۲$.

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}A_۲ + A_۳ &= \sum_{i=۴}^{n}\left(\frac{t_۱}{t_i} + \frac{t_۲}{t_i} + \frac{t_۳}{t_i}\right) + \sum_{i=۴}^{n}\left(\frac{t_i}{t_۱} + \frac{t_i}{t_۲} + \frac{t_i}{t_۳}\right)\\ &= \sum_{i=۴}^{n}\left(\frac{t_۱}{t_i} + \frac{t_i}{t_۱}\right) + \sum_{i=۴}^{n}\left(\frac{t_۲}{t_i} + \frac{t_i}{t_۲}\right) + \sum_{i=۴}^{n}\left(\frac{t_۳}{t_i} + \frac{t_i}{t_۳}\right)\end{aligned}$$

$$\geq ۲(n-۳)+۲(n-۳)+۲(n-۳)$$
$$=۶(n-۳)$$

بنابراین

$$A \geq ۱۰+(n-۳)^۲+۶(n-۳)=n^۲+۱$$

که این هم با فرض مسأله تناقض دارد. یعنی $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ طول ضلعهای یک مثلث‌اند.

راه‌حل دوم، از محمد قراخانی

ابتدا ثابت می‌کنیم که کافی است درستی حکم را به‌ازای $n=۳$ ثابت کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر $۱ \leq i<j<k \leq n$، t_i، t_j و t_k طول ضلعهای یک مثلث‌اند. توجه کنید که

$$(t_۱+\cdots+t_n)\left(\frac{۱}{t_۱}+\cdots+\frac{۱}{t_n}\right)=n+\sum_{۱\leq l<m\leq n}\left(\frac{t_l}{t_m}+\frac{t_m}{t_l}\right)$$
$$=n+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}+\frac{t_i}{t_k}+\frac{t_k}{t_i}+\frac{t_j}{t_k}+\frac{t_k}{t_i}$$
$$+\sum_{\substack{۱\leq l<m\leq n\\ l,m\neq i,j,k}}\left(\frac{t_l}{t_m}+\frac{t_m}{t_l}\right)+\sum_{l\neq i,j,k}\left(\frac{t_i}{t_l}+\frac{t_l}{t_i}\right)$$
$$+\sum_{l\neq i,j,k}\left(\frac{t_j}{t_l}+\frac{t_l}{t_j}\right)+\sum_{l\neq i,j,k}\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$$

اگر a و b دو عدد مثبت باشند، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=۲$$

بنابراین

$$(t_۱+\cdots+t_n)\left(\frac{۱}{t_۱}+\cdots+\frac{۱}{t_n}\right)\geq n+۲\binom{n-۳}{۲}+۲(n-۳)+۲(n-۳)+۲(n-۳)$$
$$+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_k}+\frac{t_i}{t_k}+\frac{t_k}{t_i}+\frac{t_j}{t_k}+\frac{t_k}{t_j}$$
$$=n^۲-۶+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}+\frac{t_i}{t_k}+\frac{t_k}{t_i}+\frac{t_j}{t_k}+\frac{t_k}{t_j}$$

بنابراین اگر

$$n^۲+۱>(t_۱+t_۲+\cdots+t_n)\left(\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}+\cdots+\frac{۱}{t_n}\right)$$

آن‌وقت

$$۷ > \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} + \frac{t_i}{t_k} + \frac{t_k}{t_i} + \frac{t_j}{t_k} + \frac{t_k}{t_j}$$

که معادل است با

$$۳^۲ + ۱ = ۱۰ > (t_i + t_j + t_k)\left(\frac{۱}{t_i} + \frac{۱}{t_j} + \frac{۱}{t_k}\right)$$

پس همان‌طور که در ابتدا گفتیم، کافی است حکم را به‌ازای $n = ۳$ ثابت کنیم.

فرض کنید

$$۱۰ > (t_۱ + t_۲ + t_۳)\left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۳}\right)$$

و حکم درست نباشد، یعنی $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ طول ضلعهای هیچ مثلثی نباشند. بنابر تقارن، می‌توانیم فرض کنیم $t_۳ \geq t_۱ + t_۲$. فرض کنید a عددی مثبت باشد و

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}, \qquad x \in (۰, +\infty)$$

در این صورت

$$f'(x) = \frac{۱}{a} - \frac{a}{x^۲}, \qquad x \in (۰, +\infty)$$

پس اگر $x > a$، آن‌وقت $f'(x) > ۰$ و تابع f روی بازهٔ $(a, +\infty)$ صعودی است. درنتیجه، چون $t_۳ \geq t_۱ + t_۲ > t_۱$، عبارت $\frac{t_۳}{t_۱} + \frac{t_۱}{t_۳}$ با افزایش $t_۳$ کمتر نمی‌شود. به‌عبارت دیگر، چون $t_۳ \geq t_۱ + t_۲$،

$$\frac{t_۳}{t_۱} + \frac{t_۱}{t_۳} \geq \frac{t_۱ + t_۲}{t_۱} + \frac{t_۱}{t_۱ + t_۲}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\frac{t_۳}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۳} \geq \frac{t_۱ + t_۲}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۱ + t_۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{t_۱}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۱} + \frac{t_۱}{t_۳} + \frac{t_۳}{t_۱} + \frac{t_۲}{t_۳} + \frac{t_۳}{t_۲} \\
&\quad \geq \frac{t_۱}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۱} + \frac{t_۱ + t_۲}{t_۱} + \frac{t_۱}{t_۱ + t_۲} + \frac{t_۱ + t_۲}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۱ + t_۲} \\
&\quad \geq ۳ + ۲\left(\frac{t_۱}{t_۲} + \frac{t_۲}{t_۱}\right) \geq ۳ + ۲ \times ۲ = ۷
\end{aligned}$$

یعنی

$$(t_۱ + t_۲ + t_۳)\left(\frac{۱}{t_۱} + \frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۳}\right) \geq ۱۰$$

که تناقض است. پس مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ است.

سخنی با خوانندگان

فروزان خردپژوه[۱]

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

سابقهٔ انتشار نشریه‌های علمی به‌صورت فعلی در ایران به بیش از نیم قرن برمی‌گردد. قرار دادن اطلاعات علمی در دسترس همگان برای گسترش دانش و تشویق آنان به دنبال کردن این مطالب هدف اصلی این نشریات است. البته هر نشریه می‌تواند مخاطب خاص خود را داشته باشد. برخی آنقدر تخصصی هستند که فقط تعداد معدودی ممکن است برخی از مطالب و مقالات این نشریات را درک کنند مانند اغلب نشریاتی که توسط انجمن‌های علمی کشور منتشر شده و مخاطب آنها بیشتر اعضا هیئت علمی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه‌ها می‌باشد و اکنون آخرین پژوهش‌های تخصصی را به چاپ می‌رسانند. ولی برخی دیگر رسالت عمومی کردن دانش را بر عهده دارند. ایجاد علاقه به مطالعه و دقت بیشتر، گرایش به تفکر علمی و پرهیز از سطحی‌نگری و پر کردن خلأهای موجود از جمله ویژگی‌های این نشریات است. از این دست مجلات در زمینهٔ ریاضیات می‌توان به نشریه‌های قدیمی **یکان** و **آشتی با ریاضیات** اشاره کرد و در حال حاضر **نشریهٔ ریاضیات** که توسط انتشارات فاطمی به‌چاپ می‌رسد و اکنون پانزدهمین شمارهٔ آن را مشاهده می‌کنید از این دسته است که مخاطب آن بیشتر دانش‌آموزان دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی می‌باشد.

این‌گونه نشریات تلاش می‌کنند با بخش‌های گوناگون خود سلیقه‌های متنوع را به خود جلب نمایند و همانند هر رسانهٔ دیگر در صورتی که بتوانند مخاطبان خود را همراه خود بکشانند و به مشارکت وادار نمایند به رسالت خود بهتر عمل کرده‌اند که البته این کاری بس دشوار است.

خانهٔ ریاضیات اصفهان با توجه به اهداف و رسالت خود مدت‌ها در پی انتشار چنین نشریه‌ای بود و خوشبختانه زمینهٔ همکاری با نشریهٔ ریاضیات به‌گونه‌ای فراهم شده که از این شماره به بعد بخشی از آن، که در صفحات رنگی چاپ می‌گردد، را به خود اختصاص داده است. امیدواریم ما را با ارسال مطالب و نظرات خود در این مهم یاری کنید.

۱. مدیر خانهٔ ریاضیات اصفهان

تئوری ریاضی موسیقی

قسمت اول: مقدّمات

پیام سراجی، امیرحسین دامادی

در حدود ۲۵۰۰ سال پیش فیثاغورث ساختار ریاضی برای گام موسیقی ارائه داد که بر ملاحظات عمیق فلسفی استوار بود[۱]. از آن زمان تاکنون روش‌های دیگری نیز برای ایجاد ساختار ریاضی گام موسیقی پیشنهاد شده است. به‌عنوان مثال می‌توان به گام معتدل وگام طبیعی (زارلین) اشاره کرد.

در این مقاله ابتدا ساختارگام معتدل وگام فیثاغورث را توضیح داده و مقایسه‌ای بین این دو صورت گرفته و در پایان سعی شده فواصل گام فیثاغورث را تعمیم داده تا فاصله‌های ربع پرده در موسیقی ایران را نیز شامل شود. ابتدا برخی اصطلاحات و مفاهیم اولیهٔ موسیقی را توضیح می‌دهیم:

همان‌طور که می‌دانید، موسیقی از توالی صداهای زیر و بم تشکیل می‌شود. زیر و بمی مقایسه‌ای است از فرکانس یک صدا با صدایی دیگر وگوش نسبت بین این فرکانس‌ها را احساس می‌کند و نه تفاضل بین آنها را، به‌بیان دیگر اگر گوش ابتدا فرکانس F_1 و سپس فرکانس F_2 را بشنود، احساسی که این تغییر فرکانس در ما ایجاد می‌کند نسبتی است و نه تفاضلی (یعنی به $\frac{F_2}{F_1}$ بستگی دارد و نه به $(F_2 - F_1)$). یک آزمایش ساده با کامپیوتر موضوع را روشن می‌کند:

یک قطعهٔ سادهٔ موسیقی را می‌توان با یک دنبالهٔ متناهی از فرکانس‌ها به‌صورت زیر نشان داد:

زمان	فرکانس
T_1	F_1
T_2	F_2
-	-
-	-
-	-
-	-
T_n	F_n

---

۱. تئوری موسیقی فیثاغورث مبنای کار اغلب نظریه‌پردازان موسیقی در مشرق زمین از جمله فارابی درکتاب الموسیقی الکبیر نیز بوده است.

یعنی ابتدا فرکانس F_1 را به مدت T_1 ثانیه اجرا کرده، سپس فرکانس F_2 را به مدت T_2 ثانیه و الی‌آخر. اگر تمام فرکانس‌ها را در یک عدد ثابت $C > 0$ ضرب کنیم مشاهده می‌شود که تناسب قطعه حفظ می‌شود و فقط صدای آن نسبت به حالت قبل زیر یا بم می‌شود (بسته به اینکه $C > 1$ باشد یا اینکه $C < 1$ باشد[۲]). این به‌خاطر این است که نسبت‌های میان فرکانس‌ها تغییر نکرده‌اند، چون

$$\frac{F_i}{F_j} = \frac{cF_i}{cF_j}$$

ولی اگر تمام فرکانس‌ها را با یک عدد ثابت جمع کنیم نسبت‌های میان فرکانس‌ها ثابت نمی‌ماند، چون در حالت کلی گزارهٔ زیر صادق نمی‌باشد:

$$\frac{F_i}{F_j} \neq \frac{F_i + c}{F_j + c}$$

و در این حالت گوش نیز عدم تناسب قطعه را به‌روشنی احساس می‌کند.

با توجه به این ملاحظات در صوت‌شناسی «فاصله» دو صدا را برابر با نسبت فرکانس‌های آنها معرفی می‌کنند. فرکانس‌هایی که در موسیقی استفاده می‌شوند باید نسبت‌های خاصی با هم داشته باشند که این نسبت‌ها نقش تعیین‌کننده در ساختار «گام» دارند.

گام موسیقی

یک گام از توالی (صعودی یا نزولی) یک سری فرکانس که نسبت‌های خاصی با هم دارند شکل می‌گیرد و هر قطعه موسیقی گامی مخصوص به خود دارد که از حرکت بر روی فرکانس‌های آن گام ایجاد می‌شود. به این فرکانس‌ها «درجات گام» گوییم.

