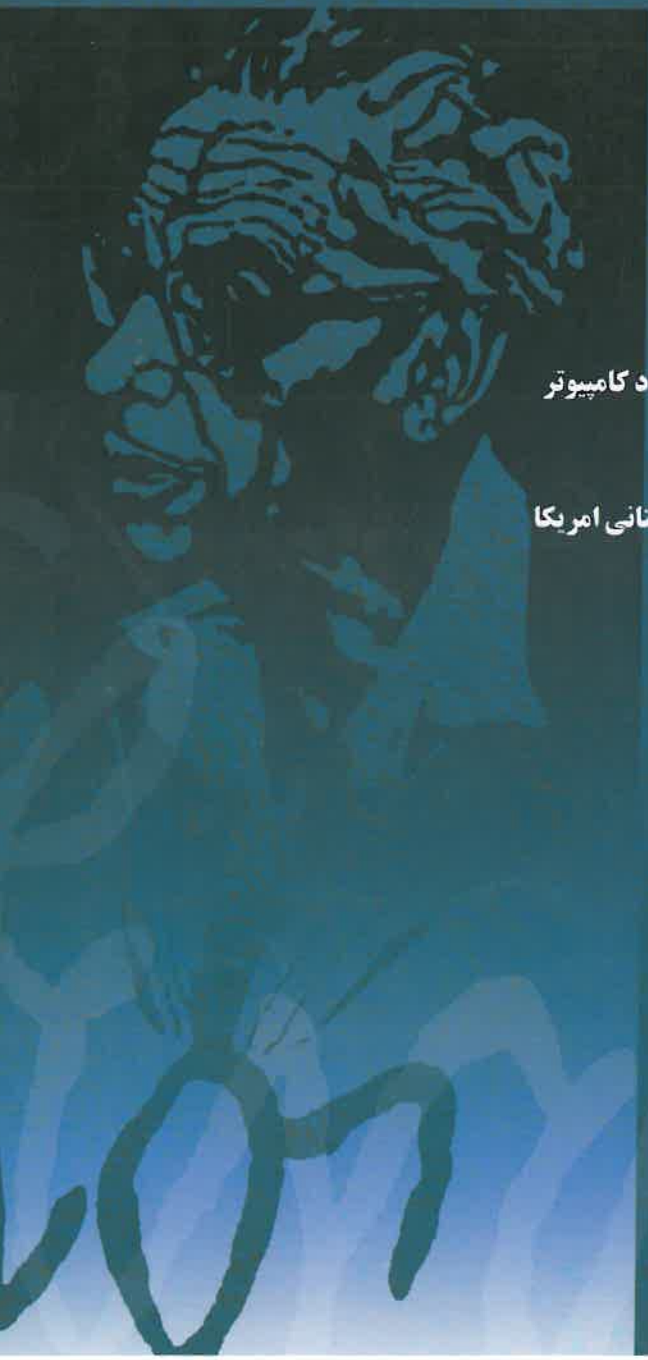
نشریهٔ

ریاضیات

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال پنجم / ۲
شمارهٔ پیاپی: ۱۶
آبان ۱۳۸۳
قیمت: ۹۰۰ تومان



- نابغه‌های خردسال
- قضیهٔ فرشها
- اولین باری که در المپیاد کامپیوتر شرکت کردیم!
- تورنمنت شهرها
- آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

کتابهای کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز

طرح مشترک با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

هدف از تهیه و انتشار کتابهای کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز کمک به توسعه و درک بهتر مفاهیم کتابهای درسی و ایجاد مهارت برای پاسخگویی به پرسشها، مسائل و آزمونهای گوناگون است. کتابهای کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز بر اساس برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی تهیه شده است. در این کتابها ابتدا بعضی از مفاهیم، کتابهای درسی با ذکر مصادیق تشریح شده و بعد از توسعهٔ آن مفاهیم، مصادیق آن در قالب تمرینهای طبقه‌بندی شده برای یادگیری عمیق آمده است. این کتابها جانشینی برای کتابهای درسی نیست، بلکه باید همراه با مطالعهٔ کتابهای درسی مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد.

کتابهای تقدیری سومین جشنوارهٔ کتابهای آموزشی رشد

به نام خدا

نشریهٔ **ریاضیات**

برای دانش‌آموزان دبیرستان و پیش‌دانشگاهی

سال پنجم/ ۲ • شمارهٔ پیاپی: ۱۶ • آبان ۱۳۸۳

فهرست:

مقاله‌ها

سرگرمی

المپیاد

راه حل

روی جلد: پال اردوش

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، محمد مهدی عابدی‌نژاد

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه بندی: سپیده آذروند

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ ۸۹۷۱۵۸۳

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

نابغه‌های خردسال

پال اردوش

پال اِردوش در سال ۱۹۱۳ میلادی در مجارستان متولد شد و در سال ۱۹۹۶ در همان‌جا درگذشت. اردوش جوینده‌ای خستگی‌ناپذیر بود و مسأله‌های پیکارجوی بسیاری را در ریاضیات پیش روی پژوهشگران بسیاری از کشورهای جهان قرار داد. اردوش ۱۵۰۰ مقاله و کتاب را به تنهایی یا با همکاری دیگران به رشتهٔ تحریر درآورده است و از این‌رو بیشتر از هر کسی در تاریخ ریاضیات با ریاضیدانان دیگر همکاری داشته است. سخنرانی زیر در سال ۱۹۷۰ ایراد شده است و یادداشت پایانی آن در سال ۱۹۹۴ نوشته شده است.

در اینجا می‌خواهم دربارهٔ نابغه‌های خردسالی که دیده‌ام صحبت کنم. شاید بهتر باشد از خودم شروع کنم، چون وقتی سه سال بیشتر نداشتم به نوعی نابغه‌ای خردسال بودم. بلد بودم که با عددهای نسبتاً بزرگ خیلی خوب محاسبه کنم. گمان می‌کنم که دو تا از بزرگترین کشفیاتم اینها بودند: وقتی چهارساله بودم به مادرم گفتم که اگر ۲۵۰ را از ۱۵۰ کم کنید عدد ۱۰۰ زیر صفر را به دست می‌آورید. یک دفعه هم وقتی که پنج سال بیشتر نداشتم، موقعی که دانستم چند سال طول می‌کشد یک قطار به خورشید برسد، فاصلهٔ زمین تا خورشید را حساب کردم. اتفاقاً، پدر و مادرم هر دو ریاضیدان بودند؛ من این‌طور حساب کردن را آموختم: پدرم در طول جنگ جهانی اول در سیبری اسیر جنگی بود، مادرم در دبیرستان تدریس می‌کرد و من می‌ماندم و یک معلم سرخانهٔ آلمانی. از این‌رو، طبیعتاً علاقه‌مند بودم بدانم چه‌وقت مادرم در خانه است و به همین علت با یک تقویم بازی می‌کردم و از چند ماه جلوتر می‌دانستم که چه روزی تعطیل است. بله، ممکن است که حساب کردن را از این راه آموخته باشم. به همین ترتیب، پژوهش ریاضی را واقعاً تا اندازه‌ای زود آغاز کردم. نخستین مقاله‌ام را وقتی هجده ساله بودم نوشتم و در آن اثباتی جدید برای این قضیهٔ چبیشف که همیشه عددی اول میان عددهای N و $2N$ وجود دارد ارائه کردم. دربارهٔ خودم همین اندازه کافی است.

همهٔ ریاضیدانان در کودکی نابغه نبوده‌اند؛ اما بعضی از آنها حقیقتاً چنین بوده‌اند. مثلاً آثار نبوغ در گاوس از همان کودکی پیدا بود، در حالی که هاردی بی‌تردید این‌طور نبود، فون‌نویمان و نوربرت وینر هر دو در کودکی هم نابغه بودند. اما اکنون فقط دربارهٔ نابغه‌های خردسالی می‌خواهم صحبت کنم که شخصاً با آنها ارتباط داشته‌ام.

با دو نفر اول که نامشان را ذکر می‌کنم زیاد ارتباط نداشتم و از این‌رو در مورد آنها فقط مختصری توضیح می‌دهم.

پیتر لاکس را وقتی حدوداً دوازده ساله بود در مجارستان نابغه می‌دانستند. او وقتی شانزده ساله بود به ایالات متحده آمد و معرفی‌نامه‌ای برایم آورد و به همین دلیل تقریباً به محض ورودش با او ملاقات کردم. ما بارها و بارها

یکدیگر را در نیویورک و پرینستون ملاقات کردیم. هنوز به‌یاد دارم که هالموس در مؤسسهٔ تحقیقات پیشرفته گفت: اینجا یک بچهٔ مجار هست که تو می‌توانی دربارهٔ ریاضیات با او صحبت کنی. پیتر لاکس نخستین مقاله‌اش را هم در حقیقت دربارهٔ یکی از مسأله‌های من در مورد چندجمله‌ایها نوشت، اما چندی بعد به شاخه‌ای دیگر از ریاضیات که دربارهٔ آن چیزی نمی‌دانم، یعنی معادلات دیفرانسیل، روی آورد و بعد از آن دیگر ارتباط ریاضی چندانی با او نداشتم.

دومین نابغهٔ خردسال که می‌خواهم یاد کنم، پیتر آنگار است که حدوداً چهارده، پانزده ساله بود که در مجارستان به نبوغش پی بردند. زمانی که هنوز پانزده سالش تمام نشده بود توران چندتا از نتیجه‌های او را در مقاله‌ای دربارهٔ تابع زتای ریمان آورد. یکی از مسأله‌هایش را در مجلهٔ ماهنامهٔ ریاضیات امریکا وقتی طرح کرد که چهارده سال بیشتر نداشت. شخصاً با وی ارتباط زیادی نداشتم و از این‌رو چیز زیادتری ندارم که بگویم. هم پیتر آنگار و هم پیتر لاکس اکنون استاد دانشگاه نیویورک‌اند.

اکنون می‌خواهم دربارهٔ پوشا صحبت کنم که الان ۲۲ ساله است و با این سن و سال کم تا به حال حدود هشت مقاله نوشته است. وقتی او را دیدم هنوز دوازده سالش نشده بود. وقتی در تابستان سال ۱۹۵۹ از ایالات متحده بازگشتم به من گفتند که در اینجا پسر کوچکی هست که مادرش هم ریاضیدان است و با وجود اینکه کم سن و سال است، بر همهٔ مطالب ریاضی برنامهٔ درسی دورهٔ دبیرستان احاطه دارد. خیلی علاقه‌مند شدم و روز بعد، من و پوشا و روزا پیتر ـ ریاضیدانی مجاری که با او کار می‌کرد ـ با هم نهار خوردیم. در حالی‌که نهار می‌خوردیم و پوشا سوپش را می‌خورد، این مسأله را به او دادم: ثابت کنید که اگر $n + 1$ عدد طبیعی کوچکتر از $2n$ یا برابر با آن داده شده باشند، آن‌وقت همیشه دو تا از آنها وجود دارند که نسبت به هم اول‌اند. خیلی آسان می‌توان ثابت کرد که این حکم برای n عدد درست نیست؛ چون مثلاً اگر مضربهای دو را در نظر بگیرید، هیچ دو تا از آنها نسبت به هم اول نیستند. در واقع خودم چند سال قبل به این نتیجهٔ ساده پی بردم، اما حدود ده دقیقه وقتم را گرفت تا این اثبات ساده را پیدا کنم. پوشا سوپش را خورد و بعد گفت: اگر $n + 1$ عدد طبیعی کوچکتر از $2n$ یا برابر با آن داده شده باشند، آن وقت دو تا از آنها متوالی‌اند و از این‌رو نسبت به هم اول‌اند. لازم به ذکر نیست که خیلی تحت تأثیر قرار گرفتم و فکر می‌کنم که این، چیزی در حد کاری است که گاوس در هفت سالگیش برای پیدا کردن مجموع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ کرده است. راستی بد نیست بدانید که مسألهٔ زیر هنوز هم حل نشده مانده است: بزرگترین مقدار r را که به ازای آن دنباله‌ای مانند a_1، ...، a_r، که در آن $1 \leq a_1 < \cdots < a_r \leq n$، وجود داشته باشد که نتوان $k + 1$ تا از a_iها را طوری انتخاب کرد که دو به دو نسبت به هم اول باشند با $f_k(n)$ نشان می‌دهیم. گمان می‌کنم که $f_k(n)$ برابر با تعداد مضربهایی از نخستین k عددِ اول باشد که از n بزرگتر نیستند. بعد از آن ملاقات به‌طور منظم با پوشا کار می‌کردم و اوقاتی هم که در سفر بودم نامه‌های زیادی برایش می‌نوشتم و در آنها مسأله‌هایی را هم مطرح می‌کردم. پیش از اینکه دوازده سالش تمام شود این قضیه را که من به او داده بودم ثابت کرد: هر گراف $2n$ رأسی و $n^2 + 1$ یالی همیشه یک مثلث دارد. این قضیه حالت خاصی از قضیه‌ای معروف از توران است.

همچنین، به او این مسأله را دادم: دنباله‌ای نامتناهی را در نظر بگیرید که جملهٔ nاُم آن این‌طور تعریف می‌شود: صورت این جمله ۱ و مخرج آن کوچکترین مضرب مشترک عددهای طبیعی از ۱ تا n است. ثابت کنید که حد مجموع اعضای این دنباله عددی گنگ است. اثبات این مسأله چندان دشوار نیست؛ اما اینکه پسربچه‌ای دوازده ساله بتواند از عهدهٔ آن برآید قطعاً حیرت‌انگیز است. وقتی تازه سیزده سالش تمام شده بود، برایش قضیهٔ رمزی را در حالتی که $k = ۲$ شرح دادم. صورت این قضیه چنین است: اگر گرافی نامتناهی داده شده باشد، آن‌وقت این گراف یا شامل گراف کاملی نامتناهی است یا شامل مجموعهٔ مستقلی نامتناهی. به بیان دیگر، مجموعه‌ای نامتناهی از رأسهای گراف وجود دارد که یا هر دو تا از آن رأسها به هم وصل‌اند یا هیچ دو تا از آنها به هم وصل نیستند. حدود پانزده دقیقه طول کشید تا پوشا آن را بفهمد و بعد به خانه رفت و همهٔ عصر را دربارهٔ آن فکر کرد و قبل از اینکه به رختخواب برود اثبات قضیه را به‌دست آورده بود. زمانی که پوشا چهارده ساله بود، می‌توانستید با او درست مثل ریاضیدانی بزرگسال صحبت کنید. به او تلفن می‌زدم و راجع به مسأله‌ها می‌پرسیدم و اگر مسألهٔ موردنظر مربوط به ریاضیات مقدماتی بود احتمال زیادی داشت که نظرات بجا و هوشمندانه‌ای داشته باشد. شاید برایتان جالب باشد که بگویم او با حساب دیفرانسیل و انتگرال مشکل داشت و با اینکه آن را فهمید و می‌توانست آن را به کار ببرد، هرگز آن قدر که بر آنالیز ترکیبی و نظریهٔ مقدماتی اعداد مسلط بود بر حسابان احاطه نیافت. پوشا هیچ‌وقت هندسه را دوست نداشت. سعی کردم چند مسألهٔ هندسهٔ مقدماتی به او بدهم اما او هرگز به آنها علاقه‌مند نشد. همیشه دوست داشت فقط به موضوعی بپردازد که حسابی به آن علاقه‌مند است و در آن زمینه قطعاً بی‌اندازه متبحر می‌شد. نخستین مقالهٔ مشترکمان را وقتی او چهارده سال و نیمه بود نوشتیم و در ادامه، سهمش در تألیف مقالهٔ موردنظر را برایتان خواهم گفت. پوشا مقاله‌های قابل توجه زیادی را هم خودش به تنهایی نوشت. بعضی از این مقاله‌ها هنوز هم اهمیت زیادی دارند. معروفترین و پُر ارجاعترین مقاله‌اش دربارهٔ خطهای هامیلتونی است و آن را وقتی پانزده ساله بود نوشت. متأسفانه حدود ۴ یا ۵ سال نه چیز زیادی حدس زد و نه چیزی ثابت کرد و من اغلب غمگینانه نظر می‌دادم که او مرده است. اما امید فراوانی داشتم که به زودی به زندگی عادی برگردد. ابتدا وقتی در سن شانزده سالگی ترجیح می‌داد داستایوفسکی باشد تا اینشتین خیلی نگرانش شدم.

نخستین قضیه‌اش که خود او آن را حدس زد و ثابت کرد و در نوع خودش بدیع هم بود چنین است: هر گراف n رأسی و $۲n - ۳$ یالی شامل مداری است که قطر دارد. این نتیجه بهترین نتیجهٔ ممکن از این دست است: گرافی n رأسی و $۲n - ۴$ یالی وجود دارد که شامل هیچ مداری که قطر داشته باشد نیست.

کوچکترین عدد طبیعی مثل r را که هر گراف n رأسی و r یالی شامل k مدار مجزا باشد با $f(n, k)$ نشان می‌دهیم. در نخستین مقالهٔ مشترکمان مقدار $f(n, k)$ را در حالتی که $n > ۲۴k$ تعیین کردیم. من قبلاً ثابت کرده بودم که اگر $n \geq ۶$، آن‌وقت $f(n, ۲) = ۳n - ۵$، اما اثباتم پیچیده بود و نمی‌شد آن را به حالتی که $k > ۲$ تعمیم داد. بعداً فهمیدم دیراک هم ثابت کرده است که $f(n, ۲) = ۳n - ۵$. مسألهٔ تعیین $f(n, ۲)$ را با پوشا در میان گذاشتم و او ظرف چند روز اثباتی خیلی ساده از اینکه $f(n, ۲) = ۳n - ۵$ پیدا کرد و من توانستم خیلی

آسان اثباتش را به حالتی که k عددی دلخواه باشد تعمیم بدهم. اکنون طرح کلی اثباتش را در اینجا می‌آورم. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. به آسانی می‌توان دریافت که وقتی $n = ۶$، تساوی $f(n, ۲) = ۳n - ۵$ درست است. اکنون فرض می‌کنیم که این تساوی به‌ازای همهٔ مقدارهایی از m که $n > m \geq ۶$ برقرار است و ثابت می‌کنیم که به‌ازای n هم درست است. ظرفیت گرافمان حداکثر ممکن است ۵ باشد (چون

$$\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\nu(X_i) = ۳n - ۵$$

که در آن $\nu(X_i)$ ظرفیت رأس X_i است.) اگر گراف موردنظر، C_j، رأسی داشته باشد که ظرفیت آن حداکثر ۳ باشد آن را حذف می‌کنیم و بنابر فرض استقرا، گرافی که می‌ماند دو رأس دارد که متعلق به مدارهای جدا از هم‌اند. به این ترتیب می‌توانیم فرض کنیم که این گراف رأسی مانند $X_۱$ دارد که ظرفیتش ۴ یا ۵ است. ابتدا فرض کنید که $\nu(X_۱) = ۵$ و $X_۲$، ... و $X_۶$ رأسهای متصل به $X_۱$ باشند. چون قضیه‌مان وقتی $n = ۶$ درست است، زیرگراف فراگیر حاصل از رأسهای $X_۱$، ... و $X_۶$ حداکثر ۱۲ یال دارد؛ از این‌رو، بی‌آنکه از کلیت اثبات چیزی کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که از گرافمان یالهای $(X_۲, X_۳)$ و $(X_۳, X_۴)$ نیستند. اکنون از C_j رأس $X_۱$ و همهٔ یالهایی را که $X_۱$ روی آنهاست حذف می‌کنیم و فقط یالهای $(X_۲, X_۳)$ و $(X_۳, X_۴)$ را اضافه می‌کنیم. گراف جدید $n - ۱$ رأس و $۳n - ۸$ یال دارد. از این‌رو، بنابر فرض استقرا، این گراف شامل دو رأس است که متعلق به مدارهای جدا از هم‌اند و فقط ممکن است یکی از اینها شامل یالهای جدید $(X_۲, X_۳)$ یا $(X_۳, X_۴)$ باشد. فرض می‌کنیم که یکی از این مدارها شامل یال $(X_۲, X_۳)$ باشد. در این صورت یال $(X_۲, X_۳)$ را حذف می‌کنیم و به جای آن یالهای $(X_۲, X_۱)$ و $(X_۱, X_۳)$ را می‌گذاریم. به این ترتیب، همان‌طور که می‌خواستیم، گراف اصلیمان دو رأس دارد که متعلق به مدارهای جدا از هم‌اند. بعد فرض کنید ظرفیت $X_۱$، چهار و به $X_۲$، $X_۳$، $X_۴$ و $X_۵$ وصل باشد. همهٔ یالهایی مانند (X_i, X_j)، که $۱ \leq i < j \leq ۵$، باید یالهای C_j باشند، زیرا اگر مثلاً $(X_۲, X_۳)$ یال C_j نباشد، آن وقت این یال را اضافه و رأس $X_۱$ را حذف می‌کنیم و بعد می‌توانیم از اثبات قبلی استفاده کنیم.

اکنون تعداد یالهایی از گراف C_j را که یکی از رأسهای $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ روی آنها واقع است می‌شماریم؛ رأس X_i $(i > ۵)$ ممکن نیست به $X_۱$ وصل باشد و اگر به هر دو $X_۲$ و $X_۳$ وصل باشد، آن‌وقت مجموعه‌های رأسهای دو مثلث $(X_۲, X_۳, X_i)$ و $(X_۱, X_۴, X_۵)$ جدا از هم‌اند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که هر کدام از رأسهای X_i، $i > ۵$، فقط به یکی از رأسهای $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ متصل است. با این فرض، حداکثر $n - ۴$ یال به‌دست می‌آید، ۹ یال دیگر حاصل از $X_۱$، ... و $X_۵$ هم وجود دارند که $X_۱$، $X_۲$ یا $X_۳$ روی آنها واقع‌اند. به این ترتیب حداکثر $n + ۴$ یال از گراف C_j وجود دارند که $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ روی آنها واقع‌اند. اکنون رأسهای $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ و همهٔ یالهایی را که این رأسها روی آنها واقع‌اند حذف می‌کنیم. گرافی که می‌ماند $n - ۳$ رأس و حداکثر $۲n - ۹$ یال دارد $(۳n - ۵ - (n + ۴) = ۲n - ۹)$. چون $۲n - ۹ \geq n - ۳$ $(n \geq ۶)$، این گراف شامل

مداری است که مجموعهٔ رأسهای آن و مجموعهٔ رأسهای (X_1, X_2, X_3) جدا از هم‌اند. با این نتیجه، اثبات حکم موردنظر به پایان می‌رسد.

حتماً با من موافق‌اید که این اثبات از بچه‌ای ۱۴ ساله واقعاً فوق‌العاده است.

تعمیم دادن این اثبات برای حالتی که $k > 2$، با استقرا روی k، حقیقتاً زیاد دشوار نبود. پوشا اثباتی بسیار زیبا هم برای این قضیه پیدا کرد که هر گراف n رأسی و $n+4$ یالی شامل دو مدار است که مجموعه‌های یالهایشان جدا از هم‌اند.