اسامی هفت نت موسیقی به‌صورت زیر است:

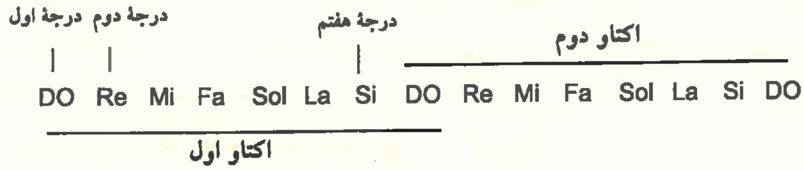
$$Do \quad Re \quad Me \quad Fa \quad Sol \quad La \quad Si$$

که هر یک از نت‌های فوق متناظر یک فرکانس خاص است. همین توالی نت‌های فوق نمونه‌ای از یک گام است. نام این گام «ماهور Do» یا «Do-major» است که در بخش‌های آینده آن را با جزئیات بیشتری بررسی خواهیم کرد. بعد از توالی نت‌های گام، مجدداً همان توالی تکرار می‌شود که Do دورهٔ دوم را «Do اکتاو بعد» نام می‌نهیم که فرکانس آن دقیقاً دو برابر فرکانس نت Do قبل است.

به‌همین ترتیب هر نت در اکتاو[۳] بعد دارای فرکانسی دقیقاً دو برابر فرکانس همان نت در اکتاو قبل است. از اینکه

۲. البته اگر $C = 0$ باشد، قطعهٔ موسیقی تبدیل به سکوت می‌شود، این شاید نشانگر این نکته است که سکوت موسیقی است که به نوعی تمام موسیقی را درون خود دارد.

۳. اکتا در زبان یونانی به‌معنی هشت و اکتاو به معنی یک دورهٔ هشتایی است.

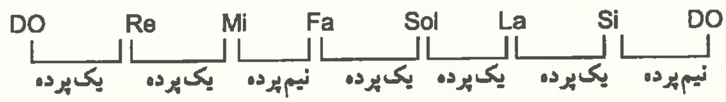


شکل ۱

گوش نسبت‌ها را درک می‌کند می‌توان چنین نتیجه گرفت که از هر فرکانس می‌توان گام را شروع کرد و آنچه مهم است حفظ تناسب میان فرکانس‌های گام است. در ادامه خواهیم دید این امکان وجود دارد که نت ابتدای گام هر نتی باشد (به‌همین دلیل در این مقاله همهٔ گام‌ها را از نت Do شروع می‌کنیم).

پرده و نیم‌پرده

گام ماژور، معرفی شده در بالا، را در نظر بگیرید. در بین هشت نت این گام، ۷ فاصله وجود دارد که پنج‌تا از آنها برابر با یک «پرده» و دوتای آنها برابر با «نیم‌پرده» هستند (که همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، منظور از فاصله بین دو نت همان نسبت فرکانس‌های آن دو نت می‌باشد). این فواصل مطابق شکل زیر می‌باشند:



شکل ۲

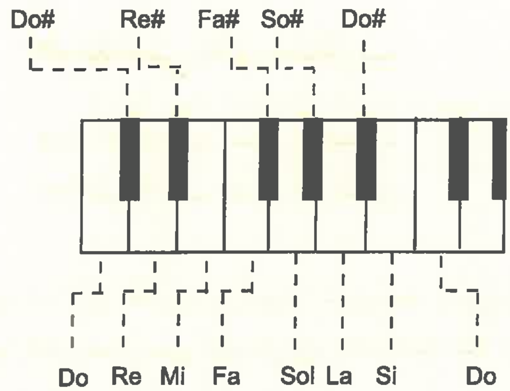
اینکه فواصل پرده و نیم‌پرده برابر چه نسبت‌هایی می‌توانند باشند در ادامه توضیح داده می‌شود.

گام معتدل

اگر از ابتدای گام شروع کنیم و نیم‌پرده، نیم‌پرده جلو برویم دوازده نت در طول گام خواهیم داشت. اگر به صفحه کلید پیانو دقت کنید می‌توانید این دورهٔ دوازده‌تایی را مشاهده کنید (شکل ۳). کلیدهایی که بین کلیدهای سفید هستند، نیم‌پرده‌های بین نت‌ها هستند و برای نامیدن آنها پسوندهای «دییز» ($\sharp$) و «بمل» ($\flat$) را به اسامی آنها اضافه می‌کنیم؛ دییز برای نیم‌پردهٔ بعد و بمل برای نیم‌پردهٔ قبل درگام معتدل $Do\sharp = Re\flat$، $Re\sharp = Mi\flat$ و غیره.

در شکل ۲ دیده می‌شود که فاصلهٔ Do تا Re و فاصلهٔ Re تا Mi هر دو یک پرده است. با توجه به تعریف که فاصله دو صدا را برابر نسبت فرکانس آنها تعریف می‌کرد، داریم:

$$\frac{fr(Re)}{fr(Do)} = \frac{fr(Mi)}{fr(Re)} \qquad (۱)$$



شکل ۳

که منظور از $fr(Do)$ یا $fr(Re)$ همان فرکانس نت Do یا نت Re می‌باشد. به‌دلیل مشابه داریم:

$$\frac{fr(Fa)}{fr(Mi)} = \frac{fr(Do)}{fr(Si)} \tag{۲}$$

حال اگر فرکانس‌های این دوازده نت متوالی (دوازده نیم‌پرده مذکور) را به‌ترتیب با $a_0, a_1, \ldots, a_{11}$ نشان دهیم و a_{12} را برابر فرکانس Do اکتاو بعد بگیریم، با توجه به عبارات فوق باید داشته باشیم:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \cdots = \frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \tag{۳}$$

و این نتیجه می‌دهد که اعداد $a_0, a_1, \ldots, a_{11}, a_{12}$ تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند. اگر قدر نسبت این تصاعد را برابر q بگیریم، جملهٔ آخر تصاعد، یعنی a_{12} برابر $a_0 q^{12}$ می‌شود. ولی a_{12} فرکانس Do اکتاو بعد و درنتیجه دقیقاً دو برابر a_0 است. پس خواهیم داشت:

$$2a_0 = a_0 q^{12} \Rightarrow q^{12} = 2 \Rightarrow q = \sqrt[12]{2} \tag{۴}$$

پس نتیجه گرفتیم دوازده نت موجود در یک اکتاو تشکیل یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q = \sqrt[12]{2}$ می‌دهند. پس با داشتن فرکانس نت ابتدای گام می‌توانیم فرکانس سایر نت‌ها را محاسبه کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این گام نسبت نیم‌پرده برابر $\sqrt[12]{2}$ و نسبت پرده برابر توان دوم این عدد یعنی $\sqrt[6]{2}$ می‌باشد. به گامی که چنین نسبت‌هایی در آن حاکم باشد «گام معتدل» گویند. این ساختار اولین‌بار در حدود قرن ۱۵ میلادی پیشنهاد شد.

هم‌نهشتی‌های متناوب

فرزام انصاری‌پور، متین آزادمنش،
اسماعیل حیدری، مهدی حق شناس

وقتی به مسئله‌ای برمی‌خوریم، در اولین نگاه چه می‌کنیم؟ از کدوم زاویه به اون نگاه می‌کنیم؟ از کجاش بهتره شروع کنیم؟ چه ترفندی بزنیم؟ بهتر نیست سعی کنیم اول اونو ساده کنیم؟ مثلاً از روی اون یه مدل بسازیم و روی اون مدل کار کنیم؟ـ هر چند بعضی وقت‌ها نیازی به این کار نیست ـ اون هم توی این دنیای پر از عددها و محاسبه‌های پیچیدهٔ کامپیوتری که اهمیت ساده کردن مسئله کمتر از حل اون نیست و احتمالاً می‌دونیم که یکی از بخش‌های مهم علوم ریاضی و کامپیوتر، کارکردن روی درجهٔ دشواری مسئله‌هاست (چرا؟) چون اولاً زمان یکی از مهمترین عامل‌هاست. ثانیاً می‌خوان با صرف کمترین حجم اطلاعات، از داده‌های ورودی بهترین خروجی‌ها رو بسازن.

مطمئناً تا حالا موردهایی براتون پیش اومده که با عددهای بزرگ سروکار داشته باشین (اصلاً چی می‌شه که یه عدد رو بزرگ می‌دونیم؟ مثلاً شاید بعضی از عددهای توان‌دار، بزرگ به حساب بیان.

به‌عنوان مثال شاید لازم باشد که از سه رقم سمت راست عدد $۴^{۱۳۸۳}$ در جایی استفاده بشه و یا اصلاً در مورد باقیمونده‌ی a^b بر m بررسی‌هایی انجام بشه. مخصوصاً وقتی b بزرگ باشه...!

خوب حالا باید ببینیم نظریهٔ اعداد و مخصوصاً هم‌نهشتی چه کمکی به ما میکنه. (عددها رو هم حسابی در نظر بگیریم) اول با یه مثال ساده شروع می‌کنیم: دو عدد a و m رو در نظر می‌گیریم (m رو ثابت و a رو متغیر) می‌دونیم که باقیمونده‌ی a بر m (یعنی مثلاً عدد n) یکی از اعضای دستگاه کامل مانده‌ها به‌پیمانهٔ m خواهد بود و داریم $۰ \leq n \leq m - ۱$. متغیر بودن a رو هم به این صورت می‌گیریم که در هر مرحله یه واحد به a اضافه می‌کنیم نتیجه اینکه n هم یکی یکی زیاد میشه. ولی اگه در مرحله‌ای، $n = m - ۱$، در مرحلهٔ بعدی n صفر میشه و دوباره به‌صورت متناوب مقدارهای قبلی رو پیدا می‌کنه

$$\begin{array}{lll} ۴ \bmod ۳ = ۱ & ۱ \bmod ۳ = ۱ & a \bmod m = n \\ ۵ \bmod ۳ = ۲ & ۲ \bmod ۳ = ۲ & \\ ۶ \bmod ۳ = ۰ & ۳ \bmod ۳ = ۰ & \end{array}$$

خوب، چه نظام جالبی رو دیدیم؟ این که همهٔ عضوهای دستگاه کامل مانده‌ها به‌پیمانهٔ ۳ با روندی منظم و متناوب تولید و تکرار شدن و ۳ هم طول تناوبه. ممکنه این نظام برای mهای دیگه هم پیدا بشه حالا مثال رو کمی تغییر می‌دیم. به این صورت که a رو به‌عنوان پایه و m رو به‌عنوان پیمانهٔ ثابت می‌گیریم ولی در عوض عددی مثل b رو

به‌عنوان توان a در نظر می‌گیریم، این‌بار b رو یکی‌یکی زیاد می‌کنیم. n رو هم باقیمونده‌ی a^b بر m می‌گیریم. حالا n چطور تغییر می‌کنه؟ آیا این‌بار هم نظمی رو مشاهده می‌کنیم؟

$$a^b \bmod m = n$$

$$\begin{array}{ll} ۲^۱ \bmod ۱۰ = ۲ & ۲^۵ \bmod ۱۰ = ۲ \\ ۲^۲ \bmod ۱۰ = ۴ & ۲^۶ \bmod ۱۰ = ۴ \\ ۲^۳ \bmod ۱۰ = ۸ & ۲^۷ \bmod ۱۰ = ۸ \\ ۲^۴ \bmod ۱۰ = ۶ & ۲^۸ \bmod ۱۰ = ۶ \end{array}$$

حالا شاید بتونیم بگیم که برای هر b: $۲^{b+۴} \equiv ۲^b \pmod{۱۰}$ یا اینکه $۲^b \times ۱۶ \equiv ۲^b \pmod{۱۰}$ به‌عبارت دیگه برای پایه‌ی $a = ۲$ و پیمانه‌ی $m = ۱۰$، عدد ۱۶ عنصر خنثای عمل ضرب در هم‌نهشتیه.

در حالت کلی اگر بتونیم عددی مثل x رو پیدا کنیم که $a^b \times x^m \equiv a^b$ و بشه این عنصر خنثی (یعنی x) رو به‌صورت a^k در نظر گرفت، اونوقت خواهیم داشت: $a^{b+k} \equiv a^b \pmod{m}$

خوب این یعنی چی؟ یعنی برای دو عدد دلخواه a و m، با تغییر b به‌عنوان توان a میشه تناوبی رو به طول k ایجاد کرد شبیه مثال قبل که طول تناوب ۴ بود. حالا همه‌ی حرف ما اینه که اگه این عدد k وجود داشته باشه، چه رابطه‌ای با a و m داره . . .؟!

بنابر تابع فی، برای هر عدد m، مقدار $\phi(m)$ برابره با تعداد اعداد کوچکتر از m که نسبت به m اول هستند اگه m رو به عوامل اول تجزیه کنیم، میشه ثابت کرد که

$$m = p_۱^{q_۱} p_۲^{q_۲} \cdots p_t^{q_t} \Rightarrow \phi(m) = m\left(۱ - \frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱ - \frac{۱}{p_۲}\right) \cdots \left(۱ - \frac{۱}{p_t}\right)$$

قضیهٔ اویلر هم میگه اگه دو عدد a و m نسبت به هم اول باشن، اون‌وقت $a^{\phi(m)} \equiv ۱ \pmod{m}$. حالا اگه حکم قضیهٔ اویلر رو با رابطهٔ $a^b \overset{m}{\equiv} a^b$ که همیشه برقراره، در نظر بگیریم، می‌تونیم بنویسیم:

$$(a, m) = ۱ \Rightarrow a^{\phi(m)+b} \equiv a^b \pmod{m}$$

یعنی برای دو عدد متباین a و m، $\phi(m)$ می‌تونه همون k یا طول تناوب باشه و $a^{\phi(m)}$، هم x موردنظر یا عنصر خنثاست ولی اگه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و m، عددی غیر از یک (مثلاً d) باشد، اون‌وقت مسئله به چه صورت درمیاد؟ آیا در اون صورت هم k میتونه $\phi(m)$ باشه؟

با مثال میشه نشون داد که رابطهٔ $a^{\phi(m)+b} \overset{m}{\equiv} a^b$ برای همهٔ مقدارهای دلخواه a، m و b نمی‌تونه برقرار باشه (مثلاً $۲^{\phi(۱۰۰)+۱} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۵۲$ ولی $۲ \pmod{۱۰۰} \equiv ۲^۱$) ولی ما می‌خوایم ثابت کنیم که برای هر a و m دلخواه همیشه عددی مثل $b_۰$ وجود داره که برای bهای بزرگتر یا مساوی $b_۰$ هم‌نهشتی موردنظر برقرار باشه. یعنی

$$\forall a, m \in \mathbb{N} \quad \exists b_۰ \in \mathbb{N};\ b \geq b_۰ \Rightarrow a^{\phi(m)+b} \equiv a^b \pmod{m}$$

دعوت به همکاری دانش‌آموزان

تلاش ما بر این است که در این قسمت از مجله بخشی را با عنوان مقاله‌ی دانش‌آموزی قرار دهیم (مثل مقاله‌ی همنهشتی‌های متناوب) که نویسندگان این مقالات خود، دانش‌آموز می‌باشند. در این بخش سعی شده است که تا جای ممکن هیچ‌گونه ویرایش و اعمال نظر هیئت تحریریه روی مقالات آن صورت نپذیرد و تا جای ممکن مقالات به شکل دانش‌آموزی آن در این قسمت قرار گیرد. به‌همین جهت همه‌ی شما دانش‌آموزان گرامی برای همکاری با ما و چاپ مقاله‌های ریاضی خود در این بخش از مجله، می‌توانید یک نسخه از مقاله‌های خود را به آدرس خانه‌ی ریاضیات اصفهان ارسال نمایید.

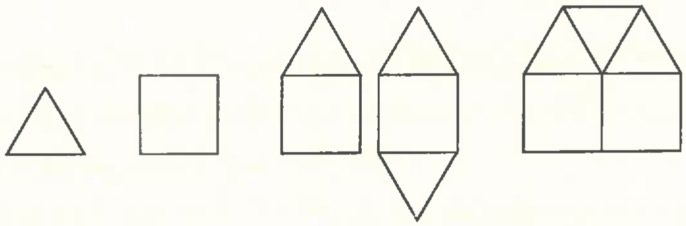
دعوت به همکاری معلمان

در نظر داریم که در این بخش از مجله بخش‌هایی تحت عنوان **سؤال‌های درسی** و **سؤال‌های امتحانی** داشته باشیم. بدین ترتیب که در بخش **سؤال‌های درسی**، سؤال‌های درسی خوبی که دانش‌آموزان برای حل آنها باید به مطالب درسی تسلط نسبی داشته باشند، با نام طراح آن درج می‌گردد و در بخش **سؤال‌های امتحانی**، نمونه‌ی سؤال‌های امتحانی دروس ریاضی مختلف دبیرستانی مدارس مختلف کشور با نام دبیر مربوطه آن قرار می‌گیرد. لذا از کلیه‌ی معلمان ریاضی سراسر کشور تقاضا داریم با ارسال سؤال‌های نمونه و یا یک نسخه از برگه‌های امتحانی خود به آدرس خانه ریاضیات اصفهان ما را در فراهم کردن مطالب این دو بخش از مجله یاری نمایند.

مسأله جایزه‌ای

تعریف: یک شکل را محدب گوییم اگر برای هر دو نقطه A و B از شکل، کل نقاط پاره‌خط AB در درون شکل قرار گیرد.

فرض کنید تعداد زیادی مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a در اختیار داریم. به کمک آن‌ها قصد داریم چندضلعی‌های محدب بسازیم (در شکل زیر این کار برای ۳، ۴، ۵ و ۶ ضلعی انجام شده است). آیا می‌توانید فقط به کمک این مربع‌ها و مثلث‌ها ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ ضلعی محدب بسازید؟



پاسخ‌های خود را به نشانی خانه ریاضیات اصفهان ارسال نمایید. به راه‌حل‌های برگزیده به قید قرعه جوایزی ارزنده تعلق می‌گیرد.

راه‌حل سوم، از محمدباقر ایرجی

فرض کنید

$$a = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1}$$
$$b = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}$$

در این صورت، نابرابری

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

را می‌توان به شکل

$$n^2 + 1 > ab + \frac{a}{t_n} + bt_n + 1 \qquad (*)$$

نوشت. از طرف دیگر، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{a}{t_n} + bt_n \geq 2\sqrt{\frac{a}{t_n}(bt_n)} = 2\sqrt{ab}$$

بنابراین، از نابرابری $(*)$ نتیجه می‌شود

$$n^2 + 1 > ab + 2\sqrt{ab} + 1 = (\sqrt{ab} + 1)^2$$

یعنی $\sqrt{ab} + 1 < \sqrt{n^2 + 1}$. درنتیجه

$$ab < (\sqrt{n^2+1} - 1)^2 = n^2 + 2 - 2\sqrt{n^2+1} < n^2 + 2 - 2n = (n-1)^2 + 1$$

به این ترتیب

$$(t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) < (n-1)^2 + 1$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر $1 \leq k \leq n$،

$$\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} t_i\right)\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{t_i}\right) < (n-1)^2 + 1$$

اگر همین کار را تکرار کنیم، بالاخره معلوم می‌شود که اگر $1 \leq i < j < k \leq n$،

$$(t_i + t_j + t_k)\left(\frac{1}{t_i} + \frac{1}{t_j} + \frac{1}{t_k}\right) < 3^2 + 1 = 10$$

اکنون ثابت می‌کنیم که t_i، t_j و t_k طول ضلعهای یک مثلث‌اند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم $t_i < t_j + t_k$، $t_j < t_i + t_k$ و $t_k < t_i + t_j$. مثلاً ثابت می‌کنیم $t_k < t_i + t_j$ (اثبات دو نابرابری دیگر شبیه همین اثبات است). توجه کنید که از نابرابری کشی-شوارتز نتیجه می‌شود

$$(t_i + t_j)\left(\frac{۱}{t_i} + \frac{۱}{t_j}\right) \geq ۴$$

پس

$$\frac{۱}{t_i} + \frac{۱}{t_j} \geq \frac{۴}{t_i + t_j}$$

درنتیجه

$$(t_i + t_j + t_k)\left(\frac{۴}{t_i + t_j} + \frac{۱}{t_k}\right) < ۱۰$$

بنابراین

$$۴t_k^۲ - ۵(t_i + t_j)t_k + (t_i + t_j)^۲ < ۰$$

یعنی

$$(t_k - (t_i + t_j))(۴t_k - (t_i + t_j)) < ۰$$

درنتیجه

$$\frac{t_i + t_j}{۴} < t_k < t_i + t_j$$

نابرابری سمت راست همان چیزی است که می‌خواهیم.

راه‌حل چهارم، از عادل جوانمرد

لم. فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند و

$$(a + b + c)\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\right) < ۱۰$$

در این صورت مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش a، b و c است.

برهان. می‌توانیم فرض کنیم $a \leq b \leq c$. اگر حکم درست نباشد، آن‌وقت $a + b \leq c$. توجه کنید که

$$(a + b + c)\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\right) = ۳ + \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} + \frac{a + b}{c}$$

بنابراین از فرض نتیجه می‌شود

$$\frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} + \frac{a + b}{c} < ۷$$

پس

$$bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b) < ۷abc$$

یا

$$c^۲(a+b)+c(a^۲+b^۲-۷ab)+ab(a+b) < ۰$$

درنتیجه، چون $a+b>۰$،

$$c < \frac{-(a^۲+b^۲-۷ab)+\sqrt{(a^۲+b^۲-۷ab)^۲-۴ab(a+b)^۲}}{۲(a+b)}$$

بنابراین، چون $a+b \le c$،

$$\left(۲(a+b)^۲+(a^۲+b^۲-۷ab)^۲\right)^۲ < (a^۲+b^۲-۷ab)^۲-۴ab(a+b)^۲$$

پس

$$۴(a+b)^۴+۴(a+b)^۲(a^۲+b^۲-۷ab) < -۴ab(a+b)^۲$$

درنتیجه

$$(a+b)^۲+ab+(a^۲+b^۲) < ۷ab$$

اما از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$(a+b)^۲ \ge ۴ab$$

$$a^۲+b^۲ \ge ۲ab$$

بنابراین

$$(a+b)^۲+ab+(a^۲+b^۲) \ge ۴ab+ab+۲ab=۷ab$$

پس به تناقض رسیده‌ایم و حکم درست است. ∎

اکنون حکم مسأله را ثابت می‌کنیم. بنابر تقارن، می‌توانیم فرض کنیم

$$t_۱ \le t_۲ \le \cdots \le t_n$$

به این ترتیب، کافی است ثابت کنیم

$$t_۱+t_۲ > t_n$$

توجه کنید که

$$n^۲+۱ > (t_۱+t_۲+\cdots+t_n)\left(\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}+\cdots+\frac{۱}{t_n}\right)$$

$$=\frac{t_۲+\cdots+t_n}{t_۱}+\frac{t_۱+t_۳+\cdots+t_n}{t_۲}+\cdots+\frac{t_۱+\cdots+t_{n-۱}}{t_n}+n$$

درنتیجه

$$n^2-n+1>\left(\frac{t_2+t_n}{t_1}+\frac{t_1+t_n}{t_2}+\frac{t_1+t_2}{t_n}\right)$$
$$+\left(\frac{t_3+\cdots+t_{n-1}}{t_1}+\frac{t_3+\cdots+t_{n-1}}{t_2}+\frac{t_3+\cdots+t_{n-1}}{t_n}\right)$$
$$+\left(\frac{t_1+t_2+t_4+\cdots+t_n}{t_3}+\cdots+\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{n-2}+t_n}{t_{n-1}}\right)$$

پرانتزهای دوم و سوم در سمت راست نابرابری بالا را به‌ترتیب A و B بنامید. چون t_1، t_2 و t_3 طول ضلعهای هیچ مثلثی نیستند، از لمی که در ابتدای راه‌حل ثابت کردیم نتیجه می‌شود

$$\frac{t_2+t_n}{t_1}+\frac{t_1+t_n}{t_2}+\frac{t_1+t_2}{t_n}\geq 7$$

اکنون توجه کنید که به‌ازای هر i و هر j، در A و B روی هم یک‌بار $\frac{t_i}{t_j}$ آمده است و یک‌بار $\frac{t_j}{t_i}$. از طرف دیگر، در A، ۳ کسر داریم که هر یک $n-3$ جمله تولید می‌کند و در B، $n-3$ کسر داریم که هر یک $n-1$ جمله تولید می‌کند. پس تعداد کل جمله‌ها در A و B برابر است با

$$3(n-3)+(n-3)(n-1)=n^2-n-6$$

درضمن، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\geq 2\sqrt{\frac{t_i}{t_j}\times\frac{t_j}{t_i}}=2$$

بنابراین مجموع عددهای پرانتزهای A و B دست‌کم برابر است با

$$2\times\frac{n^2-n-6}{2}=n^2-n-6$$

به این ترتیب

$$7+n^2-n-6\leq\left(\frac{t_2+t_n}{t_1}+\frac{t_1+t_n}{t_2}+\frac{t_1+t_2}{t_n}\right)+A+B<n^2-n+1$$

یعنی $n^2-n+1<n^2-n+1$، که تناقض است. بنابراین t_1، t_2 و t_n طول ضلعهای یک مثلث‌اند.

راه‌حل پنجم، از بهزاد مهرداد

حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که بنابر تقارن، می‌توان فرض کرد $t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n$. درنتیجه، کافی است ثابت کنیم $t_1+t_2>t_n$.

ابتدا درستی حکم را به‌ازای $n=3$ ثابت می‌کنیم. درحقیقت، ثابت می‌کنیم که اگر

$$3^2+1>(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)$$

آن‌وقت $t_1+t_2>t_3$.