نابغهٔ خردسال دیگری به نام ماتِه در شهرک دانشگاهی سِیگِد زندگی می‌کرد. او یک سال بزرگتر از پوشا بود و در حقیقت این دو بچه در آپارتمان مادرم با هم آشنا شدند. همان‌طور که بسیاری از شما می‌دانید، من بچه‌ها را «ε» می‌نامم و ماته یک دفعه وقتی به خانه‌مان تلفن زد (و من خانه نبودم) خودش را به مادرم این‌طور معرفی کرد: «من ε از سِیگِد هستم.» این دو ε آن روزها خیلی علاقه‌مند بودند و همیشه از من مسأله‌های جدید می‌خواستند. یادم می‌آید یک بار که سردردی شدید داشتم و می‌خواستم برای استراحت به منزل برگردم به زحمت توانستم از دستشان نجات پیدا کنم.

ماته با بردن مسابقهٔ کورشاک دو سال زودتر به دانشگاه راه یافت، پوشا هم می‌توانست دو سال جلوتر به دانشگاه برود، اما دبیرستان را خیلی دوست داشت و پیشنهاد تحصیل در دانشگاه را آن موقع نپذیرفت.

ماته اکنون بیشتر در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها کار می‌کند، چند مقاله نوشته است و کتابی هم با گ. پودور، از متخصصین معروف نظریهٔ مجموعه‌ها، می‌نویسد. مدتها قبل این قضیه را ثابت کردم: به هر عدد حقیقی مانند X مجموعه‌ای هیچ‌جا چگال از عددهای حقیقی مانند $A(X)$ متناظر است. می‌گوییم دو نقطه مانند X و Y مستقل‌اند، اگر $X \notin A(X)$ و $Y \notin A(X)$. مجموعه‌ای مفروض در صورتی مستقل است که هر دو عضوش مستقل باشند. ثابت کردم که همیشه مجموعهٔ مستقلی ناشمارا وجود دارد. این مسأله هنوز جای کار دارد. ماته این حکم را ثابت کرد: به‌ازای هر عدد ترتیبی مانند α که $\alpha < \omega_1$، مجموعهٔ مستقلی از نوع α وجود دارد. او اثبات این نتیجه را خودش پیدا کرد و در آن خیلی هوشمندانه از استدلالهای مربوط به رسته‌ها استفاده کرده است.

در مجارستان بچه‌ها ۸ سال به مدرسهٔ مقدماتی می‌روند و دورهٔ دبیرستان هم ۴ سال است. چند سال قبل دست‌اندرکاران تعلیم و تربیت، دبیرستانی ویژه برای بچه‌هایی که در ریاضیات خیلی با استعداد بودند تأسیس کردند. این مدرسه درست وقتی که قرار بود پوشا به دبیرستان برود افتتاح شده بود و به همین علت او این دبیرستان را خیلی دوست داشت. طولی نکشید که به من گفت در کلاسش پسرهایی هستند که در ریاضیات مقدماتی از او سرترند. مایلم راجع به دو تا از آنها، یعنی لُواش و پلیکان، که اکنون هر دویشان ۲۲ ساله‌اند چند کلمه‌ای بگویم. لُواش در میان نابغه‌ها شاید موفقترینشان تاکنون باشد، زندگی حرفه‌ای او مانند پوشا دستخوش هیچ افتی نشد. او کار علمیش را کمی دیرتر، یعنی تقریباً در ۱۷ سالگی، که در آن زمان به هیچ وجه خام و بی‌تجربه نبود، آغاز کرد و فوق‌العاده خوب، عمدتاً در ریاضیات ترکیبیاتی، آن را به پیش برده است. او نخستین کسی است که ساختاری

برای گرافهای با عدد رنگی و کمر به اندازهٔ دلخواه بزرگ ارائه کرده است. لواش این کار را وقتی که هنوز دانش‌آموز دبیرستانی بود انجام داد و بد نیست بدانید که این ساختار خیلی ابتکاری و پُرزحمت است.

پلیکان هم بیشتر در زمینهٔ نظریهٔ گراف کارکرده است و چند مقاله هم دارد. آنهایی که در سال ۱۹۶۶ در سمینار نظریهٔ گراف در تیهانی حضور داشتند او را به‌خاطر خواهند آورد؛ تازه دبیرستان را تمام کرده بود و یک سخنرانی به زبان انگلیسی فوق‌العاده روان دربارهٔ آخرین دستاوردهایش ایراد کرد. این سخنرانی به‌طرز استادانه‌ای فصیح بود و هیچ‌کس نمی‌توانست باور کند که این نخستین سخنرانی اوست. ارتباطم با لواش و پلیکان خیلی کمتر از ارتباطم با پوشا بود.

پیش از ادامهٔ بحث، مایلم دربارهٔ علت اینکه این‌قدر نابغهٔ خردسال در مجارستان زیاد است حدسهای خودم را بیان کنم. پیش از هر چیز، اینکه انتشار نشریه‌های ریاضی ادواری ویژهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی دست‌کم حدود ۸۰ سال قدمت دارد؛ از این گذشته، مسابقه‌های ریاضی بسیاری نظیر مسابقهٔ اتووش-کورشاک در آنجا برگزار می‌شود که سابقهٔ آن به ۷۵ سال قبل باز می‌گردد (کتاب مسأله‌های مسابقات ریاضی مجارستان را ببینید). بعد از جنگ جهانی اول، مسابقه‌ای جدید ویژهٔ آن دسته از دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان که تازه این دوره را به پایان رسانده بودند برپا شد و بعد از جنگ جهانی دوم هم چندین مسابقهٔ جدید به راه افتاد که جالبترین آنها مسابقهٔ شویتزر است. در این مسابقه حدود ده مسأله به شرکت‌کنندگان داده می‌شود و آنها بیش از یک هفته فرصت دارند که راه‌حلهایشان را بفرستند. همکاری در حل مسأله‌ها مجاز نیست اما شرکت‌کنندگان می‌توانند از هر کتابی استفاده کنند. به‌تازگی، کتابی شامل این مسأله‌ها منتشر شده است. در چند سال اخیر هم خبرهای زیادی دربارهٔ نابغه‌های خردسال مجاری شنیده‌ام. بعضی از آنها را هم مثل گروست از دانشگاه دولتی میشیگان دیده‌ام، اما دربارهٔ آنها اطلاعات کافی ندارم. مایلم فقط به یکی از آنها، یعنی تورانسکی، اشاره‌ای کنم. او را وقتی ۱۷ ساله بود در دانشگاه پنسیلوانیا دیدم. بی‌نهایت با استعداد بود، اما به دلایل نامعلوم هیچ‌وقت دکترا نگرفت و سرانجام در سن ۳۵ سالگی در حادثهٔ رانندگی کشته شد.

چند سال پیش نوعی جدید از مسابقه، ویژهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی، در مجارستان به راه افتاد که در تلویزیون برگزار می‌شود. در این مسابقه به شرکت‌کنندگان پرسشهایی داده می‌شود که باید ظرف ۲ یا ۳ دقیقه به آنها پاسخ دهند. این پرسشها معمولاً خیلی ابتکاری‌اند و داوری میان شرکت‌کنندگان برعهدهٔ گروهی از ریاضیدانان برجسته نظیر آلکسیش، هایوش و توران است. به‌نظر می‌رسد که عدهٔ زیادی از مردم با اینکه سر از مسأله‌های مطرح شده درنمی‌آورند با علاقهٔ زیاد این مسابقات را تماشا می‌کنند.

نظریهٔ گراف و آنالیز ترکیبیاتی برای ریاضیدانان جوان بستر بسیار مناسبی است تا کاری بدیع و خلاق انجام دهند. هنوز مسأله‌های حل نشدهٔ بسیاری وجود دارند که حل کردن آنها فقط ابتکار می‌خواهد نه معلوماتی زیاد. البته این کار زیاد هم بی‌خطر نیست، زیرا ممکن است که نابغه‌های جوان وسوسه شوند که فقط ثابت کنند و حدس بزنند و از فراگیری دیگر شاخه‌های ریاضیات بی‌نصیب بمانند.

دست آخر می‌خواهم دربارهٔ نابغهٔ خردسالی به‌نام روژا صحبت کنم که هنوز در دبیرستان تحصیل می‌کند. پوشا او را دو سال و نیم پیش، وقتی حتی پانزده ساله نشده بود، به من معرفی کرد. موضوع مورد علاقهٔ ویژه‌اش نظریهٔ اعداد و در طرح مسأله‌های جدید و جالب و فوق‌العاده بود. او چند مقاله دارد که به زودی چاپ می‌شوند. روژا، شارکوزی و من مقاله‌ای طولانی دربارهٔ تابعهای نظریهٔ اعدادی جمعی زیر چاپ داریم. اکنون به چند تا از مسأله‌ها و نتیجه‌های روژا اشاره می‌کنم. فرض کنید $f(n)$ تابعی با مقدارهای صحیح باشد که به ازای هر a، b و m، اگر $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m)، آن‌وقت $f(a) \equiv f(b)$ (به‌پیمانهٔ m). روشن است که چندجمله‌ایها در این شرط صدق می‌کنند. روژا ثابت کرد که اگر $f(n)$ در این شرط صدق کند و چندجمله‌ای نباشد، آن‌وقت به ازای هر k،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{n^k} = \infty$$

و نیز اینکه این نتیجه، بهترین نتیجهٔ ممکن از این دست است. او همچنین ثابت کرده است که به‌ازای بی‌نهایت مقدار از n،

$$|f(n)| > (e-۱)^{n(۱+o(۱))}$$

و حدس می‌زند که تقریباً بی‌نهایت بار $f(n) > e^{n(۱+o(۱))}$.

فرض کنید $f(n)$ تابعی ضربی باشد که حوزهٔ مقادیرش گروهی آبلی از مرتبهٔ N است. به‌ازای هر عنصر از گروه موردنظر مانند g این حکم درست است که چگالی عددهایی صحیح مانند n که به‌ازای آنها $f(n) = g$، $\frac{۱}{N}$ است. اگر گروه آبلی موردنظر فقط عنصرهای ± ۱ را داشته باشد، آن‌وقت این حکم حدسی قدیمی از خودم است که قبل از همه ویرسینگ آن را ثابت کرده است.

مدتی پیش این سؤال را مطرح کردم: فرض کنید $a_۱$، ... و a_k، که در آن $۱ \le a_۱ < \cdots < a_k \le X$، دنباله‌ای از عددهای طبیعی باشد که به‌ازای هر n تعداد جوابهای معادلهٔ $n = pa_i$، که در آن p عددی اول است، حداکثر ۲ است. آیا این حکم درست است که $\max k \ge o(X)$؟ به‌آسانی می‌توان دریافت که اگر بخواهیم حاصل ضربهای pa_i همگی متمایز باشند، یعنی تعداد جوابهای معادلهٔ $n = pa_i$ حداکثر ۱ باشد، آن‌وقت باید $k = o(X)$. این حکم به‌آسانی از این مطلب نتیجه می‌شود که عددهای $\frac{a_i}{P(a_i)}$، که در آنها $P(a_i)$ بزرگترین عامل اول a_i است، باید همگی متمایز باشند.

این مسأله را به روژا دادم. خیلی زود ثابت کرد که نابرابری $k > o(X)$ واقعاً ممکن است. او این طور استدلال کرد: فرض کنید $b_۱$، $b_۲$، ...، که در آن $b_۱ < b_۲ < \cdots$، دنباله‌ای از عددهایی صحیح باشد که دو عامل اول مانند p و q ندارند که $p < q < ۲p$. اثبات اینکه چگالی این bها وجود دارد و مثبت است زیاد دشوار نیست. بنابراین اگر مقدار این چگالی α باشد، آن‌وقت در بازهٔ $\left(\frac{X}{۲}, X\right)$، $\frac{(۱+o(۱))\alpha X}{۲}$ تا b وجود دارد. با استدلالی ساده ثابت می‌شود که به‌ازای این bها تعداد جوابهای معادلهٔ $n = pb_i$ واقعاً از ۳ کمتر است. بنابراین $\max k \ge \left(\frac{\alpha}{۲} + o(۱)\right)X$ و در نتیجه، مسأله‌ای که مطرح کردم حل می‌شود.

شما هم حتماً با من موافق‌اید که روژا با این استدلال، استعداد فوق‌العاده عالی خود را نشان داده است و می‌توان امید داشت و پیش‌بینی کرد که او در آینده ریاضیدان بزرگی شود. اتفاقاً روژا امسال در المپیاد ریاضی فوق‌العاده خوش درخشید.

پیش از اینکه صحبتم را به پایان برسانم چند حکایت جالب دربارهٔ این نابغه‌های خردسال برایتان تعریف می‌کنم. لواش و پوشا وقتی هنوز به دبیرستان می‌رفتند از من پرسیدند که چرا ریاضیدانان دختر این‌قدر کم‌اند. به آنها گفتم فرض کنید بچه‌های برده (پسرها) با این فکر بزرگ می‌شدند که اگر آنها خیلی باهوش باشند، رئیسها (دخترها) دیگر آنها را دوست ندارند، آیا در این صورت باز هم پسرهای زیادی بودند که به ریاضیات بپردازند؟ هر دو گفتند «شاید، دیگر نه این همه».

در مجارستان بسیاری از ریاضیدانان قهوهٔ غلیظ می‌نوشند، در حقیقت یک دفعه رِنیی گفت «ریاضیدان ماشینی است که قهوه را به قضیه‌ها تبدیل می‌کند.» در مؤسسهٔ ریاضی قهوهٔ خوبی درست می‌کنند و وقتی پوشا هنوز ۱۴ سالش تمام نشده بود به او کمی قهوهٔ غلیظ تعارف کردم که او با مقدار فراوانی شکر آن را نوشید. مادرم خیلی عصبانی شد که من به پسری در آن سن قهوهٔ غلیظ داده‌ام. برای آرام کردن او گفتم: پوشا می‌توانست بگوید «خانم، من کار ریاضیدانها را انجام می‌دهم و نوشیدنی آنها را هم می‌نوشم.»

یادداشت پایانی

فکر می‌کنم به نوعی جالب باشد که بگویم سرنوشت این نابغه‌های خردسال چطور رقم خورد. مقالهٔ بالا را در سال ۱۹۷۰ یعنی ۲۴ سال قبل نوشتم.

لواش از ریاضیدانان برجسته شد، کار او در ترکیبیات و علوم کامپیوتر قرنها نام او را زنده نگه می‌دارد و کارش روی روش احتمال (لم موضعی) خیلی مهم است. همسرش، کتی لواش، هم در زمینهٔ هندسه کارهای خوبی انجام داده است و سه‌نفری، دو مقاله در هندسه نوشتیم.

پوشا شاید تحقیقات زیادی، آن‌قدر که از استعدادش انتظار می‌رفت، انجام نداد. با وجود این، او معلم موفق بچه‌های باهوش شده است. از سال ۱۹۷۱ کارهای خیلی مهمی در زمینهٔ دورهای هامیلتونی گرافهای تصادفی انجام داده است. ما با هانیل، سه‌تایی، مقاله‌ای مهم نوشتیم. او نتیجه‌های جالب چاپ نشدهٔ زیادی هم در هندسه، نظریهٔ مجموعه‌ها و ترکیبیات دارد.

روژا کار بی‌نظیری در نظریهٔ اعداد انجام داد و تکلیف بسیاری از حدسهایم را روشن کرد. کارش درمورد مؤلفه‌های اساسی خیلی خوب است اما اگر قرار بود همهٔ نتیجه‌هایش را شرح بدهم، باید مقالهٔ دیگری می‌نوشتم.

ماته اکنون استاد دانشگاه شهر نیویورک است. او در زمینه‌های نظریهٔ مجموعه‌ها و چندجمله‌ایهای متعامد کارهای مهمی انجام داده است.

بولاباس هم یکی از نابغه‌های خردسالم بود و با هم مقاله‌های مشترک زیادی داریم. او یکی از متخصصان نظریهٔ گراف اکسترمال و روش احتمالاتی است. علاوه بر نتیجه‌های مهم زیادی که در این زمینه‌ها دارد، کتابهای

فوق‌العادهٔ بنسیاری نوشته و کارهای مهم و باارزشی هم در آنالیز انجام داده است. او همچنین شاگردان فوق‌العاده برجستهٔ بسیاری داشته است.

پیتر آنگار کارهای خیلی زیبایی در هندسهٔ ترکیبیاتی انجام داده است.

پیترلاکس یکی از متخصصان برجستهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی است. موضوعی که من به‌طرز شرم‌آوری از آن هیچ اطلاعی ندارم.

در ایالات متحده دونالد نیومن یکی از نابغه‌های خردسال خیلی موفقم بود. کارش در مورد تقریب زدن با تابعهای گویا تاریخ‌ساز بود.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Paul Erdös, Child Prodigies, *Mathematics Competitions*, Vol 8, No 1, 1995, pp. 7-16.

بعضی چیزها هیچ‌وقت تغییر نمی‌کنند

یوری آیونین، لِف کورلیانچیک

مسأله‌هایی که در این مقاله مطرح شده‌اند وجه مشترکشان این است که هرکدام از آنها (احتمالاً با تبدیلی مناسب) شامل «آرایشهایی» از اعداد یا دیگر نمادها و مجموعه‌ای از اعمالی است که می‌توان در مورد این آرایشها به‌کار برد. پرسشهایی از این دست را مطرح می‌کنیم: آیا می‌توان دنباله‌ای از اعمال را پیدا کرد که آرایشی داده شده را به آرایشی دیگری تبدیل کند؟ روی آرایشها و دنبالهٔ اعمال موردنظر چه شرطهایی بگذاریم تا بتوان این کار را انجام داد؟ چه آرایشهایی را می‌توان از آرایش داده شده به‌دست آورد؟

در این مقاله می‌بینیم که مسأله‌هایی از این دست، با هیچ روشی بهتر از یافتن ویژگیهای تغییرناپذیر در تبدیل آرایش موردنظر، وقتی که تبدیلهای مجاز روی آن صورت می‌گیرند، حل نمی‌شوند.

مسألهٔ ۱. ده علامت بعلاوه و پانزده علامت منها روی تخته سیاه نوشته‌ایم. هر بار می‌توانیم دو علامت دلخواه را پاک کنیم و به‌جایشان، اگر یک‌جور بودند یک علامت بعلاوه و اگر یک‌جور نبودند یک علامت منها بنویسیم. این عمل را ۲۴ بار تکرار می‌کنیم. دست آخر روی تخته سیاه چه علامتی باقی می‌ماند؟

همهٔ علامتهای بعلاوه را با عدد ۱ و همهٔ علامتهای منها را با عدد ۱− جایگزین می‌کنیم. در این صورت عملهای مجاز را می‌توان این‌طور توصیف کرد که در آنها دو عدد دلخواه را پاک می‌کنیم و به‌جای آنها حاصل‌ضربشان را می‌نویسیم. با این حساب، حاصل‌ضرب همهٔ عددهای روی تخته سیاه بی‌تغییر می‌ماند (زیرا عمل ضرب هم تعویض‌پذیر است و هم شرکت‌پذیر). مقدار این حاصل‌ضرب در ابتدا ۱− بود و از این‌رو، در پایان هم باید برابر با ۱− باشد؛ یعنی آخرین عدد ۱− و یا به عبارت دیگر آخرین علامت، منهاست.

استدلال بالا را می‌توان به این شکل هم بیان کرد: به‌جای هرکدام از علامتهای بعلاوه، صفر و به‌جای هرکدام از علامتهای منها، یک می‌گذاریم و توجه می‌کنیم که مجموع هر دو عدد دلخواه و عددی که وقتی آنها را پاک می‌کنیم به‌جایشان می‌نویسیم، یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد. چون مجموع همهٔ این عددها در ابتدا عددی فرد بود (در حقیقت برابر با ۱۵ بود) آخرین عددی هم که روی تخته می‌ماند باید فرد یعنی عدد ۱ باشد؛ بنابراین علامتی که روی تخته می‌ماند منهاست.

دست آخر، راه‌حل سومی هم با در نظرگرفتن اینکه تحت هر عمل مجاز تعداد علامتهای منها یا تغییر نمی‌کند یا دو تا کم می‌شود به دست می‌آید. در ابتدا تعداد علامتهای منها عددی فرد بود و از این‌رو در پایان هم یک علامت منها می‌ماند.

اکنون، هر سه راه‌حل را بررسی می‌کنیم.

اولین راه‌حل بر اساس تغییرناپذیری حاصل‌ضرب عددهای روی تخته، دومی بر اساس تغییرناپذیری زوجیت مجموعشان و سرانجام، سومی بر اساس تغییرناپذیری زوجیت تعداد علامتهای منها بود. می‌توان گفت که در هر

کدام از این راه‌حلها توانستیم ناوردایی پیدا کنیم: حاصل‌ضرب یکها و منفی یکها، زوجیت مجموع صفرها و یکها و دست‌آخر، زوجیت تعداد علامتهای منها. راه‌حلهای مسأله‌ها و تمرینهایی که در ادامه می‌آیند بر اساس ناورداهایی هستند که به‌طور مناسبی انتخاب شده‌اند.

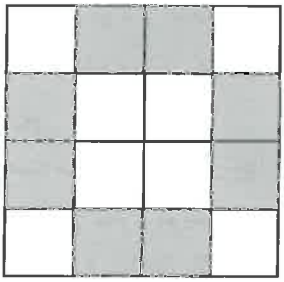
تمرین ۱ . تعدادی علامت بعلاوه و منها روی تخته سیاه نوشته‌ایم. می‌توانیم هر دو علامت دلخواه را پاک کنیم و به‌جای آنها اگر یک‌جور بودند، یک علامت منها و اگر یک‌جور نبودند یک علامت بعلاوه بنویسیم. ثابت کنید آخرین علامتی که می‌ماند به ترتیب پاک کردن علامتها بستگی ندارد.

مسألهٔ ۲. علامتهای بعلاوه و منها را در جدولی 4×4 مانند شکل ۱ چیده‌ایم. می‌توانیم همهٔ علامتها را در یک سطر، یک ستون یا در امتداد هر خط موازی با یکی از قطرهای این جدول (به‌ویژه، در هر کدام از مربعهای واحد گوشه‌ای) عوض کنیم. آیا دنباله‌ای از این عملها وجود دارد که در پایان انجام آنها جدولی به‌دست آید که در آن علامت منها نباشد؟

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

شکل ۱

باز هم به‌جای علامتهای بعلاوه و منها عددهای ۱+ و ۱− را می‌گذاریم. عددهایی را که در مربعهای سایه‌دار شکل ۲ آمده‌اند در هم ضرب می‌کنیم. این حاصل‌ضرب ناورداست، زیرا هرکدام از عملهای موردنظر یا این عددها را دست نخورده باقی می‌گذارد یا درست دو تا از آنها را عوض می‌کند. در ابتدا مقدار این حاصل‌ضرب برابر با ۱− است و از این‌رو، ممکن نیست جدولی بدون علامت منها که به‌ازای آن مقدار این حاصل‌ضرب ۱+ می‌شود به‌دست آید.