توجه کنید که اگر a و b عددهایی مثبت باشند،

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{4}{a+b}$$

زیرا این نابرابری با نابرابریهای $(a+b)^2\geq 4ab$ و $(a-b)^2\geq 0$ هم‌ارز است. اکنون توجه کنید که کافی است حکم را وقتی که $t_1=t_2$ ثابت کنیم، زیرا در این صورت از

$$\begin{aligned}3^2+1&>(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)\\&\geq(t_1+t_2+t_3)\left(\frac{1}{\frac{t_1+t_2}{2}}+\frac{1}{\frac{t_1+t_2}{2}}+\frac{1}{t_3}\right)\end{aligned}$$

نتیجه می‌شود

$$t_1+t_2=\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{t_1+t_2}{2}>t_3$$

فرض کنید $t_1=t_2$. در این صورت

$$10>(2t_1+t_3)\left(\frac{2}{t_1}+\frac{1}{t_3}\right)$$

و باید ثابت کنیم $t_3<2t_1$. از نابرابری بالا نتیجه می‌شود

$$10>4+\frac{2t_1}{t_3}+\frac{2t_3}{t_1}+1$$

پس

$$\frac{5}{2}>\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}$$

فرض کنید حکم درست نباشد، یعنی $t_3\geq 2t_1$. در این صورت عددی نامنفی مانند x وجود دارد که $t_3=2t_1+x$. به این ترتیب

$$\frac{5}{2}>\frac{t_1}{2t_1+x}+\frac{2t_1+x}{t_1}$$

درنتیجه

$$5t_1(2t_1+x)\geq 2(t_1^2+(2t_1+x)^2)$$

پس

$$10t_1^2 + 5t_1x > 2t_1^2 + 8t_1^2 + 2x^2 + 8t_1x$$

یا

$$0 > 2x^2 + 3t_1x$$

که درست نیست، زیرا $t_1 > 0$ و $x \geq 0$. بنابراین در این حالت حکم درست است.

اکنون فرض کنید $k \geq 3$ و حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد. ثابت می‌کنیم که حکم به‌ازای $n = k+1$ هم درست است. توجه کنید که

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 + 1 &> (t_1 + \cdots + t_{k+1})\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right) \\
&= t_3\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right) + (t_1 + t_2 + t_4 + \cdots + t_{k+1})\left(\frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right) \\
&= 1 + \frac{t_3}{t_1} + \frac{t_3}{t_2} + \frac{t_3}{t_4} + \cdots + \frac{t_3}{t_{k+1}} + \frac{1}{t_3}(t_1 + t_2 + t_4 + \cdots + t_{k+1}) \\
&\quad + \left(t_1 + t_2 + t_4 + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right) \\
&= 1 + \left(\frac{t_3}{t_1} + \frac{t_1}{t_3}\right) + \left(\frac{t_3}{t_2} + \frac{t_2}{t_3}\right) + \left(\frac{t_3}{t_4} + \frac{t_4}{t_3}\right) + \cdots + \left(\frac{t_3}{t_{k+1}} + \frac{t_{k+1}}{t_3}\right) \\
&\quad + (t_1 + t_2 + t_4 + \cdots + t_{k+1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right) \\
&> 1 + 2k + (t_1 + t_2 + t_4 + \cdots + t_{k+1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

زیرا اگر a و b دو عدد مثبت باشند،

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} + 2 \geq 2$$

درنتیجه

$$k^2 + 1 > (t_1 + t_2 + t_4 + \cdots + t_{k+1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} + \cdots + \frac{1}{t_{k+1}}\right)$$

بنابراین t_1، t_2 و t_{k+1} هم طول ضلعهای یک مثلث‌اند.

راه‌حل ششم، از عرفان صلواتی

فرض کنید حکم درست نباشد. بنابر تقارن، می‌توانیم فرض کنیم t_1، t_2 و t_3 طول ضلعهای هیچ مثلثی نیستند و

مثلاً $t_1 \geq t_2 + t_3$. ثابت می‌کنیم

$$n^2 + 1 \leq (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right)$$

چون سمت راست این نابرابری برحسب t_iها همگن است، می‌توانیم فرض کنیم

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$$

اکنون اگر iای وجود داشته باشد که $t_i < \frac{1}{n^2+1}$، آن‌وقت $\frac{1}{t_i} > n^2 + 1$ و

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} > n^2 + 1$$

پس کافی است حکم را وقتی که

$$t_i \in \left[\frac{1}{n^2+1}, 1\right], \qquad 1 \leq i \leq n$$

ثابت کنیم. فرض کنید

$$M = \left\{(t'_1, \ldots, t'_n) \in \left[\frac{1}{n^2+1}, 1\right]^n : t'_1 + \cdots + t'_n = 1, \quad t'_1 \geq t'_2 + t'_3\right\}$$

و تابع $f : M \to \mathbb{R}$ این‌طور تعریف شده باشد:

$$f(t'_1, \ldots, t'_n) = \frac{1}{t'_1} + \cdots + \frac{1}{t'_n}$$

توجه کنید که M زیرمجموعه‌ای بسته و کراندار از $\mathbb{R}^n$ و درنتیجه فشرده است. تابع f نیز روی M پیوسته است. بنابراین f مینیمم خود را روی M می‌گیرد.

فرض کنید $(t''_1, \ldots, t''_n)$ نقطهٔ مینیمم باشد. کافی است ثابت کنیم

$$f(t''_1, \ldots, t''_n) \geq n^2 + 1$$

ثابت می‌کنیم $t''_4 = t''_5 = \cdots = t''_n$. فرض کنید این‌طور نباشد و i و jای وجود داشته باشند که $1 \leq i < j \leq n$ و $t''_i \neq t''_j$. به‌سادگی معلوم می‌شود که نقطهٔ

$$x = \left(t''_1, t''_2, t''_3, \ldots, \frac{t''_i + t''_j}{2}, \ldots, \frac{t''_i + t''_j}{2}, \ldots, t''_n\right)$$

هم عضو M است. ثابت می‌کنیم $f(x) < f(t''_1, \ldots, t''_n)$. کافی است ثابت کنیم

$$\frac{1}{\frac{t''_i + t''_j}{2}} + \frac{1}{\frac{t''_i + t''_j}{2}} < \frac{1}{t''_i} + \frac{1}{t''_j}$$

یعنی $(t''_i + t''_j)^۲ > ۴t''_it''_j$، که درست است، زیرا این نابرابری با نابرابری $(t''_i - t''_j)^۲ > ۰$ هم‌ارز است. به این ترتیب به تناقض رسیده‌ایم، زیرا $(t''_۱, \dots, t''_n)$ نقطهٔ مینیمم f است. فرض کنید

$$t''_۴ = t''_۵ = \cdots = t''_n = k$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد $t''_۲ = t''_۳$، زیرا در غیر این صورت، اگر

$$y = \left(t''_۱, \frac{t''_۲ + t''_۳}{۲}, \frac{t''_۲ + t''_۳}{۲}, t''_۴, \dots, t''_n\right)$$

آن‌وقت $y \in M$ و $f(y) < f(t''_۱, \dots, t''_n)$، که درست نیست. فرض کنید $t''_۲ = t''_۳ = a$.

اکنون ثابت می‌کنیم $t''_۱ = t''_۲ + t''_۳$. فرض کنید این‌طور نباشد، یعنی $t''_۱ > t''_۲ + t''_۳$. در این صورت می‌توان نوشت $t''_۱ = t''_۲ + t''_۳ + r$، که در آن $r > ۰$. فرض کنید

$$z = \left(t''_۱ - \frac{r}{۲}, t''_۲ + \frac{r}{۲}, t''_۳, t''_۴, \dots, t''_n\right)$$

در این صورت z عضو M است. ثابت می‌کنیم

$$f(z) < f(t''_۱, \dots, t''_n)$$

کافی است ثابت کنیم

$$\frac{۱}{t''_۱ - \frac{r}{۲}} + \frac{۱}{t''_۲ + \frac{r}{۲}} < \frac{۱}{t''_۱} + \frac{۱}{t''_۲}$$

این نابرابری با نابرابری

$$t''_۱t''_۲ < \left(t''_۱ - \frac{r}{۲}\right)\left(t''_۲ + \frac{r}{۲}\right)$$

یا

$$(t''_۱ - t''_۲)\frac{r}{۲} + \frac{r^۲}{۴} > ۰$$

هم‌ارز است، که چون $t''_۱ > t''_۲$، درست است. باز هم به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین $t''_۱ = t''_۲ + t''_۳ = ۲a$. اکنون کافی است ثابت کنیم

$$f(۲a, a, a, \underbrace{k, k, \dots, k}_{n-۳}) \geq n^۲ + ۱$$

یعنی کافی است ثابت کنیم

$$\frac{۱}{۲a} + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{k} + \cdots + \frac{۱}{k} \geq n^۲ + ۱$$

چون $۲a + a + a + k + \cdots + k = ۱$، کافی است ثابت کنیم

$$(۲a + a + a + k + \cdots + k)\left(\frac{۱}{۲a} + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{k} + \cdots + \frac{۱}{k}\right) \geq n^۲ + ۱$$

این نابرابری با نابرابریهای زیر هم‌ارز است

$$(۴a + (n-۳)k)\left(\frac{۵}{۲a} + \frac{n-۳}{k}\right) \geq n^۲ + ۱$$

$$۱۰ + (n-۳)^۲ + (n-۳)\left(\frac{۴a}{k} + \frac{۵k}{۲a}\right) \geq n^۲ + ۱$$

$$(n-۳)\left(\frac{۴a}{k} + \frac{۵k}{۲a}\right) \geq ۶n - ۱۸$$

$$\frac{۴a}{k} + \frac{۵k}{۲a} \geq ۶$$

$$\left(\frac{۲a}{k} + \frac{k}{۲a}\right) + \left(\frac{a}{k} + \frac{k}{a}\right) + \left(\frac{a}{k} + \frac{k}{a}\right) \geq ۶$$

نابرابری آخر هم درست است، زیرا هر یک از پرانتزهای سمت چپ آن از ۲ بزرگتر است.

چهل و پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

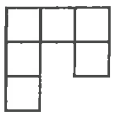
۱۲ و ۱۳ جولای، ۲۰۰۴، یونان، آتن

۱. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد که در آن $AB \neq AC$. دایرهٔ به قطر BC ضلعهای AB و AC را به‌ترتیب در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. وسط BC را O بنامید. نیمساز زاویه‌های BAC و MON یکدیگر را در نقطهٔ R قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای BMR و CNR در نقطه‌ای روی ضلع BC مشترک‌اند.

۲. همهٔ چندجمله‌ایها با ضریبهای حقیقی مانند $P(x)$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر سه عدد حقیقی مانند a، b و c که $ab+bc+ca=0$،

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

۳. همهٔ مستطیلهای $m \times n$ را طوری پیدا کنید که بتوان آنها را با «قلاب»هایی که مانند شکل زیر با ۶ مربع واحد تشکیل شده‌اند پوشاند. باید همهٔ مستطیل با قلابهایی که همپوشانی ندارند و هیچ قسمتی از آنها از مستطیل بیرون نزده است پوشانده شود.



۴. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $n \geq 3$ و t_1، t_2، ... و t_n عددهایی حقیقی و مثبت باشند که

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right)$$

ثابت کنید به‌ازای هر i، j و k که $1 \leq i < j < k \leq n$، t_i، t_j و t_k طول ضلعهای یک مثلث‌اند.

۵. در چهارضلعی محدب $ABCD$ قطر BD نه نیمساز زاویهٔ ABC است و نه نیمساز زاویهٔ CDA. نقطهٔ P درون چهارضلعی $ABCD$ است و

$$\angle PBC = \angle DBA, \qquad \angle PDC = \angle BDA$$

ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ وقتی و فقط وقتی محاطی است که $AP = CP$.

۶. عددی طبیعی را متناوب می‌نامیم، هرگاه زوجیت هر دو رقم متوالی در نمایش دهدهی آن متفاوت باشد. همهٔ عددهای طبیعی‌ای را پیدا کنید که مضربی متناوب دارند.

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۹)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌ها

۸۱. ثابت کنید عدد طبیعی m وقتی و فقط وقتی مربع کامل است که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n دست‌کم یکی از عددهای

$$(m+1)^2-m, \quad (m+2)^2-m, \ldots, \quad (m+n)^2-m$$

بر n بخش‌پذیر باشد.

۸۲. همهٔ مجموعه‌ها از ۱۰۰ عدد طبیعی را پیدا کنید که مجموع توانهای چهارم هر چهار تا از آنها بر حاصل‌ضرب این چهار عدد بخش‌پذیر باشد.

۸۳. m و n عددهایی طبیعی‌اند و $m>n$. ثابت کنید

$$[m,n]+[m+1,n+1]>\frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$$

($[a,b]$ کوچکترین مضرب مشترک عددهای طبیعی a و b است.)

۸۴. a، b، c و d عددهایی در بازهٔ $[0,1]$اند. ثابت کنید عددی مانند x در بازهٔ $[0,1]$ وجود دارد که

$$\frac{1}{|x-a|}+\frac{1}{|x-b|}+\frac{1}{|x-c|}+\frac{1}{|x-d|}<40$$

۸۵. a و b عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leq\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

۸۶. $P(x)$ چندجمله‌ایی است که ضریبهایش عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید اگر نابرابری

$$P\left(\frac{1}{x}\right)\geq\frac{1}{P(x)}$$

به‌ازای $x=1$ درست باشد، به‌ازای هر عدد مثبت مانند x هم درست است.

۸۷. ۹ خط راست مربعی را قطع کرده‌اند و هر یک از آنها این مربع را به دو چهارضلعی تقسیم کرده است که نسبت مساحتهایشان $\frac{۲}{۳}$ است. ثابت کنید دست‌کم سه تا از این خطهای راست از یک نقطه می‌گذرند.

۸۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$، $\angle BCD = \angle CDA$ و نیمساز زاویهٔ ABC ضلع CD را در نقطهٔ E قطع کرده است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی $\angle AEB = ۹۰^\circ$ که $AB = AD + BC$.

۸۹. n عدد حقیقی داریم که دست‌کم یکی از آنها غیر صفر است و مجموعشان برابر با صفر است. ثابت کنید جایگشتی از این عددها مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n وجود دارد که

$$a_۱a_۲ + a_۲a_۳ + \cdots + a_{n-۱}a_n + a_na_۱ < ۰$$

۹۰. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۲۱ را در خانه‌های جدولی ۱۱ × ۱۱ طوری نوشت که هر دو عدد متوالی در خانه‌هایی نوشته شده باشند که ضلعی مشترک دارند و عددهایی که مربع کامل‌اند در یک ستون نوشته شده باشند؟

۹۱. a، b و c عددهایی حقیقی و نامنفی‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a+b+c}{۳} - \sqrt[۳]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲, (\sqrt{b}-\sqrt{c})^۲, (\sqrt{c}-\sqrt{a})^۲\}$$

۹۲. همهٔ تابعها مانند $f : (۰, +\infty) \to (۰, +\infty)$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند x و y،

$$f(xf(y)) = f(xy) + x$$

۹۳. همهٔ عددهای اول مانند p، q و r را پیدا کنید که $p \leq q \leq r$ و عددهای

$$pq + r, \quad pq + r^۲, \quad qr + p, \quad qr + p^۲, \quad rp + q, \quad rp + q^۲$$

همگی اول باشند.

۹۴. همهٔ عددهای صحیح مانند a را طوری پیدا کنید که $\frac{a^{۲۰۰۰} - ۱}{a - ۱}$ مربع کامل باشد.

۹۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند m، n و l را طوری پیدا کنید که

$$m + n = (m,n)^۲, \quad n + l = (n,l)^۲, \quad l + m = (l,m)^۲$$

((a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای طبیعی a و b است.)

۹۶. در هر یک از خانه‌های جدولی ۳ × ۳ عددی حقیقی نوشته‌ایم. عددی که در خانه‌ای که در سطر iام و ستون jام قرار دارد نوشته‌ایم برابر است با قدرمطلق تفاضل مجموع عددهای سطر iام و مجموع عددهای ستون jام.

ثابت کنید هر عدد در این جدول یا برابر است با مجموع دو عدد دیگر از این جدول یا برابر است با تفاضل دو عدد دیگر از این جدول.

۹۷. m عددی طبیعی است. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a و b وجود دارند که $|a| \le m$، $|b| \le m$ و

$$۰ < a + \sqrt{۲}b < \frac{۱+\sqrt{۲}}{m+۲}$$

۹۸. P نقطه‌ای درون مثلث ABC است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی

$$\angle PCB = \angle PAC, \qquad \angle PBC = \angle PAB$$

که

$$BP \times AC = CP \times AB, \qquad \angle BPC + \angle BAC = ۱۸۰^\circ$$

۹۹. نقطه‌های P و Q درون مربع $ABCD$ به‌طول ضلع ۱ قرار دارند. ثابت کنید

$$۱۳(PA+QC) + ۱۴PQ + ۱۵(PB+QD) > ۳۸$$

۱۰۰. کیکی به شکل nضلعی‌ای منتظم است که درون دایره‌ای به شعاع ۱ محاط شده است. از وسط هر ضلع این nضلعی برشی به طول ۱ در جهت دلخواه و درون کیک ایجاد می‌کنیم. ثابت کنید دست‌کم یک تکه از کیک جدا می‌شود.

راه‌حلها

۶۱. همهٔ عددهای حقیقی مانند a، b و c را طوری پیدا کنید که

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \le ۶ + \min\left\{a^۲ - \frac{۸}{a^۴}, b^۲ - \frac{۸}{b^۴}, c^۲ - \frac{۸}{c^۴}\right\}$$

راه‌حل اول. فرض کنید عددهای حقیقی a، b و c ویژگی موردنظر را داشته باشند. در این صورت

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \le ۶ + a^۲ - \frac{۸}{a^۴}$$
$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \le ۶ + b^۲ - \frac{۸}{b^۴}$$
$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \le ۶ + c^۲ - \frac{۸}{c^۴}$$

بنابراین

$$\frac{۸}{a^۴} + b^۲ + c^۲ \le ۶$$

$$a^۲ + \frac{۸}{b^۴} + c^۲ \leq ۶$$
$$a^۲ + b^۲ + \frac{۸}{c^۴} \leq ۶$$

درنتیجه

$$\left(\frac{۸}{a^۴} + a^۲ + a^۲\right) + \left(\frac{۸}{b^۴} + b^۲ + b^۲\right) + \left(\frac{۸}{c^۴} + c^۲ + c^۲\right) \leq ۱۸$$

از طرف دیگر، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\left(\frac{۸}{a^۴} + a^۲ + a^۲\right) + \left(\frac{۸}{b^۴} + b^۲ + b^۲\right) + \left(\frac{۸}{c^۴} + c^۲ + c^۲\right)$$
$$\geq ۳\sqrt[۳]{\frac{۸}{a^۴} \times a^۲ \times a^۲} + + ۳\sqrt[۳]{\frac{۸}{b^۴} \times b^۲ \times b^۲} + + ۳\sqrt[۳]{\frac{۸}{c^۴} \times c^۲ \times c^۲} = ۱۸$$

درنتیجه باید

$$\frac{۸}{a^۴} = a^۲, \qquad \frac{۸}{b^۴} = b^۲, \qquad \frac{۸}{c^۴} = c^۲$$

بنابراین $a^۶ = b^۶ = c^۶ = ۸$. به این ترتیب

$$(a, b, c) = (\pm\sqrt{۲}, \pm\sqrt{۲}, \pm\sqrt{۲})$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که هر یک از این سه‌تاییها ویژگی موردنظر را دارد.

راه‌حل دوم. فرض کنید عددهای حقیقی a، b و c ویژگی موردنظر را داشته باشند. فرض کنید

$$A = \min\{a^۲, b^۲, c^۲\}$$

در این صورت $A > ۰$ و

$$\min\left\{a^۲ - \frac{۸}{a^۴}, b^۲ - \frac{۸}{b^۴}, c^۲ - \frac{۸}{c^۴}\right\} = A - \frac{۸}{A^۲}$$

بنابراین

$$A + A + A \leq a^۲ + b^۲ + c^۲ \leq ۶ + \min\left\{a^۲ - \frac{۸}{a^۴}, b^۲ - \frac{۸}{b^۴}, c^۲ - \frac{۸}{c^۴}\right\}$$
$$= ۶ + A - \frac{۸}{A^۲}$$

و درنتیجه، بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$۶ \geq A + A + \frac{۸}{A^۲} \geq ۳\sqrt[۳]{A \times A \times \frac{۸}{A^۲}} = ۶$$

بنابراین

$$2 = A = x^2 = y^2 = z^2$$

پس جوابها همانهایی هستند که در راه‌حل اول گفتیم.

۶۲. a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند ($n \geq 3$) و

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

ثابت کنید

$$\frac{a_n a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1} a_n}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

راه‌حل. فرض کنید $y \leq x \leq 0$ و $1 \leq a < 0$. در این صورت $y \geq x \geq ax$ و درنتیجه $(1-a)(y-ax) \geq 0$ یا $ax + ay \leq a^2 x + y$. بنابراین

$$x + y \leq az + \frac{y}{a} \qquad (1)$$

درنتیجه، اگر

$$(x, y, a) = \left(x_n, x_n \times \frac{x_{n-1}}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right)$$

از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود

$$x_n + \frac{x_{n-1} x_n}{x_2} \leq \frac{x_n x_1}{x_2} + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} \qquad (2)$$

علاوه بر این، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n-2$، اگر

$$(x, y, a) = \left(x_i, x_{n-1} \times \frac{x_{i+1}}{x_2}, \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}}\right)$$

از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} x_i + x_{n-1} \times \frac{x_{i+1}}{x_2} &\leq x_i \times \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}} + x_{n-1} \times \frac{x_{i+1}}{x_2} \times \frac{x_{i+2}}{x_{i+1}} \\ &= x_i \times \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}} + x_{n-1} \times \frac{x_{i+2}}{x_2} \end{aligned}$$

اگر این نابرابریها را، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, n-2$، با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$(x_1 + \cdots + x_{n-2}) + x_{n-1} \leq \left(\frac{x_1 x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-2} x_{n-1}}{x_n}\right) + \frac{x_{n-1} x_n}{x_2}$$

اگر این نابرابری را با نابرابری (۲) جمع کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

۶۳. a، b و c عددهایی نامنفی‌اند و $a+b+c=1$. ثابت کنید

$$2 \le (1-a^2)^2 + (1-b^2)^2 + (1-c^2)^2 \le (1+a)(1+b)(1+c)$$

راه‌حل اول. ابتدا نابرابری سمت چپ را ثابت می‌کنیم.

لم. فرض کنید x و y عددهایی در بازهٔ $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ باشند. در این صورت

$$(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 \ge 1 + (1-(x+y)^2)^2$$

برهان. نابرابری موردنظر با نابرابریهای زیر هم‌ارز است

$$2 - 2x^2 + x^4 - 2y^2 + y^4 \ge 2 - 2(x+y)^2 + (x+y)^4$$

$$4xy \ge 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$$

$$2 \ge 2x^2 + 3xy + 2y^2$$

نابرابری آخر هم درست است، زیرا سمت راستش حداکثر $\frac{7}{4}$ است. ■

برای اثبات نابرابری اصلی، توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $a \le b \le c$. درنتیجه $a \le b \le \frac{1}{2}$. بنابراین، از لمی که ثابت کردیم نتیجه می‌شود

$$(1-a^2)^2 + (1-b^2)^2 \ge 1 + (1-(a+b)^2)^2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، چون

$$a+b+c=1$$

پس $a+b \le 1$ و $c \le \frac{1}{2}$ و درنتیجه، باز هم بنابر لمی که ثابت کردیم،

$$(1-(a+b)^2)^2 + (1-c^2)^2 \ge 1 + (1-(a+b+c)^2)^2 = 1 \qquad (2)$$

از نابرابریهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$(1-a^2)^2 + (1-b^2)^2 + (1-c^2)^2 \ge 2$$

اکنون نابرابری سمت راست را ثابت می‌کنیم. به‌سادگی معلوم می‌شود که کافی است ثابت کنیم

$$1 + a^4 + b^4 + c^4 \le 2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca + abc$$

توجه کنید که

$$1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \qquad (3)$$

همچنین

$$\begin{aligned}1 &= (a+b+c)^3\\ &= a^3+b^3+c^3+3\big(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\big)+6abc\\ &= a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ca)-3abc\end{aligned}$$

پس

$$a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ca)=1+3abc \qquad (4)$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}1=(a+b+c)^4 &= a^4+b^4+c^4+4\big(ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\big)\\ &\quad +6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+12(a^2bc+ab^2c+abc^2)\end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که

$$ab(a^2+b^2)\geq 2a^2b^2,\qquad bc(b^2+c^2)\geq 2b^2c^2,\qquad ca(c^2+a^2)\geq 2c^2a^2$$

و

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2bc+ab^2c+abc^2=abc$$

به این ترتیب

$$a^4+b^4+c^4+14(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+12abc\geq a^4+b^4+c^4+26abc$$

پس

$$1\geq a^4+b^4+c^4+26abc \qquad (5)$$

توجه کنید که اگر $x\in[0,1]$،

$$0\leq x(1-x)(3x-1)^2=-9x^4+15x^3-7x^2+x$$

درنتیجه

$$9(a^4+b^4+c^4)+7(a^2+b^2+c^2)\leq 15(a^3+b^3+c^3)+1 \qquad (6)$$

اگر (۳)، (۴)، (۵) و (۶) را به‌ترتیب در ۸۳، ۴۵، ۴ و ۳ ضرب کنید و نتیجه را با هم جمع کنید معلوم می‌شود که

$$31+31(a^4+b^4+c^4)\leq 62(a^2+b^2+c^2)+31(ab+bc+ca)+31abc$$

که اگر دو طرف این نابرابری را بر ۳۱ تقسیم کنید نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. عبارتهای سمت چپ، وسط و سمت راست را به‌ترتیب L، M و R بنامید. چون $a+b+c=1$،

$$L = 2(a+b+c)^4 = \sum_{\text{متقارن}} (a^4 + 8a^3b + 6a^2b^2 + 12a^2bc)$$

$$M = \frac{1}{2} \sum_{\text{متقارن}} \left((a+b+c)^2 - a^2\right)^2$$

$$= \sum_{\text{متقارن}} (a^4 + 8a^3b + 7a^2b^2 + 16a^2bc)$$

$$R = (2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)(a+b+c)$$

$$= \sum_{\text{متقارن}} (a^4 + 9a^3b + 7a^2b^2 + 15a^2bc)$$

که در اینجا منظور از $\sum_{\text{متقارن}} f(a,b,c)$ عبارت

$$f(a,b,c) + f(a,c,b) + f(b,a,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b) + f(c,b,a)$$

است. به این ترتیب

$$M - L = \sum_{\text{متقارن}} (a^2b^2 + 4a^2bc) \geq 0$$

همچنین

$$R - M = \sum_{\text{متقارن}} (a^3b - a^2bc) = \sum_{\text{متقارن}} \left(\frac{1}{3}(a^3b + a^3b + bc^3) - a^2bc\right)$$

سمت راست این تساوی هم بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نامنفی است.