شکل ۲

تمرین ۲. مسألهٔ ۲ را در مورد جدولهایی که در شکلهای ۳، ۴ و ۵ آمده‌اند حل کنید.

+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+

شکل ۳

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	−	+	+

شکل ۴

+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+
+	+	−	−	+	+

شکل ۵

مسألهٔ ۳. روی تخته سیاه تعدادی صفر، یک و دو نوشته‌ایم. به‌جای هر دو رقم مختلف می‌توانیم رقم سوم را بنویسیم (مثلاً به‌جای ۰ و ۱ می‌توانیم رقم ۲ را بگذاریم و همین‌طور تا آخر). این عملها را تکرار می‌کنیم تا وقتی که فقط یک رقم روی تخته سیاه بماند. ثابت کنید که این رقم به ترتیب انجام عملهای موردنظر بستگی ندارد.

فرض کنید x_0، x_1 و x_2 به‌ترتیب تعداد صفرها، یکها و دوها باشند. هر عمل، هر کدام از این عددها را یک واحد تغییر می‌دهد و از این رو، زوجیت هر سه عدد را عوض می‌کند. وقتی که فقط یک رقم می‌ماند، از عددهای x_0، x_1 و x_2 دوتایشان برابر با ۰ می‌شوند و سومی برابر با ۱ می‌شود. بنابراین در ابتدای کار دو تا از این عددها یا هر دو زوج بوده‌اند یا هر دو فرد و زوجیت سومی چیز دیگری بوده است. با این حساب، بدون توجه به ترتیب این عملها، از میان x_0، x_1 و x_2 تنها عددی که دست آخر ممکن است برابر با ۱ شود عددی است که در ابتدا زوجیت آن با زوجیت دوتای دیگر فرق داشت.

از این راه‌حل نتیجه می‌شود در حالتی که زوجیت هر سه عدد x_0، x_1 و x_2 یکی باشد ممکن نیست که دست‌آخر یک رقم بماند. با وجود این، از راه‌حلمان نتیجه نمی‌شود که اگر در میان این عددها هم عددهای فرد وجود داشته باشند و هم عددهای زوج (و دست‌کم دو تا از عددهای اولیه غیر صفر باشند) این کار را می‌توان واقعاً انجام داد. در واقع، چنین دنباله‌ای از عملها را همیشه می‌توان در این حالت پیدا کرد؛ اثبات این مطلب را به‌عنوان تمرینی نسبتاً آسان به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

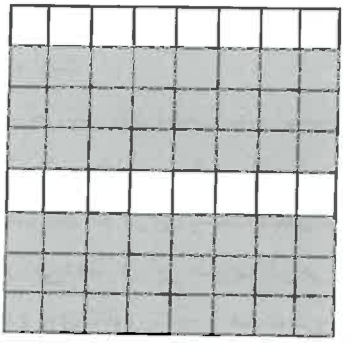
اکنون در مسألهٔ ۳ عملها را تغییر می‌دهیم: می‌خواهیم هر بار چهار رقم را پاک کنیم ــ دو تا رقم از یک نوع و دوتا رقم از نوع دیگر ــ و به جایشان یک رقم از نوع سوم را بنویسیم. فرض کنید که بعد از تعدادی از عملهایی از این دست فقط یک رقم بماند. آیا با دانستن تعداد اولیهٔ صفرها، یکها و دوها می‌توان از پیش گفت که روی تخته چه رقمی می‌ماند؟

استدلال زوجیت در اینجا مؤثر نیست. زیرا زوجیت یکی از عددهای x_0، x_1 و x_2 تحت هر عمل تغییر می‌کند،

در حالی که زوجیتهای دو عدد دیگر بی‌تغییر می‌ماند، در نتیجه عددهایی که زوجیتشان در ابتدا با هم فرق داشت ممکن است دست آخر زوجیتشان یکی شود. اما اگر باقیمانده‌های x_0، x_1 و x_2 را به‌جای به‌پیمانهٔ ۲ (بررسی زوجیت، سوای هر چیز دیگر، معادل تبدیل عددها به‌پیمانهٔ ۲ است) به‌پیمانهٔ ۳ در نظر بگیریم، متوجه می‌شویم که اگر این عددها برابر بودند، عملهای موردنظرمان، آنها را برابر باقی می‌گذارند و اگر در ابتدا متمایز بودند آنها را متمایز باقی می‌گذارند (به بیان دیگر، باقیمانده‌های $x_0 - x_1$، $x_1 - x_2$ و $x_2 - x_0$ به پیمانهٔ ۳ ناوردا هستند.) بقیهٔ استدلال مانند راه‌حل مسألهٔ ۳ است.

مسألهٔ ۴. در هر مربع آرایه‌ای 8×8 عددی صحیح نوشته‌ایم. می‌توانیم هر زیرآرایه دلخواه 3×3 یا 4×4 از آن را انتخاب کنیم و همهٔ عددهایش را یک واحد افزایش دهیم. آیا همیشه ممکن است که با دنباله‌ای از این عملها دست آخر به وضعیتی رسید که در آن عددهای همهٔ مربعهای آرایهٔ اصلی بر ۳ بخش‌پذیر باشند؟

پاسخ منفی است. ابتدا مجموع عددهای ۴۸ مربع سایه‌دار شکل ۶ را حساب می‌کنیم. چون هر مربع 4×4 شامل ۱۲ مربع واحد سایه‌دار و هر مربع 3×3 شامل ۹ یا ۶ تا از چنین مربعهایی است، با انجام عملهای مجاز باقیمانده مجموع موردنظر در تقسیم بر ۳ تغییر نمی‌کند. بنابراین، اگر مقدار این مجموع در ابتدا بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، مربعهای سایه‌دار همیشه شامل عددهایی‌اند که بر ۳ بخش‌پذیر نیستند.



شکل ۶

تمرین ۳ . با شرطهای مسألهٔ ۴، آیا می‌توان آرایه‌ای به‌دست آورد که شامل عددهای زوج آرایهٔ اولیهٔ دلخواهی نباشد؟

مسألهٔ ۵. عددهای ۱، ۲، ...، n را به ترتیبی پشت سر هم نوشته‌ایم. می‌توانیم هر دو عدد پهلوی هم را با هم جابه‌جا کنیم. ثابت کنید اگر تعداد جابه‌جاییهایی از این دست عددی فرد باشد، آرایشی متمایز از آرایش اولیه به‌دست می‌آید.

فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n همان عددهای ۱، ۲، ...، n باشند که به‌ترتیب موردنظر نوشته شده‌اند. چنین رشته‌ای از عددها را جایگشتی از عددهای ۱، ۲، ...، n می‌نامند. در صورتی می‌گویند عددهای a_i و a_j از این جایگشت انعکاس تشکیل می‌دهند که $i < j$ اما $a_i > a_j$، یعنی از میان این دو عدد، عدد بزرگتر جلوتر از عدد کوچکتر بیاید. با جابه‌جا کردن هر دو عدد پهلوی هم ترتیبشان برعکس می‌شود اما ترتیب هر جفت دیگر از عددها،

مسلماً بی‌تغییر می‌ماند. از این رو تعداد انعکاسها یک واحد افزایش یا کاهش می‌یابد. اگر تعداد جابه‌جایی جفت عددها عددی فرد باشد، زوجیت تعداد انعکاسها تغییر می‌کند و بنابراین جایگشتی متمایز هم به‌دست می‌آید.

تمرین ۴. ثابت کنید حکم مسألهٔ ۵ حتی در صورتی که جابه‌جایی دو عدد دلخواه از جایگشت داده شده مجاز باشد درست است. (راهنمایی: ثابت کنید هر دو عدد را می‌توان به‌وسیلهٔ تعدادی فرد «جابه‌جایی دو عدد پهلوی هم» با هم جابه‌جا کرد.)

نام دیگر جابه‌جایی یک جفت عدد ترانهش است. با استفاده از این اصطلاح می‌توان حکم تمرین ۴ را این‌طور بیان کرد: تعدادی فرد ترانهش جایگشت را تغییر می‌دهد. از راه‌حل مسألهٔ ۵، همراه با نکته‌ای که در راهنمایی تمرین ۴ بیان شد، ثابت می‌شود که هر ترانهش زوجیت تعداد انعکاسها را تغییر می‌دهد. در صورتی جایگشتی را زوج یا فرد می‌نامند که تعداد انعکاسها در این جایگشت به‌ترتیب زوج یا فرد باشد. از این‌رو، اکنون می‌توان گفت که انجام هر ترانهش زوجیت جایگشتی را که عنصرهایش با هم جابه‌جا شده‌اند تغییر می‌دهد.

مسألهٔ ۶. بیست و پنج اتومبیل از نقاط مختلف یک پیست اتومبیل‌رانی بسته در یک جهت و همزمان به حرکت درمی‌آیند. طبق قوانین این مسابقه، اتومبیلها می‌توانند از یکدیگر سبقت بگیرند اما سبقت دوبله ممنوع است. این اتومبیلها همگی در نقطهٔ شروع حرکت خود، به‌طور همزمان، مسابقه را به پایان رساندند. ثابت کنید که در طول این مسابقه تعدادی زوج سبقت صورت گرفته است.

مجسم کنید که یکی از این اتومبیلها به رنگ زرد درآید و بقیهٔ اتومبیلها را برحسب ترتیبشان در نقطهٔ شروع حرکت شماره‌گذاری کنید (اتومبیل شمارهٔ یک بی‌درنگ پشت سر اتومبیل زرد به حرکت درمی‌آید، دومی پشت سر اولی و همین‌طور تا آخر). همچنین مجسم کنید که در این پیست تابلوی نتایجی وجود دارد که ترتیب اتومبیلهایی را که اتومبیل زرد را تعقیب می‌کنند نشان می‌دهد. در این صورت در هر لحظه یک اتومبیل شماره‌دار از اتومبیل شماره‌دار دیگر جلو می‌زند و جای دو عدد روی تابلوی نتایج با هم عوض می‌شود.

اکنون ببینیم وقتی یک اتومبیل شماره‌دار از اتومبیل زردرنگ سبقت می‌گیرد چه اتفاقی می‌افتد. اگر ترتیب عددها قبل از این سبقت $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{۲۴}$ بود بعد از آن تابلوی نتایج عددهای $a_۲$، $a_۳$، ...، $a_{۲۴}$، $a_۱$ را نشان می‌دهد. اما می‌توان همین جایگشت را در نتیجهٔ ۲۳ ترانهش زیر هم به‌دست آورد:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_{۲۴} \to a_۲, a_۱, a_۳, \ldots, a_{۲۴} \to a_۲, a_۳, a_۱, \ldots, a_{۲۴} \to$$

$$\ldots \to a_۲, a_۳, \ldots, a_۱, a_{۲۴} \to a_۲, a_۳, \ldots, a_{۲۴}, a_۱$$

اگر اتومبیل زردرنگ از اتومبیل دیگری سبقت بگیرد، جایگشت $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{۲۴}$، به جایگشت

$$a_{۲۴}, a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲۳}$$

تبدیل می‌شود. این کار را می‌توان به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از ۲۳ ترانهش هم انجام داد (چطور؟).

بنابراین هر سبقتی معادل تعدادی فرد ترانهش است؛ یعنی هر سبقتی زوجیت جایگشت مفروض را تغییر می‌دهد. اما جایگشت آخری همان جایگشت اولی است و از این رو بنابر تمرین ۴ تعداد کل ترانهشها باید عددی زوج باشد (به بیان دیگر، جایگشت در کل باید زوج باشد). بنابراین، تعداد سبقتها هم باید عددی زوج باشد.

با این مقدمه، اختیار در دست خودتان است؛ ما فقط شما را خاطرجمع کردیم که می‌توانید به حل تمرینهایی که در زیر آمده‌اند بپردازید.

تمرینها

۵. چهار تا یک و پنج تا صفر را دور دایره‌ای به ترتیبی دلخواه نوشته‌ایم. میان هر دو عدد برابر، یک و میان عددهای متمایز صفر می‌نویسیم؛ سپس عددهای اولیه را پاک می‌کنیم. آیا می‌توان بعد از دنباله‌ای از این عملها مجموعه‌ای از نه تا صفر به‌دست آورد؟

۶. زهره یک برگ کاغذ را به ۱۰ تکه پاره می‌کند، بعد چند تا از اینها را هم به ۱۰ تکه پاره می‌کند و همین‌طور تا آخر. آیا او می‌تواند از این راه ۱۹۹۳ تکه کاغذ به‌دست آورد؟

۷. عددهای ۱، ۲، ...، ۱۹۹۳ را روی تخته نوشته‌ایم. هر بار دو عدد را پاک می‌کنیم و به‌جای آنها باقیماندهٔ تقسیم مجموعشان بر ۱۳ را می‌نویسیم. این عمل را آنقدر تکرار می‌کنیم تا اینکه یک عدد روی تخته بماند. این عدد چیست؟

۸. به‌جای هر کدام از عددهای از ۱ تا ۱۰۰۰,۰۰۰ مجموع رقمهایش را می‌گذاریم. روی عددهای حاصل هم پی‌درپی همین عمل را انجام می‌دهیم تا اینکه همهٔ عددها یک‌رقمی شوند. دست آخر تعداد یکها از تعداد دوها بیشتر است یا کمتر؟

۹. مجموع رقمهای عددی سه‌رقمی را از آن عدد کم می‌کنیم. همین کار را در مورد عدد حاصل انجام می‌دهیم و همین‌طور تا آخر. بعد از صد بار تکرار این عمل چه عددی به‌دست می‌آید؟

۱۰. دایره‌ای را به ۱۰ قطاع تقسیم کرده‌ایم و در هر کدام از آنها یک تراشهٔ چوب گذاشته‌ایم. می‌توانیم هر دو تراشه را به قطاعهای مجاور انتقال دهیم، اما این انتقال باید در جهتهایی مخالف صورت پذیرد. آیا با این انتقالها می‌توان همهٔ تراشه‌ها را در یک قطاع جمع کرد؟

۱۱. (الف) یک علامت منها در رأس A_{12} از ۱۲ضلعی منتظم $A_1A_2\ldots A_{12}$ و در همهٔ رأسهای دیگر آن علامت بعلاوه گذاشته‌ایم. می‌توانیم علامتها را در هر سه رأسی که مثلثی متساوی‌الساقین بسازند که قائم‌الزاویه نباشد، برعکس کنیم. آیا بعد از تعدادی از عملهای از این دست می‌توان یک علامت منها در رأس A_1 و یازده علامت بعلاوه در رأسهای دیگر به‌دست آورد؟

(ب) آیا پاسخ قسمت (الف) در صورتی که بتوان علامتهای سه رأس هر مثلث متساوی‌الساقین دلخواه را تغییر داد، باز هم درست می‌ماند؟

۱۲. در هر مربع آرایه‌ای ۴ × ۴ یک علامت بعلاوه یا منها گذاشته‌ایم. می‌توانیم همهٔ علامتها را در امتداد هر خط یا هر ستون تغییر دهیم. کمترین تعداد علامتهای منها را که می‌توان از طریق این عملها از آرایه‌ای داده شده به‌دست آورد مشخصهٔ این آرایه می‌نامیم. سقدارهای این مشخصه کدام عددها ممکن است باشند؟

۱۳. سی تراشهٔ چوب، ده تا سفید و بیست تا سیاه، دور دایره‌ای گذاشته‌ایم. می‌توانیم هر دو تراشه را با سه تراشهٔ میان آنها جابه‌جا کنیم. دو آرایش از تراشه‌ها در صورتی هم‌ارزند که یکی از آنها را بتوان از دیگری بعد از تعدادی جابه‌جایی از این دست به‌دست آورد. بیشترین تعداد ممکن آرایشهایی که هم‌ارز نباشند چیست؟

۱۴. عددهای ۱، ۲، ... ، ۱۹۹۳ را به‌ترتیب صعودی نوشته‌ایم. هر چهار عدد را می‌توانیم به ترتیب عکس در همان مکانها بنویسیم. آیا می‌توان از این راه کل این مجموعه عددها را به ترتیب عکس، یعنی به‌صورت ۱۹۹۳, ۱۹۹۲, ... , ۲, ۱ به‌دست آورد؟

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

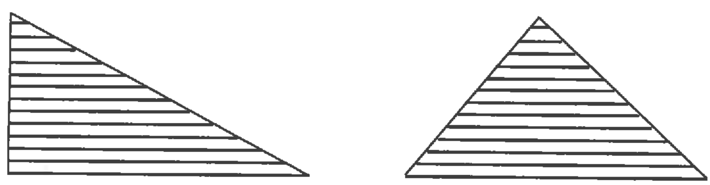
Yury Ionin and Lev Kurlyandchik, Somethings never change, *Quantum*, September/October 1993, pp. 35 - 37.

اصل کاوالیری

سید عباس موسوی

احتمالاً در کتابهای هندسهٔ دبیرستان چیزهایی دربارهٔ اصل کاوالیری دیده‌اید. در این یادداشت می‌خواهیم چند نتیجهٔ جالب این اصل به ظاهر بدیهی را مطرح کنیم. همان‌طور که احتمالاً به‌خاطر دارید، صورت این اصل در فضای دوبعدی از این قرار است:

> دو شکل و یک خط را در صفحه در نظر بگیرید. اگر نسبت طولهای پاره‌خطهای حاصل از اشتراک این دو شکل با همهٔ خطهای موازی خط مفروض مقدار ثابتی باشد، نسبت مساحتهای دو شکل هم همان مقدار است.



این اصل در فضای سه‌بعدی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

> دو حجم و یک صفحه را در فضا در نظر بگیرید. اگر نسبت مساحتهای سطحهای حاصل از اشتراک این دو شکل با همهٔ صفحه‌های موازی با صفحهٔ مفروض مقدار ثابتی باشد، نسبت حجمهای دو شکل هم همان مقدار است.

اگر دو شکل مسطح در شرط صورت دو بعدی این اصل صدق کنند و یا دو حجم در شرط صورت سه‌بعدی اصل صدق کنند، می‌گوییم به مفهوم کاوالیری همنهشت هستند.

می‌توان با استفاده از حسابان، درستی این اصل را ثابت کرد؛ اما اگر درستی آن را بپذیریم، می‌توانیم بسیاری از مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ مساحت و حجم را با روشهای مقدماتی حل کنیم. در ادامه، چند نمونه از این نوع مسأله‌ها را آورده‌ایم:

۱. فرمول مساحت بیضی

فرض کنید E بیضی‌ای در صفحه باشد. با انتخاب مناسب محورهای مختصات، می‌توان دو عدد حقیقی مثبت مثل a و b پیدا کرد که معادلهٔ

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

در صفحه، بیضی E را مشخص کند. اکنون فرض کنید که C دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a باشد. پس معادلهٔ C در صفحه به صورت

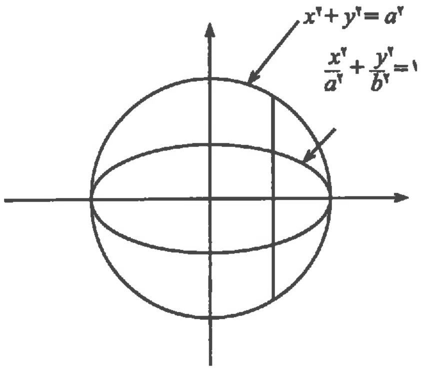
$$x^2 + y^2 = a^2$$

نوشته می‌شود. با حل این دو معادله بر حسب y نتیجه می‌شود

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$
$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

یعنی نسبت طولهای پاره‌خطهای حاصل از اشتراک این دو شکل با همهٔ خطهای موازی محور عرضها مقدار ثابت $\frac{b}{a}$ است. پس بنابر صورت دو بعدی اصل کاوالیری،

$$\begin{aligned} E \text{ مساحت بیضی} &= \left(\frac{b}{a}\right)(C \text{ مساحت دایرهٔ}) \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)\pi a^2 \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

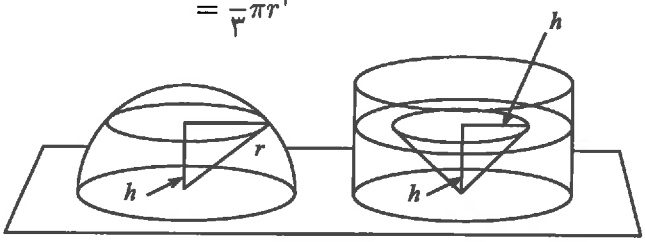


۲. فرمول حجم کره

نیم‌کره‌ای به شعاع r و استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع r در نظر بگیرید که روی یک سطح قرار گرفته‌اند. مخروطی را که قاعده‌اش قاعدهٔ بالایی استوانه است و رأسش مرکز قاعدهٔ پایین آن، از استوانه حذف کنید و دو جسم را با صفحه‌ای موازی با سطحی که جسمها روی آن قرار گرفته‌اند و به فاصلهٔ h از آن ببُرید. سطح مقطع کره دایره و سطح مقطع استوانه حلقه خواهد بود. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که مساحت هر دو مقطع برابر است با

$\pi(r^۲ - h^۲)$؛ پس بنابر اصل کاوالیری حجم این دو جسم برابر است. در نتیجه،

$$\text{حجم کره} = ۲(\text{حجم نیم‌کره})$$
$$= ۲(\text{حجم استوانه} - \text{حجم مخروط})$$
$$= ۲\left(\pi r^۳ - \frac{۱}{۳}\pi r^۳\right)$$
$$= \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$



۳. حجم حلقهٔ کروی

کره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید و استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ a را طوری قرار دهید که محورش بر یکی از قطرهای کره منطبق شود. می‌خواهیم حجم قسمتی از کره را که بیرون استوانه قرار دارد محاسبه کنیم.