۶۴. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} - \cdots - (-1)^n \left\{\frac{n}{n}\right\}\right| < \sqrt{2n}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

راه‌حل. معلوم است که اگر $n = 1$ یا $n = 2$ نابرابری موردنظر درست است. فرض کنید $n \geq 3$ و $k = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1$. فرض کنید

$$A = \left\{\frac{n}{1}\right\} - \left\{\frac{n}{2}\right\} + \left\{\frac{n}{3}\right\} - \cdots - (-1)^{k-1} \left\{\frac{n}{k-1}\right\}$$

و

$$B=\left\{\frac{n}{k}\right\}-\left\{\frac{n}{k+۱}\right\}+\cdots+(-۱)^{n-k}\left\{\frac{n}{n}\right\}$$

در این صورت

$$|A|=\left|\left\{\frac{n}{۲}\right\}-\left\{\frac{n}{۱}\right\}+\left\{\frac{n}{۴}\right\}-\cdots+(-۱)^{k-۱}\left\{\frac{n}{k-۱}\right\}\right|\leq\left\{\frac{n}{۲}\right\}+\left\{\frac{n}{۴}\right\}+\cdots$$

که تعداد جمله‌ها در مجموع سمت راست این نابرابری $\left\lfloor\frac{k-۱}{۲}\right\rfloor$ است. از طرف دیگر، اگر m عددی طبیعی و کوچکتر از k باشد،

$$\left\{\frac{n}{m}\right\}\leq\frac{m-۱}{m}\leq\frac{k-۲}{k-۱}$$

بنابراین

$$|A|\leq\left\lfloor\frac{k-۱}{۲}\right\rfloor\frac{k-۲}{k-۱}\leq\frac{k-۲}{۲}$$

اکنون توجه کنید که $B=C-D$، که در آن

$$C=\frac{n}{k}-\frac{n}{k+۱}+\cdots+(-۱)^{n-k}\frac{n}{n}$$

و

$$D=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{k+۱}\right\rfloor+\cdots+(-۱)^{n-k}\left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\circ&\leq\left(\frac{n}{k}-\frac{n}{k+۱}\right)+\left(\frac{n}{k+۲}-\frac{n}{k+۳}\right)+\cdots\\&=C=\frac{n}{k}-\left(\frac{n}{k+۱}-\frac{n}{k+۲}\right)-\cdots\leq\frac{n}{k}\end{aligned}$$

پس $\circ\leq C\leq\frac{n}{k}$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که $\circ\leq D\leq\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\leq\frac{n}{k}$. پس

$$|B|=|C-D|\leq\frac{n}{k}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\left|\left\{\frac{n}{۱}\right\}-\left\{\frac{n}{۲}\right\}+\left\{\frac{n}{۳}\right\}-\cdots-(-۱)^{n}\left\{\frac{n}{n}\right\}\right|&=|A-(-۱)^{k}B|\leq\frac{k-۲}{۲}+\frac{n}{k}\\&<\frac{\sqrt{۲n}-۱}{۲}+\sqrt{\frac{n}{۲}}<\sqrt{۲n}\end{aligned}$$

۶۵. دربارهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ می‌دانیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$P(2x^2 - 1) = \frac{P(x)^2}{2} - 1$$

ثابت کنید این چندجمله‌ای ثابت است.

راه‌حل. فرض کنید

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

که در آن $n \geq 1$ و $a_0 \neq 0$. در این صورت، از تساوی

$$P(2x^2 - 1) = \frac{P(x)^2}{2} - 1$$

نتیجه می‌شود

$$a_0(2x^2-1)^n + a_1(2x^2-1)^{n-1} + \cdots + a_n$$
$$= \frac{(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)^2}{2} - 1$$

اگر ضریب x^{2n} را در دو طرف مقایسه کنیم معلوم می‌شود که $a_0 2^n = \frac{a_0^2}{2}$، پس $a_0 = 2^{n+1}$. فرض کنید می‌دانیم a_0، a_1، ... و a_k عددهایی گویا هستند. توجه کنید که ضریب x^{2n-k-1} در سمت چپ عددی گویا برحسب a_0، a_1، ... و a_k و در سمت راست $a_0 a_{k+1}$ به‌علاوهٔ عددی گویا برحسب a_0، a_1، ... و a_k است. پس a_{k+1} هم عددی گویاست. بنابراین a_0، a_1، ... و a_n عددهایی گویا هستند و چون

$$P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

پس $P(1)$ هم عددی گویاست. اما $P(1) = 1 \pm \sqrt{3}$، پس به تناقض رسیده‌ایم و چندجمله‌ای $P(x)$ ثابت است.

۶۶. همهٔ تابعهای یک‌به‌یک مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$f\big(f(n)\big) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \leq f(n)$. فرض کنید m عددی طبیعی باشد و $m > f(m)$. در این صورت

$$f\big(f(m)\big) \leq \frac{m + f(m)}{2} < m$$

به این ترتیب، از استقرایی ساده نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $m < f^k(m)$، که در اینجا

$$f^s(t) = \underbrace{f\big(f(\cdots f}_{s}(t)\cdots)\big)$$

چون تعداد عددهای ۱، ۲، ... و $m-1$ متناهی است، عددهایی طبیعی مانند i و j وجود دارند که $i < j$ و

$$f^i(m) = f^j(m) = f^i\big(f^{j-i}(m)\big)$$

درنتیجه، چون تابع f یک‌به‌یک است،

$$f^{j-i}(m) = m$$

پس به تناقض رسیده‌ایم. درنتیجه، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$n \leq f(n)$$

پس به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$f(n) \leq f\big(f(n)\big)$$

از طرف دیگر،

$$f\big(f(n)\big) \leq \frac{n + f(n)}{2} \leq f(n)$$

پس به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$f\big(f(n)\big) = f(n)$$

و چون تابع f یک‌به‌یک است، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n) = n$.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n) = n$، آن‌وقت تابع f ویژگیهای موردنظر را دارد.

۶۷. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر سه عدد صحیح مانند x، y و z،

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f(x)^3 + f(y)^3 + f(z)^3$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. در این صورت اگر در تساوی

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f(x)^3 + f(y)^3 + f(z)^3 \qquad (1)$$

فرض کنیم $x = y = z = 0$، معلوم می‌شود که $f(0) = 3f(0)^3$. درنتیجه، چون $f(0)$ عددی صحیح است، $f(0) = 0$. اگر در تساوی (۱) فرض کنیم $y = -x$ و $z = 0$، معلوم می‌شود که

$$f(-x)^3 = -f(x)^3$$

پس $f(-x)=-f(x)$، یعنی f تابعی فرد است.

اگر در تساوی (۱) فرض کنیم $x=1$ و $y=z=0$، معلوم می‌شود $f(1)=f(1)^3$، پس یا $f(1)=0$ یا $f(1)=1$ یا $f(1)=-1$. اگر در تساوی (۱) فرض کنیم $x=y=1$ و $z=1$، معلوم می‌شود $f(2)=2f(1)$ و اگر فرض کنیم $x=y=z=0$، معلوم می‌شود $f(3)=3f(1)$. ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد صحیح مانند x، $f(x)=f(1)x$.

لم. اگر x عددی طبیعی باشد و $x\geq 4$، x^3 را می‌توان به شکل مجموع مکعبهای پنج عدد صحیح نوشت که قدرمطلق هر یک از آنها از x کوچکتر است.

برهان. حکم در مورد عددهای ۴، ۵، ۶ و ۷ درست است، زیرا

$$4^3=3^3+3^3+2^3+1^3+1^3$$
$$5^3=4^3+4^3+(-1)^3+(-1)^3+(-1)^3$$
$$6^3=5^3+4^3+3^3+0^3+0^3$$
$$7^3=6^3+5^3+1^3+1^3+0^3$$

اکنون فرض کنید که $x=2k+1$، که در آن $k\geq 4$. توجه کنید که

$$(2k+1)^3=(2k-1)^3+(k+4)^3+(4-k)^3+(-5)^3+(-1)^3$$

و $2k-1$، $k+4$، $|4-k|$، ۵ و ۱ از x کوچکترند. فرض کنید $x=2k$، که در آن $k\geq 4$. اکنون k را به شکل $a_1^3+\cdots+a_5^3$ بنویسید، که در آن $|a_i|<k$، $1\leq i\leq 5$؛ در این صورت

$$x=(2a_1)^3+\cdots+(2a_5)^3$$

■

توجه کنید که چون f تابعی فرد است، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند x، $f(x)=f(1)x$. بنابر آنچه در بالا دیدیم، اگر $|x|\leq 3$، حکم درست است. فرض کنید $x\geq 4$ و اگر $|y|<x$، $f(y)=f(1)y$. بنابر لمی که ثابت کردیم، x^3 را می‌توان به شکل $x_1^3+\cdots+x_5^3$ نوشت، که $|x_i|<x$، $1\leq i\leq 5$. درنتیجه

$$x^3+(-x_4)^3+(-x_5)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$$

بنابراین

$$f(x)^3-f(x_4)^3-f(x_5)^3=f(x_1)^3+f(x_2)^3+f(x_3)^3$$

و درنتیجه

$$f(x)^3=(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3)f(1)^3=(f(1)x)^3$$

پس $f(x) = f(1)x$. بنابراین، یا به‌ازای هر عدد صحیح مانند x، $f(x) = x$، یا به‌ازای هر عدد صحیح مانند x، $f(x) = x$، یا به‌ازای هر عدد صحیح مانند x، $f(x) = -x$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این تابعها ویژگیهای موردنظر را دارند.

۶۸. a، b، c، d و e عددهایی طبیعی‌اند و $a < b < c < d < e$. ثابت کنید

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16}$$

($[m,n]$ کوچکترین مضرب مشترک m و n است.)

راه‌حل اول. سمت چپ نابرابری موردنظر را S بنامید. چون $a < b < c < d < e$، پس

$$[a,b] \geq 2a, \quad [b,c] \geq 2b, \quad [c,d] \geq 2c, \quad [d,e] \geq 2d$$

درضمن $b \geq 2$ و $c \geq 3$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $c = 3$. اگر $d = 4$، آن‌وقت

$$[a,b] = 2, \quad [b,c] = 6, \quad [c,d] = 12, \quad [d,e] \geq 8$$

بنابراین

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < \frac{15}{16}$$

اگر $d \geq 5$، آن‌وقت $[c,d] \geq 6$ و $[d,e] \geq 10$. بنابراین

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{14}{15} < \frac{15}{16}$$

حالت ۲. $c \geq 4$. اگر $5 \leq d \leq 7$، آن‌وقت بجز وقتی که $c = 4$ و $d = 6$،

$$[c,d] = 20, 28, 30, 35, 42$$

در حالتی که $c = 4$ و $d = 6$،

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12} < \frac{15}{16}$$

و در غیر این صورت

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{9}{10} < \frac{15}{16}$$

اگر $d \geq 8$، آن‌وقت

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

راه‌حل دوم. حکمی کلیتر را ثابت می‌کنیم: فرض کنید a_0، a_1، ... و a_n عددهایی طبیعی باشند و

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n$$

در این صورت

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leq 1 - \frac{1}{2^n}$$

از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = 1$، درستی حکم معلوم است. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد و a_0، a_1، ... و a_{n+1} عددهایی طبیعی باشند که

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1}$$

اگر $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$، آن‌وقت $[a_n, a_{n+1}] \geq 2^{n+1}$ و از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} + \frac{1}{[a_n, a_{n+1}]}$$
$$\leq 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

اکنون فرض کنید $a_{n+1} < 2^{n+1}$. توجه کنید که اگر p و q عددهایی طبیعی باشند، آن‌وقت

$$[p, q](p, q) = pq$$

که در آن (p, q) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p و q است. تفاضل p و q بر (p, q) بخش‌پذیر است، درنتیجه اگر $p > q$، آن‌وقت $(p, q) \leq p - q$. بنابراین، اگر $0 \leq k \leq n$،

$$\frac{1}{[a_k, a_{k+1}]} = \frac{(a_k, a_{k+1})}{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$$

درنتیجه

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[a_k, a_{k+1}]} \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

چون $\frac{1}{a_0} < 1$ و $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}$، حکم موردنظر را ثابت کرده‌ایم.

۶۹. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \left[1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right]$$

($[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ کوچکترین مضرب مشترک a_1، a_2، ... و a_n است.)

راه‌حل. کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد اول مانند p، نمای p در تجزیهٔ هر دو طرف به عددهای اول برابر است. نمای p در تجزیهٔ $n!$ به عددهای اول برابر است با

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{۲}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{۳}} \right\rfloor + \cdots$$

(درحقیقت، جملهٔ iام تعداد مضربهای p^i در میان عددهای ۱، ۲، ... و n است و درنتیجه، عددی که بزرگترین توان p در تجزیهٔ آن به عددهای اول برابر با p^i است دقیقاً i بار شمرده می‌شود). این عدد برابر است با تعداد عضوهای مجموعهٔ S، که از نقطه‌هایی از صفحه تشکیل شده است که مختصاتشان عددهایی طبیعی‌اند و روی خم $y = np^{-x}$ یا زیر آن قرار دارند؛ درحقیقت جملهٔ iام در مجموع بالا برابر با تعداد عضوهایی از S است که در آنها $x = i$.

در عبارت سمت راست، نمای p در تجزیهٔ $\left[۱, ۲, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right]$ برابر است با $\left\lfloor \log_p \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right\rfloor$ یا $\left\lfloor \log_p \frac{n}{i} \right\rfloor$. از طرف دیگر، این مقدار برابر با تعداد نقطه‌هایی از S است که در آنها $y = i$.

بنابراین

$$\sum_{i=۱}^{n} \left\lfloor \log_p \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{۲}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^{۳}} \right\rfloor + \cdots$$

۷۰. n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱۰۰۰۰ است. ثابت کنید عددی طبیعی مانند m وجود دارد که می‌توان آن را به شکل مجموع دو مربع کامل نوشت و $۰ < m - n < ۳\sqrt[۴]{n}$.

راه‌حل. فرض کنید x عددی طبیعی باشد که $x^{۲} \leq n < (x + ۱)^{۲}$. در این صورت

$$n - x^{۲} \leq ۲x \leq ۲\sqrt{n}$$

فرض کنید y عددی طبیعی باشد که

$$(y - ۱)^{۲} \leq n - x^{۲} < y^{۲}$$

در این صورت

$$y = (y - ۱) + ۱ \leq \sqrt{n - x^{۲}} + ۱ \leq \sqrt{۲\sqrt{n}} + ۱ = \sqrt{۲}\sqrt[۴]{n} + ۱$$

فرض کنید $m = x^{۲} + y^{۲}$. در این صورت $m > n$، پس $m - n > ۰$. از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} m - n &= x^{۲} + y^{۲} - n = y^{۲} - (n - x^{۲}) \leq y^{۲} - (y - ۱)^{۲} \\ &= ۲y - ۱ \leq ۲\sqrt{۲}\sqrt[۴]{n} + ۱ \end{aligned}$$

و چون $n > ۱۰۰۰۰$،

$$۲\sqrt{۲}\sqrt[۴]{n} + ۱ < ۳\sqrt[۴]{n}$$

راه‌حلها

از باب تفریح

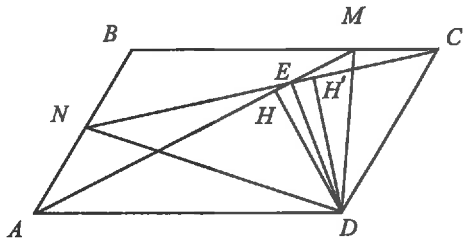
۱. ۷۰ امتیاز. توجه کنید که اگر میانگین مجموعه‌ای از عددها را به این مجموعه اضافه کنیم مجموعه‌ای به‌دست می‌آید که میانگینش با میانگین مجموعهٔ قبلی برابر است.

۲. خیر، نمی‌توان، زیرا هر عدد هشت رقمی که به این ترتیب پدید می‌آید از ۱۰۰۰۰۲ کوچکتر است و از ۹۹۹۸۰۰۰۱ بزرگتر است و این عدد برابر است با ۹۹۹۹۲.

۳. توجه کنید که مساحت هر یک از مثلثهای AMD و CND برابر با نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است، پس مساحت این مثلثها با هم برابر است. درنتیجه، چون $AM = CN$، ارتفاع DH در مثلث AMD با ارتفاع DH' در مثلث CND برابر است. بنابراین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ DHE و $DH'E$ همنهشت‌اند؛ پس

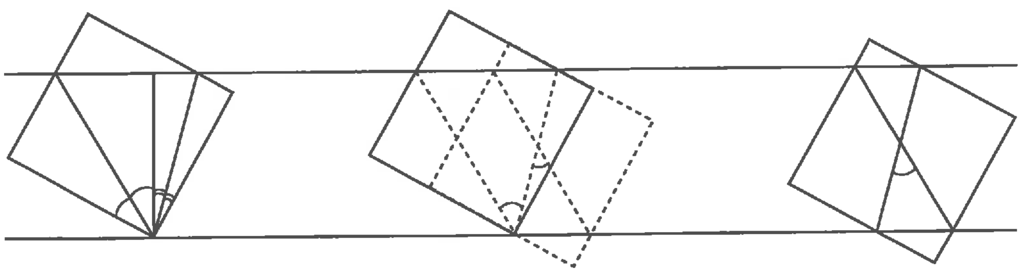
$$\angle DEH = \angle DEH'$$

یعنی ED نیمساز زاویهٔ AEC است.



۴. در میان هر ۱۸ عدد طبیعی متوالی یکی بر ۱۸ بخش‌پذیر است. درنتیجه، اگر مجموع رقمهای این عدد برابر با S باشد، S بر ۹ بخش‌پذیر است و آخرین رقم این عدد هم زوج است. چون این عدد سه رقمی است، S از ۸+۹+۹ یا ۲۶ بیشتر نیست؛ پس یا $S = ۹$ یا $S = ۱۸$. در هر حالت، عدد موردنظر بر مجموع رقمهایش بخش‌پذیر است.

۵. مربع را طوری انتقال می‌دهیم که مانند شکل (ب) قرار بگیرد. زاویهٔ موردنظر را در شکل (ب) مشخص کرده‌ایم. در شکل (ج) هم زاویه‌های برابر را مشخص کرده‌ایم (از برابری عرض نوار و طول ضلع مربع و همنهشتی مثلثهای قائم‌الزاویه استفاده کرده‌ایم). اکنون معلوم است که اندازهٔ زاویهٔ موردنظر °۴۵ است.


(ج) (ب) (الف)

چهل و پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

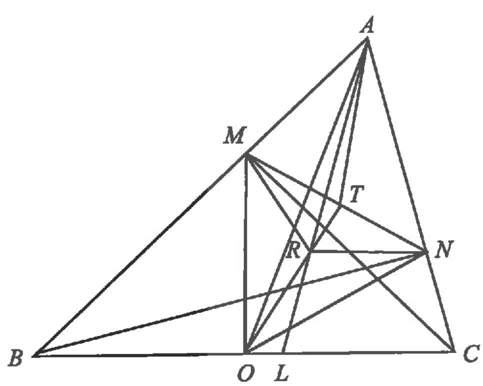
۱. وسط MN را T بنامید. چون مثلثهای ABC و ANM متشابه‌اند و میانه‌های AO و AT نظیر یکدیگر، پس $\angle BAO = \angle CAT$. بنابراین نیمساز زاویهٔ BAC، یعنی AR، نیمساز زاویهٔ OAT نیز هست. بنابراین

$$\frac{RT}{RO} = \frac{AT}{AO}$$

علاوه بر این، اگر دوباره از اینکه AT و AO میانه‌های نظیر در دو مثلث متشابه‌اند استفاده کنیم معلوم می‌شود

$$\frac{AT}{AO} = \frac{MN}{BC} = \frac{MT}{BO} = \frac{MT}{MO}$$

درنتیجه MR نیمساز زاویهٔ OMN است. اکنون توجه کنید که $\angle BMO = \angle B$ (O مرکز دایره‌ای است که از نقطه‌های B، C، M و N می‌گذرد). بنابراین، چون $\angle AMN = \angle C$، پس $\angle OMN = \angle A$ و درنتیجه $\angle BMR = \angle B + \frac{\angle A}{۲} = \angle CLR$. بنابراین نقطه‌های B، L، R و M روی یک دایره قرار دارند. به همین ترتیب معلوم می‌شود که نقطه‌های C، L، R و N روی یک دایره قرار دارند.



۲. فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، اگر

$(a,b,c)=(۶x,۳x,-۲x)$، آن‌وقت $ab+bc+ca=۰$. بنابراین

$$P(۳x)+P(۵x)+P(-۸x)=۲P(۷x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

درنتیجه، اگر $P(x)=\sum a_ix^i$،

$$(۳^i+۵^i+(-۸)^i-۲\times ۷^i)a_i=۰, \qquad i=۰,۱,۲,\dots$$

اگر i عددی فرد باشد، عبارت داخل پرانتز در سمت چپ منفی است و اگر $i=۰$ یا i عددی زوج و بزرگتر از ۴ باشد، این عبارت مثبت است. فقط به‌ازای $i=۲$ و $i=۴$ این عبارت صفر است. درنتیجه $P(x)=\alpha x^۲+\beta x^۴$، که در آن α و β عددهایی حقیقی‌اند.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $P(x)=\alpha x^۲+\beta x^۴$، که در آن α و β عددهایی حقیقی‌اند، آن‌وقت $P(x)$ ویژگیهای موردنظر را دارد. توجه کنید که کافی است ثابت کنیم $x^۲$ و $x^۴$ ویژگیهای موردنظر را دارند. در مورد $x^۲$، این مطلب از اتحاد

$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲-۲(a+b+c)^۲=-۶(ab+bc+ca)$$

نتیجه می‌شود. در مورد $x^۴$، فرض کنید $x=a-b$، $y=b-c$ و $z=c-a$ و توجه کنید بنابر آنچه در مورد $x^۲$ ثابت کردیم، $x^۲+y^۲+z^۲=۲(a+b+c)^۲$. به این ترتیب، چون $x+y+z=۰$، آنچه می‌خواهیم از تساویهای زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}
xy+yz+zx&=-\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲+z^۲)=-(a+b+c)^۲\\
(xy)^۲+(yz)^۲+(zx)^۲&=(xy+yz+zx)^۲-۲xyz(x+y+z)=(a+b+c)^۴\\
x^۴+y^۴+z^۴&=(x^۲+y^۲+z^۲)-۲\big((xy)^۲+(yz)^۲+(zx)^۲\big)\\
&=۲(a+b+c)^۴
\end{aligned}$$

بنابراین چندجمله‌ایهای موردنظر چندجمله‌ایهایی به شکل $\alpha x^۲+\beta x^۴$ هستند که در آنها α و β عددهایی حقیقی‌اند.

۳. فرض کنید مستطیلی $m\times n$ را آن‌طور که موردنظر است با قلابها پوشانده‌ایم. به‌ازای هر قلاب مانند A، قلاب یکتایی مانند B وجود دارد که مربعِ «در دل» A را با یکی از مربعهای «انتهایی»اش می‌پوشاند. به‌همین ترتیب، مربعِ «در دل» B باید با یکی از مربعهای «انتهایی» A پوشانده شود. بنابراین، هرطورکه مستطیل را با قلابها بپوشانیم، می‌توان قلابها را دوتا دوتا جفت کرد. فقط به دو طریق می‌توان B را طوری قرار داد که نه با A هم‌پوشانی داشته باشد و نه هیچ حفره‌ای به‌وجود بیاید. در یک حالت A و B مستطیلی ۴×۳ تشکیل می‌دهند و در حالت دیگر، اجتماع آنها هشت‌ضلعی‌ای است که طول ضلعهایش ۳، ۲، ۱، ۲، ۳، ۲، ۱ و ۲ است.

بنابراین، وقتی و فقط وقتی می‌توان مستطیلی $m \times n$ را با قلابها پوشاند که بتوان آن را با کاشیهای ۱۲ـمربعی که در بالا گفتیم پوشاند. درنتیجه mn بر ۱۲ بخش‌پذیر است. ثابت می‌کنیم که یکی از عددهای m و n بر ۴ بخش‌پذیر است.