کره‌ای به قطر ارتفاع حلقه در نظر بگیرید و شعاع آن‌را k بنامید. اگر دو جسم را با صفحه‌ای موازی با صفحه‌ای که از مرکزهای دو کره می‌گذرد و بر محور استوانه عمود است و به فاصلهٔ h از آن ببُریم، مقطع حلقهٔ کروی حلقه‌ای به مساحت

$$\pi(r^۲ - h^۲) - \pi a^۲$$

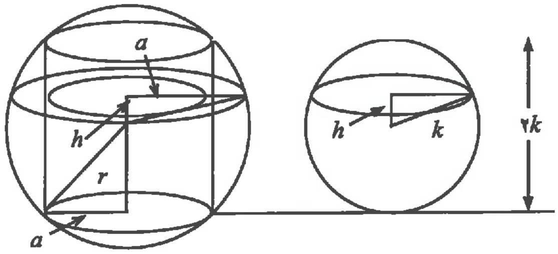
است و مقطع کره دایره‌ای به مساحت

$$\pi(k^۲ - h^۲)$$

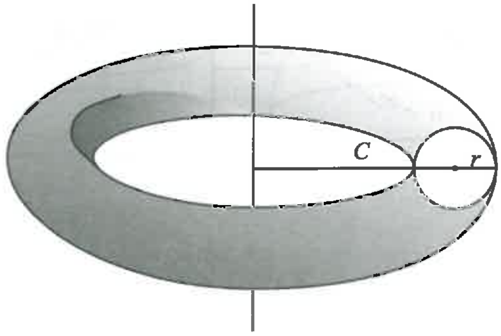
چون $k^۲ = r^۲ - a^۲$، مساحت این دو سطح برابر است و در نتیجه، بنابر صورت سه‌بعدی اصل کاوالیری،

$$\text{حجم حلقهٔ کروی} = \text{حجم کرهٔ کوچکتر}$$
$$= \frac{۴}{۳}\pi k^۳$$
$$= \frac{۴}{۳}\pi (r^۲ - a^۲)^{\frac{۳}{۲}}$$

در همهٔ موارد بالا، نکتهٔ اصلی پیدا کردن حجمی به‌عنوان حجم مقایسه‌ای برای به‌کار بستن اصل کاوالیری است. یافتن این حجم هم ممکن است معمایی پیچیده و لذت‌بخش باشد. در ادامه، چند معما از این دست را آورده‌ایم.

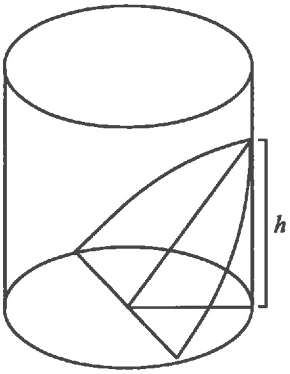


۱. به‌کمک اصل کاوالیری، حجم چنبره‌ای را پیدا کنید که از دوران دایره‌ای به شعاع r حول خطی در صفحهٔ دایره و به فاصلهٔ C از مرکز آن، $C > r$، به‌وجود آمده است.



۲. ثابت کنید که هیچ چندضلعی‌ای وجود ندارد که با دایره‌ای به شعاع دلخواه به مفهوم کاوالیری همنهشت باشد؛ اما مشابه این حکم در حالت سه‌بعدی درست نیست. ثابت کنید که به‌ازای هر کرهٔ داده شده، چهاروجهی‌ای وجود دارد که به مفهوم کاوالیری با آن همنهشت است.

۳. مطابق شکل، قطعه‌ای از یک استوانه را با صفحه‌ای مورب که از مرکز قاعدهٔ استوانه می‌گذرد بریده‌ایم. حجم این قسمت را برحسب شعاع استوانه و ارتفاع قطعه پیدا کنید.



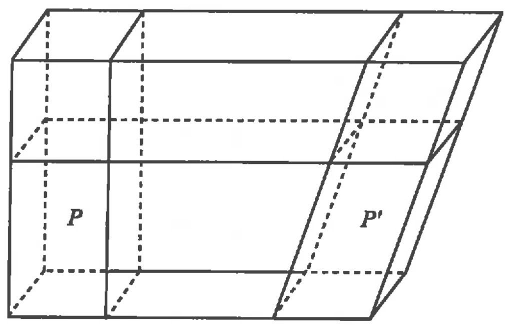
۴. منشورگون جسمی است با دو قاعدهٔ موازی که مساحت سطح هر مقطع موازی با قاعدهٔ آن تابعی چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر ۲ از فاصلهٔ مقطع تا یکی از قاعده‌هاست. ثابت کنید که اگر L، M و U به ترتیب مساحت

قاعدهٔ پایینی، مساحت سطح مقطع میانی (مقطعی که فاصله‌اش از دو قاعده برابر است) و مساحت قاعدهٔ بالایی باشند و h ارتفاع منشورگون باشد، حجم منشورگون برابر است با

$$\frac{h(L+۴M+U)}{۶}$$

آیا می‌توانید فرمولهای حجم کره، حجم هرم و حجم مخروط را به‌عنوان منشورگون به دست بیاورید؟

فراموش نکنید که شهودی که منجر به پذیرش اصل کاوالیری می‌شود ممکن است گمراه‌کننده باشد: دو جسم و یک صفحه را در فضا در نظر بگیرید که محیط مقطعهای حاصل از اشتراک جسمها با همهٔ صفحه‌های موازی صفحهٔ مفروض برابر است. آیا مساحت جانبی این دو حجم لزوماً برابر است؟ شکل زیر نشان می‌دهد که این‌طور نیست: محیط مقطعهای منشورها با هر صفحهٔ موازی قاعده‌شان با هم برابر است: اما واضح است که مساحت جانبی منشورها برابر نیست.



بالاخره، مقاله را با قضیهٔ جالبی که عمر چندانی هم ندارد و به تازگی ثابت شده و اثبات آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم ختم می‌کنیم.

قضیه. هر دو مثلث هم‌مساحت به مفهوم کاوالیری همنهشت هستند و دو چهاروجهی هم‌حجم وجود دارند که به مفهوم کاوالیری همنهشت نیستند.

راهنمایی برای حل معماها.

۱. چنبره را به‌صورت خوابیده روی یک صفحه بگذارید و از استوانه‌ای خوابیده روی همان صفحه به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع $۲\pi C$ به‌عنوان حجم مقایسه‌ای استفاده کنید. مقطعهای چنبره حلقه و مقطعهای استوانه مستطیل هستند.

۲. قسمت اول ساده است. برای قسمت دوم، فرض کنید AB و CD دو پاره‌خط در فضا باشند که AB بر CD عمود است، AB و CD بر پاره‌خط واصل وسطهایشان هم عمود هستند و $AB=CD=۲r\sqrt{\pi}$. از چهاروجهی $ABCD$ به‌عنوان حجم مقایسه‌ای استفاده کنید.

۳. حجم قطعهٔ موردنظر برابر است با $\frac{۲}{۳}hr^۳$.

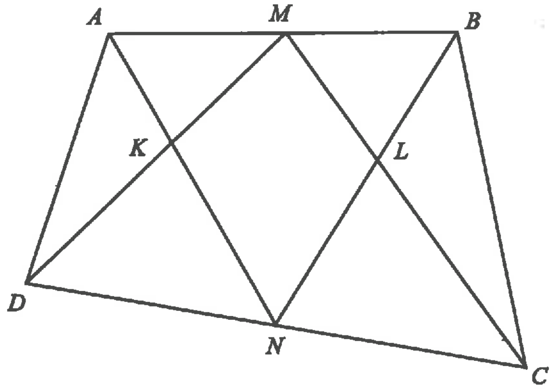
قضیهٔ فرشها

ارشک حمیدی

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی بهار امسال بیست ساله شد. این مقاله به همهٔ کسانی تقدیم می‌شود که برای انتشار این مجله صادقانه کوشیده‌اند.

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، در آغاز انتشار آن، بخشی ویژهٔ «مسأله حل‌کنها» داشت، هر شماره تعدادی مسأله داده می‌شد و چند شماره بعد، در همان بخش، راه‌حل این مسأله‌ها می‌آمد. مسألهٔ معروف زیر را اولین‌بار در بخش مسأله‌های این مجله دیدم ([۱، ص ۹۳]).

مسألهٔ ۱ . چهارضلعی $ABCD$ محدب است و M و N به‌ترتیب وسط ضلعهای AB و CDاند. BN و CM یکدیگر را در نقطهٔ L و AN و DM یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کرده‌اند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی $KMLN$ با مجموع مساحتهای مثلثهای ADK و BCL برابر است.



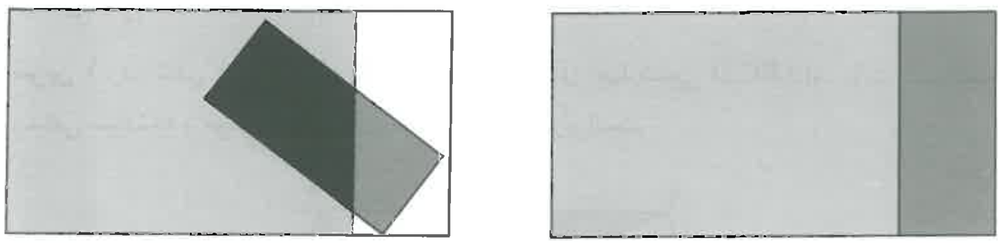
شکل ۱

راه‌حل خودم همانی است که به‌عنوان راه‌حل اول در [۲، صص ۵۵-۵۴] آورده شده است. البته بعداً فهمیدم که این مسأله راه‌حل معروفتری هم دارد [۲، ص ۵۵]:

راه‌حل اول مسألهٔ ۱. چون مجموع ارتفاعهای نظیر رأسهای C و D در مثلثهای BCM و ADM دو برابر ارتفاع نظیر رأس N در مثلث ANB است و قاعده‌های BM و AM در این مثلثها برابر با نصف قاعدهٔ AB در مثلث ANBاند، پس مجموع مساحتهای مثلثهای BCM و ADM با مساحت مثلث ANB برابر است. اکنون اگر مساحت مثلثهای BLM و AKM را کم کنیم، حکم موردنظر به‌دست می‌آید.

در این مقاله روشی را معرفی می‌کنیم که ابزاری قوی برای حل این‌گونه مسأله‌هاست و امیدواریم که خواننده با استفاده از آن بتواند مسأله‌های جالب دیگری طرح کند.

فرض کنید اتاقی مستطیل شکل را با دو قطعه فرش مستطیل شکل فرش کرده‌ایم (شکل ۲ (الف) را ببینید). معلوم است که اگر یکی از فرشها را جابه‌جا کنیم، مساحت ناحیهٔ همپوشان فرشها با مجموع مساحتهای ناحیه‌های خالی مانده از اتاق برابر است (شکل ۲ (ب) را ببینید).

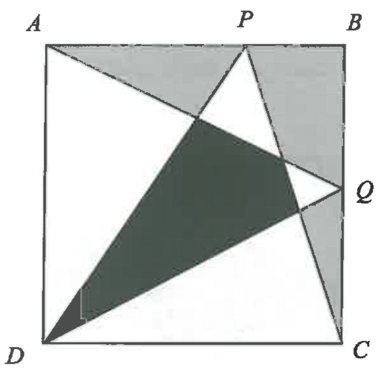


(الف) (ب)

شکل ۲

توجه کنید که این حکم به شکل اتاق و فرشها بستگی ندارد. پیش از اینکه مسألهٔ ۱ را به این روش حل کنیم به مسألهٔ زیر توجه کنید.

مسألهٔ ۲ . در شکل زیر $ABCD$ مربع است و P و Q دو نقطهٔ دلخواه روی ضلعهای AB و BCاند. ثابت کنید مساحت ناحیهٔ سیاه‌شده با مجموع مساحتهای ناحیه‌های سایه‌دار برابر است.



شکل ۳

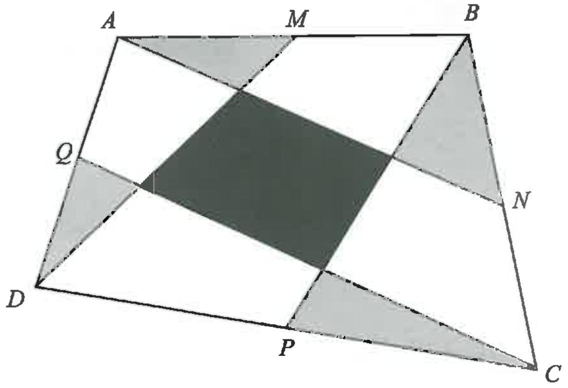
راه‌حل. توجه کنید که مساحت هر یک از مثلثهای AQD و DPC با نصف مساحت مربع برابر است، پس این دو مثلث مربع را فرش می‌کنند. اکنون توجه کنید که ناحیهٔ سیاه‌شده، ناحیهٔ همپوشان این دو فرش است و ناحیه‌های سایه‌دار، ناحیه‌های خالی مانده‌اند.

راه‌حل دوم مسألهٔ ۱. فرشها را چهارضلعیهای $AMCN$ و $BNDM$ بگیرید. توجه کنید که

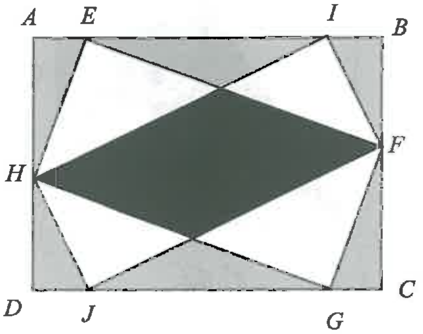
$$S_{AMCN} = S_{AMC} + S_{ANC} = \frac{۱}{۲} S_{ABC} + \frac{۱}{۲} S_{ADC} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که $S_{BNDM} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$. بنابراین چهارضلعیهای $AMCN$ و $BNDM$ چهارضلعی $ABCD$ را فرش می‌کنند. اکنون توجه کنید که ناحیهٔ همپوشان فرشها، چهارضلعی $KMLN$ است و ناحیه‌های خالی مانده مثلثهای BCL و ADKاند.

تمرین ۱. در شکل زیر M، N، P و Q وسط ضلعهای چهارضلعی $ABCD$اند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی سیاه‌شده با مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار برابر است.

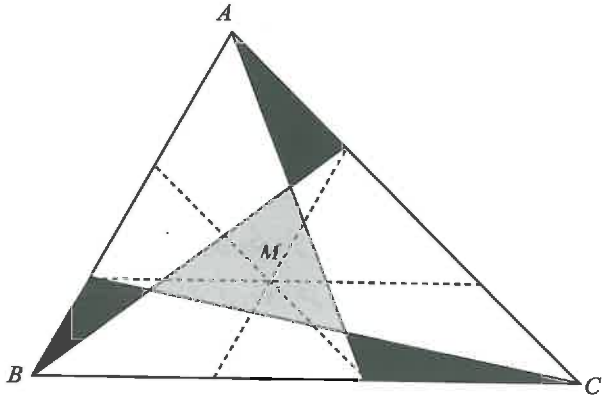


تمرین ۲. در شکل زیر چهارضلعیهای $ABCD$، $EFGH$ و $IFJH$ مستطیل‌اند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی سیاه‌شده با مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار برابر است.



تمرین ۳. نقطهٔ M درون مثلث ABC قرار دارد. از نقطهٔ M سه خط موازی با ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. به این ترتیب سه ذوزنقه به‌دست می‌آید. در هر یک از این ذوزنقه‌ها قطری را رسم کرده‌ایم، به‌طوری که هیچ‌یک

از دو سر این قطرها با بقیه مشترک نیست. این قطرها مثلث را به هفت ناحیه تقسیم می‌کنند، که چهارتا از آنها مثلث‌اند. ثابت کنید که مساحت یکی از این مثلثها با مجموع مساحتهای سه مثلث دیگر برابر است.



مراجع

۱. رشد آموزش ریاضی، سال پنجم، پاییز و زمستان ۱۳۶۷، شماره مسلسل ۲۰ـ۱۹.

۲. رشد آموزش ریاضی، سال ششم، تابستان ۱۳۶۸، شماره مسلسل ۲۲.

اگر به‌ازای هر عدد اول مانند p، $a(p \text{ به‌پیمانهٔ}) \leq b(p \text{ به‌پیمانهٔ})$، آن وقت $a = b$

پ. اردوش، پ. پ. پالفی، م. سگدی

ممکن است خواننده از تعدد نویسندگان چنین یادداشت کوتاهی تعجب کند. پ. پ. پالفی حکمی را که در عنوان مقاله آمده است حدس زده بود، و پ. اردوش خاطرنشان کرده بود که این حکم به‌سادگی از قضیهٔ سیلوستر_شور نتیجه می‌شود. این حکم در سال ۱۹۸۴ به‌عنوان یکی از مسأله‌های مسابقهٔ ریاضی سالانه‌ای که در مجارستان به یادبود م. شویتزر برای دانشجویان کالجها برگزار می‌شود در نظر گرفته شده بود. زیباترین راه‌حل را م. سگدی پیدا کرده بود، که در اینجا می‌آید.

قضیه. فرض کنید a و b عددهایی طبیعی باشند. اگر ضمن تقسیم بر هر عدد اول، باقیماندهٔ a از باقیماندهٔ b کوچکتر یا با آن برابر باشد، a و b برابرند.

برهان. باقیماندهٔ x به‌پیمانهٔ p را با x_p نشان می‌دهیم، یعنی

$$x \equiv x_p \ (p \text{ به‌پیمانهٔ}), \qquad ۰ \leq x_p < p$$

اگر عدد اول p را طوری انتخاب کنیم که $p > \max\{a, b\}$، آن‌وقت

$$a = a_p \leq b_p = b$$

فرض می‌کنیم $a < b$ و با رسیدن به تناقض حکم را ثابت می‌کنیم.
توجه کنید که $۱ \leq b - a < b$ و

$$(b-a)_p = b_p - a_p \leq b_p$$

پس a و $b - a$ وقتی و فقط وقتی در فرض قضیه صدق می‌کنند که a و b چنین باشند. بنابراین، بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود، می‌توانیم فرض کنیم در میان a و $b - a$، a کوچکترین است و در نتیجه $۱ \leq a \leq \frac{b}{۲}$.

اکنون می‌توان از قضیهٔ سیلوستر_شور استفاده کرد و به سادگی به تناقض رسید. صورت قضیهٔ سیلوستر_شور چنین است: فرض کنید n و k عددهایی طبیعی باشند و $n > k$. در این صورت در میان عددهای

$$n + ۱, n + ۲, \ldots, n + k - ۱$$

عددی وجود دارد که مقسوم‌علیه اولی بزرگتر از k دارد. به این ترتیب، در مورد قضیهٔ خودمان عددی اول مانند p وجود دارد که $p > a$ و $\binom{b}{a}$ بر p بخش‌پذیر است، یعنی

$$p \mid (b-a+۱)\cdots(b-۱)b$$

دقیقاً یکی از عددهای $b-a+۱$، ...، $b-۱$ و b بر p بخش‌پذیر است. فرض کنید این عدد $b-k$ باشد، که $۰ \leq k < a$. در این صورت $b_p = k < a = a_p$، که با فرض تناقض دارد.

با این همه، اثباتی مقدماتی‌تر وجود دارد که در آن به هیچ قضیه‌ای هم احتیاج نیست. فرض کنید

$$A = ۱ \times ۲ \times \cdots \times a, \qquad B = (b-a+۱)\cdots(b-۱)b$$

در این صورت $\binom{b}{a} = \frac{B}{A}$. فرض کنید $\alpha(p^k)$ و $\beta(p^k)$ به ترتیب تعداد عاملهای A و B باشند که بر p^k بخش‌پذیرند. به این ترتیب

$$A = \prod_p p^{\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \alpha(p^k)}, \qquad B = \prod_p p^{\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \beta(p^k)}$$

چون A و B هر دو حاصل‌ضرب a عدد طبیعی متوالی‌اند و در دنبالهٔ عددهای طبیعی، فاصلهٔ مضربهای p^k از یکدیگر برابر با p^k است، پس

$$|\alpha(p^k) - \beta(p^k)| \leq ۱$$

بنابر فرض، $a_p \leq b_p$. یعنی اولین مضرب p در دنبالهٔ

$$a, a-۱, \ldots, ۱$$

جایی آمده است که جلوتر از جایی است که اولین مضرب p در دنبالهٔ

$$b, b-۱, \ldots, b-a+۱$$

آمده است. بنابراین $\alpha(p) \geq \beta(p)$. اما اگر $p > a$، آن‌وقت $\alpha(p) = ۰$. بنابراین، $\beta(b) = ۰$ و نه A بر p بخش‌پذیر است نه B.

توجه کنید که

$$\binom{b}{a} = \frac{B}{A} = \prod_{p \leq a} p^{\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \beta(p^k) - \sum\limits_{k=۱}^{\infty} \alpha(p^k)}$$

اگر نمای بزرگترین توان p را که به‌ازای آن $\beta(p^k) > ۰$ با $\kappa(p)$ نشان دهیم، آن‌وقت

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(\beta(p^k)-\alpha(p^k)) = \beta(p)-\alpha(p)+\sum_{k=۲}^{\kappa(p)}(\beta(p^k)-\alpha(p^k)) - \sum_{k=\kappa(p)+۱}^{\infty}\alpha(p^k)$$
$$\leq \sum_{k=۲}^{\kappa(p)} ۱ = \kappa(p)-۱$$

بنابراین

$$\frac{B}{A} \Big| \prod_{p\leq a} p^{\kappa(p)-۱}$$

به عبارت دیگر،

$$\frac{(b-a+۱)\cdots(b-۱)b}{\prod_{p\leq a} p^{\kappa(p)}} \Big| \frac{۱\times ۲\times\cdots\times a}{\prod_{p\leq a} p}$$

در اینجا، پس از ساده کردن، در سمت راست دقیقاً $a-\pi(a)$ عامل می‌ماند که هر یک از آنها حداکثر برابر با a است و در سمت چپ دست‌کم $a-\pi(a)$ عامل می‌ماند که هر یک از آنها دست‌کم برابر با $b-a+۱$ است ($\pi(t)$ تعداد عددهای اول کوچکتر یا برابر با t است). چون $b \geq ۲a$، پس

$$b-a+۱ \geq a+۱ > a$$

و به تناقض رسیده‌ایم.

● ترجمهٔ ارشک حمیدی

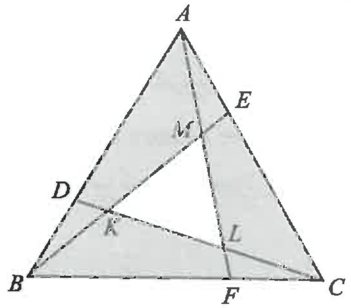
P. Erdös, P. P. Pa′lfy, M. Szegedy, $a(mod\ p) \leq b(mod\ p)$ for all primes p implies $a=b$, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 94, Feb. 1988, pp. 169-170.

از باب تفریح

۱. عددهای ۱ تا ۱۵ را طوری در یک ردیف بنویسید که مجموع هر دو عدد کنار هم مربع کامل باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

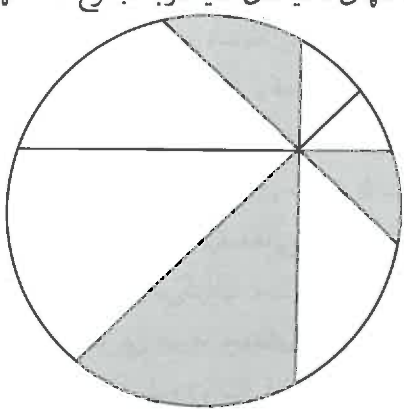
۲. دانش‌آموزی سه عدد طبیعی متوالی را با هم جمع کرده است، سپس سه عدد طبیعی بعدی را هم با هم جمع کرده است و این دو مجموع را در هم ضرب کرده است. آیا ممکن است این حاصل ضرب برابر با ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ شده باشد؟

۳. در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $BD = \frac{1}{3}AB$، $AE = \frac{1}{3}AC$ و $CF = \frac{1}{3}BC$. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث KLM است؟



۴. در پایان یک دوره مسابقات شطرنج معلوم شده است که تعداد بردهای هر بازیکن، وقتی که با مهره‌های سفید بازی کرده است، با تعداد بردهای بقیهٔ بازیکنان، وقتی که با مهره‌های سیاه بازی کرده‌اند، برابر شده است. ثابت کنید امتیاز همهٔ بازیکنان برابر است.

۵. مانند شکل زیر از نقطه‌ای درون دایره‌ای دلخواه سه وتر طوری رسم کرده‌ایم که در این نقطه شش زاویهٔ 60° تشکیل داده‌اند. آیا مجموع مساحتهای ناحیه‌های سایه‌دار با مجموع مساحتهای ناحیه‌های بدون سایه برابر است؟



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۶)

اولین باری که در المپیاد کامپیوتر شرکت کردیم!

یحیی تابش
tabesh@sharif.ir

سومین المپیاد بین‌المللی کامپیوتر (انفورماتیک) در خرداد ماه ۱۳۷۰ (ژوئن ۱۹۹۱) در یونان برگزار می‌شد. از کشور ما هم برای حضور در این المپیاد رسماً دعوت به‌عمل آمد و من مأمور شدم که به‌عنوان ناظر در این دوره حضور پیدا کنم و طرحی برای چگونگی حضور تیمی از کشورمان ارائه کنم. پس از حضور در المپیاد در کشور یونان دریافتم که المپیاد کامپیوتر اصولاً بر چالش «حل مسأله بر مبنای تفکر الگوریتمی» مبتنی است و نتیجهٔ هر مسأله باید به‌صورت برنامه‌ای کامپیوتری ارائه شود.

با توجه به اینکه در آغاز دههٔ هفتاد هنوز درس کامپیوتر در مدرسه‌ها رایج نشده بود و دانش‌آموزان ما با برنامه‌نویسی کامپیوتری آشنا نبودند، به وزارت آموزش و پرورش پیشنهاد کردم که با امتحانهای نظری مبتنی بر تفکر الگوریتمی و مسائل ترکیبیاتی اعضای تیم را انتخاب کنیم و با آموزش فشرده به آنها برنامه‌سازی را یاد بدهیم تا تیم بتواند در المپیاد شرکت کند.

براساس این طرح، مرحلهٔ اول اولین المپیاد ملی کامپیوتر در سطح کشور در آذرماه ۱۳۷۰ و مرحلهٔ دوم بین برگزیدگان مرحلهٔ اول در بهمن ۱۳۷۰ در اهواز برگزار شد و شش نفر برگزیدهٔ تیم، دورهٔ آموزشی خود را از فروردین ۱۳۷۱ در دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف شروع کردند. این دورهٔ آموزشی از آموزش فشردهٔ زبان برنامه‌نویسی پاسکال و مباحثی در ترکیبیات و نظریهٔ گراف و غیره تشکیل شده بود. ۶ نفر در این اردوی آموزشی حدود سه ماه آموزش دیدند و در امتحان نهایی ۴ نفر به‌عنوان اعضای تیم انتخاب شدند. من و دکتر قدسی سرپرستی تیم را برعهده گرفتیم و با بچه‌ها راهی آلمان شدیم. در بدو ورود، دو سه روزی به آشنایی اولیه و مراسم افتتاحیه اختصاص داشت و بعد روزهای برگزاری آزمون و مسابقه رسید.

در المپیاد کامپیوتر جلسهٔ ژوری متشکل از سرپرستان تیمها، و کمیتهٔ علمی ساعت ۵ صبح روز مسابقه تشکیل می‌شد و بحث روی مسائل پیشنهادی شروع می‌شد و باید تا ساعت ۱۰ صبح (که زمان شروع آزمون بود) سئوالها انتخاب و ترجمه می‌شد تا در اختیار بچه‌ها قرار گیرد. مدت برگزاری مسابقه ۵ ساعت بود و پس از پایان مسابقه در ساعت ۳ بعدازظهر هم کار تصحیح شروع می‌شد؛ یعنی برنامه‌هایی که بچه‌ها نوشته بودند با داده‌های ویژه اجرا می‌شد و اگر برنامه جواب درست می‌داد نمرهٔ کامل می‌گرفت. مسابقه دو روز ادامه پیدا کرد، و پس از آن، ژوری برای توزیع مدالها و رده‌بندی تصمیم گرفت. در این دوره، بچه‌های ما ۲ مدال نقره گرفتند و ۲ مدال برنز و در رده‌بندی تیمی هم به مقام چهاردهم رسیدیم که برای شروع و سال اول شرکت در المپیاد نتیجهٔ واقعاً رضایت‌بخشی

بود. در این المپیاد، سعید میرزایی و محمد مهدیان مدال نقره گرفتند و کیومرث کاوه و فرشاد رستم‌آبادی مدال برنز. سالها از آن دوره گذشته است و بچه‌ها هر کدام پیشرفتهای خوبی داشته‌اند. میرزایی در دانشکدهٔ برق دانشگاه صنعتی شریف تحصیل کرد، ولی به تولید نرم‌افزار مشغول است و کارهای خیلی خوبی انجام داده است. مهدیان در آن سال در سال ما قبل آخر دبیرستان تحصیل می‌کرد و سال بعد هم به عضویت تیم المپیاد ریاضی در آمد و مدال طلا گرفت و دوباره هم در المپیاد کامپیوتر شرکت کرد و باز هم، با اندکی غفلت، نقره گرفت. او در حال حاضر مراحل پایانی اخذ دکتری خود در MIT را می‌گذراند و بسیار خوش درخشیده است. کیومرث کاوه لیسانس ریاضی خود را از دانشگاه صنعتی شریف گرفت و دکترای ریاضی خود را یکی، دو سال پیش از دانشگاه تورنتو اخذ کرد و مشغول کارهای تحقیقاتی در دورهٔ فوق دکتری در کاناداست، فرشاد رستم‌آبادی هم لیسانس کامپیوتر از دانشگاه صنعتی شریف گرفت و مشغول تحصیل در دورهٔ دکتری کامپیوتر در همانجاست.

از راست به چپ: تابش، قدسی، جلسهٔ ژوری

در هر جلسهٔ مسابقه ۲ مسأله داده می‌شد که ماهیت الگوریتمی داشت و باید برای آن الگوریتم مناسبی طراحی می‌شد و به‌صورت کد برنامه کامپیوتری تحویل می‌شد. سخت‌ترین مسأله، مسألهٔ دوم روز دوم مسابقه بود. صورت این مسأله را در صفحهٔ بعد می‌بینید:

از راست به چپ: مهدیان، رستم‌آبادی، کاوه، میرزایی

مسألهٔ دوم (شمارهٔ ۴/۲/۲) «صعود به قلهٔ یک کوه»

یک باشگاه کوهنوردی شامل P عضو است که این اعضا از ۱ تا P شماره‌گذاری شده‌اند. کلیهٔ اعضا دارای سرعت یکسانی درکوهنوردی بوده و تفاوتی بین سرعت آنها در بالا رفتن و پایین آمدن وجود ندارد. کوهنورد شمارهٔ i به‌اندازهٔ $c(i)$ واحد آذوقه (SUPPLITES) در هر روز مصرف می‌کند (اعم از بالا رفتن و یا پایین آمدن) ولی این کوهنورد می‌تواند حداکثر $S(i)$ واحد از آذوقه را حمل نماید. کلیهٔ اعداد $C(i)$ و $S(i)$ اعدادی صحیح و مثبت فرض می‌شوند. فرض کنید که یک کوهنورد با مقدار کافی آذوقه به N روز برای رسیدن به قلهٔ کوه نیاز دارد. ولی کوه ممکن است آنقدر مرتفع باشد که یک کوهنورد به تنهایی نتواند تمام آذوقهٔ مورد نیاز خود را حمل نماید. بنابراین برای صعود به قله یک گروه ازکوهنوردان تشکیل می‌شود که همزمان از یک نقطه صعود را آغاز نمایند. یک کوهنورد می‌تواند قبل از رسیدن به قله اقدام به بازگشت به نقطهٔ شروع نماید و آذوقهٔ اضافی خود نسبت به مایحتاج موردنیاز برای رسیدن به نقطهٔ شروع را به دیگران واگذار کند. کوهنوردان حرکت را به‌طور پیوسته ادامه می‌دهند و هیچگاه به استراحت نمی‌پردازند.

مسأله این است که برنامه(Schedule)ای برای این باشگاه کوهنوردی تنظیم شود به‌طوری که حداقل یکی ازکوهنوردان به قله برسد و کلیهٔ کوهنوردان به نقطه‌ی شروع بازگردند.

صورت مسأله

برنامه‌ای برای انجام کارهای زیر بنویسید:

۱. از صفحه کلید عدد N (نشان‌دهندهٔ تعداد روزهای لازم برای صعود به قله)، P (تعداد کوهنوردان)، و برای هر i (از ۱ تا P) اعداد صحیح $S(i)$ و $C(i)$ خوانده شود. فرض کنید کلیهٔ اعداد فوق صحیح و مثبت‌اند و اعداد غیرقابل قبول را رد (reject) نمایید.

۲. یک برنامه (Schedule) برای صعود به قلهٔ کوه پیدا کنید. برای این کار یک گروه متشکل از k کوهنورد به شماره‌های $a(۱)\ldots a(k)$ را که در صعود مشارکت می‌نمایند مشخص کنید و نیز برای هر j از ۱ تا k مقدار آذوقه‌ای را که کوهنورد شمارهٔ $a(j)$ در شروع باید همراه داشته باشد مشخص کرده و در متغیر $M(j)$ قرار دهید.

دقت کنید که ممکن است مسأله برای کلیهٔ مقادیر N، $C(i)$ و $S(i)$ جواب نداشته باشد.

۳. اطلاعات زیر را روی صفحهٔ نمایش نشان دهید:

a) عدد k، تعداد کوهنوردانی که در صعود شرکت می‌نمایند.

b) مقدار کل آذوقهٔ مورد نیاز.

c) شماره کوهنوردان $a(۱)\ldots a(k)$ که در صعود شرکت می‌نمایند.

d) برای کلیهٔ $a(j)$ها (j بین ۱ تا k) مقدار آذوقهٔ مورد نیاز، $M(j)$، که در ابتدا باید توسط کوهنورد $a(j)$ حمل شود.

e) روز $D(j)$ام (از روز شروع صعود) که کوهنورد $a(j)$ اقدام به پایین آمدن می‌کند.

۴. یک برنامه (Schedule) بهینه (optimal) است اگر:

a) تعداد شرکت کنندگان مینیمم باشد.

b) در بین کلیهٔ گروههایی که شرط (a) (در این قسمت) را برآورده می‌کند کل آذوقهٔ مورد نیاز کمترین مقدار ممکن باشد.

با اولویت دادن به شرط اول یک جواب **نزدیک به بهینه** را پیدا کنید.

این مسأله تا حدودی دشوار بود و اعضای تیم، نتوانستند نمرهٔ کامل از آن بگیرند چون همه سراغ روش معمولی Back Tracking رفته بودند که به علت سنگینی مسأله در زمان مناسب جواب نمی‌داد. در واقع ایدهٔ اصلی طراحی یک الگوریتم مکاشفه‌ای بود که بتواند با سرعت جواب مسأله را حاصل کند.

بیست و پنجمین تورنمنت شهرها

دور بهاری، ۲۰۰۴

سؤالهای دو سال اول

سطح معمولی

۱. در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A، عمودمنصف ضلع AB و ارتفاع نظیر رأس B در یک نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید نیمساز زاویهٔ A، عمودمنصف ضلع AC و ارتفاع نظیر رأس C هم یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۲. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که n عدد طبیعی وجود داشته باشند که مجموعشان عددی اول باشد.

۳. ظرف A حاوی سه لیتر آب قند است. ظرف B حاوی n لیتر آب است. ظرف C خالی است. می‌توانیم هر ترکیبی از کارهای زیر را انجام دهیم:

۱) محتویات ظرف X را خالی کنیم.

۲) محتویات ظرف X را کلاً در ظرف Y خالی کنیم.

۳) از ظرف X آنقدر در ظرف Y بریزیم که ظرفهای Y و Z هم‌اندازه شوند.

الف) اگر $n = ۲۰$، چگونه می‌توانیم ۱۰ لیتر آب قند ۳۰٪ درست کنیم.

ب) همهٔ مقدارهای ممکن n را پیدا کنید که به‌ازای آنها هدف قسمت (الف) برآورده شود.

۴. عدد طبیعی a (در دستگاه اعشاری) مفروض است و $a > ۱$. این عدد را دو بار می‌نویسیم و عدد b را به‌دست می‌آوریم: $b = \overline{aa}$. معلوم شده است که b مضرب $a^۲$ است. همهٔ مقدارهای ممکن $\frac{b}{a^۲}$ را پیدا کنید.

۵. دو عدد طبیعی ده رقمی را همسایه می‌نامیم، هرگاه دقیقاً در یک رقم فرق داشته باشند (مثلاً، عددهای ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۰ و ۱۲۳۴۵۰۷۸۹۰ همسایه‌اند). بیشترین تعداد ممکن عضوهای مجموعهٔ عددهای ده‌رقمی‌ای را که هیچ دو عضوی از آن همسایه نیستند پیدا کنید.

سطح پیشرفته

۱. مجموع همهٔ جمله‌های تصاعدی حسابی و متناهی از عددهای صحیح توانی از ۲ است. ثابت کنید که تعداد جمله‌های این تصاعد هم توانی از ۲ است.

۲. حداکثر چند سرباز می‌توان روی صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ طوری قرار داد که هر سرباز در خانهٔ وسط از سه

خانه باشد که به‌طور قطری قرار گرفته‌اند و دقیقاً در یکی از دو خانهٔ دیگر سربازی دیگر قرار دارد؟

۳. هر روز ارزش سهام کارخانه‌ای یا n درصد زیاد می‌شود یا n درصد کم می‌شود، که در اینجا n عددی صحیح است که $0 < n < 100$. ارزش سهام با دقتی نامحدود حساب می‌شود. آیا nای وجود دارد که ارزش سهام دو بار یکی شود؟

۴. دو دایره در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. مماس مشترک آنها که به B نزدیکتر است در نقطه‌های E و F بر دایره‌ها مماس است و امتداد AB را در نقطهٔ M قطع کرده است. روی امتداد AM نقطهٔ K طوری انتخاب شده است که $KM = MA$. خط KE دایره‌ای را که E روی آن قرار دارد برای بار دوم در نقطهٔ C قطع کرده است. خط KF دایره‌ای را که F روی آن قرار دارد برای بار دوم در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید نقطه‌های A، C و D روی یک خط راست قرار دارند.

۵. میز بیلیاردی به‌شکل چندضلعی است و همهٔ ضلعهایش در دو امتداد عمود بر هم قرار دارند. توپ بیلیاردی از رأس A تحت زاویهٔ 90° زده می‌شود و درون میز حرکت می‌کند و طبق قانون «زاویهٔ بازگشت برابر با زاویهٔ برخورد است» از ضلعهای میز منعکس می‌شود. اگر این توپ به رأسی برسد، در آن می‌افتد و همان جا می‌ماند. ثابت کنید که این توپ هیچ‌گاه به رأس A برنمی‌گردد.

۶. در آغاز بازی‌ای دو نفره، عدد $2004!$ روی تختهٔ سیاه نوشته شده است. بازیکنان یکی در میان بازی می‌کنند. در هر حرکت، عددی طبیعی که از عدد روی تخته کوچکتر است و بر حداکثر ۲۰ عدد اول متمایز بخش‌پذیر است انتخاب می‌شود. این عدد، از عدد روی تخته کم می‌شود، عدد روی تخته پاک می‌شود و به‌جای آن این تفاضل نوشته می‌شود. برنده بازیکنی است که به عدد صفر برسد. بازیکنی که اول بازی می‌کند استراتژی برد دارد یا بازیکنی که به‌عنوان نفر دوم بازی می‌کند، و استراتژی برد چیست؟

سؤالهای دو سال آخر

سطح معمولی

۱. پاره‌خطهای AB، BC و CD از خط شکستهٔ $ABCD$ با یکدیگر برابرند و بر دایره‌ای به مرکز O مماس‌اند. ثابت کنید نقطهٔ تماس این دایره با BC، نقطهٔ O و نقطهٔ برخورد AC و BD روی یک خط راست قرار دارند.

۲. عدد طبیعی a (در دستگاه اعشاری) مفروض است و $a > 1$. این عدد را دو بار می‌نویسیم و عدد b را به‌دست می‌آوریم: $b = \overline{aa}$. معلوم شده است که b مضرب a^2 است. همهٔ مقدارهای ممکن $\frac{b}{a^2}$ را پیدا کنید.

۳. محیط چهارضلعی‌ای محدب برابر با ۲۰۰۴ و طول یکی از قطرهایش برابر با ۱۰۰۱ است. آیا ممکن است طول قطر دیگر برابر با ۱ باشد؟ برابر با ۲ چطور؟ برابر با ۱۰۰۱ چطور؟

۴. در تصاعد حسابی

$$a_{۱}, a_{۲}, a_{۳}, a_{۴}, \ldots$$

عددهای $a_{۱}^{۲}$، $a_{۲}^{۲}$ و $a_{۳}^{۲}$ هم در جایی وجود دارند. ثابت کنید که همهٔ جمله‌های این تصاعد عددهایی صحیح‌اند.

۵. دو عدد طبیعی ده‌رقمی را همسایه می‌نامیم، هرگاه دقیقاً در یک رقم فرق داشته باشند (مثلاً، عددهای ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۰ و ۱۲۳۴۵۰۷۸۹۰ همسایه‌اند). بیشترین تعداد ممکن عضوهای مجموعهٔ عددهای ده رقمی‌ای را که هیچ دو عضوی از آن همسایه نیستند پیدا کنید.

سطح پیشرفته

۱. هر روز ارزش سهام کارخانه‌ای یا n درصد زیاد می‌شود یا n درصد کم می‌شود، که در اینجا n عددی صحیح است که $۰ < n < ۱۰۰$. ارزش سهام با دقتی نامحدود حساب می‌شود. آیا nای وجود دارد که ارزش سهام دو بار یکی شود؟

۲. همهٔ زاویه‌های میز بیلیاردی که به‌شکل چندضلعی است بر حسب درجه عددهایی صحیح‌اند. توپ بیلیاردی از رأس A تحت زاویهٔ ۱° زده می‌شود و درون میز حرکت می‌کند و طبق قانون «زاویهٔ بازگشت برابر با زاویهٔ برخورد است» از ضلعهای میز منعکس می‌شود. اگر این توپ به رأسی برسد، در آن می‌افتد و همان‌جا می‌ماند. ثابت کنید این توپ هیچ‌گاه به رأس A برنمی‌گردد.

۳. تصویر قائم هرمی مثلثی بر صفحه‌ای بیشترین مساحت ممکن را دارد. ثابت کنید این صفحه یا با وجهی از هرم موازی است یا با دو یال روبه‌روی هم از این هرم موازی است.

۴. در آغاز بازی‌ای دو نفره، عدد !۲۰۰۴ روی تخته سیاه نوشته شده است. بازیکنان یکی در میان بازی می‌کنند. در هر حرکت، عددی طبیعی که از عدد روی تخته کوچکتر است و بر حداکثر ۲۰ عدد اول متمایز بخش‌پذیر است انتخاب می‌شود. این عدد، از عدد روی تخته کم می‌شود، عدد روی تخته پاک می‌شود و به جای آن این تفاضل نوشته می‌شود. برنده بازیکنی است که به عدد صفر برسد. بازیکنی که اول بازی می‌کند استراتژی برد دارد یا بازیکنی که به‌عنوان نفر دوم بازی می‌کند، و استراتژی برد چیست؟

۵. سهمی $y = x^{۲}$ دایره‌ای را دقیقاً در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر مماس بر سهمی و مماس بر دایره در نقطهٔ A بر هم منطبق باشند، لزوماً مماس بر سهمی و مماس بر دایره در نقطهٔ B هم بر هم منطبق‌اند؟

پنجاه و پنجمین آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا

گروه الف، ۱۰ فوریهٔ ۲۰۰۴

۱. احمد برای هر ساعت کار ۲۰۰ تومان می‌گیرد که ۱/۴۵٪ آن به‌عنوان مالیات کسر می‌شود. چند ریال از دستمزد هر ساعت احمد به‌عنوان مالیات کسر می‌شود؟

الف) ۰/۰۰۲۹ ب) ۰/۰۲۹ ج) ۰/۲۹ د) ۲/۹ ه) ۲۹

۲. در آزمون ریاضیات، هر جواب درست ۶ امتیاز دارد، جواب غلط امتیازی ندارد و هر مسأله‌ای که بی‌جواب بماند ۲/۵ امتیاز دارد. اگر دانش‌آموزی ۸ مسأله از ۲۵ مسأله را جواب ندهد، به چند مسألهٔ دیگر باید درست جواب بدهد تا دست‌کم ۱۰۰ امتیاز بگیرد؟

الف) ۱۱ ب) ۱۳ ج) ۱۴ د) ۱۶ ه) ۱۷

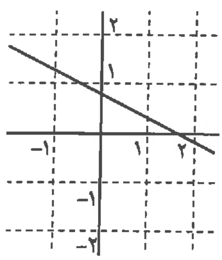
۳. چند جفت مرتب از عددهای صحیح مانند (x, y) وجود دارد که $x + ۲y = ۱۰۰$؟

الف) ۳۳ ب) ۴۹ ج) ۵۰ د) ۹۹ ه) ۱۰۰

۴. زهرا ۶ دختر دارد و اصلاً پسری ندارد. برخی از دختران او ۶ دختر دارند و بقیه اصلاً دختر ندارند. زهرا کلاً ۳۰ دختر و نوهٔ دختر دارد، اما نتیجهٔ دختر ندارد. چند تا از دختران و نوه‌های زهرا دختر ندارند؟

الف) ۲۲ ب) ۲۳ ج) ۲۴ د) ۲۵ ه) ۲۶

۵. در شکل زیر نمودار خط راست $y = mx + b$ نشان داده شده است. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟



الف) $mb < -۱$ ب) $-۱ < mb < ۰$

ج) $mb = ۰$ د) $۰ < mb < ۱$

ه) $mb > ۱$

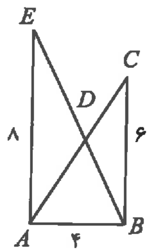
۶. فرض کنید $U = ۲ \times ۲۰۰۴^{۲۰۰۵}$، $V = ۲۰۰۴^{۲۰۰۵}$، $W = ۲۰۰۳ \times ۲۰۰۴^{۲۰۰۴}$،
$X = ۲ \times ۲۰۰۴^{۲۰۰۴}$، $Y = ۲۰۰۴^{۲۰۰۴}$ و $Z = ۲۰۰۴^{۲۰۰۳}$.
کدام‌یک از عددهای زیر از بقیه بزرگتر است؟

الف) $U - V$ ب) $V - W$ ج) $W - X$ د) $X - Y$ ه) $Y - Z$

۷. نوعی بازی را مطابق قاعدهٔ زیر انجام می‌دهند. در هر دور، بازیکنی که بیشترین مهره را دارد به هر یک از دیگر بازیکنان یک مهره می‌دهد و یک مهره را کنار می‌گذارد. وقتی یکی از بازیکنان مهره‌هایش تمام شد، بازی خاتمه می‌یابد. بازیکنان A، B و C به ترتیب ۱۵، ۱۴ و ۱۳ مهره دارند. بازی در چند دور انجام می‌شود؟

الف) ۳۶ ب) ۳۷ ج) ۳۸ د) ۳۹ ه) ۴۰

۸. در شکل زیر، زاویه‌های EAB و ABC قائمه‌اند، $AB = ۴$، $BC = ۶$، $AE = ۸$ و AC و BE یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کرده‌اند. تفاضل مساحتهای مثلثهای ADE و BDC چقدر است؟



الف) ۲ ب) ۴ ج) ۵ د) ۸ ه) ۹

۹. شرکتی کُره‌های تولیدی‌اش را در قالبهای استوانه‌ای شکل می‌فروشد. بخش بازاریابی پیشنهاد کرده است که برای افزایش فروش قالبها را بهتر بسازند. اگر قطر قالبها را ۲۵٪ افزایش دهند اما حجم آنها تغییر نکند، ارتفاع قالبها چند درصد باید کم شود؟

الف) ۱۰ ب) ۲۵ ج) ۳۶ د) ۵۰ ه) ۶۰

۱۰. مجموع ۴۹ عدد طبیعی متوالی برابر با $۷^۵$ شده است. میانهٔ آنها چقدر است؟

الف) ۷ ب) $۷^۲$ ج) $۷^۳$ د) $۷^۴$ ه) $۷^۵$

۱۱. میانگین ارزش سکه‌های ۱ تومانی، ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی در کیف زهرا برابر با ۲۰ تومان است. اگر زهرا یک ۲۵ تومانی دیگر هم داشت، این میانگین ۲۱ تومان می‌بود. او در کیفش چند سکهٔ ۱۰ تومانی دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۲. فرض کنید $A = (۰,۹)$ و $B = (۰,۱۲)$. نقطه‌های A' و B' روی خط $y = x$ قرار دارند و AA' و BB' یکدیگر را در نقطهٔ $C = (۲,۸)$ قطع کرده‌اند. طول $A'B'$ چقدر است؟

الف) ۲ ب) $۲\sqrt{۲}$ ج) ۳ د) $۲ + \sqrt{۲}$ هـ) $۳\sqrt{۲}$

۱۳. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی مانند (a,b) در صفحهٔ مختصات باشد که در آن هر یک از عددهای a و b یا ۱− است یا ۰ یا ۱. چند خط متمایز از دست‌کم دو عضو S می‌گذرند؟

الف) ۸ ب) ۲۰ ج) ۲۴ د) ۲۷ هـ) ۳۶

۱۴. سه عدد حقیقی تصاعدی حسابی تشکیل داده‌اند که جملهٔ اولش برابر با ۹ است. اگر جملهٔ دوم را با ۲ و جملهٔ سوم را با ۲۰ جمع کنیم، سه عددی که به‌دست می‌آیند تصاعدی هندسی تشکیل می‌دهند. کمترین مقدار ممکن جملهٔ سوم این تصاعد هندسی چقدر است؟

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۳۶ د) ۴۹ هـ) ۸۱

۱۵. احمد و علی از نقطه‌هایی متقاطر روی مسیری دایره‌ای در جهتهای مخالف هم شروع به حرکت می‌کنند. اولین باری که این دو به هم می‌رسند، احمد ۱۰۰ متر را طی کرده است. بار دوم که به هم می‌رسند جایی است که پس از اولین ملاقات، علی ۱۵۰ متر را طی کرده است. احمد و علی با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. طول مسیر برحسب متر چقدر است؟

الف) ۲۵۰ ب) ۳۰۰ ج) ۳۵۰ د) ۴۰۰ هـ) ۵۰۰

۱۶. مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی مانند x که

$$\log_{۲۰۰۴}(\log_{۲۰۰۳}(\log_{۲۰۰۲}(\log_{۲۰۰۱} x)))$$

تعریف شده است برابر است با $\{x : x > c\}$. مقدار c چقدر است؟

الف) ۰ ب) $۲۰۰۱^{۲۰۰۲}$

ج) $۲۰۰۲^{۲۰۰۳}$ د) $۲۰۰۳^{۲۰۰۴}$

هـ) $۲۰۰۱^{۲۰۰۲^{۲۰۰۳}}$

۱۷. فرض کنید f تابعی با ویژگیهای زیر باشد:

۱. $f(۱) = ۱$؛

۲. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(۲n) = nf(n)$.

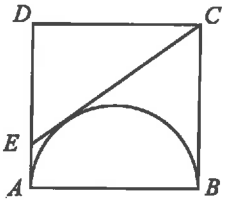
مقدار $f(۲^{۱۰۰})$ چقدر است؟

الف) ۱ ب) $۲^{۹۹}$

ج) $۲^{۱۰۰}$ د) $۲^{۴۹۵۰}$

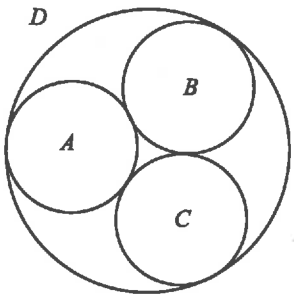
هـ) $۲^{۹۹۹۹}$

۱۸. طول هر ضلع مربع $ABCD$ برابر با ۲ است. نیمدایره‌ای به قطر AB درون این مربع رسم کرده‌ایم و مماس بر این نیمدایره که از C رسم شده است، ضلع AD را در نقطهٔ E قطع کرده است. طول CE چقدر است؟



الف) $\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲}$ ب) $\sqrt{۵}$ ج) $\sqrt{۶}$ د) $\frac{۵}{۲}$ هـ) $۵-\sqrt{۵}$

۱۹. دایره‌های A، B و C بر یکدیگر مماس خارج‌اند و هر یک بر دایرهٔ D مماس داخل است. دایره‌های B و C برابرند. شعاع دایرهٔ A برابر با ۱ است و از مرکز دایرهٔ D گذشته است. شعاع دایرهٔ B چقدر است؟



الف) $\frac{۲}{۳}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ج) $\frac{۷}{۸}$ د) $\frac{۸}{۹}$ هـ) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۳}$

۲۰. عددهای a و b را از میان عددهای بین ۰ و ۱ مستقل از هم و به تصادف انتخاب کنید و فرض کنید مجموعشان برابر با c باشد. فرض کنید A، B و C به ترتیب گرد کردهٔ a، b و c به نزدیکترین عدد صحیح به این عددها باشند. احتمال اینکه $A+B=C$ چقدر است؟

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۲}{۳}$ هـ) $\frac{۳}{۴}$

۲۱. اگر $\sum_{n=۰}^{\infty} \cos^{۲n}\theta = ۵$، مقدار $\cos ۲\theta$ چقدر است؟

الف) $\frac{۱}{۵}$ ب) $\frac{۲}{۵}$ ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ د) $\frac{۳}{۵}$ هـ) $\frac{۴}{۵}$

۲۲. سه کرهٔ دو به دو مماس به شعاع ۱ روی صفحه‌ای افقی قرار دارند. کره‌ای به شعاع ۲ روی این کره‌ها قرار دارد. فاصلهٔ صفحه تا بالای کرهٔ بزرگتر چقدر است؟

الف) $۳+\frac{\sqrt{۳۰}}{۲}$ ب) $۳+\frac{\sqrt{۶۹}}{۳}$ ج) $۳+\frac{\sqrt{۱۲۳}}{۴}$ د) $\frac{۵۲}{۹}$ هـ) $۳+۲\sqrt{۲}$

۲۳. ضریبهای چندجمله‌ای

$$p(x) = c_{۲۰۰۴}x^{۲۰۰۴} + c_{۲۰۰۳}x^{۲۰۰۳} + \cdots + c_{۱}x + c_{۰}$$

عددهایی حقیقی‌اند، $c_{۲۰۰۴} \neq ۰$ و ریشه‌های این چندجمله‌ای ۲۰۰۴ عدد مختلط $z_k = a_k + ib_k$، $۱ \leq k \leq ۲۰۰۴$، هستند که $a_۱ = b_۱ = ۰$ و

$$\sum_{k=۱}^{۲۰۰۴} a_k = \sum_{k=۱}^{۲۰۰۴} b_k$$

کدام‌یک از عددهای زیر ممکن است عددی غیرصفر باشد؟

الف) $c_{۰}$ ب) $c_{۲۰۰۳}$ ج) $b_۲b_۳\cdots b_{۲۰۰۴}$ د) $\sum_{k=۱}^{۲۰۰۴} a_k$ ه) $\sum_{k=۱}^{۲۰۰۴} c_k$

۲۴. صفحه‌ای شامل نقطه‌های A و B است و $AB = ۱$. فرض کنید S اجتماع همهٔ قرصهای به شعاع ۱ در این صفحه باشد که AB را می‌پوشانند. مساحت S چقدر است؟

الف) $۲\pi + \sqrt{۳}$ ب) $\frac{۸\pi}{۳}$ ج) $۳\pi - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{۱۰\pi}{۳} - \sqrt{۳}$ ه) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$

۲۵. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq ۴$، فرض کنید a_n عدد $۰/\overline{۱۳۳}_n$ در مبنای n باشد. حاصل‌ضرب $a_۴a_۵\cdots a_{۹۹}$ را می‌توان به شکل $\frac{m}{n!}$ نوشت، که در آن m و n عددهایی طبیعی‌اند و n کوچکترین مقدار ممکن است. مقدار n چقدر است؟

الف) ۹۸ ب) ۱۰۱ ج) ۱۳۲ د) ۷۹۸ ه) ۹۶۲

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۷)

بیست و دومین آزمون دعوتی ریاضیات امریکا

۲۳ مارس، ۲۰۰۴

۱. رقمهای عدد طبیعی n از چپ به راست چهار عدد طبیعی متوالی به ترتیب نزولی‌اند. مجموع باقیمانده‌های ممکن تقسیم n بر ۳۷ چقدر است؟

۲. مجموعهٔ A از m عدد صحیح متوالی که مجموعشان برابر با $2m$ است تشکیل شده است و مجموعهٔ B هم از $2m$ عدد صحیح متوالی که مجموعشان برابر با m است تشکیل شده است. قدر مطلق تفاضل بزرگترین عضو A و بزرگترین عضو B برابر با ۹۹ است. m را پیدا کنید.

۳. چندوجهی محدب P، ۲۶ رأس، ۶۰ یال و ۳۶ وجه دارد، که ۲۴ تا از آنها مثلث‌اند و ۱۲ تای آنها چهارضلعی‌اند. هر قطر فضایی پاره‌خطی است که دو سر آن دو رأس غیرمجاور را که از یک وجه نیستند به هم وصل می‌کند. P چند قطر فضایی دارد؟

۴. طول ضلعهای مربعی برابر با ۲ است. S مجموعهٔ همهٔ پاره‌خطهای به‌طول ۲ است که دو سرشان روی دو ضلع مجاور مربع قرار دارند. وسط پاره‌خطهای عضو S ناحیه‌ای را در بر دارند که مساحتش با تقریب دو رقم اعشار برابر با k است. $100k$ را پیدا کنید.

۵. آلفا و بتا در مسابقه‌ای دو روزه با موضوع مسأله حل کردن شرکت کرده‌اند. تا پایان روز دوم، هر یک از این دو نفر مبادرت به حل کردن مسأله‌هایی کرده است که کلاً ۵۰۰ امتیاز دارند. آلفا در روز اول ۱۶۰ امتیاز از ۳۰۰ امتیاز و در روز دوم ۱۴۰ امتیاز از ۲۰۰ امتیاز کسب کرده است. بتا در روز اول ۳۰۰ امتیاز کسب نکرده است و در هر یک از دو روز مسابقه امتیازی که کسب کرده است عددی طبیعی است و نسبت موفقیت روزانهٔ بتا (یعنی نسبت امتیازهای کسب شده به امتیاز مسأله‌ها) در هر روز از نسبت موفقیت آلفا در همین روز کمتر است. نسبت موفقیت دو روزهٔ آلفا برابر است با $\frac{300}{500} = \frac{3}{5}$. بیشترین نسبت موفقیت ممکن دو روزهٔ بتا برابر با $\frac{m}{n}$ است، که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند. $m+n$ چقدر است؟

۶. عددی صحیح را مارگونه می‌نامیم هرگاه در نمایش دهدهی آن، که آن را با $a_1a_2a_3\ldots a_n$ نشان می‌دهیم، اگر i فرد باشد، $a_i < a_{i+1}$ و اگر i زوج باشد، $a_i > a_{i+1}$. چند عدد صحیح مارگونه بین ۱۰۰۰ و ۹۹۹۹ چهار رقم متمایز دارند.

۷. فرض کنید C ضریب x^2 در بسط

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)\ldots(1+14x)(1-15x)$$

باشد. $|C|$ را پیدا کنید.

۸. ستارهٔ n نقطه‌ای منتظم را اجتماع n پاره‌خط $P_۱P_۲$، $P_۲P_۳$، . . . و $P_nP_۱$ تعریف می‌کنیم، به‌طوری که

- نقطه‌های $P_۱$، $P_۲$، . . . و P_n در یک صفحه باشند و هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط نباشند.
- هر یک از این n پاره‌خط دست‌کم یکی دیگر از پاره‌خطها را در نقطه‌ای بجز انتهای پاره‌خطها قطع کند.
- همهٔ زاویه‌ها در $P_۱$، $P_۲$، . . . و P_n برابر باشند.
- همهٔ n پاره‌خط $P_۱P_۲$، $P_۲P_۳$، . . . و $P_nP_۱$ برابر باشند.
- مسیر $P_۱P_۲ \ldots P_nP_۱$ در هر یک از رأسها در جهت پادساعتگرد کمتر از ۱۸۰° بچرخد.

ستارهٔ ۳ نقطه‌ای، ۴ نقطه‌ای یا ۶ نقطه‌ای منتظم وجود ندارد. همهٔ ستاره‌های ۵ نقطه‌ای منتظم متشابه‌اند، اما دو ستارهٔ ۷ نقطه‌ای منتظم غیرمتشابه وجود دارد. چند ستارهٔ ۱۰۰۰ نقطه‌ای منتظم غیرمتشابه وجود دارد؟

۹. فرض کنید ABC مثلثی باشد که طول ضلعهایش ۳، ۴ و ۵ است و $DEFG$ مستطیلی ۷×۶ باشد. پاره‌خطی رسم شده است که مثلث ABC را به مثلث $U_۱$ و ذوزنقهٔ $V_۱$ تقسیم کرده است و پاره‌خط دیگری رسم شده است که مستطیل $DEFG$ را به مثلث $U_۲$ و ذوزنقهٔ $V_۲$ طوری تقسیم کرده است که $U_۱$ با $U_۲$ متشابه است و $V_۱$ با $V_۲$. کمترین مقدار ممکن مساحت $U_۱$ را می‌توان به شکل $\frac{m}{n}$ نوشت، که در آن m و n دو عدد طبیعی نسبت به هم اول‌اند. $m+n$ را پیدا کنید.

۱۰. دایره‌ای به شعاع ۱ را به‌طور تصادفی روی مستطیل $ABCD$ به ابعاد ۳۶×۱۵ طوری قرار می‌دهیم که کاملاً درون مستطیل قرارگیرد. احتمال اینکه دایرهٔ موردنظر بر قطر AC مماس نباشد برابر است با $\frac{m}{n}$، که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند. $m+n$ را پیدا کنید.

۱۱. مخروط دوار قائمی ۴ اینچ ارتفاع دارد و شعاع قاعدهٔ آن ۳ اینچ است. سطح کل مخروط، شامل قاعدهٔ آن، رنگ شده است. صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط، مخروط را به دو بخش تقسیم کرده است، یکی مخروط کوچکتر C و دیگری مخروط ناقص F، به‌طوری که نسبت مساحتهای سطوح رنگ شدهٔ C و F و نسبت حجمهای C و F هر دو برابر با k است. اگر $k = \frac{m}{n}$، که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند، $m+n$ را پیدا کنید.

۱۲. فرض کنید S مجموعهٔ زوجهای مرتبی مانند (x,y) باشد که $۰ < x \le ۱$، $۰ < y \le ۱$ و $\lfloor \log_۲ \frac{۱}{x} \rfloor$ و $\lfloor \log_۵ \frac{۱}{y} \rfloor$ هر دو زوج‌اند. اگر مساحت نمودار S برابر با $\frac{m}{n}$ باشد، که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند، $m+n$ را پیدا کنید.

۱۳. چندجمله‌ای

$$P(x) = (۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۱۷})^۲ - x^{۱۷}$$

۳۴ ریشهٔ مختلط به شکل

$$z_k = r_k\left(\cos(۲\pi\alpha_k) + i\sin(۲\pi\alpha_k)\right), \qquad k = ۱, ۲, \ldots, ۳۴$$

دارد، که در آنها $۰ < \alpha_۱ \le \alpha_۲ \le \cdots \le \alpha_{۳۴} < ۱$ و $r_k > ۰$، $۱ \le k \le ۳۴$. اگر

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴ + \alpha_۵ = \frac{m}{n}$$

که در آن m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول‌اند، $m+n$ را پیدا کنید.

۱۴. اسب شاخدار را با طناب نقره‌ای به طول ۲۰ فوت به برج استوانه‌ای جادوگر که شعاعش ۸ فوت است بسته‌اند. طناب به برج در سطح زمین و به اسب در ارتفاع ۴ فوتی وصل است. اسب طناب را می‌کشد، به‌طوری که فاصلهٔ انتهای طناب تا نزدیکترین نقطهٔ آن روی برج ۴ فوت است و طول قسمتی از طناب که بر برج مماس است $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$ فوت است، که در آن a، b و c عددهایی طبیعی‌اند و c اول است. $a+b+c$ را پیدا کنید.

۱۵. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند x فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ \frac{x}{۱۰} & \text{اگر } x \text{ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد} \\ x+۱ & \text{در بقیهٔ موارد} \end{cases}$$

و دنباله‌ای به شکل زیر تعریف کنید: $x_۱ = x$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $x_{n+۱} = f(x_n)$. فرض کنید $d(x)$ کوچکترین عدد طبیعی مانند n باشد که $x_n = ۱$ (مثلاً $d(۱۰۰) = ۳$ و $d(۸۷) = ۷$). فرض کنید m تعداد عددهایی طبیعی مانند x باشد که $d(x) = ۲۰$. مجموع مقسوم‌علیه‌های اول و متمایز m را پیدا کنید.

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۷)

سی و سومین المپیاد ریاضی امریکا

۲۷ و ۲۸ آوریل، ۲۰۰۴

۱. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی‌ای محیطی باشد که زاویه‌های درونی و بیرونی آن دست‌کم ۶۰° هستند. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۳}\,|\,AB^۳ - AD^۳\,| \le |\,BC^۳ - CD^۳\,| \le ۳\,|\,AB^۳ - AD^۳\,|$$

تساوی چه‌وقت پیش می‌آید؟

۲. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی صحیح باشند که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان برابر با ۱ است. فرض کنید S مجموعه‌ای از عددهای صحیح باشد که

الف) اگر $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $a_i \in S$.

ب) اگر $i, j = ۱, ۲, \ldots, n$، $a_i - a_j \in S$ (لزومی ندارد i و j متمایز باشند).

ج) به‌ازای هر دو عضو S مانند x و y، اگر $x + y \in S$، آن‌وقت $x - y \in S$.

ثابت کنید S باید مجموعهٔ عددهای صحیح باشد.

۳. به‌ازای کدام عددهای حقیقی و مثبت مانند k می‌توان مستطیل $۱ \times k$ را به دو چندضلعی متشابه اما غیرهمنهشت افراز کرد؟

۴. احمد و محمد بازی زیر را روی جدولی ۶×۶ انجام می‌دهند. هر بازیکن در نوبت خودش عددی گویا را که قبلاً در جدول نوشته نشده در یکی از خانه‌های خالی می‌نویسد. ابتدا احمد بازی می‌کند و سپس بازیکنان یکی در میان بازی می‌کنند. وقتی که همهٔ خانه‌ها پر شدند، در هر سطر، خانه‌ای را که بزرگترین عدد در آن نوشته شده است سیاه می‌کنند. اگر احمد بتواند از بالای جدول به پایین آن خطی بکشد که فقط از خانه‌های سیاه بگذرد می‌برد و اگر نتواند محمد می‌برد (اگر دو خانهٔ سیاه رأس مشترک داشته باشند، احمد می‌تواند خطی رسم کند که از یکی از آنها به دیگری برود و فقط از این خانه‌ها بگذرد). برای یکی از این بازیکنان استراتژی برد پیدا کنید.

۵. فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی و مثبت باشند. ثابت کنید

$$(a^۵ - a^۲ + ۳)(b^۵ - b^۲ + ۳)(c^۵ - c^۲ + ۳) \ge (a + b + c)^۳$$

۶. دایرهٔ ω در چهارضلعی $ABCD$ محاط شده است. فرض کنید I مرکز این دایره باشد. فرض کنید

$$(AI + DI)^۲ + (BI + CI)^۲ = (AB + CD)^۲$$

ثابت کنید $ABCD$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است.

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۷)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول اسفند ۱۳۸۳ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۰۱. الف) n و d عددهای طبیعی‌اند و $۲n^۲$ بر d بخش‌پذیر است. ثابت کنید $n^۲ + d$ مربع کامل نیست.

ب) p عددی اول و n عددی طبیعی است. ثابت کنید $pn^۲$ حداکثر یک مقسوم‌علیه مانند d دارد که $n^۲ + d$ مربع کامل است.

۱۰۲. a و b عددهایی صحیح‌اند و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $۲^n a + b$ مربع کامل است. ثابت کنید $a = ۰$.

۱۰۳. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را پیدا کنید که در میان هر n عدد طبیعی بتوان ۱۸ عدد پیدا کرد که مجموعشان بر ۱۸ بخش‌پذیر باشد.

۱۰۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که $m^۲ + ۱$ بر n و $n^۳ + ۱$ بر m بخش‌پذیر باشد.

۱۰۵. دستگاه معادله‌های

$$\lfloor\sqrt{y-۱}\rfloor^۲ = x - ۱$$
$$۲\lfloor\sqrt{y+۲\sqrt{x}}\rfloor = y - ۱$$

را در مجموعهٔ عددهای حقیقی حل کنید.

۱۰۶. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند $(n > ۳)$ و $a_۱ a_۲ \cdots a_n = ۱$. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱+a_۱+a_۱a_۲} + \frac{۱}{۱+a_۲+a_۲a_۳} + \cdots + \frac{۱}{۱+a_n+a_na_۱} > ۱$$

۱۰۷. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$۳ + a + b + c + \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ۳\frac{(۱+a)(۱+b)(۱+c)}{۱+abc}$$

۱۰۸. a، b و c عددهایی طبیعی‌اند و $2a < b$ و $2b < c$. ثابت کنید عددی حقیقی مانند λ وجود دارد که

$$\frac{1}{3} < \{\lambda a\} \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} < \{\lambda b\} \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} < \{\lambda c\} \leq \frac{2}{3}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد حقیقی t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

۱۰۹. در هر یک از خانه‌های جدولی $m \times n$، که در آن $m \geq 2$ و $n \geq 2$، یکی از عددهای ۱− و ۱ را نوشته‌ایم، به طوری که از هر یک از این عددها دست‌کم دو بار استفاده کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان دو سطر و دو ستون از این جدول را طوری انتخاب کرد که مجموع چهار عدد نوشته شده در خانه‌های مشترکشان برابر با صفر باشد.

۱۱۰. هر یک از خانه‌های جدولی 50×50 را با یکی از چهار رنگی که در اختیار داریم رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید خانه‌ای وجود دارد که در بالا، پایین، سمت چپ و سمت راست آن، خانه‌هایی همرنگ با آن وجود دارند (لازم نیست این خانه‌ها مجاور خانهٔ موردنظر باشند).

۱۱۱. از میان هر سه عضو مجموعه‌ای متناهی از عددهای حقیقی می‌توان دو عدد انتخاب کرد که مجموعشان هم عضوی از این مجموعه باشد. تعداد عضوهای این مجموعه حداکثر چندتاست؟

۱۱۲. در مثلث ABC، $AC = BC$. فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد که $\angle PAB = \angle PBC$ و M وسط AB باشد. ثابت کنید $\angle APM + \angle BPC = 180^\circ$.

۱۱۳. خطهای l_1 و l_2 مماسهای مشترک خارجی دو دایرهٔ C_1 و C_2اند. خط l_1 بر دایره‌های C_1 و C_2 به‌ترتیب در نقطه‌های A و B مماس است و خط l_2 بر دایره‌های C_1 و C_2 به‌ترتیب در نقطه‌های C و D مماس است. M وسط پاره‌خط AB است و P و Q به‌ترتیب نقطه‌های برخورد دوم MC و MD با C_1 و C_2اند. ثابت کنید نقطه‌های A، B، P و Q روی یک دایره قرار دارند.

۱۱۴. نقطهٔ O درون شش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ طوری قرار گرفته است که همهٔ ضلعهای این شش‌ضلعی از نقطهٔ O تحت زاویهٔ 60° دیده می‌شوند و در ضمن

$$OA_1 > OA_3 > OA_5, \quad OA_2 > OA_4 > OA_6$$

ثابت کنید

$$A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1$$

۱۱۵. نقطهٔ D درون مثلث ABC قرار دارد و عددهایی حقیقی مانند a، b، c و d وجود دارند که

$$AB = ab, \; AC = ac, \; AD = ad, \; BC = bc, \; BD = bd, \; CD = cd$$

ثابت کنید $\angle ABD + \angle ACD = 60^\circ$.

راه‌حلها

۷۱. کدام عددهای طبیعی را می‌توان به شکل $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$ نوشت، که در آن a، b و c عددهایی طبیعی‌اند؟

راه‌حل. فرض کنید $F(x,y,z)=\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$. فرض کنید بتوان عدد طبیعی n را به شکل $F(a,b,c)$ نوشت، که در آن a، b و c عددهایی طبیعی‌اند. بدون اینکه از کلی بودن اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a\le b\le c$ و c کمترین مقدار ممکن باشد. توجه کنید که

$$nabc=(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

بنابراین $(a+b)^2$ بر c بخش‌پذیر است. اکنون توجه کنید که

$$F\left(a,b,\frac{(a+b)^2}{c}\right)=\frac{\frac{(a+b)^2}{c}(a+b+c)^2}{ab\frac{(a+b)^2}{c}}=\frac{(a+b+c)^2}{abc}=n$$

در نتیجه $\frac{(a+b)^2}{c}\ge c$، یعنی $a+b\ge c$. بنابراین

$$\begin{aligned}n&=\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{\frac{b}{c}}{a}+\frac{c}{ab}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\\&\le\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\le\frac{7}{a}+\frac{3}{c}\end{aligned}$$

اگر $c=1$، آن‌وقت $n=F(1,1,1)=9$، و اگر $c\ge 2$،

$$n\le 7+\frac{3}{2}\le 9$$

اگر $n=7$، از نابرابری $\frac{3}{b}+\frac{7}{a}\le 7$ نتیجه می‌شود $a=1$. علاوه بر این، چون $a+b\ge c$، پس $b\le c\le 1+b$ و در نتیجه یا $c=b$ یا $c=b+1$. بنابراین یا $7b^2=(2b+1)^2$ یا $7b(b+1)=(2b+2)^2$، که هیچ‌کدام درست نیست. چون

$$F(9,9,9)=1,\quad F(4,4,8)=2,\quad F(3,3,3)=3$$

$$F(2,2,4)=4,\quad F(1,4,5)=5,\quad F(1,2,3)=6$$

$$F(1,1,2)=8,\quad F(1,1,1)=9$$

پس فقط عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸ و ۹ را می‌توان به‌شکل موردنظر نوشت.

۷۲. a و b عددهایی حقیقی و متمایزند و عددهای

$$a-b,a^2-b^2,a^3-b^3,\dots$$

همگی عددهایی صحیح‌اند. ثابت کنید a و b عددهایی صحیح‌اند.

راه‌حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که a و b عددهایی گویا هستند. توجه کنید که چون

$$a+b=\frac{a^۲-b^۲}{a-b}$$

پس $a+b$ عددی گویاست. از طرف دیگر،

$$a=\frac{(a+b)+(a-b)}{۲}$$

پس a و در نتیجه b عددی گویاست.

چون $a-b$ عددی صحیح است، وقتی a و b را به‌شکل ساده نشدنی می‌نویسیم، مخرجشان برابر است. فرض کنید $a=\frac{c}{n}$ و $b=\frac{d}{n}$، که در آنها c، d و n عددهایی صحیح‌اند و $n\neq ۰$. در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، c^k-d^k بر n^k بخش‌پذیر است.

اگر $n=۱$، حکم درست است. فرض کنید $n\neq ۱$ و p مقسوم‌علیه اولی از n باشد. چون $c-d$ بر n بخش‌پذیر است، $c-d$ بر p هم بخش‌پذیر است. اکنون توجه کنید که

$$c^k-d^k=(c-d)\left(c^{k-۱}+c^{k-۲}d+\cdots+cd^{k-۲}+d^{k-۱}\right)$$

و چون $c\equiv d$ (به‌پیمانهٔ p)،

$$c^{k-۱}+c^{k-۲}d+\cdots+cd^{k-۲}+d^{k-۱}\equiv kd^{k-۱}\ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

چون d و n نسبت به هم اول‌اند، پس $d\not\equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ p) و در نتیجه، اگر k بر p بخش‌پذیر نباشد،

$$kd^{k-۱}\not\equiv ۰\ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

به این ترتیب، چون c^k-d^k بر p^k بخش‌پذیر است، $c-d$ بر p^k بخش‌پذیر است. اما می‌توانیم k را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که $c-d$ بر p^k بخش‌پذیر نباشد. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و حکم درست است.

۷۳. در هر یک از خانه‌های جدولی ۲۰۰۰×۲۰۰۰ یکی از عددهای -۱ و ۱ را نوشته‌ایم. معلوم شده است که مجموع همهٔ عددهای نوشته شده منفی نیست. ثابت کنید ۱۰۰۰ سطر و ۱۰۰۰ ستون وجود دارند که مجموع عددهای خانه‌هایی که در آنها یکدیگر را قطع کرده‌اند از ۱۰۰۰ کمتر نیست.

راه‌حل اول. چون مجموع عددهای نوشته شده در جدول منفی نیست، ستونی وجود دارد که مجموع عددهای نوشته شده در آن منفی نیست. بنابراین در این ستون دست‌کم ۱۰۰۰ خانه وجود دارد که در آنها ۱ نوشته شده است. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که در خانه‌های ۱ تا ۱۰۰۰ ستون اول ۱ نوشته شده است. مجموع عددهای نوشته شده در خانه‌های سطرهای ۱ تا ۱۰۰۰ هریک از ستونهای دیگر را حساب کنید. ۹۹۹ ستونی را که این مجموع برای آنها بیشترین است انتخاب کنید. فرض کنید S مجموع عددهای نوشته شده در سطرهای ۱ تا ۱۰۰۰ این ۹۹۹ ستون باشد. اگر $S\geq ۰$، می‌توانیم ستون اول و این ۹۹۹ ستون را با سطرهای ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر بگیریم، که حکم برای آنها درست است. فرض

کنید $S < 0$. در این صورت مجموع عددهای سطرهای ۱ تا ۱۰۰۰ یکی از ستونها عددی منفی است. چون مجموع عددهای نوشته شده در ۱۰۰۰ خانهٔ اول هر ستون عددی زوج است، مجموع ۱۰۰۰ خانهٔ اول ستون موردنظر حداکثر ۲− است. بنابراین مجموع عددهای همهٔ خانه‌ها در سطرهای ۱ تا ۱۰۰۰ حداکثر $1000(-2) + S + 1000$ است که از ۱۰۰۰− کمتر است.

به این ترتیب چون مجموع عددهای نوشته در کل جدول منفی نیست، مجموع عددهای نوشته شده در همهٔ خانه‌های سطرهای ۱۰۰۱ تا ۲۰۰۰ باید از ۱۰۰۰ بیشتر باشد. خانه‌های مشترک بین این سطرها و ستونهایی را که بیشترین مجموع را دارند انتخاب کنید. اگر مجموع عددهای نوشته شده در این خانه‌ها از ۱۰۰۰ کمتر نباشد، حکم را ثابت کرده‌ایم. اگر این مجموع از ۱۰۰۰ کمتر باشد، مجموع دست‌کم یکی از این ستونها مثبت نیست. بنابراین مجموع هر یک از ۱۰۰۰ ستون دیگر هم مثبت نیست. به این ترتیب مجموع همهٔ خانه‌های سطرهای ۱۰۰۱ تا ۲۰۰۰ از $1000 \times 0 + 1000$ یا ۱۰۰۰ کمتر است، که تناقض است.

راه‌حل دوم. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر در خانه‌های جدولی $n \times n$ عددهای ۱− و ۱ نوشته باشیم و مجموع عددهای نوشته شده دست‌کم برابر با m باشد، که در اینجا زوجیت m و n یکسان است و $m < n$، آن‌وقت جدولی $(n-1) \times (n-1)$ در این جدول وجود دارد که مجموع عددهای نوشته شده در آن دست‌کم برابر با $m + 1$ است. اگر مجموع عددهای نوشته شده در جدول $n \times n$ از m بزرگتر باشد، می‌توانیم برخی از ۱ها را به ۱− تبدیل کنیم تا این مجموع برابر با m شود. فرض کنید مجموع عددهای نوشته شده در سطرهای ۱ تا n به‌ترتیب برابر با r_1، ... و r_n باشد. چون

$$r_1 + \cdots + r_n = m < n$$

jای وجود دارد که $r_j \leq 0$. به ازای هر خانهٔ سطر jام، مجموع عددهای واقع در خانه‌های سطر و ستونی را که این خانه روی آنها قرار دارد حساب کنید. فرض کنید این مجموعها a_1، ... و a_n باشند. توجه کنید که

$$a_1 + \cdots + a_n = m + (n-1)r_j \leq m < n$$

چون a_i مجموع عددهای نوشته شده در $2n - 1$ خانه است، پس a_i عددی فرد است. بنابراین kای وجود دارد که $a_k \leq -1$. اگر سطر jام و ستون kام را حذف کنیم، مجموع عددهای جدول $(n-1) \times (n-1)$ باقی‌مانده برابر است با $m - a_k$، که از $m + 1$ کمتر نیست. اکنون اگر (۱−)هایی را که به‌جای ۱ها نوشته بودیم به حالت اول برگردانیم حکم موردنظر به‌دست می‌آید.

در مورد مسألهٔ خودمان $n = 2000$ و $m = 0$. اگر ۱۰۰۰ بار از نتیجهٔ به‌دست آمده در بالا استفاده کنیم حکم موردنظر به‌دست می‌آید.

۷۴. در هر یک از خانه‌های جدولی $n^2 \times n^2$ عددی طبیعی نوشته‌ایم. تفاضل عددهای هر دو خانهٔ مجاور (که یک ضلع مشترک دارند) از n بیشتر نیست. ثابت کنید دست‌کم در $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ خانه عددی یکسان را نوشته‌ایم.

راه‌حل. فرض کنید a کوچکترین عدد و b بزرگترین عدد نوشته شده در خانه‌های جدول موردنظر باشد. بین خانه‌هایی که این عددها روی آنها نوشته شده‌اند به‌طور افقی حداکثر $n^۲ - ۱$ خانه و به‌طور عمودی هم حداکثر $n^۲ - ۱$ خانه وجود دارد. بنابراین مسیری از یکی از این خانه‌ها به دیگری وجود دارد که طولش حداکثر $۲(n^۲ - ۱)$ است. چون تفاضل عددهای نوشته در هر دو خانهٔ مجاور حداکثر برابر با n است، پس

$$b - a \leq ۲(n^۲ - ۱)n$$

همهٔ عددهای نوشته شده روی جدول عددهایی طبیعی بین a و bاند، پس حداکثر $۲(n^۲ - ۱)n + ۱$ عدد متمایز روی جدول نوشته شده است. بنابراین، چون

$$n^۴ > \left(۲(n^۲ - ۱)n + ۱\right)\frac{n}{۲}$$

عدد نوشته شده در بیش از $\frac{n}{۲}$ خانه یکسان است.

۷۵. در هر حرکت می‌توانیم از چهارتایی (a, b, c, d) به یکی از چهارتاییهای

$$(c, d, a, b), (b, a, d, c), (a + nc, b + nd, c, d), (a + nb, b, c + nd, d)$$

برسیم، که در آنها n عددی صحیح و دلخواه است. آیا می‌توان از چهارتایی $(۱, ۲, ۳, ۴)$ به چهارتایی $(۳, ۴, ۵, ۷)$ رسید؟

راه‌حل. خیر، نمی‌توان. توجه کنید که اگر تبدیل $(a, b, c, d) \to (a', b', c', d')$ یکی از تبدیلهای مجاز باشد، آن‌وقت

$$|ad - bc| = |a'd' - b'c'|$$

اما

$$|۱ \times ۴ - ۲ \times ۳| = ۲, \qquad |۳ \times ۷ - ۴ \times ۵| = ۱$$

۷۶. بزرگترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان هر n عدد متمایز از بازهٔ $[۱, ۱۰۰۰]$ بتوان دو عدد مانند a و b پیدا کرد که

$$۰ < a - b < ۱ + ۳\sqrt[۳]{ab}$$

راه‌حل. به‌ازای $n \leq ۱۰$، فرض کنید $a_i = i^۳$، $۱ \leq i \leq n$. در این صورت هیچ دو عددی از این عددها ویژگی موردنظر را ندارند، زیرا از $i^۳ - j^۳ > ۰$ نتیجه می‌شود $i - j \geq ۱$ و در نتیجه

$$i^۳ - j^۳ = (i - j)^۳ + ۳ij(i - j) \geq ۱ + ۳ij$$

اگر $n = ۱۱$، بازهٔ $[۱, ۱۰۰۰]$ را به بازه‌های

$$[k^۳ + ۱, (k + ۱)^۳], \qquad k = ۰, ۱, \ldots, ۹$$

افراز کنید. بنابر اصل لانه کبوتری، در میان هر ۱۱ عدد متمایز از بازهٔ $[1, 1000]$ دو عدد مانند a و b وجود دارند که در یک بازه قرار دارند. فرض کنید $a > b$. در این صورت

$$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3 + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})$$
$$< 1 + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = 1 + 3\sqrt[3]{ab}$$

۷۷. مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ را با شش دایرهٔ برابر به شعاع r پوشانده‌ایم. ثابت کنید $r \geq \frac{\sqrt{3}}{10}$.

راه‌حل. هر ضلع مثلث را به پنج قسمت برابر تقسیم کنید و از هر یک از نقطه‌های تقسیم خطهایی به موازات ضلعهای مثلث رسم کنید. به این ترتیب ۲۵ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\frac{1}{5}$ به دست می‌آید. کلاً ۲۱ رأس داریم و در نتیجه دست‌کم چهار تا از آنها درون یکی از دایره‌های به شعاع r قرار دارند. اکنون به سادگی معلوم می‌شود که $r \geq \frac{\sqrt{3}}{10}$.

۷۸. دایره‌های C_1 و C_2 به‌ترتیب به مرکزهای O_1 و O_2 یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. نیمخط O_1B دایرهٔ C_2 را در نقطهٔ F و نیمخط O_2B دایرهٔ C_1 را در نقطهٔ E قطع کرده است. از B خطی موازی EF رسم کرده‌ایم که C_1 و C_2 را به‌ترتیب در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید $MN = AE + AF$.

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که

$$\angle EAB = \frac{1}{2}\angle EO_1B = 90^\circ - \angle O_1BE = 90^\circ - \angle FBO_2 = \angle BAF$$

بنابراین AB نیمساز زاویهٔ EAF است. همچنین،

$$\begin{aligned}\angle EBA + \angle FBA &= \angle EBA + 180^\circ - \angle O_1BA\\ &= 180^\circ + \angle EBO_1\\ &= 180^\circ + 90^\circ - \angle EAB\end{aligned}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$\angle EBA + \angle FBA = 270^\circ - \angle FAB$$

از این تساویها دو نتیجه به دست می‌آید. اول اینکه BA نیمساز زاویهٔ EAF است و دوم اینکه

$$\begin{aligned}\angle EBF &= 360^\circ - \angle EBA - \angle FBA\\ &= 360^\circ - \frac{1}{2}(270^\circ - \angle EAB + 270^\circ - \angle FAB)\\ &= \frac{180^\circ + \angle EAF}{2}\end{aligned}$$

بنابراین B روی نیمساز زاویهٔ EAF و کمانی قرار دارد، که اشتراکشان یکتاست. از طرف دیگر، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث EAF هر دو این ویژگیها را دارد، پس همان نقطهٔ B است.

بنابراین $\angle AEB = \angle BEF = \angle EBM$ و در نتیجه $EBAM$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است، پس $EA = MB$. به همین ترتیب معلوم می‌شود $FA = NB$ و در نتیجه

$$MN = MB + NB = AE + AF$$

۷۹. $ABCD$ چهارضلعی‌ای محدب است و M و N به‌ترتیب وسط AD و BC هستند. همچنین، A، B، M و N روی یک دایره قرار دارند و AB بر دایرهٔ محیطی مثلث BMC مماس است. ثابت کنید AB بر دایرهٔ محیطی مثلث AND هم مماس است.

راه‌حل. چون چهارضلعی $ABNM$ محاطی است،

$$\angle MAB = ۱۸۰^\circ - \angle BNM = \angle MNC$$

چون AB بر دایرهٔ محیطی مثلث BMC مماس است،

$$\angle ABM = \angle BCM = \angle NCM$$

بنابراین مثلثهای ABM و NCM متشابه‌اند و در نتیجه

$$\frac{AM}{AB} = \frac{NM}{NC}$$

یا

$$\frac{MD}{AB} = \frac{MN}{BN}$$

از طرف دیگر، چون چهارضلعی $ABNM$ محاطی است، $\angle DMN = \angle ABN$. بنابراین مثلثهای DMN و ABN متشابه‌اند و در نتیجه $\angle MDN = \angle BAN$. به این ترتیب AB بر دایرهٔ محیطی مثلث AND هم مماس است.

۸۰. $ABCD$ چهارضلعی‌ای محدب و N وسط BC است. درضمن، $\angle AND = ۱۳۵^\circ$. ثابت کنید

$$AB + CD + \frac{۱}{\sqrt{۲}}BC > AD$$

راه‌حل. فرض کنید X قرینهٔ B نسبت به AN و Y قرینهٔ C نسبت به DN باشد. در این صورت

$$\angle XNY = ۱۸۰^\circ - ۲(۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ) = ۹۰^\circ$$

و $NX = NY = \frac{BC}{۲}$. بنابراین $XY = \frac{BC}{\sqrt{۲}}$. علاوه بر این، $AX = AB$ و $DY = DC$. در نتیجه

$$AD \le AX + XY + YD = AB + \frac{BC}{\sqrt{۲}} + DC$$

راه‌حلها

از باب تفریح

۱. تنها عددهایی که مربع کامل‌اند و می‌توان آنها را از مجموع دو عدد از میان عددهای ۱ تا ۱۵ به‌دست آورد عددهای ۴، ۹، ۱۶ و ۲۵اند. فرض کنید عددهای a، b و c را به همین ترتیب در ردیف موردنظر نوشته‌ایم. در این صورت $a+b$ و $b+c$ مربع کامل‌اند و b برابر با c نیست. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که ممکن نیست b برابر با ۸ یا ۹ باشد. به‌ازای هر مقدار دیگری از b، می‌توان دو عدد در میان عددهای موردنظر طوری پیدا کرد که مجموعشان با b مربع کامل باشد.

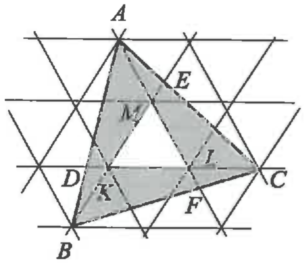
بنابراین عددهای ۸ و ۹ باید در یکی از دو سر ردیف موردنظر باشند. در این صورت ترتیب عددها مشخص می‌شود:

$$۸, ۱, ۱۵, ۱۰, ۶, ۳, ۱۳, ۱۲, ۴, ۵, ۱۱, ۱۴, ۲, ۷, ۹$$

تنها راه دیگر، نوشتن این عددها به ترتیب عکس ترتیب بالاست.

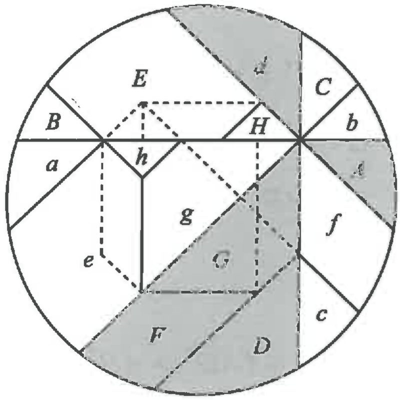
۲. خیر، ممکن نیست. در یکی از سه‌تاییهایی که با هم جمع شده‌اند یک عدد زوج و دو عدد فرد وجود دارد. بنابراین مجموع این سه عدد زوج است و در نتیجه، حاصل‌ضرب موردنظر هم زوج است.

۳. با توجه به شکل زیر معلوم است که مساحت هر یک از مثلثهای ABM، BCK و ACL دو برابر مساحت مثلث KLM است. بنابراین مساحت مثلث ABC هفت برابر مساحت مثلث KLM است.



۴. یکی از بازیکنان را در نظر بگیرید و فرض کنید w بار وقتی که با مهره‌های سفید بازی کرده است برنده شده است و b بار وقتی که با مهره‌های سیاه بازی کرده است برنده شده است. در این صورت تعداد بردهای بقیهٔ بازیکنان، وقتی که با مهرهٔ سیاه بازی کرده‌اند، برابر با b است و در نتیجه، در کل مسابقات، تعداد بازیهایی که سیاه برده است برابر با $b+w$ است. توجه کنید که این تعداد ثابت است و به مقدار خاصی از b و w بستگی ندارد. یعنی این تعداد به بازیکنی که در نظر گرفته‌ایم بستگی ندارد و در نتیجه تعداد بردهای همهٔ بازیکنان برابر است.

۵. بله، شکل زیر را ببینید.



پنجاه و پنجمین آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا

۱. هـ	۲. ج	۳. ب	۴. هـ	۵. ب
۶. الف	۷. ب	۸. ب	۹. ج	۱۰.ج
۱۱.الف	۱۲.ب	۱۳ ب	۱۴.الف	۱۵.ج
۱۶.ب	۱۷.د	۱۸.د	۱۹.د	۲۰ هـ
۲۱.د	۲۲.ب	۲۳.هـ	۲۴.ج	۲۵ هـ

بیست و دومین آزمون دعوتی ریاضیات امریکا

۱. ۲۱۷	۲. ۲۰۱	۳. ۲۴۱	۴. ۸۶	۵. ۸۴۹
۶. ۸۸۲	۷. ۵۸۸	۸. ۱۹۹	۹. ۳۵	۱۰. ۸۱۷
۱۱. ۵۱۲	۱۲. ۱۴	۱۳. ۴۸۲	۱۴. ۸۱۳	۱۵. ۵۱۱

سی و سومین المپیاد ریاضی امریکا

۱. بنابر تقارن، کافی است فقط نابرابری اول را ثابت کنیم. چون چهارضلعی $ABCD$ محیطی است، $AB+CD=BC+AD$، یعنی $AB-AD=BC-CD$. بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$\frac{1}{3}(AB^2+AB\times AD+AD^2)\le BC^2+BC\times CD+CD^2$$

بنابر فرض، $۶۰^\circ \le \angle A, \angle C \le ۱۲۰^\circ$، در نتیجه، $\cos A \le \frac{۱}{۲}$ و $\cos C \ge -\frac{۱}{۲}$. اگر از قانون کسینوسها در مثلث ABD استفاده کنیم معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} BD^۲ &= AB^۲ - ۲AB \times AD \cos A + AD^۲ \\ &\ge AB^۲ - AB \times AD + AD^۲ \\ &\ge \frac{۱}{۳}(AB^۲ + AB \times AD + AD^۲) \qquad (۱) \end{aligned}$$

زیرا نابرابری آخر با نابرابری

$$۳AB^۲ - ۳AB \times AD + ۳AD^۲ \ge AB^۲ + AB \times AD + AD^۲$$

یا

$$AB^۲ - ۲AB \times AD + AD^۲ \ge ۰$$

هم‌ارز است و درستی این نابرابری هم معلوم است. در نابرابری آخر تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $AB = AD$.

از طرف دیگر، اگر از قانون کسینوسها در مثلث BCD استفاده کنیم معلوم می‌شود

$$\begin{aligned} BD^۲ &= BC^۲ - ۲BC \times CD \cos C + CD^۲ \\ &\le BC^۲ + BC \times CD + CD^۲ \qquad (۲) \end{aligned}$$

به این ترتیب، نابرابری موردنظر از ترکیب کردن نابرابریهای (۱) و (۲) به‌دست می‌آید. تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $AB = AD$ و $BC = CD$.

۲. می‌توانیم فرض کنیم که هیچ‌یک از a_iها برابر با صفر نیست. توجه کنید که

د) بنابر (ب)، $۰ = a_۱ - a_۱ \in S$.

هـ) بنابر (الف) و (د)، اگر $s \in S$، $-s = ۰ - s \in S$.

و) بنابر (ب) و (هـ)، اگر $x, y \in S$ و $x - y \in S$، آن‌وقت $x + y \in S$.

با استفاده از (و) و استقرای قوی روی m نتیجه می‌شود که اگر $s \in S$ و m عددی صحیح و نامنفی باشد، $ms \in S$. بنابر (د) و (هـ)، همین نتیجه وقتی که m عددی منفی باشد هم درست است. بنابراین

ز) اگر $۱ \le i \le n$، S همهٔ مضربهای a_i را در بر دارد.

اکنون ثابت می‌کنیم که

ح) اگر $1 \leq i, j \leq n$ و c_i و c_j عددهایی صحیح باشند، $c_ia_i + c_ja_j \in S$.

از استقرا روی $|c_j| + |c_i|$ استفاده می‌کنیم. اگر $1 \leq |c_i|$ و $1 \leq |c_j|$، حکم از (ب)، (د) و (و) نتیجه می‌شود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $2 \geq \{|c_i|, |c_j|\}\max$. بدون اینکه از کلی بودن اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $c_i \geq 2$. اکنون توجه کنید که

$$c_ia_i + c_ja_j = a_i + \left((c_i - 1)a_i + c_ja_j\right)$$

و $a_i \in S$ و بنابر فرض استقرا $(c_i - 1)a_i + c_ja_j \in S$؛ در نتیجه، باز هم بنابر فرض استقرا، $(c_i - 2)a_i + c_ja_j \in S$ و در نتیجه، بنابر (و)، $c_ia_i + c_ja_j \in S$.

فرض کنید e_i بزرگترین عدد صحیحی باشد که 2^{e_i}، a_i را می‌شمارد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_n$. فرض کنید d_i بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a_1، a_2، ... و a_i باشد. به استقرا روی i ثابت می‌کنیم که S همهٔ مضربهای d_i را در بر دارد ($1 \leq i \leq n$). حالتی که $i = n$، حکم موردنظر است. اگر $i = 1$ و $i = 2$، حکم از (ز) و (ح) به‌دست می‌آید. فرض کنید به‌ازای iای که $2 \leq i < n$، S همهٔ مضربهای d_i را دربر داشته باشد. فرض کنید T مجموعهٔ عددهایی صحیح مانند m باشد که m بر d_i بخش‌پذیر است و به‌ازای هر عدد صحیح مانند r، $m + ra_{i+1} \in S$. در این صورت، بنابر (ط)، T عددهایی منفی و مثبت را دربر دارد، یعنی مضربهای a_i. بنابر (ج)، اگر $t \in T$ و S بر d_i بخش‌پذیر باشد (یعنی s در S باشد) و $t - s \in T$، آن‌وقت $t + s \in T$. اگر فرض کنیم $t = s = d_i$، معلوم می‌شود که $2d_i \in T$؛ به‌استقرا (مانند اثبات (ز)) می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر عدد صحیح مانند m، $2md_i \in T$.

از نحوهٔ مرتب کردن a_iها معلوم می‌شود که بزرگترین توانی از ۲ که d_i را می‌شمارد از بزرگترین توانی از ۲ که a_{i+1} را می‌شمارد بزرگتر یا با آن برابر است. به‌عبارت دیگر، $\frac{a_{i+1}}{d_{i+1}}$ عددی فرد است. بنابراین می‌توانیم عددهایی مانند f و g پیدا کنیم که f زوج است و $fd_i + ga_{i+1} = d_{i+1}$ (اگر لازم شد، می‌توانیم f و g را بدون محدودیتی روی f انتخاب کنیم و بعد (f, g) را با $\left(f - \frac{a_{i+1}}{d_{i+1}}, g + \frac{d_i}{d_{i+1}}\right)$ جایگزین کنیم تا fای زوج به‌دست بیاوریم). در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح مانند r، $rfd_i \in T$ و در نتیجه $rd_{i+1} \in S$. استقرا و در نتیجه راه‌حل مسأله کامل شده است.

۳. ثابت می‌کنیم که وقتی و فقط وقتی می‌توانیم افراز موردنظر را انجام دهیم که $k \neq 1$.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $k = 1$، نمی‌توان افراز موردنظر را انجام داد. فرض کنید که چنین افرازی ممکن باشد. در این صورت مرز مشترک چندضلعیهای افرازکننده باید یک خط شکسته باشد که دو نقطه روی مرز مستطیل را به‌هم وصل می‌کند (در غیر این صورت یا مستطیل به بیش از دو چندضلعی افراز شده است یا یکی از چندضلعیها درون دیگری قرار دارد). تعداد رأسهای چندضلعیهای افرازکننده باید برابر باشد. این

چندضلعیها در همهٔ رأسهای روی مرز مشترکشان شریک‌اند، در نتیجه باید تعداد رأسهایی از مستطیل که رأسهایی از یکی از این دو چندضلعی هستند با همین تعداد برای چندضلعی دیگر برابر باشد. بنابراین، مرز مشترک چندضلعیها باید دو ضلع روبه‌روی مستطیل را به‌هم وصل کند (در غیر این‌صورت یکی از چندضلعیها دست‌کم سه رأس مستطیل را دربر دارد و دیگری حداکثر دو رأس). در نتیجه، یکی از ضلعهای هر یک از چندضلعیهای افرازکننده باید یک ضلع کامل از مستطیل باشد، یعنی هر یک از این چندضلعیها ضلعی به طول ۱ دارد. در یکی از این چندضلعیها، ضلعی که بلندترین است یا ضلعی روی مرز مشترک چندضلعیهاست یا، اگر طول همهٔ چنین ضلعهایی از ۱ کمتر باشد، ضلعی از مستطیل است. این مطلب در مورد چندضلعی دیگر هم درست است، یعنی در هر دو چندضلعی، ضلعی که بلندترین است، یکسان است. این هم ممکن نیست، زیرا چندضلعیها متشابه‌اند اما همنهشت نیستند.

اکنون افرازی را معرفی می‌کنیم که وقتی $k \neq 1$، ویژگیهای موردنظر را دارد. توجه کنید که می‌توانیم فرض کنیم $k > 1$، زیرا مستطیل $k \times 1$ با مستطیل $\frac{1}{k} \times 1$ متشابه است.

ابتدا افرازی برای مستطیلی که به‌طور خاصی آن‌را انتخاب کرده‌ایم (در آنچه در ادامه می‌آید این مستطیل را $ABCD$ می‌نامیم) به دو چندضلعی متشابه و غیرهمنهشت پیدا می‌کنیم. این افراز به دو مقدار، یکی n و دیگری r، بستگی دارد. سپس این مقدارها را به‌طور مناسبی انتخاب می‌کنیم تا مستطیل موردنظر به‌ازای هر kای که $k > 1$ با مستطیل $k \times 1$ متشابه باشد.

فرض کنید r عددی حقیقی و بزرگتر از ۱ باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $2n + 2$ نقطهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$A_0 = (0,0), A_1 = (1,0), A_2 = (1,r), A_3 = (1+r^2, r)$$
$$A_4 = (1+r^2, r+r^3), A_5 = (1+r^2+r^4, r+r^3), \ldots$$
$$A_{2n+1} = (1+r^2+r^4+\cdots+r^{2n}, r+r^3+r^5+\cdots+r^{2n-1})$$

فرض کنید رأسهای مستطیل $ABCD$ نقطه‌های زیر باشند:

$$A = A_0, \qquad B = (1+r^2+\cdots+r^{2n}, 0)$$
$$C = A_{2n+1}, \quad D = (0, r+r^3+\cdots+r^{2n-1})$$

طول ضلعهای $(2n+2)$ضلعی $A_1A_2\ldots A_{2n+1}B$ برابرند با

$$r, r^2, r^3, \ldots, r^{2n}, r+r^3+r^5+\cdots+r^{2n-1}, r^2+r^4+r^6+\cdots+r^{2n}$$

و طول ضلعهای $(2n+2)$ضلعی $A_0A_1A_2\ldots A_{2n}D$ برابرند با

$$1, r, r^2, \ldots, r^{2n-1}, 1+r^2+r^4+\cdots+r^{2n-2}, r+r^3+r^5+\cdots+r^{2n-1}$$

این دو چندضلعی مستطیل $ABCD$ را افراز می‌کنند و معلوم است که متشابه‌اند اما همنهشت نیستند و نسبت تشابه‌شان r است.

مستطیل $ABCD$ با مستطیلی $f_n(r) \times ۱$، که در اینجا

$$f_n(r) = \frac{۱ + r^۲ + \cdots + r^{۲n}}{r + r^۳ + \cdots + r^{۲n-۱}}$$

متشابه است. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $k > ۱$، می‌توان مقدارهای n و r را طوری انتخاب کرد که $f_n(r)$ برابر با k باشد. n را آنقدر بزرگ انتخاب کنید که $k > ۱ + \frac{۱}{n}$. چون

$$f_n(۱) = ۱ + \frac{۱}{n} < k < k\frac{۱ + k^۲ + \cdots + k^{۲n}}{k^۲ + k^۴ + \cdots + k^{۲n}} = f_n(k)$$

و چون $f_n(r)$ به‌ازای مقدارهای مثبت r پیوسته است، rای وجود دارد که $۱ < r < k$ و $f_n(r) = k$، همان چیزی که می‌خواهیم.

۴. محمد می‌تواند به روش زیر ببرد.

لم. محمد می‌تواند پس از هر حرکتش مطمئن باشد که بزرگترین عدد در هر سطر در خانه‌ای در $A \cup B$ است، که در اینجا

$$A = \{(۱,۱), (۲,۱), (۳,۱), (۱,۲), (۲,۲), (۳,۲), (۱,۳), (۲,۳)\}$$

و

$$B = \{(۵,۳), (۴,۴), (۵,۴), (۶,۴), (۴,۵), (۵,۵), (۶,۵), (۴,۶), (۵,۶), (۶,۶)\}$$

برهان. محمد هر خانه در $A \cup B$ را با خانه‌ای در همان سطر که در $A \cup B$ نیست طوری جفت می‌کند که هر خانه در جدول دقیقاً در یک جفت قرار داشته باشد. وقتی که احمد در یکی از خانه‌های یک جفت عددی را می‌نویسد، محمد در حرکت بعدی‌اش در خانهٔ بعدی این جفت عددی را می‌نویسد. اگر احمد x را در خانه‌ای در $A \cup B$ بنویسد، محمد در خانهٔ جفت این خانه عددی مانند y را که از x کوچکتر است می‌نویسد. اگر احمد x را در خانه‌ای که در $A \cup B$ نیست بنویسد، محمد در خانهٔ جفت این خانه عددی مانند z را که از x بزرگتر است می‌نویسد. به این ترتیب، پس از اینکه محمد بازی کرد، در هر جفت، خانه‌ای که بزرگترین عدد در آن نوشته شده است در $A \cup B$ است؛ در نتیجه، در هر سطر، خانه‌ای که بزرگترین عدد در آن نوشته شده است در $A \cup B$ است.

بنابراین، وقتی که همهٔ خانه‌ها پر شدند، در سطر ششم، خانه‌ای که بزرگترین عدد در آن نوشته شده است در B است و در سطر اول، خانه‌ای که بزرگترین عدد در آن نوشته شده است در A است. چون هیچ مسیری از B به A وجود ندارد که از خانه‌های $A \cup B$ بگذرد، محمد می‌برد. ■

۵. به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت مانند x،

$$۰ \leq (x^۳ - ۱)(x^۲ - ۱) = x^۵ - x^۳ - x^۲ + ۱$$

در نتیجه $x^۵ - x^۲ + ۳ \geq x^۳ + ۲$. بنابراین

$$(a^۵ - a^۲ + ۳)(b^۵ - b^۲ + ۳)(c^۵ - c^۲ + ۳) \geq (a^۳ + ۲)(b^۳ + ۲)(c^۳ + ۲)$$

به این ترتیب کافی است ثابت کنیم

$$(a^۳ + ۲)(b^۳ + ۲)(c^۳ + ۲) \geq (a + b + c)^۳$$

این نابرابری را به دو روش ثابت می‌کنیم.

روش اول. نابرابری موردنظر را می‌توان به‌شکل

$$a^۳b^۳c^۳ + ۳(a^۳ + b^۳ + c^۳) + ۲(a^۳b^۳ + b^۳c^۳ + c^۳a^۳) + ۸$$
$$\geq ۳(a^۲b + b^۲a + b^۲c + c^۲b + c^۲a + a^۲c) + ۶abc$$

نوشت. بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$a^۳ + a^۳b^۳ + ۱ \geq ۳a^۲b$$

با ترکیب کردن نابرابریهای مشابه این نابرابری معلوم می‌شود که کافی است ثابت کنیم

$$a^۳b^۳c^۳ + a^۳ + b^۳ + c^۳ + ۱ + ۱ \geq ۶abc$$

این نابرابری هم نتیجه‌ای ساده از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی است.

روش دوم. سمت چپ نابرابری موردنظر را به‌شکل

$$(a^۳ + ۱ + ۱)(b^۳ + ۱ + ۱)(c^۳ + ۱ + ۱)$$

می‌نویسیم. بنابر نابرابری هُلدر،

$$(a^۳ + ۱ + ۱)^{\frac{۱}{۳}}(b^۳ + ۱ + ۱)^{\frac{۱}{۳}}(c^۳ + ۱ + ۱)^{\frac{۱}{۳}} \geq a + b + c$$

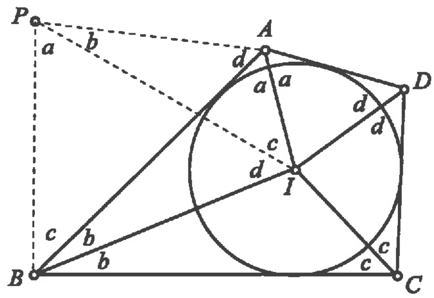
نابرابری موردنظر از این نابرابری به‌دست می‌آید.

۶. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم. اگر دایرهٔ ω به مرکز I در چهارضلعی $ABCD$ محاط شده باشد،

$$BI^۲ + \frac{AI}{DI} \times BI \times CI = AB \times BC \qquad (۱)$$

برهان. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



چون دایرهٔ ω در $ABCD$ محاط شده است،

$$\angle DAI = \angle IAB = a, \qquad \angle ABI = \angle IBC = b$$
$$\angle BCI = \angle ICD = c, \qquad \angle CDI = \angle IDA = d$$

و $a + b + c + d = ۱۸۰^\circ$. نقطهٔ P را بیرون چهارضلعی $ABCD$ طوری انتخاب کنید که مثلث ABP و مثلث DCI متشابه باشند. توجه کنید که

$$\begin{aligned}\angle PAI + \angle PBI &= \angle PAB + \angle BAI + \angle PBA + \angle ABI \\ &= \angle IDC + a + \angle ICD + b \\ &= a + b + c + d = ۱۸۰^\circ\end{aligned}$$

در نتیجه چهارضلعی $PAIB$ محاطی است. بنابر قضیهٔ بطلمیوس،

$$AI \times BP + BI \times AP = AB \times IP$$

یا

$$BP \times \frac{AI}{IP} + BI \times \frac{AP}{IP} = AB \qquad (۲)$$

چون چهارضلعی $PAIB$ محاطی است، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$\angle IPB = \angle IAB = a, \qquad \angle API = \angle ABI = b$$
$$\angle AIP = \angle ABP = c, \qquad \angle PIB = \angle PAB = d$$

توجه کنید که مثلثهای AIP و ICB متشابه‌اند و در نتیجه

$$\frac{AI}{IP} = \frac{IC}{CB}, \qquad \frac{AP}{IP} = \frac{IB}{CB}$$

بنابراین تساوی (۲) را می‌توان به‌شکل

$$BP \times \frac{CI}{BC} + \frac{BI^{۲}}{BC} = AB$$

یا

$$BP \times CI + BI^{۲} = AB \times BC \qquad (۳)$$

نوشت. همچنین توجه کنید که مثلثهای BIP و IDA متشابه‌اند و در نتیجه $\frac{IA}{ID} = \frac{BP}{BI}$، یا

$$BP = \frac{AI}{ID} \times IB$$

اگر از این تساوی و تساوی (۳) استفاده کنیم، تساوی (۱) به‌دست می‌آید.

اکنون حکم مسأله را ثابت می‌کنیم. بنابر لم و تقارن، می‌توان نوشت

$$CI^{۲} + \frac{DI}{AI} \times BI \times CI = CD \times BC \qquad (۴)$$

اگر تساویهای (۱) و (۴) را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$BI^{۲} + CI^{۲} + \left(\frac{AI}{DI} + \frac{DI}{AI}\right) BI \times CI = BC(AB + CD)$$

بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی، $۲ \geq \frac{AI}{DI} + \frac{DI}{AI}$. بنابراین

$$BC(AB + CD) \geq IB^{۲} + IC^{۲} + ۲IB \times IC = (BI + CI)^{۲}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $AI = DI$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$AD(AB + CD) \geq (AI + DI)^{۲}$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $BI = CI$. اگر دو نابرابری آخر را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$(AI + DI)^{۲} + (BI + CI)^{۲} \leq (AD + BC)(AB + CD) = (AB + CD)^{۲}$$

زیرا $AD + BC = AB + CD$ (توجه کنید که چهارضلعی $ABCD$ محیطی است).

بنابر فرض مسأله در همهٔ نابرابریهای بالا باید تساوی برقرار باشد، یعنی باید $AI = DI$ و $BI = CI$.
در نتیجه، $a = d$ و $b = c$، پس

$$\angle DAB + \angle ABC = ۲a + ۲b = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین $AD \parallel BC$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که مثلثهای AIB و DIC همنهشت‌اند و در نتیجه $AB \parallel CD$. بنابراین $ABCD$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است.

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
انتشارات فاطمی
منتشر کرده است:
تورنمنت شهرها
کتابهای موضوعی ریاضی
آشنایی با نظریهٔ گراف
جدید
مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی
کارگاه اعداد
جبر
منتشر می‌کند:
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا
۱۹۸۳-۲۰۰۴
گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی
مسابقه‌های ریاضی مدارس راهنمایی امریکا
۱۹۸۶-۲۰۰۳
گردآوری و ترجمهٔ ارشک حمیدی