فرض کنید چنین نباشد. در این صورت m و n هر دو زوج‌اند، زیرا mn بر ۴ بخش‌پذیر است. فرض کنید مستطیل را به مربعهای واحد تقسیم کرده‌ایم و سطرها را با عددهای ۱، . . . و m و ستونها را با عددهای ۱، . . . و n شماره‌گذاری کرده‌ایم. اگر دقیقاً یکی از عددهای i و j بر ۴ بخش‌پذیر بود در مربع (i, j) بنویسید ۱ و اگر i و j هر دو بر ۴ بخش‌پذیر بودند بنویسید ۲. چون تعداد مربعها در هر سطر و هر ستون عددی زوج است، مجموع همهٔ عددهایی که نوشته شده‌اند زوج است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که هرکاشی مستطیلی ۴ × ۳ مربعهایی را می‌پوشاند که مجموع عددهایشان ۳ یا ۷ است و کاشیهای ۱۲ـمربعی نوع دیگر مربعهایی را می‌پوشانند که مجموع عددهایشان ۵ یا ۷ است. بنابراین تعداد کل کاشیهای ۱۲ـمربعی عددی زوج است. اما در این صورت mn بر ۲۴ و درنتیجه بر ۸ بخش‌پذیر می‌شود، که با این فرض که m و n بر ۴ بخش‌پذیر نیستند تناقض دارد.

همچنین، توجه کنید که ممکن نیست m یا n برابر با ۱، ۲ یا ۵ باشند (به هیچ طریقی نمی‌توان کاشیها را کنار ضلعی به طول ۱، ۲ یا ۵ گذاشت). بنابراین یکی از عددهای m و n بر ۳ بخش‌پذیر است و دیگری بر ۴ و $m, n \notin \{۱, ۲, ۵\}$.

برعکس، اگر این شرطها برقرار باشند، می‌توان مستطیلی $m \times n$ را (حتی فقط با کاشیهای مستطیلی ۴ × ۳) به شکل موردنظر پوشاند. اگر m بر ۳ و n بر ۴ بخش‌پذیر باشد (یا برعکس) روش کار به‌روشنی معلوم است. فرض کنید m بر ۱۲ بخش‌پذیر باشد و $n \notin \{۱, ۲, ۵\}$ (یا برعکس). در این صورت n را می‌توان به شکل مجموع چند ۳ و چند ۴ نوشت. بنابراین می‌توان مستطیل را به تعدادی مستطیل $m \times ۳$ و $m \times ۴$ افراز کرد، که هر یک را می‌توان فقط با کاشیهای مستطیلی ۴ × ۳ پوشاند.

۴. می‌توانید راه‌حلهای اعضای تیم ایران را در صفحه‌های ۲۹ تا ۴۱ ببینید. این هم راه‌حلی دیگر! بنابر تقارن، کافی است ثابت کنیم $t_۱ < t_۲ + t_۳$. توجه کنید که

$$\sum_{i=۱}^{n} t_i \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{t_i} = n + \sum_{۱\le i<j\le n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right)$$
$$= n + t_۱\left(\frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۳}\right) + \frac{۱}{t_۱}(t_۲ + t_۳) + \sum_{\substack{۱\le i<j\le n\\ (i,j)\neq(۱,۲),(۱,۳)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right)$$

بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{۱}{t_۲} + \frac{۱}{t_۳} \ge \frac{۲}{\sqrt{t_۲ t_۳}}, \quad t_۲ + t_۳ \ge ۲\sqrt{t_۲ t_۳}, \quad \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \ge ۲, \quad ۱ \le i, j \le n$$

بنابراین، اگر $a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}}$، از فرض نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} n^2 + 1 > \sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} &\geq n + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2t_3}}{t_1} + 2\left(\binom{n}{2} - 2\right) \\ &= 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4 \end{aligned}$$

بنابراین $0 > 5 - \frac{2}{a} + 2a$. به این ترتیب $2 > a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}} > \frac{1}{2}$. درنتیجه $t_1 < 2\sqrt{t_2t_3}$ و اگر یک‌بار دیگر از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کنیم نتیجه می‌شود $t_1 < 2\sqrt{t_2t_3} \leq t_1 + t_3$.

۵. چون P درون $ABCD$ قرار دارد، پس وقتی و فقط وقتی $\angle DBA < \angle DBC$ که $\angle BDA < \angle BDC$.
بنابراین بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم P درون مثلثهای ACD و BCD قرار دارد.

فرض کنید چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد. فرض کنید خطهای BP و DP، AC را به‌ترتیب در نقطه‌های K و L قطع‌کنند. از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود $\angle ACB = \angle ADB$ و $\angle ABD = \angle ACD$. بنابراین مثلثهای DAB، DLC و CKB متشابه‌اند. درنتیجه $\angle PKL = \angle PLK$، پس $PK = PL$.
مثلثهای ADL و BDC هم متشابه‌اند. درنتیجه

$$\frac{AL}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{KC}{BC}$$

پس $AL = KC$. بنابراین مثلثهای ALP و CKP همنشهت‌اند، پس $AP = CP$.

اکنون فرض کنید $AP = CP$. فرض کنید دایرهٔ محیطی مثلث BCP خطهای CD و DP را برای بار دوم به‌ترتیب در نقطه‌های X و Y قطع کند. مثلثهای ADB و PDX متشابه‌اند، درنتیجه مثلثهای ADP و BDX هم متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD} \tag{1}$$

علاوه بر این، مثلثهای DPC و DXY هم متشابه‌اند و درنتیجه

$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD} \tag{2}$$

چون $AP = CP$، از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $BX = YX$. بنابراین

$$\begin{aligned} \angle DCB = \angle XYB = \angle XBY &= \angle XPY \\ &= \angle PDX + \angle PXD = \angle ADB + \angle ABD = 180^\circ - \angle BAD \end{aligned}$$

یعنی چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

۶. ثابت می‌کنیم که عدد طبیعی n وقتی و فقط وقتی مضربی متناوب دارد که بر ۲۰ بخش‌پذیر نباشد.

اگر n بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد، دو رقم آخر نمایش دهدهی آن زوج‌اند، پس هیچ مضرب متناوبی ندارد. توانهای ۲ و عددهای به شکل ۲×۵^n را جداگانه بررسی می‌کنیم. وقتی می‌نویسیم $a \parallel u^k$، منظورمان این است که u^k بزرگترین توان u است که a را می‌شمارد.

لم ۱ . هر توانی از ۲ مضربی متناوب دارد که تعداد رقمهایش عددی زوج است.

برهان. کافی است دنباله‌ای نامتناهی از رقمهای دهدهی مانند $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ بسازیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$a_n \equiv n + ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲), \qquad ۲^{۲n-۱} \parallel \overline{a_{۲n-۱}\dots a_۱}, \qquad ۲^{۲n+۱} \parallel \overline{a_{۲n}a_{۲n-۱}\dots a_۱}$$

فرض کنید $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۷$. اگر دنباله تا $a_{۲n}$ ساخته شده بود، فرض کنید $a_{۲n+۱} = ۴$. در این صورت $a_{۲n+۱}$ زوج است و

$$۲^{۲n+۱} \parallel \overline{a_{۲n+۱}a_{۲n}\dots a_۱} = ۴ \times ۱۰^{۲n} + \overline{a_{۲n}a_{۲n-۱}\dots a_۱}$$

زیرا بنابر فرض استقرا $۲^{۲n+۱} \parallel \overline{a_{۲n}a_{۲n-۱}\dots a_۱}$ و $۲^{۲n+۲} \parallel ۴ \times ۱۰^{۲n}$. فرض کنید

$$\overline{a_{۲n+۱}\dots a_۱} = ۲^{۲n+۱}A$$

که در آن A عددی فرد است. $a_{۲n+۲}$ باید فرد باشد و

$$\begin{aligned} ۲^{۲n+۳} \parallel \overline{a_{۲n+۲}a_{۲n+۱}\dots a_۱} &= a_{۲n+۲}۱۰^{۲n+۱} + \overline{a_{۲n+۱}a_{۲n}\dots a_۱} \\ &= ۲^{۲n+۱}(a_{۲n+۲}۵^{۲n+۱} + A) \end{aligned}$$

که اگر $۵a_{۲n+۲} + A \equiv ۴ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۸)$، درست است. چون A فرد است، جوابهای این همنهشتی عددهایی فردند. علاوه بر این، $a_{۲n+۲}$ را می‌توان از مجموعهٔ $\{۰, ۱, \dots, ۷\}$ انتخاب کرد. دنباله را به‌طورکامل ساخته‌ایم. ∎

لم ۲ . هر عدد به شکل ۲×۵^n مضربی متناوب دارد که تعداد رقمهایش عددی زوج است.

برهان. دنباله‌ای نامتناهی از رقمهای دهدهی مانند $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ می‌سازیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$b_n \equiv n + ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲), \qquad ۲ \times ۵^n \mid \overline{b_n \dots b_۱}$$

فرض کنید $b_۱ = ۰$ و $b_۲ = ۵$. فرض کنید $b_۱$، $\dots$ و b_n را ساخته‌ایم و فرض کنید $\overline{b_n \dots b_۱} = ۵^l B$، که در آن $l \geq n$ و B بر ۵ بخش‌پذیر نیست. رقم بعدی، یعنی $b_{n+۱}$، باید به‌گونه‌ای باشد که

$$b_{n+۱} \equiv n + ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

و

$$5^{n+1} \mid \overline{b_{n+1}b_n\dots b_1} = b_{n+1}10^n + \overline{b_n\dots b_1} = 5^n(b_{n+1}2^n + 5^{l-n}B)$$

اگر $b_{n+1}2^n + B$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، شرط اخیر برقرار است. بنابر قضیهٔ باقیماندهٔ چینی، دستگاه همنهشتیهای

$$b_{n+1} \equiv n+2 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2), \qquad b_{n+1}2^n + B \equiv 0 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 5)$$

جواب دارد. به‌ویژه، می‌توان جوابی مانند b_{n+1} از مجموعهٔ $\{0, 1, \dots, 9\}$ انتخاب کرد، همان چیزی که می‌خواهیم. ∎

اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم، یعنی وقتی که $n = 2^\alpha 5^\beta k$، که در آن k نسبت به ۱۰ اول است. اگر n بر ۲۰ بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت $2^\alpha 5^\beta$ یا توانی از ۲ است، یا توانی از ۵ است یا عددی به شکل $5^\beta \times 2$ است. در هر حالت، بنابر لمهای (۱) و (۲)، $2^\alpha 5^\beta$ مضربی متناوب مانند M دارد که زوج است و تعداد رقمهایش هم عددی زوج است. فرض کنید تعداد رقمهای M برابر با $2m$ باشد. معلوم است که هر عدد صحیح به شکل $\overline{MM\dots M}$ هم مضربی متناوب از $2^\alpha 5^\beta$ است. ثابت می‌کنیم که یکی از این مضربها مضرب n است. فرض کنید

$$C_l = 1 + 10^{2m} + \dots + 10^{2m(l-1)}, \qquad l = 1, 2, \dots, k+1$$

بنابر اصل لانهٔ کبوتری دوتا از این عددها، مثلاً C_{l_1} و C_{l_2}، که $l_1 < l_2$، به‌پیمانهٔ k همنهشت‌اند. بنابراین، k، $C_{l_2} - C_{l_1}$ را می‌شمارد. چون $C_{l_2} - C_{l_1} = C_{l_2-l_1}10^{2ml_1}$ و k و ۱۰ نسبت به هم اول‌اند، پس k، $C_{l_2-l_1}$ را می‌شمارد. اکنون معلوم است که $M \times C_{l_2-l_1}$، که به شکل $\overline{MM\dots M}$ است، مضربی متناوب از n است.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
انتشارات فاطمی
منتشر کرده است:
نظریهٔ اعداد
ترکیبیات
جلد اول
ازاردوش تا کی‌یف
هندسهٔ مسطحه
المپیادهای ریاضی چین
جدید
حل مسأله از طریق مسأله
برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز
پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو
فنون مسأله حل کردن
۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات
جدید
مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی
زیر نظر: دکتر یحیی تابش / دکتر امیدعلی کرمزاده
در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای باارزش به ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید ،بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این‌رو مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به انتشار مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:
دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهای مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه ، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.
دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای میانه و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است.
دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.
منتشر می‌کند:
هندسه
آشنایی با ترکیبیات
۱۰۱ مسألهٔ جبر


مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
انتشارات فاطمی
منتشر کرده است:
تورنمنت شهرها
ترجمهٔ ارشک حمیدی
کتابهای
موضوعی
ریاضی
آشنایی با نظریهٔ گراف
جدید
مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی
کارگاه
اعداد
تورنمنت شهرها
جدید
جبر
جدید
منتشر می‌کند:
تورنمنت شهرها
تورنمنت شهرها
مسابقه‌های ریاضی
دبیرستانی امریکا
۱۹۸۳-۲۰۰۴
گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی
مسابقه‌های ریاضی
مدارس راهنمایی
امریکا
۱۹۸۶-۲۰۰۳
گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی