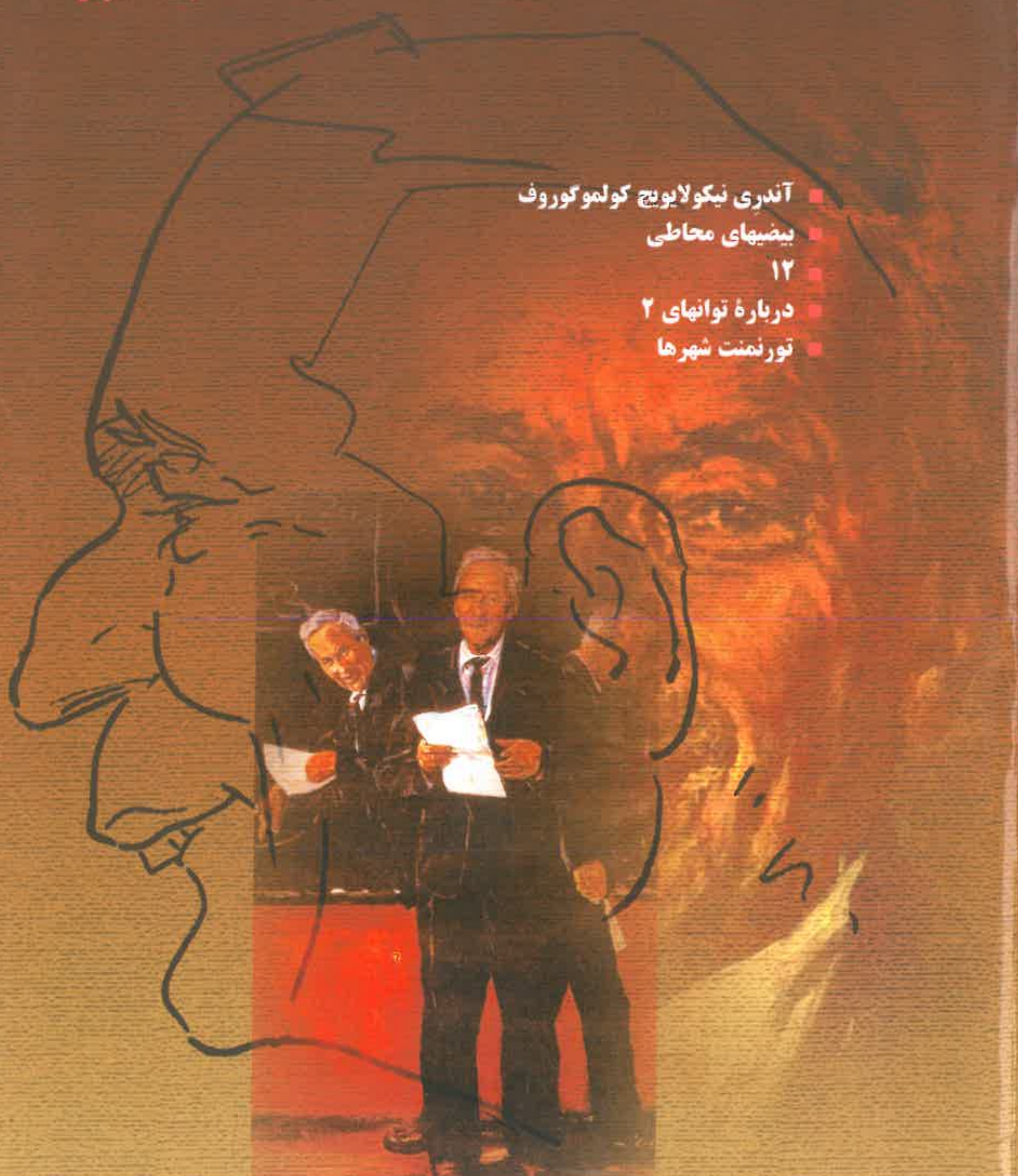
نشریهٔ ریاضیات

سال پنجم / ۳
شمارهٔ پیاپی: ۱۷
دی ۱۳۸۳
قیمت: ۹۰۰ تومان



- آندریِ نیکولایویچ کولموگوروف
- بیضیهای محاطی
- ۱۲
- دربارهٔ توانهای ۲
- تورنمنت شهرها

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز

طرح مشترک با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

هدف از تهیه و انتشار کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز کمک به توسعه و درک بهتر مفاهیم کتاب‌های درسی و ایجاد مهارت برای پاسخگویی به پرسش‌ها، مسائل و آزمون‌های گوناگون است.

کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز بر اساس برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی تهیه شده است. در این کتاب‌ها ابتدا بعضی از مفاهیم کتاب‌های درسی با ذکر مصادیق تشریح شده و بعد از توسعهٔ آن مفاهیم، مصادیق آن در قالب تمرین‌های طبقه‌بندی شده برای یادگیری عمیق آمده است. این کتاب‌ها جانشینی برای کتاب‌های درسی نیست، بلکه باید همراه با مطالعهٔ کتاب‌های درسی مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد.

کتابهای تقدیری سومین جشنوارهٔ کتابهای آموزشی رشد

به نام خدا

نشریهٔ

ریاضیات

سال پنجم/۳ • شمارهٔ پیاپی: ۱۷، دی ۱۳۸۳

فهرست:

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

روی جلد: آندری نیکولایویچ کولموگوروف

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، ایرج ضرغام

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، بهروز طوری، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: معراج

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ۸۹۷۱۵۸۳

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

۱ خیام گفته بود مزارش جایی باشد که هر بهار شکوفه‌های گلابی بر آن فرو ریزد. از نیشابور ده، پانزده کیلومتری که خارج شویم، باغ خیام که مزار او را دربر گرفته است همه را به‌سوی خود می‌خواند و می‌توان بوی معرفت را در همهٔ فصول، فراسوی درختان و شکوفه‌ها، در آن باغ استشمام کرد.

حکیم عمر خیام بدون تردید از بزرگترین مردان دانشی همهٔ قرون و اعصار است و از بزرگترین مردانی است که در ایران‌زمین خفته است. کارهای خیام در ریاضیات در توسعهٔ علم جبر و حل معادلات جبری، در ادامهٔ کارهای خوارزمی، اثری ماندگار در زنجیرهٔ تکامل اندیشه‌های ریاضی دارد که همچنان مورد اعتناست، و آنچه که به دوجمله‌ای خیام ـ نیوتن و مثلث خیام ـ پاسکال مشهور شده است هنوز مورد ارجاع در متون معتبر ریاضی است و از درون آنها ایده‌های جدید زاده می‌شود.

ولی مشعل دانش که در سرزمین ما افروخته بود و جهانی را گرما و نور می‌بخشید بر اثر هجوم سپاهیان مغول خاموش شد، و در مقابل، کتابخانه‌ها به آتش کشیده شد و هنوز هم با دریغ دنبال مشعل دانش می‌گردیم.

۲ المپیاد ریاضی دو دهه است که جنبش علمی ارزشمندی را در بین دانش‌آموزان ما ایجاد کرده است و استعدادهای برجسته‌ای را به فعالیتهای ریاضی کشانده است. هزاران نفر همه‌ساله داوطلب شرکت در مرحلهٔ اول المپیاد ریاضی می‌شوند که مجموع تلاش و چالش آنان دستاورد بسیار ارزشمندی محسوب می‌شود. برگزیدگانی که به مراحل بعدی راه می‌یابند در شرایط ویژه‌ای قرار می‌گیرند که متناسب با استعدادشان، امکان رشد سریعتر برایشان فراهم می‌شود.

تاکنون بیش از پنجاه المپیادی برای تحصیلات عالی به رشتهٔ ریاضی آمده‌اند و از تبع آن بیش از پنجاه استعداد برجستهٔ دیگر نیز از مسیر کنکور با اولین انتخاب به رشتهٔ ریاضی آمده‌اند. اینان باارزشترین سرمایهٔ ملی در توسعهٔ

فرهنگ، دانش و اندیشه ریاضی خواهند بود. دهها نام را می‌توان از خاطر گذراند، از علی‌اصغر خانبان می‌توان نام برد که از قزوین آمده بود و اولین مدال المپیاد ریاضی را برای کشور به ارمغان آورد و انگیزه‌بخش کوششهای بعدی شد. خانبان سالها برای توسعهٔ المپیادها همکاری می‌کرد و در حال حاضر مراحل نهایی اخذ دکتری خود را در رشتهٔ علوم کامپیوتر نظری در امپریال کالج انگلستان می‌گذراند. نامهای زیاد دیگری را می‌توان برشمرد، مجموعه‌ای صد نفره مجموعهٔ کوچکی نیست، ولی از پنج تن از آنان یادی می‌کنیم، هرچند که یاد رضا صادقی عزیز از دست رفته را هیچ‌گاه فراموش نمی‌کنیم.

مریم میرزاخانی یکی از آنهاست، دو مدال طلای المپیاد جهانی ریاضی گرفت، یکی در هنگ‌کنگ و یکی در کانادا، اولی با ۴۱ امتیاز از ۴۲ امتیاز ممکن و دومی با نمرهٔ کامل. مریم پس از گذراندن دورهٔ کارشناسی ریاضی در دانشگاه صنعتی شریف، برای دورهٔ دکتری به دانشگاه هاروارد رفت و چند ماهی است که دکتری خود را اخذ کرده و با دریافت یک جایزهٔ پژوهشی ارزشمند در دانشگاه پرینستن مشغول کارهای پژوهشی است.

نفر بعدی محمد مهدیان است، مهدیان ۲ مدال نقرهٔ المپیاد کامپیوتر در آلمان و آرژانتین به‌چنگ آورد و یک مدال طلای المپیاد ریاضی در ترکیه. محمد دورهٔ کارشناسیِ دو رشته‌ای ریاضی و مهندسی کامپیوتر را در دانشگاه صنعتی شریف گذراند و چند ماه پیش دکتری خود را در رشتهٔ ریاضی از اِم. آی. تی دریافت کرد. محمد در حال حاضر مشغول فعالیت پژوهشی در مرکز معتبر پژوهشی شرکت مایکروسافت است.

بعد از مهدیان از ایمان افتخاری ذکر نام می‌کنیم، ایمان هم دو مدال طلای المپیاد جهانی ریاضی را در هند و آرژانتین به‌دست آورد که دومی با نمرهٔ کامل ۴۲ از ۴۲ بود. ایمان نیز دورهٔ کارشناسی را در دانشگاه صنعتی شریف گذراند و چند ماه پیش دکتری ریاضی خود را از دانشگاه پرینستن اخذ کرد و در حال حاضر مشغول کارهای پژوهشی در دانشگاه هاروارد است.

نفر بعدی امید امینی است، امید تنها کسی بود که در المپیاد ریاضی در تایوان مدال طلا با نمرهٔ کامل دریافت کرد، و در همان سالی که تیم ما در جهان اول شد عضو تیم بود و در حال حاضر، مراحل نهایی دورهٔ دکتری ریاضی خود را در پلی‌تکنیک پاریس که از مؤسسات بسیار معتبر جهانی است می‌گذراند.

بالاخره از کسری علیشاهی نام می‌بریم، کسری هم عضو تیم در سال ۱۹۹۸ بود و مدال طلا گرفت. او در حال حاضر مشغول تحصیل در دورهٔ دکتری ریاضی در دانشگاه صنعتی شریف است. کسری مشغول فعالیت در یک گروه پژوهشی نیز هست که بر روی مدل‌سازی مخازن نفت کار می‌کنند.

۳ حدود ۱۰۰ سال از بهره‌برداری از اولین چاه نفت در ایران می‌گذرد و نفت مهمترین ثروت ملی محسوب می‌شود. در حال حاضر صنایع نفت، گاز و پتروشیمی مهمترین بخش صنعتی در کشور است و اقتصاد ملی بر آن متکی است.

وقت آن رسیده است که هرچه بیشتر صنایع نفت با توسعهٔ علوم و تکنولوژی در سطح ملی آمیخته شود. در این

صنایع مسائل متعدد و سنگینی وجود دارد که ریاضیات پیشرفته‌ای را برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی طلب می‌کند. از سوی دیگر علوم ریاضی نیز سرزندگی و جوشش خود را از برخورد با مسائل واقعی حاصل می‌کند و این‌گونه است که آوردگاه جدیدی پیش روی ماست که می‌تواند ما را به‌سوی برافروختن دوبارهٔ مشعل دانش در سرزمینمان رهنمون کند. . .. شکوفه‌های گلابی بوی تربت پاکی را به‌همراه دارد که عصر تازه‌ای را نوید می‌دهد.

یحیی تابش
tabesh@sharif.ir

در این شماره:

در این شماره، نشریهٔ ریاضیات با تحول زیادی روبه‌رو است، بخش سرمقاله، و مجلهٔ کوچک ریاضی از آن جمله است. مجلهٔ کوچک ریاضی تریبونی برای عرضهٔ آثار استعدادهای جوان در پهنهٔ ریاضیات است و به آثار آنان اختصاص خواهد داشت که فعلاً همکاران ما در خانهٔ ریاضیات اصفهان عهده‌دار آن هستند. بخش مسأله و فعالیتهای المپیادی نیز مسابقهٔ تازه‌ای را راه انداخته است که علاقه‌مندان را به شرکت در چالش و مبارزه دعوت می‌کند. پیشرفت نشریهٔ ریاضیات نیاز به همکاری خوانندگان نشریه به‌ویژه دانش‌آموزان جوان دارد، منتظر دریافت نظریه‌ها و آثار شما هستیم. در شماره‌های آینده هم مقالات متنوعتری برای شما تدارک دیده‌ایم، از جمله مقاله‌ای در زمینهٔ مدل‌سازی مخازن نفت خواهید دید که در این شماره در سرمقاله به آن اشاره شده است.

آندرِی نیکولایویچ کولموگوروف و زندگی سرشار از خلاقیت او

اَلکساندر مِلنیکُف

در مقالهٔ معروف سال ۱۹۴۸ نیکولاس بورباکی با نام «معماری ریاضیات» مطلبی به این مضمون آمده است: متأسفانه هیچ ریاضیدانی نیست ـ حتی در میان آنهایی که از فراگیرترین سطح علمی برخوردارند ـ که دست‌کم با چندتا از شاخه‌های قلمرو پهناور ریاضیات بیگانه نباشد. آندرِی نیکولایویچ کولموگوروف (۲۵ آوریل سال ۱۹۰۳ ـ ۲۰ اکتبر سال ۱۹۸۷)، که نخستین ریاضیدان قرن بیستم محسوب می‌شود، خط بطلانی بر این ادعاست.

تقریباً هیچ شاخه‌ای از ریاضیات از چشم‌انداز دید علمی‌اش پوشیده نماند. حاصل بینش بی‌مانند و درک عمیقش بیش از ۳۰۰ مقالهٔ پژوهشی، رساله و کتابهای درسی متنوع بود. کارهای خلاقش که با ایده‌های اساسی و نتیجه‌های فوق‌العاده بارور می‌شد، آغازگر چندین شاخهٔ کاملاً جدید از تحقیقات ریاضی شد.

برخی از این شاخه‌ها، که او در اشاعه و تکاملِ آنها بسیار تأثیرگذار بود، عبارت‌اند از نظریهٔ مجموعه‌ها، سریهای مثلثاتی و متعامد، نظریهٔ اندازه و انتگرالگیری، منطق ریاضی، توپولوژی و نظریهٔ مانستگی، مکانیک سماوی، نظریهٔ تقریب، آشوب، نظریهٔ ارگودیک، انطباق تابعها، نظریهٔ اطلاعات، آنالیز تابعی و به‌ویژه نظریهٔ احتمال که کولموگوروف آن را به یک علم ریاضی واقعی تبدیل کرد. با وجود این، علایقش صرفاً به ریاضی محدود نمی‌شد. علایقش در کاربردهای زیست‌شناسی، ژئوفیزیک، کنترل آماری فرایند تولید، نظریهٔ پرتاب‌شناسی و حتی نظریهٔ فنِ شاعری که در آن خلاقیت و تفکرات ژرفش تأثیری ابدی داشته است، هم بروز کرده است.

مجموعهٔ آثارش به دو جلد تقسیم می‌شود: ریاضیات و مکانیک و نظریهٔ احتمال و آمارِ ریاضی. این دو عنوان نشان‌دهندهٔ این حقیقت‌اند که دنیای پهناور ریاضیمان به دو بخش تقسیم می‌شود، که می‌توان آنها را در قالب دو قلمرو پدیده‌های قطعی و پدیده‌های تصادفی طبقه‌بندی کرد. کولموگوروف در هر دو قلمرو پیشتاز بود. او قلمروهای بِکر بسیاری را در ریاضیات کشف و آنها را لبریز از ایده‌های جدید و فوق‌العاده جالب کرد. همچنین برنامه‌ای بلندپروازانه برای مطالعهٔ همزمان و موازی پیچیدگی پدیده‌های قطعی و عدمِ قطعیت پدیده‌های تصادفی عرضه کرد و تمام عمر در پی تحقق این برنامه تلاش کرد. ارزش واقعی کارش امروزه حتی دوچندان بر ما معلوم شده است.

کولموگوروف در ۲۵اُم آوریل سال ۱۹۰۳ میلادی در شهر تامبوف روسیه متولد شد. پدرش، نیکلای کاتائف پسر یک کشیش و کارشناسِ کشاورزی و مادرش ماریا یاکوولِفنا کولموگورووا بود. روی او به‌جای نام خانوادگی پدرش، نام خانوادگی پدربزرگش، یاکوف استپانوویچ کولموگوروف، را گذاشتند. مادرش هنگام بازگشت از کِریمه به خانه، هنگام تولد کولموگوروف، به‌طور غم‌انگیزی از دنیا رفت. همه‌چیز دست به دست هم داد تا بدترین شرایط ممکن

برای کولموگوروف رقم بخورد؛ پدرش عملاً او را ترک کرد و اصلاً در تربیت فرزندش مسئولیتی به‌عهده نگرفت. خالهٔ کولموگوروف، ورا یاکوولِفنا کولموگورووا، مسئولیت سرپرستی او را تقبل کرد. این زن تحصیل‌کرده و آزاداندیش که کولموگوروف همیشه از او به‌عنوان مادر واقعی‌اش یاد می‌کرد به خواهرزاده‌اش استقلال رأی، علاقهٔ وافر به درک مطالب به‌جای حفظ کردن آنها، حس تقبیح تنبلی و سستی، نفرت داشتن از کوتاهی در انجام وظایف محوله، روحیهٔ مسئولیت‌پذیری بالا و اشتیاق به مواجهه با چالشهای دشوار را انتقال داد. اینکه خانوادهٔ کولموگوروف از طبقهٔ اشراف بودند باعث شد که در سالهای بعد، به هنگام انقلاب روسیه، بیشتر به دردسر بیفتند.

کولموگوروف جوانی‌اش را در چنین خاندانی در تانوشنا گذراند. پس از به پایان رساندن مدرسه برای مدت کوتاهی در راه‌آهن سوزن‌بان بود. در دوران نوجوانی علاوه‌بر ریاضیات به تاریخ روسیه هم علاقه‌مند بود. در پاییز سال ۱۹۲۰ در دانشگاه مسکو نام‌نویسی کرد. در آن زمان هنوز کانون اصلی اشتیاق و علاقه‌اش ریاضیات نبود؛ موضوعات متنوع دیگری مانند متالورژی و به‌ویژه تاریخ را مطالعه می‌کرد. او حتی رساله‌ای باارزش هم دربارهٔ تاریخچهٔ قرن پانزدهم شهر نووگراد روسیه نوشت. یکی از حکایتهای معروف در مورد او این است که معلم تاریخ کولموگوروف به او توضیح می‌داده که «شاید در ریاضیات یک اثبات کافی باشد ولی در تاریخ بهتر است دست‌کم ده اثبات داشته باشی!»

نخستین دورهٔ خلاق زندگی کولموگوروف به‌عنوان ریاضیدان بسیار متأثر از استادانش بود: پرفسور استپانوف که سمیناری دربارهٔ سریهای مثلثاتی ترتیب داد و پرفسور لوسین، استادِ راهنمایش. کولموگوروف در آن زمان، یعنی در سال ۱۹۲۲ که دانشجوی کارشناسی و دقیقاً ۱۹ ساله بود، مثال معروفِ سری فوریه‌ای را که تقریباً همه‌جا واگراست کشف کرد. این نتیجهٔ حیرت‌انگیز حقیقتاً هنوز هم عمق ایده‌ها و شهود هندسی سرشارش را برجسته و ممتاز می‌سازد. امروزه هر کتاب درسی در زمینهٔ نظریهٔ سریهای مثلثاتی و متعامد حتماً باید شامل مثال کولموگوروف باشد.

علاقهٔ کولموگوروف به نظریهٔ احتمال در سال ۱۹۲۴ شکل گرفت و از آن موقع به بعد، سلطه‌اش بر احتمال والاترین جایگاه در این شاخه از ریاضیات را داشته است. در سالهای ۱۹۲۴ تا ۱۹۲۸ موفق شد شرطهایی لازم و کافی برای همگرایی سریهای متغیرهای تصادفی مستقل و قانون اعداد بزرگ ـ یکی از حکمهای اصلی نظریهٔ احتمال کلاسیک ـ را پیدا کند. او در سال ۱۹۲۵ فارغ‌التحصیل شد اما به اصرار خودش چهار سال دیگر به‌عنوان «دانشجوی پژوهشگر» در دانشگاه مسکو ماند. البته وقتی مقررات سختگیرانه‌تر تعدیل مدت زمان پذیرش در دانشگاه در سال ۱۹۲۹ مطرح شد مجبور شد به مطالعاتش پایان دهد. مشکل کولموگوروف یافتن مکانی جدید برای تحقیق و پژوهش بود که الکساندروف این مشکل را برطرف کرد و برایش پستی خالی در انستیتو ریاضیات و مکانیک دانشگاه مسکو فراهم کرد.

در خلال سالهای ۱۹۲۹ تا ۱۹۳۳، کولموگوروف با هدف ایجاد پایهٔ نظری محکمی برای نظریهٔ احتمال، روی نظریهٔ اندازه کار کرد که حاصل آن رسالهٔ کلاسیک کولموگوروف با عنوان «مفاهیم بنیادی نظریهٔ احتمال» بوده است. او در این کتاب نه تنها افقهای جدیدی برای پیشرفت نظریهٔ احتمال به‌عنوان یکی از شاخه‌های ریاضیات ترسیم کرد (که این، موضوع یکی از مسأله‌های معروف هیلبرت در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۰۰ بود) بلکه مبانی لازم را هم برای پیدایش نظریهٔ فرایندهای تصادفی پی‌ریزی کرد. کولموگوروف مفاهیم معروف دیگری را در

این زمینه در مقالهٔ فوق‌العاده‌اش «روشهای تحلیلی در نظریهٔ احتمال» (۱۹۳۱) مطرح کرده است. این اثر زمینهٔ لازم را برای ارائهٔ نظریهٔ پیشرفتهٔ فرایندهای مارکوف فراهم کرد. می‌گویند بخشی از این کار پژوهشی در طول سفری با قایق روی رود ولگا در تابستان ۱۹۲۹ انجام شده است. کولموگوروف و الکساندروف قایقی کوچک و تجهیزات چادرزنی از «باشگاه تفریحات سیاحتی و گردشگری کارگران» که با هدف ترغیب کارگران اتحاد شوروی به زندگی فعال و پرجنب‌وجوش ایجاد شده بود، اجاره کردند. در طول این سفر آنها حدود ۱۳۰۰ کیلومتر راه را طی کردند، در جاهای دورافتاده و بکر چادر زدند، حمام آفتاب گرفتند، شنا کردند و کارهای ریاضی انجام دادند.

در سال ۱۹۳۱ کولموگوروف به‌سمت استادی دانشگاه مسکو منصوب شد و از سال ۱۹۳۷ به بعد کرسی نظریهٔ احتمال را در اختیار گرفت. او همیشه شیوهٔ زندگی خیلی پرجنب‌وجوش و فعالش را حفظ می‌کرد؛ مثلاً اسکی می‌کرد، قایقرانی می‌کرد و روزانه به‌طور متوسط چیزی حدود ۳۰ کیلومتر پیاده‌روی می‌کرد. شنا کردن در رودخانه را خیلی دوست داشت به‌ویژه وقتی که در اوایل بهار آب‌شدن برف و یخ تازه شروع می‌شد. تناسب اندام و بازدهی علمی فوق‌العاده‌اش به هم می‌آمدند. در طول ده سالِ پیش از جنگ جهانی دوم، کولموگوروف بیش از شصت مقاله دربارهٔ نظریهٔ احتمال، آمار ریاضی، توپولوژی، هندسهٔ تصویری، نظریهٔ تابعها، منطق ریاضی و کاربرد ریاضیات در زیست‌شناسی منتشر کرد.


نقاشی از کولموگوروف اثر دانشجوی سابقش دیمیتری گوردیف

در طول همین دوره بوده که کولموگوروف سهمی چشمگیر در پیشبرد نظریهٔ مانستگی داشته است. او همچنین مثالی از نگاشتی باز از مجموعه‌ای فشرده به‌روی مجموعهٔ فشردهٔ دیگری با بُعد بالاتر ساخت. توجه‌اش به مکانیک آشوب، یعنی ارتعاشهای نامنظم سرعت، فشار و دیگر کمیتهای هیدرودینامیکی که در جریانهای مایعات یا گازها وجود دارند، هم جلب شد. کولموگوروف روش آماری منسجمی برای به‌دست آوردن توصیفی ریاضی از جریانهایی از این دست ابداع کرد و در سال ۱۹۴۱ معروفترین حدسش در این زمینه (که هنوز ثابت‌نشده مانده است)، موسوم به قانون دوسوم، را صورت‌بندی کرد. این قانون چنین است: در هر جریان آشوبناک، میانگین مجذور تفاضل سرعتها در دو نقطه به فاصلهٔ r متناسب با $r^{\frac{2}{3}}$ است. به‌علت علایق فراوان و متنوعش در هر شاخه از علم دستی داشت. دربارهٔ رشد بلورها، نجوم و حتی ژنتیک مقاله نوشت. یکی از مقاله‌های تحقیقاتی‌اش باعث شد تا با یکی از اعضای فرهنگستان، به‌نام لیسنکو، درگیر شود. لیسنکو وجود ژنها را رد می‌کرد و مدعی بود علت تکامل این است که موجودات زنده ویژگیهایی را که با آنها سازش یافته‌اند از اجدادشان به ارث می‌برند. نظریهٔ لیسنکو از سوی جامعهٔ علمی کاملاً مردود اعلام شد. کولموگوروف با دلایل علمی شجاعانه در برابر عقاید لیسنکو ایستاد و نظریهٔ مِندِل را تأیید کرد.

در زندگی علمی کولموگوروف دورهٔ پس از جنگ را می‌توان با دو کلمه توصیف کرد: هماهنگی در عین گوناگونی. کولموگوروف روی طیف فوق‌العاده گسترده‌ای از مباحث کار می‌کرد: نظریهٔ احتمال، مکانیک کلاسیک، نظریهٔ ارگودیک، نظریهٔ تابعها، نظریهٔ اطلاعات و نظریهٔ الگوریتم. نزد او، این موضوعات ظاهراً دور از هم و بی‌ربط، همگی با رابطه‌های کاملاً دور از انتظار به هم مربوط می‌شدند. این درک عمیق کولموگوروف کاملاً در تألیفات فوق‌العاده‌اش که در دههٔ ۱۹۵۰ دربارهٔ نظریهٔ سیستمهای دینامیکی نوشته شده‌اند، مشهود است. مسألهٔ سه جسم و چند جسم که سابقه‌اش به کارهای نیوتن و لاپلاس می‌رسد توجه‌اش را جلب کرد. به‌ویژه، این مسأله به توجیه مطالعات حرکتهای به‌اصطلاح شبه‌دوره‌ای سیارات کوچک مربوط می‌شود.

کولموگوروف در دفتر کارش در مسکو

کولموگوروف این مسأله را در مورد اکثر شرطهای اولیهٔ ممکن حل کرد. در دهه‌های بعدی کاربردهای این نظریه حل مسأله‌های گوناگون دیگری را ممکن ساخت. بعدها روش کولموگوروف را آرنولد و موزر تکمیل کردند و اکنون آن را نظریهٔ کام (نظریهٔ کولموگوروف ـ آرنولد ـ موزر) می‌نامند.

در سال ۱۹۵۵ توجه کولموگوروف به نظریهٔ اطلاعات و متعاقباً به مسألهٔ سیزدهم هیلبرت جلب شد که در آن فرض می‌شود تابعهای پیوستهٔ سه‌متغیرهٔ معینی را نمی‌توان به‌صورت ترکیبهای تابعهای پیوستهٔ دومتغیره نمایش داد. او غیرمنتظره‌ترین نتیجهٔ ممکن را به‌دست آورد: هر تابع پیوسته با هر تعداد متغیر را می‌توان به‌صورت ترکیبی از تابعهای پیوستهٔ سه‌متغیره نمایش داد. به این ترتیب مسألهٔ هیلبرت به مسألهٔ نمایش تابعها روی درختهای عام در فضای سه‌بعدی تبدیل می‌شود. مسألهٔ آخری را هم بعدها، آرنولد، دانشجویش، با راهنمایی کولموگوروف حل کرد. دست‌آخر، کولموگوروف ثابت کرد که هر تابع پیوسته را می‌توان به‌صورت ترکیبی از تابعهای پیوستهٔ یک‌متغیره و عمل جمع نمایش داد.

کولموگوروف با دانشجویانش

در دههٔ ۱۹۶۰ کولموگوروف به ایجاد تغییرات اساسی در نظریهٔ اطلاعات، بر پایهٔ الگوریتمها، پرداخت. او شاخهٔ جدیدی از ریاضیات یعنی نظریهٔ الگوریتمی اطلاعات را پدید آورد. بر پایهٔ نظریهٔ کولموگوروف، در میان همهٔ روشهای الگوریتمی ممکن توصیف، مطلوبترین آنها وجود دارد که اشیای آن ازکمترین پیچیدگی برخوردارند.

منطق ریاضی (درکلی‌ترین معنایش، شامل نظریهٔ الگوریتمها و مبانی ریاضیات) اولین و آخرین دلبستگی‌اش بود. در سال ۱۹۲۵ مقاله‌ای دربارهٔ قانون نفی شِق ثالث، که برای همیشه اصل طلایی منطق ریاضی شده است، منتشرکرد. این برای اولین‌بار بود که در منطق شهودگرا به‌طور منظم تحقیق می‌شد. او به کمک عملهای به‌اصطلاح فروبری (که اکنون آنها را «عملهای کولموگوروف» می‌نامند) ثابت کرد که کاربرد قانون نفی شِق ثالث ممکن نیست به تناقض منجر شود. این اثر، همراه با مقاله‌ای که در سال ۱۹۳۲ منتشر

کرد این امکان را فراهم ساخت که بتوان منطق شهودگرا را در قالب منطقی ساختارگرا بررسی کرد.

کولموگوروف در حال ایراد سخنرانی

در سال ۱۹۳۱ کولموگوروف استاد دانشگاه دولتی مسکو شد و در سال ۱۹۳۹ به عضویت فرهنگستان علوم اتحاد شوروی سابق برگزیده شد. او توجه‌ای ویژه به تعلیم و تربیت دانشمندان جوان معطوف داشت و در جذب دانشجویان کارشناسی و کارشناسی‌ارشد و افراد جوان و مستعدِ شیفتهٔ علم بسیار موفق بود. کولموگوروف تلاش کرد که گروهی از دانشجویان محقق تشکیل دهد که همواره در تب‌وتاب کارهای علمی و تحقیقات مستمر باشند. برای همهٔ دانشجویان کولموگوروف سالهای دورهٔ کارشناسی‌ارشد و تحقیقات دکترا فراموش‌نشدنی بودند. شرکت آنها در تحقیقات علمی آکنده از جلوه‌های اهمیت علم بود. این دوره‌ها همچنین زمان تحقق و رشد اعتقاد و باور به قدرت بی‌پایان خلاق ذهن آدمی بود.

بالاتر از همهٔ اینها کولموگوروف تلاش کرد که در دانشجویانش علایق فرهنگی همگانی نظیر هنرهای تجسمی، معماری، ادبیات و حتی ورزش را برانگیزاند. او همچنین دبیرستانی ویژه در دانشگاه دولتی مسکو ایجاد کرد: مدرسهٔ شبانه‌روزی شمارهٔ ۱۸ یا فقط «مدرسهٔ کولموگوروف». دانش‌آموزان این مدرسهٔ معتبر مرتباً مقامهای نخست المپیادهای ریاضی و فیزیک روسیه و بین‌المللی را از آن خود می‌کردند. او بیشتر وقتش را به تعلیم و تربیت و بهبود وضع آموزش ریاضیات در اتحاد جماهیر شوروی سابق اختصاص داد.

نقاشی دیگری از کولموگوروف اثر دیمیتری گوردیف با نوشتهٔ: «یک لحظه تأمل و حل کردن آن.»

فهرست نام دانشجویان کولموگوروف بسیار مفصل و قابل تأمل است. در زیر فقط نام آنهایی را که به عضویت فرهنگستانهای علوم مختلف برگزیده شده‌اند آورده‌ایم:

آرنولد (سیستمهای دینامیکی)
بولشیف (آمار ریاضی)
بوروفکوف (نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی)
گلفاند (آنالیز تابعی)
گِدِچنکو (نظریهٔ احتمال)
مالتسِف (جبر و منطق ریاضی)
میخایلویچ (سیبرنتیک)
میلیونشچیکوف (مکانیک و فیزیک کاربردی)
مونین (آشوب و اقیانوس‌شناسی)
نیکولسکی (نظریهٔ تابعها)

اُباخوف (آشوب و فیزیک جوّ)
پروخوروف (نظریهٔ احتمال)
سواستیانوف (نظریهٔ احتمال)
شیریایِف (نظریهٔ احتمال و فرایندهای تصادفی)
سینایی (نظریهٔ احتمال و سیستمهای دینامیکی)
سیراچدنیوف (نظریهٔ احتمال)

کولموگوروف در دانشگاه دولتی مسکو دانشکدهٔ نظریهٔ احتمال، دانشکدهٔ آمار ریاضی و دانشکدهٔ منطق ریاضی را تأسیس کرد. در مؤسسهٔ ریاضی استِکلوفِ فرهنگستان علوم روسیه هم دانشکدهٔ نظریهٔ احتمال و آمار ریاضی را تأسیس کرد.

خدمات علمی‌اش هم در کشور خودش و هم در خارج از آنجا، بسیار گرانقدر بودند. به کولموگوروف در اتحاد جماهیر شوروی سابق نشانهای معتبر علمی و جوایز بسیاری اعطا شد. بیش از بیست سازمان علمی او را به عضویت خود برگزیدند (مانند فرهنگستان علوم پاریس، انجمن سلطنتی لندن، فرهنگستان ملی ایالات متحده و غیره).

خیلی خوش‌شانس بودم که شخصاً کولموگوروف را می‌شناختم؛ شیریائف، استاد راهنمایم و از دانشجویان سابقش، مرا به او معرفی کرد. بعدها، وقتی که به عضویت دانشکدهٔ آمار ریاضی در مؤسسهٔ ریاضی استکلوف درآمدم مجال آن را یافتم تا مستقیماً تحت نظارت او کار کنم. در مقام ریاست دانشکده مرتب افراد را تشویق و ترغیب می‌کرد تا در کارهایشان برای تحقیق علمی، پرشور و مصمم باشند. هرازگاهی که در اتاقش در ساختمان اصلی دانشگاه دولتی مسکو به دیدارش می‌رفتم فرصتهایی استثنایی برایم فراهم می‌شد تا دربارهٔ مباحث علمی و دیگر موضوعات با این شخص حیرت‌انگیز بحث و گفتگو کنم. همچنین در این دیدارها موسیقی کلاسیک گوش می‌دادیم و شعر می‌خواندیم. خیلی دوست داشت که در خانهٔ ییلاقیش در نزدیکی مسکو به‌نام «کوقاروفکا» که با الکساندروف در آن شریک بود، کار کند. در آخرین سالهای عمرش بیشتر وقتش را در مسکو به‌سر می‌برد و قادر نبود به خانه‌ای که آنقدر آن را دوست داشت سری بزند. در حال حاضر بر اثر تلاشهای شیریائف این خانه به بنای یادبود کولموگوروف ـ الکساندروف تبدیل شده است که هرازگاهی در آن به‌روی بازدیدکنندگان محققی که از مؤسسهٔ ریاضی استکلوف و دانشگاه دولتی مسکو می‌آیند، گشوده می‌شود.

آندِری نیکولایویچ کولموگوروف در ۲۰ اکتبر سال ۱۹۸۷ درگذشت و در «نوووِدِویچی»، گورستان اصلی مسکو، به خاک سپرده شد. تمام زندگی کولموگوروف اعجازی بی‌نظیر به‌نام علم بود.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Alexander Melinikov, A. N. Kolmogorov and his creative life, π *in the sky*, september 2003, pp. 23-25.

بیضیهای محاطی

امید حاتمی ورزنه

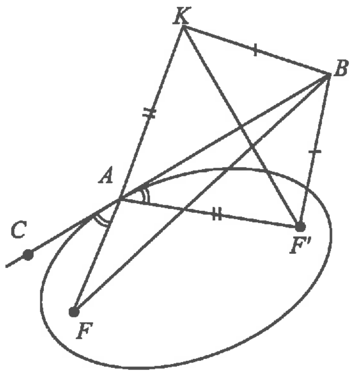
مسألهٔ زیر از زمان نیوتن مطرح بوده است.

مسألهٔ ۱ . چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. مکان هندسی مرکز بیضیهایی را بیابید که در این چهارضلعی محاط شده‌اند.

در این مقاله این مسأله را کامل حل نمی‌کنیم، هرچند که ثابت می‌کنیم که مکان هندسی موردنظر روی پاره‌خطی قرار دارد که وسطهای قطرهای چهارضلعی را به هم وصل می‌کند. درعوض، مسأله را در مورد مثلث حل می‌کنیم (مسألهٔ ۳ را ببینید). برای اینکه مسألهٔ ۱ را بررسی کنیم از برخی ویژگیهای بیضی استفاده می‌کنیم که آنها را در لمهای (۱) و (۲) آورده‌ایم.

لم ۱ . فرض کنید F و F' کانونهای بیضی‌ای مفروض باشند و A نقطه‌ای روی این بیضی باشد. در این صورت مماس بر بیضی در نقطهٔ A نیمساز زاویهٔ خارجی FAF' است.

برهان. فرض کنید B نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز خارجی زاویهٔ FAF' باشد. قرینهٔ F' نسبت به AB را K بنامید.



شکل ۱

معلوم است که K روی خطی است که از A و F می‌گذرد. بنابراین

$$BF' = BK, \qquad AF' = AK$$

درنتیجه

$$AF + AF' = AF + AK = KF$$

درضمن،

$$BF + BF' = BF + BK$$

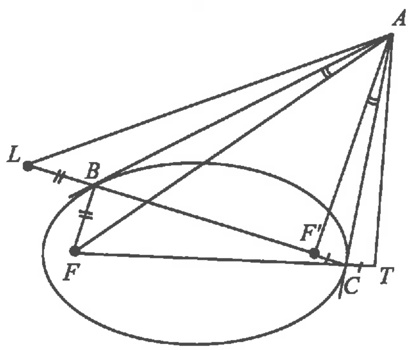
اما بنابر نابرابری مثلث، $BF + BK > FK$، پس

$$BF + BF' > AF + AF'$$

پس هر نقطهٔ دیگری روی نیمساز خارجی زاویهٔ FAF' بجز A، بیرون بیضی مفروض قرار دارد. یعنی این نیمساز در نقطهٔ A بر بیضی مماس است. ∎

لم ۲ . فرض کنید F و F' کانونهای بیضی‌ای مفروض باشند و A نقطه‌ای بیرون این بیضی باشد. همچنین فرض کنید AB و AC در نقطه‌های B و C بر بیضی مماس باشند. در این صورت $\angle BAF = \angle CAF'$.

برهان. قرینهٔ F' نسبت به AC را T بنامید. T روی CF قرار دارد. قرینهٔ F نسبت به AB را L بنامید. L روی $F'B$ قرار دارد.



شکل ۲

توجه کنید که

$$F'L = FT = FB + FC$$

درضمن،

$$AL = AF, \qquad AF' = AT$$

بنابراین دو مثلث AFT و ALF' همنهشت‌اند. درنتیجه

$$\angle FAF' + ۲\angle F'AC = \angle FAF' + ۲\angle BAF = \angle FAT = \angle LAF'$$

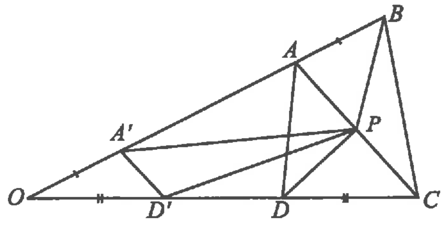
پس $\angle BAF = \angle CAF'$. ∎

علاوه‌بر این دو لم، به نتیجهٔ مسألهٔ زیر هم احتیاج داریم.

مسألهٔ ۲ . نقطه‌های A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند و AB با CD موازی نیست. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند P را در صفحه پیدا کنید که $S_{PAB} + S_{PCD}$ مقداری ثابت باشد.

راه‌حل. فرض کنید AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. نقطه‌های A' و D' را به‌ترتیب روی AB و CD طوری انتخاب کنید که

$$OA' = AB, \qquad OD' = CD$$



شکل ۳

در این صورت

$$S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PA'O} + S_{POD} = S_{OA'D} + S_{A'PD'}$$

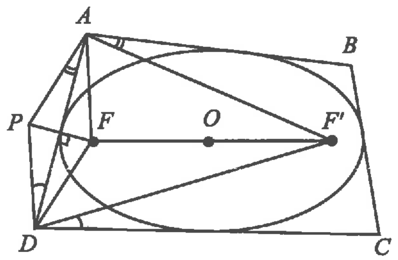
یعنی $S_{A'PD'}$ مقداری ثابت است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ P خطی موازی $A'D'$ است. ■

اکنون آماده‌ایم حکمی را ثابت کنیم که بخشی از جواب مسألهٔ ۱ است. درحقیقت، ثابت می‌کنیم که مکان هندسی موردنظر در مسألهٔ ۱ روی خطی قرار دارد که از وسطهای دو قطر چهارضلعی می‌گذرد. این راه‌حل از آلکسی زاسلافسکی، ریاضیدان روسی، است.

فرض کنید F و F' کانونهای بیضی‌ای محاط در چهارضلعی $ABCD$ باشند و O مرکز بیضی، یعنی وسط FF'، باشد. ثابت می‌کنیم

$$S_{AOD} + S_{BOC} = S_{AOB} + S_{COD}$$

و درنتیجه، بنابر مسألهٔ ۲، O روی پاره‌خطی قرار دارد که وسطهای دو قطر چهارضلعی را به هم وصل می‌کند.



شکل ۴

قرینهٔ F نسبت به AD را P بنامید. در این صورت

$$\frac{۱}{۲}S_{AF'DP} = S_{AOD} = \frac{۱}{۲}(S_{AF'D} + S_{AFD})$$

توجه کنید که

$$\angle PAF' = \angle DAB, \qquad \angle PDF' = \angle ADC$$

و درضمن،

$$AP = AF, \qquad DP = DF$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_{AF'DP} &= \frac{۱}{۲}AF' \times AP \sin A + \frac{۱}{۲}DF' \times DP \sin D \\ &= \frac{۱}{۲}(AF' \times AF \sin A + DF' \times DF \sin D) \end{aligned}$$

پس

$$S_{AOD} = \frac{۱}{۴}(AF' \times AF \sin A + DF' \times DF \sin D)$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$S_{BOD} = \frac{۱}{۴}(BF' \times BF \sin B + CF' \times CF \sin C)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_{AOB} + S_{COD} &= S_{AOD} + S_{COB} \\ &= \frac{۱}{۴}(AF' \times AF \sin A + BF' \times BF \sin B \\ &\qquad + CF' \times CF \sin C + DF' \times DF \sin D) \end{aligned}$$

همان‌چیزی که می‌خواهیم.

اکنون مسألهٔ‌ای جدید و زیبا را مطرح می‌کنیم و آن را حل می‌کنیم.

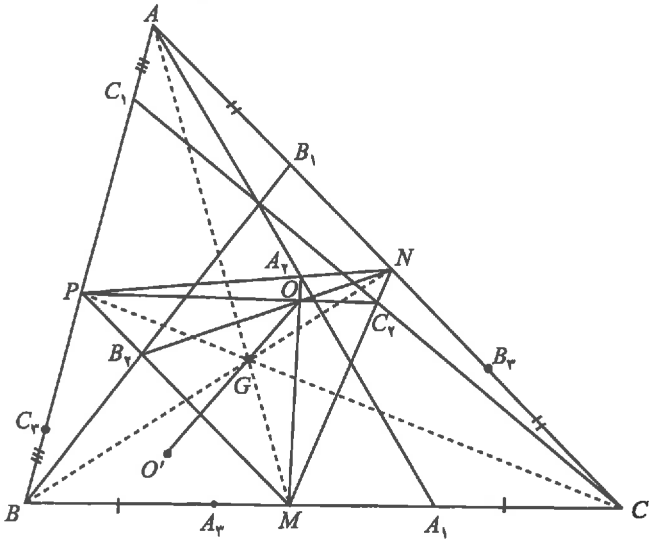
مسألهٔ ۳. مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی مرکز بیضیهایی را بیابید که در این مثلث محاط‌اند.

راه‌حل. ابتدا فرض کنید بیضی‌ای به مرکز O در نقطه‌های A'، B' و C' به‌ترتیب بر ضلعهای BC، AC و AB مماس باشد. سعی می‌کنیم مرکز بیضی را به‌دست بیاوریم. بنابر آنچه در مورد مسألهٔ ۱ ثابت کردیم، مرکز این بیضی روی خطی است که وسطهای دو قطر چهارضلعی $ABCD$ را به هم وصل می‌کند (حالت حدی مسألهٔ ۱ را در نظر گرفته‌ایم). فرض کنید نقطه‌های M، N و P به‌ترتیب وسطهای BC، AC و AB باشند. به این ترتیب، اگر نقطهٔ $B_۲$ وسط $BB_۱$ باشد (معلوم است که $B_۲$ روی MP است)، مرکز بیضی موردنظر روی خط $NB_۲$ قرار دارد. اگر $A_۲$ و $C_۲$ را هم به طریق مشابه تعریف کنیم معلوم می‌شود که $PC_۲$ و $MA_۲$ هم از مرکز بیضی می‌گذرند.

پس درحقیقت، اگر نقطه‌های A_3، B_3 و C_3 را به‌ترتیب روی BC، AC و AB طوری انتخاب کنیم که

$$BA_3 = CA_1, \quad CB_3 = AB_1, \quad BC_3 = AC_1$$

از قضیهٔ سوا نتیجه می‌شود که AA_3، BB_3 و CC_3 در نقطه‌ای مانند O' همرس‌اند. توجه کنید که در تجانس به مرکز G، محل برخورد میانه‌های مثلث، و نسبت $-\frac{1}{2}$ نقطه‌های A، B و C به‌ترتیب به نقطه‌های M، N و P می‌روند و نقطه‌های A_3، B_3 و C_3 هم به نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 می‌روند. بنابراین، در این تجانس، نقطهٔ O' به نقطهٔ O می‌رود.



شکل ۵

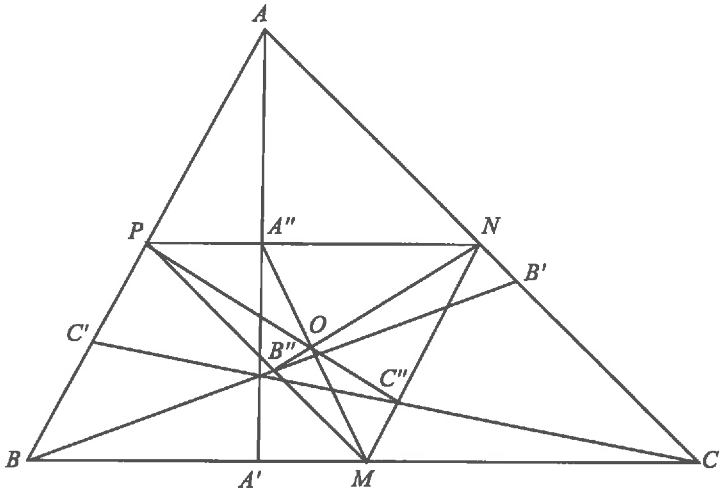
اکنون ثابت می‌کنیم مکان هندسی نقطهٔ O تمام نقطه‌های درون مثلث MNP است.

ابتدا توجه کنید که چون در مورد هر بیضی، O' درون مثلث ABC قرار دارد، پس O درون مثلث MNP قرار دارد. بنابراین کافی است ثابت کنیم که اگر نقطهٔ O درون مثلث MNP باشد، بیضی‌ای وجود دارد که مرکزش O است و درون مثلث ABC محاط شده است. برای این منظور، فرض کنید متجانس O نسبت به نقطهٔ G و با نسبت -2 نقطهٔ O' باشد. همچنین فرض کنید AO'، BO' و CO' ضلعهای مثلث را در نقطه‌های A_3، B_3 و C_3 قطع کنند. ثابت می‌کنیم بیضی‌ای وجود دارد که در نقطه‌های A_3، B_3 و C_3 بر ضلعهای مثلث مماس است. این هم از لم زیر به‌دست می‌آید. ∎

لم ۳ . AA'، BB' و CC' وقتی و فقط وقتی همرس‌اند که بیضی‌ای وجود داشته باشد که در نقطه‌های A'، B' و C' بر ضلعهای مثلث مماس باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید AA'، BB' و CC' همرس باشند. تبدیلی آفین وجود دارد که مثلث ABC را به مثلثی

تبدیل می‌کند که A'، B' و C' به نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی این مثلث با ضلعهای آن می‌روند (وجود چنین تبدیلی از ویژگیهای تبدیلهای آفین است. برای آشنایی با این تبدیلها می‌توانید [۱] را ببینید). اکنون توجه کنید که چون وارون هر تبدیل آفین نیز تبدیلی آفین است و تبدیل آفین، دایره را به بیضی می‌برد، پس بیضی‌ای وجود دارد که در نقطه‌های A'، B' و C' بر ضلعهای مثلث مماس است.



شکل ۶

اکنون فرض کنید بیضی‌ای وجود داشته باشد که در نقطه‌های A'، B' و C' بر ضلعهای مثلث مماس باشد. وسط AA'، BB' و CC' را به‌ترتیب A''، B'' و C'' بنامید. در این صورت، MA''، NB'' و PC'' در مرکز بیضی همرس‌اند. توجه کنید که چون

$$\frac{PA''}{A''N}=\frac{BA'}{A'C}, \quad \frac{NC''}{C''M}=\frac{AC'}{C'B}, \quad \frac{PB''}{B''M}=\frac{AB'}{B'C}$$

پس

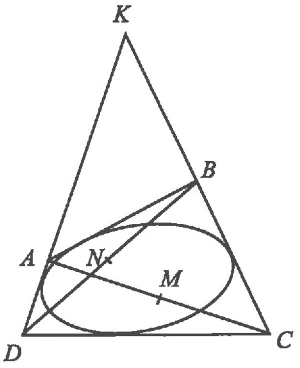
$$\frac{PA''}{A''N}\times\frac{NC''}{C''M}\times\frac{MB''}{B''P}=\frac{BA'}{A'C}\times\frac{CB'}{B'A}\times\frac{AC'}{C'B}$$

بنابراین، چون MA''، NB'' و PC'' همرس‌اند، از قضیهٔ سوا نتیجه می‌شود که سمت چپ تساوی بالا برابر با ۱ است، پس سمت راست آن هم برابر با ۱ است و درنتیجه، باز هم بنابر قضیهٔ سوا، AA'، BB' و CC' همرس‌اند. ■

به کمک مسألهٔ ۳ می‌توانیم حکم زیر را ثابت کنیم.

قضیه. مکان هندسی مرکز بیضیهایی که در چهارضلعی‌ای محدب محاط شده‌اند روی پاره‌خطی قرار دارد که وسطهای دو قطر این چهارضلعی را به هم وصل می‌کند.

اثبات. فرض کنید چهارضلعی $ABCD$ باشد و AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کنند. فرض کنید M و N به‌ترتیب وسطهای AC و BD باشند.



شکل ۷

معلوم است که M و N روی ضلعهای مثلثی قرار دارند که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث KDCاند و چون مرکز هر بیضی محاطی در چهارضلعی درون این مثلث قرار دارد، پس این مرکز روی پاره‌خط MN قرار دارد.

تمرین

۱. فرض کنید نقطهٔ F درون مثلث ABC قرار داشته باشد. نقطهٔ F' را مزدوج هم‌زاویه‌ای نقطهٔ F می‌نامیم، هرگاه

$$\angle BAF = \angle CAF', \qquad \angle BCF = \angle ACF', \qquad \angle CBF = \angle ABF'$$

الف) ثابت کنید هر نقطه درون مثلث، مزدوج هم‌زاویه‌ای درون مثلث دارد.

ب) ثابت کنید اگر دو نقطه درون مثلث مزدوج هم‌زاویه‌ای باشند، بیضی‌ای محاط در مثلث وجود دارد که کانونهایش این دو نقطه‌اند.

۲. در میان همهٔ بیضیهای محاط در مثلثی مفروض، کدام مساحتش بیشترین مقدار ممکن است؟

۳. فرض کنید F و F' کانونهای بیضی‌ای محاط در مثلث ABC باشند. ثابت کنید

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}(AF \times AF' \sin A + BF \times BF' \sin B + CF \times CF' \sin C)$$

مرجع

۱. ای. م. یاگلم، تبدیلات هندسی (جلد سوم)، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.

دربارهٔ توانهای ۲

پاول اِسترژلتسکی

به مسألهٔ کوچک اما جالب زیر توجه کنید:

مسأله. دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را که جمله‌های آن رقمهای نخست از سمت چپ توانهای متوالی ۲اند در نظر بگیرید:

$$۱, ۲, ۴, ۸, ۱, ۳, ۶, ۱, ۲, ۵, ۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$$

آیا عدد ۷ در این دنباله می‌آید؟

این مسأله با صورتهای متفاوت در مجلات و کتابهای ریاضی آمده است. مثلاً می‌توان آن را در کتاب معروف آرنولد، معادلات دیفرانسیل عادی پیدا کرد. معمولاً این مسأله همراه با چند حکم کمکی یا راهنمایی بیان می‌شود تا راه‌حل آن دست‌یافتنی‌تر شود. با وجود این، هیچ مجله یا کتابی را سراغ ندارم که در آن، این مسأله همراه با راه‌حلی کامل، شامل تمام جزئیات، آمده باشد. در این مقاله می‌خواهیم این نقص را برطرف کنیم. تقریباً از روی ناچاری با راه‌حلی کار را شروع می‌کنیم که در آن فقط یک تکه کاغذ و یک مداد یا شاید انواع پیشرفته‌تر این وسایل (مانند ماشین‌حسابی خوب یا رایانه!) لازم است. خوانندگانی که پشتکار دارند به‌سادگی می‌توانند تحقیق کنند که

$$۲^{۴۶} = ۷۰, ۳۶۸, ۷۴۴, ۱۷۷, ۶۶۴$$

اگر به‌همین ترتیب توانها را حساب کنیم معلوم می‌شود که ۷، رقم نخست سمت چپ توانهای ۵۶اُم، ۶۶اُم، ۷۶اُم، ۸۶اُم و ۹۶اُم عدد ۲ است (اما رقم نخست سمت چپ توانِ ۱۰۶اُم ۲، ۸ است نه ۷). با وجود این نتیجه‌ها، بی‌تردید این روش به هیچ‌وجه راه‌حلی مناسب نیست.

اکنون وقت آن است که راه‌حل بهتری پیدا کنیم که بتوان با آن نتیجه‌های جدیدی هم به‌دست آورد. پیش از هر چیز باید سعی کنیم بفهمیم معنی اینکه ۷، رقم نخست سمت چپ عددی مانند ۲^n است واقعاً چیست.

به‌راحتی می‌توان پاسخ این پرسش را یافت: عدد ۷ وقتی و فقط وقتی رقم نخست سمت چپ ۲^n است که به‌ازای عددی طبیعی مانند k،

$$۷ \times ۱۰^k < ۲^n < ۸ \times ۱۰^k$$

اگر در رابطهٔ بالا از هر دو طرف هرکدام از نابرابریها در مبنای ۱۰ لگاریتم بگیریم شرط موردنظر به‌شکل ساده‌تری درمی‌آید؛ یعنی به‌دست می‌آید

$$k + \log(۷) < n\log(۲) < k + \log(۸)$$

چون لگاریتمهای اعشاری ۷ و ۸ میان ۰ و ۱ قرار دارند، پس k همان جزء صحیح عدد $n\log(۲)$ است و بنابراین نابرابریهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\log(۷) < n\log(۲) - \lfloor n\log(۲)\rfloor < \log(۸)$$

و اکنون فقط کافی است که چند حکم معروف را کنار هم بگذاریم:

لم ۴. $\log(۲)$ عددی گنگ است.

لم ۵. اگر x عددی گنگ باشد و $c(n) = nx - \lfloor nx\rfloor$، آن‌وقت به‌ازای هر دو عدد مانند a و b در $[۰,۱]$ تعدادی نامتناهی از جمله‌های دنبالهٔ $c(n)$ در بازهٔ (a,b) قرار دارند.

پیش از آنکه این دو لم را ثابت کنیم نتیجه‌های آنها را بررسی می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که با به‌کار بردن لم ۲ در حالتی که $x = \log(۲)$، $a = \log(۷)$ و $b = \log(۸)$ معلوم می‌شود که ۷، رقم نخست سمت چپ تعدادی نامتناهی از توانهای ۲ است. اگر باز لم ۲ را این‌بار در مورد عددهای $x = \log(۲)$، $a = \log(۷۷) - ۱$ و $b = \log(۷۸) - ۱$ به‌کار ببریم، چون $۱ = \lfloor\log ۷۷\rfloor = \lfloor\log ۷۸\rfloor$، نتیجه می‌گیریم که ۷ حتی دوبار در دو رقم نخست سمت چپ بسط اعشاری توانی از ۲ می‌آید. با استفاده از استدلالی مشابه به‌راحتی می‌توان دریافت که هر دنبالهٔ متناهی از رقمها، مانند ۱۹۹۵ یا ۱۲۳۴ یا ۵۶۷۸۹۰، در سمت چپ بسط اعشاری توانی از ۲ می‌آید.

حتی می‌توانیم نتیجه‌ای کلیتر را هم ثابت کنیم:

نتیجه. اگر عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند p توانی با نمای طبیعی از ۱۰ نباشد، آن‌وقت هر دنباله (البته متناهی) از رقمها به‌ازای عددی طبیعی مانند n در سمت چپ بسط اعشاری توان nاُم p می‌آید.

برای اثبات این نتیجه فقط کافی است توجه کنید که $\log(p)$ عددی گنگ است و بعد همان استدلال بالا را تکرار کنید.

اما در این صورت چرا ۷ از جمله‌های نخست دنباله‌ای که در ابتدای مقاله آوردیم نبود؟ چرا این‌طور به‌نظر می‌رسد که این دنبالهٔ غلط‌انداز متناوب است؟ دلیلش ساده است. عدد $\log(۲) = ۰٫۳۰۱۰۲۹۹۹۵۶\ldots$ را می‌توان خیلی خوب با عدد گویای ۰٫۳ تقریب زد و به‌ازای همهٔ عددهای گویا مانند x، دنبالهٔ $c(n) = nx - \lfloor nx\rfloor$ متناوب است. به‌همین دلیل است که بعد از مشاهدهٔ جمله‌های نخست دنبالهٔ $a(n)$ به این نتیجهٔ نادرست می‌رسیم که دنبالهٔ موردنظر متناوب و دورهٔ تناوبش ۱۰ است و ۷ جمله‌ای از آن نیست در صورتی که ۸ به‌دفعات در آن می‌آید.

در سال ۱۹۱۰ واتسلا سرپینسکی، هرمان وایل و پیرس بول مستقل از یکدیگر ثابت کردند که به‌ازای هر عدد گنگ مانند x، دنبالهٔ $c(n) = nx - \lfloor nx\rfloor$ در بازهٔ $[۰,۱]$ به‌طور یکنواخت توزیع می‌شود. به‌بیان دقیقتر، اگر دو عدد دلخواه a و b (که $a < b$) از بازهٔ $[۰,۱]$ اختیار کنیم و فرض کنیم $k(n,a,b)$ تعداد عضوهای مجموعهٔ

$$\{c(i) : \quad c(i) \in (a,b), \qquad ۱ \le i \le n\}$$

باشد، آن‌وقت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n,a,b)}{n} = b-a$$

به‌شکلی توصیفی‌تر می‌توان این قضیه را این‌طور هم بیان کرد: اگر روی دایره‌ای به محیط ۱ به‌مدت کافی قدم بزنیم و طول قدمهایمان عددی گنگ باشد، آن‌وقت تعداد دفعاتی که روی هر حفره قدم می‌گذاریم به‌طور مستقیم متناسب با اندازهٔ این حفره است.

این حقیقت را به زبان این مقاله، یعنی برحسب توانهای ۲، بیان می‌کنیم. فرض کنید $a(۷,n)$ و $a(۸,n)$ به‌ترتیب تعداد هفتها و هشتها در میان n جملهٔ نخست دنبالهٔ $a(n)$ باشند. بنابر آخرین دستوری که نوشتیم،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(۷,n)}{n} = \log(۸) - \log(۷),$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(۸,n)}{n} = \log(۹) - \log(۸)$$

و درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(۷,n)}{a(۸,n)} = \frac{\log(۸)-\log(۷)}{\log(۹)-\log(۸)} = ۱/۱۳۳۷\ldots > ۱$$

این نتیجه به این معناست که در تکه‌های نخست و به‌اندازهٔ کافی طولانی از دنبالهٔ $a(n)$ تعداد هفتها اندکی بیشتر از تعداد هشتهاست.

نتیجهٔ بول، سرپینسکی و وایل که پیش از این به آن اشاره کردیم و مطلب ساده‌ای که دربارهٔ تعداد هفتها و هشتها گفتیم، درحقیقت نتیجه‌هایی ساده از قضیهٔ ارگودیکی بسیارکلی و عمیقی ازگَرِت بیرکاف (۱۹۳۱) هستند، که البته خودش داستان دیگری است.

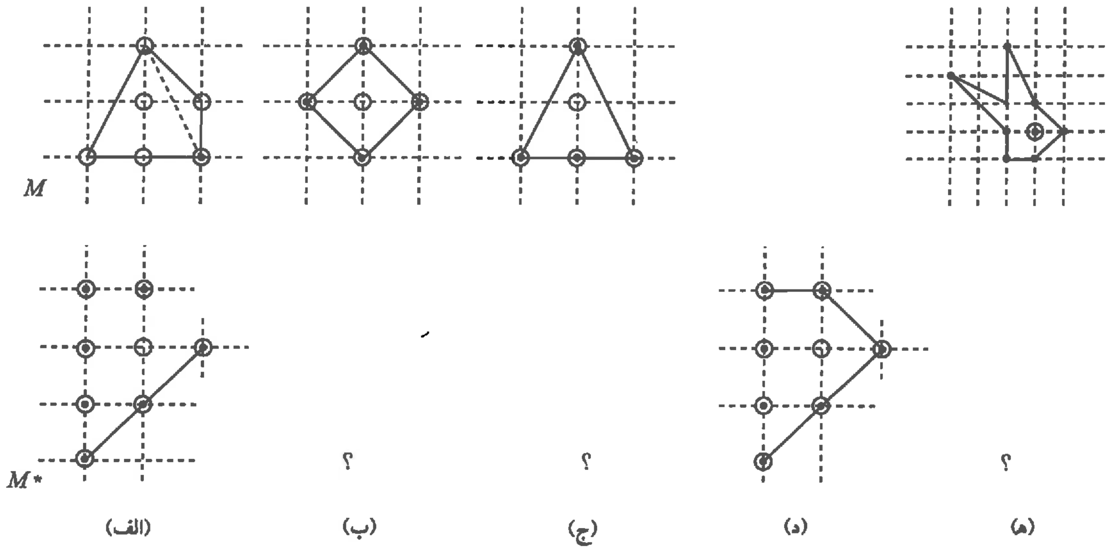
مسأله. به‌ازای کدام عددهای طبیعی مانند n عدد ۲^n با چهارتا ۷ متوالی شروع می‌شود؟ در مورد پنج‌تا هشت چه می‌توان گفت؟ کوچکترین عدد طبیعی مانند n را که بسط اعشاری ۲^n با ۱۹۹۵تا هشت متوالی شروع شود از بالا چطور تخمین می‌زنید؟

پیوست

اثبات لم ۱

اگر به‌ازای عددهایی طبیعی مانند r و m، $\log ۲ = \frac{r}{m}$، آن‌وقت بنابر تعریف لگاریتم $۲ = ۱۰^{\frac{r}{m}}$ و درنتیجه $۲^m = ۱۰^r$؛ اما این تناقض است زیرا ۵ مقسوم‌علیه‌ای از هر توان ۱۰ است در صورتی که به‌طور قطع مقسوم‌علیه توانی از ۲ نیست.

۵. دوگان چندضلعیهای شکل ۲ را رسم کنید. در هر حالت چند نقطهٔ مشبکه‌ای درون M^* وجود دارد؟ M^{**} چیست؟ آیا رابطه‌ای میان مساحتهای M و M^* وجود دارد؟ آیا ممکن است M و M^* بر هم منطبق باشند. مشاهدات و حدسهایتان را منظم کنید و سعی کنید آنها را ثابت کنید.

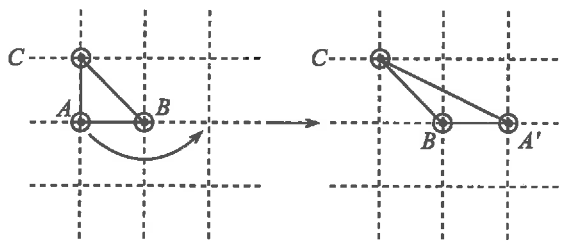


شکل ۲

۱. درون مثلثی دقیقاً یک نقطهٔ مشبکه‌ای وجود دارد. بیشترین تعداد ممکن نقطه‌های مشبکه‌ای روی ضلعهای آن چقدر است؟

۲. قضیهٔ دربارهٔ ۱۲ را برای متوازی‌الاضلاعی که در آن $b = ۴$ ثابت کنید.

مثلث ساده مثلثی است که درون یا روی مرزش (بجز رأسهایش) هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای قرار ندارد. پریدن در مثلثی مانند ABC عملی است که در شکل ۳ نشان داده شده است: رأس A را با نقطهٔ قرینهٔ A نسبت به رأس B عوض می‌کنیم.



شکل ۳

۳. ثابت کنید

الف) مساحت مثلث تحت اثر پریدن تغییر نمی‌کند.

ب) مثلثی که پس از پریدن از مثلثی ساده به‌دست می‌آید مثلثی ساده است.

ج) مثلث ساده بیش از یک زاویهٔ منفرجه یا قائمه ندارد، و حالت آخر فقط برای مثلثی پیش می‌آید که طول ضلعهایش ۱، ۱ و $\sqrt{۲}$ باشند؛ چنین مثلثی را مینیمال می‌نامیم.

د) از هر مثلث غیرمینیمال می‌توان با یک‌بار پریدن مثلثی به‌دست آورد که بلندترین ضلعش از بلندترین ضلع مثلث اصلی کوتاهتر است.

ه) از هر مثلث ساده می‌توان با تعدادی متناهی پریدن مثلثی مینیمال به‌دست آورد.

و) مساحت هر مثلث ساده برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

۴. الف) ثابت کنید که اگر درون یا روی مرز چهارضلعی‌ای محدب (بجز رأسهای آن) نقطه‌ای مشبکه‌ای وجود نداشته باشد، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ب) آیا پنج‌ضلعی‌ای محدب وجود دارد که درونش هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای وجود نداشته باشد؟

ج) درون چندضلعی‌ای محدب فقط یک نقطهٔ مشبکه‌ای وجود دارد. تعداد رأسهایش حداکثر چندتاست؟

۵. الف) روی مرز مثلثی (بجز رأسهای آن) هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای وجود ندارد و درون مثلث فقط یک نقطهٔ مشبکه‌ای وجود دارد. ثابت کنید این نقطه مرکز ثقل مثلث است.

ب) قضیهٔ دربارهٔ ۱۲ را برای مثلثی که در آن $b = ۳$ ثابت کنید.

فرض کنید S مساحت چندضلعی‌ای باشد که روی مرزش b نقطهٔ مشبکه‌ای و درونش i نقطهٔ مشبکه‌ای قرار دارد.

۶. الف) مثلث‌بندی‌ای برای چندضلعی‌ای که رأسهایش در $b + i$ نقطهٔ مشبکه‌ای مفروض قرار دارند در نظر بگیرید. این مثلث‌بندی چند مثلث دارد؟

ب) دستور پیک را ثابت کنید:

$$S = i + \frac{b}{۲} - ۱$$

۷. فرض کنید نسبت مساحت چندضلعی‌ای به مربع طول یکی از ضلعهایش عددی گنگ باشد (چنین چیزی ممکن است، مثلاً در مورد مثلث متساوی‌الاضلاع). ثابت کنید نمی‌توان این چندضلعی (یا چندضلعی‌ای متشابه با آن) را طوری رسم کرد که همهٔ رأسهایش نقطه‌هایی مشبکه‌ای باشند.

۸. مهرهٔ شاه همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج را طی کرده است، به‌طوری که از هر خانه فقط یک‌بار گذشته است و در حرکت آخر به‌جای اولش برگشته است. خط شکسته‌ای که از مرکز خانه‌هایی که شاه از آنها رد شده گذشته

است خودش را قطع نمی‌کند.

الف) این خط شکسته حداکثر چه مساحتی را دربر می‌گیرد؟

ب) طول خط شکسته حداکثر چقدر است؟

حذف کردن مثلث از چندضلعی M، بریدن مثلثی ساده از آن است که دو ضلع مشترک با M دارد. مثلاً، می‌توان با حذف کردن مثلثی از چندضلعی شکل ۲ (الف)، چندضلعی شکل ۲ (ب) را به‌دست آورد. عمل معکوس را اضافه کردن مثلث می‌نامیم.

۹. آیا درست است که هر دو چندضلعی

الف) در شکل ۲ را،

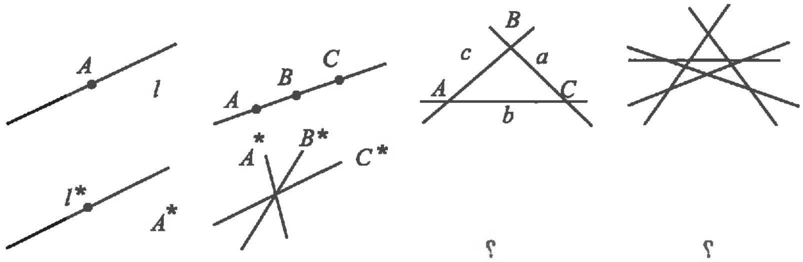
ب) را که درونشان هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای قرار ندارد،

ج) را که محدب‌اند و یک نقطهٔ مشبکه‌ای درون هر یک از آنها وجود دارد،

می‌توان با حذف کردن و اضافه کردن مثلثهایی از یکدیگر به‌دست آورد.

فرض کنید O مبدأ دستگاه مختصات دکارتی در صفحه باشد. به هر نقطهٔ متمایز از O مانند $A(a,b)$ خط A^* را که معادله‌اش $ax+by=1$ است نسبت می‌دهیم. این خط را دوگان نقطهٔ موردنظر می‌نامیم. به‌همین ترتیب، خط $ax+by=1$ را دوگان نقطهٔ (a,b) می‌نامیم.

۱۰. شکلهای دوگان شکلهای شکل ۴ را رسم کنید. ثابت کنید که در شکل ۴ (الف)، $l^* \in A^*$ و در شکل ۴ (ب) خطهای A^*، B^* و C^* در یک نقطه مشترک‌اند. ثابت کنید که اگر C نقطه‌ای غیر از O باشد، خط دوگان آن بر OC عمود است و از نقطه‌ای مانند C' روی OC می‌گذرد که $OC' \times OC = 1$.



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۴

اگر چندضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ را M بنامیم، چندضلعی M^* را چندضلعی $(A_1A_2)^* \ldots (A_nA_1)^*$ تعریف می‌کنیم.

۱۱. ثابت کنید که این تعریف از چندضلعی دوگان با تعریف قبلی (در حد دورانی به‌اندازهٔ 90°) همخوانی دارد.
ثابت کنید $M^{**} = M$.

۱۲. ثابت کنید که اگر درون M دقیقاً یک نقطهٔ مشبکه‌ای دربر داشته باشد، درون M^* هم دقیقاً یک نقطهٔ مشبکه‌ای دربر دارد.

۱۳. الف) ثابت کنید حذف کردن مثلثی از M معادل اضافه کردن مثلثی به M^* است.

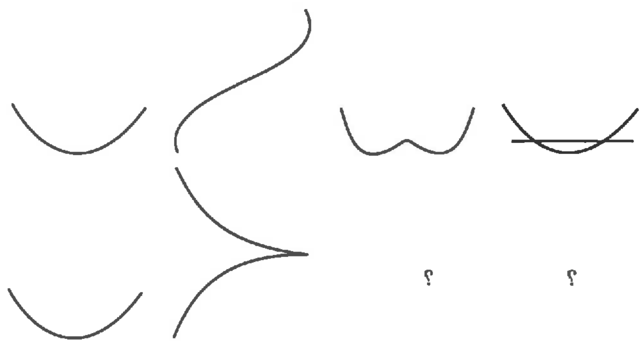
ب) ثابت کنید از هر چندضلعی محدبی که دقیقاً یک نقطهٔ مشبکه‌ای درون آن وجود دارد می‌توان با حذف کردن/اضافه کردن مثلثها متوازی‌الاضلاعی به‌دست آورد که در آن $b = 4$.

ج) قضیهٔ دربارهٔ ۱۲ را ثابت کنید.

۱۴. شکل دوگان چندضلعی غیرمحدب شکل ۲ (ه) را رسم کنید. با چه فرضهایی دربارهٔ M تعریفهای M^* معادل‌اند؟ چگونه می‌توان قضیهٔ دربارهٔ ۱۲ را برای چندضلعیهای غیرمحدب تعمیم داد؟

فرض کنید γ خم است. خم دوگان γ، که آن را با γ^* نشان می‌دهیم، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی است که دوگانهای مماسهای بر γاند.

۱۵. خم دوگان دایرهٔ واحد را رسم کنید. شکل ۵ را کامل کنید. آیا درست است که $\gamma = \gamma^{**}$؟



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۵

۱۶. (مسألهٔ حل‌نشده) چگونه می‌توان قضیهٔ دربارهٔ ۱۲ را به چندضلعیهایی که چند نقطهٔ مشبکه‌ای درونشان وجود دارد تعمیم داد؟

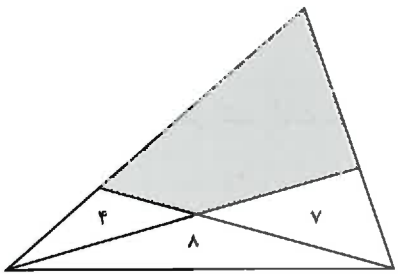
• ترجمهٔ ارشک حمیدی

از باب تفریح

۱. روی میز سه تکه چوب قرمز و پنج تکه چوب آبی وجود دارد که طولهایشان متفاوت است. مجموع طولهای تکه‌های قرمز با مجموع طولهای تکه‌های آبی برابر است. آیا می‌توان این تکه‌چوبها را برید و آنها را دوتا دوتا طوری جفت کرد که تکه‌های هر جفت طولشان برابر باشد اما رنگشان فرق داشته باشد؟

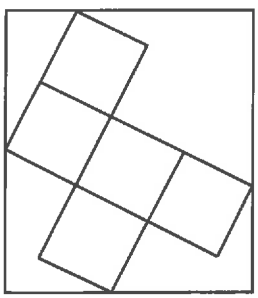
۲. حاصل‌ضرب یک میلیارد عدد طبیعی برابر با یک میلیارد شده است. مجموع این عددها حداکثر ممکن است چقدر باشد؟

۳. در شکل زیر مساحت سه تا از مثلثها را درونشان نوشته‌ایم. مساحت چهارضلعی سایه‌دار چقدر است؟



۴. سه کپه خرده‌سنگ داریم که ۵، ۴۹ و ۵۱ خرده‌سنگ دارند. می‌توانید دو تا از کپه‌ها را در یک کپه جمع کنید یا کپه‌ای را که تعداد خرده‌سنگهایش عددی زوج است به دو کپه به‌اندازهٔ برابر تقسیم کنید. آیا می‌توانید ۱۰۵ کپه به‌دست بیاورید که هر کدام یک خرده‌سنگ داشته باشد؟

۵. مانند شکل زیر پنج مربع برابر را در مستطیلی 8×7 قرار داده‌ایم. طول ضلع هر یک از این مربعها چقدر است؟



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۱)

المپیاد ریاضی دبیرستان امام صادق (ع) منطقهٔ ۲ تهران

۶ آذرماه ۱۳۸۳

سال گذشته اولین المپیاد ریاضی دبیرستان امام صادق (ع) (منطقهٔ ۲، تهران) برگزار شد. کمیتهٔ علمی برگزارکنندهٔ این آزمون، که از المپیادهای سالهای گذشته بودند، سعی کردند تا سؤالات کیفیت مناسب داشته باشند.

پس از برگزاری المپیادهای علمی کشوری و اعلام نتایج معلوم شد، ۱۲۷ نفر از شرکت‌کنندگان در این آزمون در مرحلهٔ اول کشوری و ۱۶ نفر در مرحلهٔ دوم کشوری برگزیده شده‌اند و ۴ نفر نیز موفق به کسب مدال طلا شده‌اند.

امسال هم دومین دورهٔ این المپیاد با حضور بیش از ۵۰۰ دانش‌آموز از مدارس علامه حلی تهران، انرژی اتمی، امام صادق (ع)، روزبه، نیکان، سوده، سلام (۱)، سلام (۲)، دانشمند، ابوریحان، برهان، علامه طباطبایی، امیرکبیر، مرکز استعدادهای درخشان واحد اسلام‌شهر و چند مدرسهٔ دیگر برگزار شد.

المپیاد امسال در دو مرحله برگزار شد، که در اینجا سؤالات مرحلهٔ اول آن را آورده‌ایم.

۱. بیشترین تعداد نقاط برخورد ۸ دایره با یکدیگر در صفحه برابر است با

الف) ۳۲ ب) ۳۸ ج) ۴۴ د) ۵۶ ه) ۵۰

۲. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، زوج مرتب (x, y) را به این صورت تعریف می‌کنیم که x مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ و y تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن است. می‌دانیم عدد m مربع کامل است. در این صورت زوج مرتب مربوط به آن کدام‌یک از گزینه‌های زیر ممکن است باشد؟

الف) (۲۶, ۱۴) ب) (۲۹, ۲۱) ج) (۳۰, ۱۸) د) (۲۳, ۱۳) ه) (۱۸, ۱۵)

۳. مثلث ABC مفروض است. نقاط M و N به‌ترتیب روی اضلاع AC و BC از آن قرار دارند. P را نقطه‌ای روی ضلع AB بگیرید، به‌طوری که $\angle APM = \angle BPN = \angle ACB$. اگر $AM + BN = AB$ و $AC = BC$، آنگاه زاویهٔ A برابر است با

الف) ۳۰° ب) ۴۵°

ج) $۴۵^\circ < \angle A < ۶۰^\circ$ د) ۶۰°

ه) $\angle A > ۶۰^\circ$

۴. فرض‌کنید M وسط ضلع AC از مثلث ABC و P نقطه‌ای درون مثلث باشد به‌طوری‌که $S_{APM} = S_{PBC}$.
در این صورت مکان هندسی نقطهٔ P برابر است با

الف) خطی موازی BC ب) خطی گذرنده از C
ج) تمام نقاط داخل مثلث میانه‌ای د) خطی گذرنده از B
ه) دایره

۵. چند عدد طبیعی مضرب ۶۰ وجود دارد که هر یک دقیقاً ۷۰ مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۱۲ د) ۲ ه) بی‌شمار

۶. نمای بزرگترین توان ۲ که عدد $۵^{۷۲} - ۱$ بر آن بخش‌پذیر است چند است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

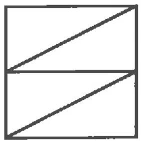
۷. فرض کنید S مجموعهٔ تمام اعداد به‌شکل $n^{۲} + ۱$ باشد، که $n \in \mathbb{N}$. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:
i) اگر عددی در S، k مقسوم‌علیه اول متمایز داشته باشد، آنگاه بی‌نهایت عضو در S موجودند که حداقل k مقسوم‌علیه اول متمایز دارند.
ii) بی‌نهایت جفت نابرابر مانند m و n در S وجود دارند که m بر n بخش‌پذیر است.
iii) ۱۳۸۳ مضربی دارد که متعلق به S است.
کدام گزاره‌ها درست هستند؟

الف) (i) و (ii) ب) (i) و (iii) ج) (ii) و (iii) د) فقط (ii) ه) فقط (iii)

۸. تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۱\}$ که مجموع اعضای آنها بر ۱۱ بخش‌پذیر است، چندتاست؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ۱۶ ه) ۱۲

۹. عدد n را مربعی می‌نامیم، هرگاه بتوان با n موزاییک که هر یک به‌شکل مثلثی قائم‌الزاویه به اضلاع ۱، ۲ و $\sqrt{۵}$ است، سطح مربعی به ضلع $\sqrt{n}$ را فرش کرد. مثلاً ۴ عددی مربعی است.



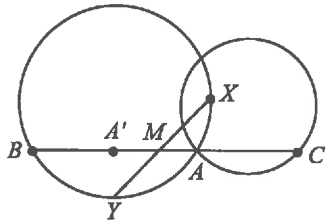
در بین اعداد ۱۶، ۲۰، ۲۵ و ۳۲ چند عدد مربعی وجود دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) صفر

۱۰. k عددی طبیعی است. تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $۳^k + x^۲ = y^۲$ چندتاست؟

الف) $۲k$ ب) $۲k + ۲$ ج) $k + ۲$ د) $۳k + ۲$ ه) $۳k$

۱۱. در شکل زیر $AB > AC$، $AM = A'M$ و $BM = MC$. اگر XY خطی گذرنده از M باشد به‌طوری که $\angle XYA' = ۴۵^\circ$ و $\angle YXA' = ۲۵^\circ$، آنگاه زاویهٔ XCY برابر است با



الف) ۶۰° ب) $۲۵^\circ < \angle XCY < ۴۵^\circ$

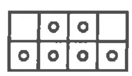
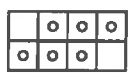
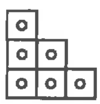
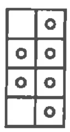
ج) $۴۵^\circ < \angle XCY < ۶۰^\circ$ د) $\angle XCY = ۷۰^\circ$

ه) $۶۰^\circ < \angle XCY < ۷۰^\circ$

۱۲. تعداد دنباله‌هایی مانند $\{a_n\}$ که به‌ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $|a_m^۲ - a_n^۲| \leq \frac{۱}{m+n}$ و $a_۱ = ۱$ چندتاست؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۱۳. صفحهٔ شطرنجی نامتناهی در نظر بگیرید. شش مهره را طوری چیده‌ایم که مستطیلی ۳ × ۲ (افقی) تشکیل داده‌اند. هر مهره می‌تواند از روی مهره‌ای دیگر که به آن چسبیده است بپرد و به خانه‌ای خالی برود. با تکرار این حرکت به کدام‌یک از وضعیتهای زیر می‌توان رسید؟

الف)  ب)  ج)  د)  ه) هیچ‌کدام

۱۴. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n)$ عددی است از بین اعداد ۱، ۲، ...، n به‌نحوی که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن بیشترین مقدار ممکن باشد (اگر چندتا از این اعداد با این خاصیت وجود داشتند، کوچکترین آنها را به‌عنوان $f(n)$ در نظر می‌گیریم). مثلاً،

$$f(۱) = ۱, \quad f(۲) = f(۳) = ۲, \quad f(۴) = ۴, \quad f(۵) = ۴$$

کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست **نیست**؟

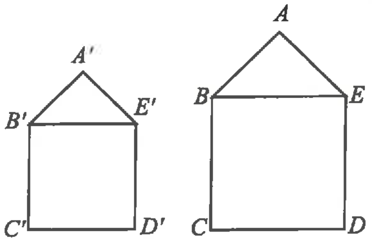
الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n) \leq f(n+۱)$.

ب) بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $f(n) = n$.

ج) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $\frac{n}{۲} < f(n)$.

د) عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $n > ۱$ و $f(n)$ فرد است.

ه) تمام گزاره‌های بالا درست است.



۱۵. دو شکل روبه‌رو برابر نیستند، اما

$$AB = AE = A'B' = A'E' = ۱$$
$$AC = AD = A'C' = A'D' = \sqrt{۳}$$

اگر $BEDC$ و $B'E'D'C'$ دو مربع باشند، مقدار $\frac{S_{BEDC}}{S_{B'E'D'C'}}$ برابر است با

الف) $\sqrt{۳}$ ب) $۳ + ۲\sqrt{۲}$

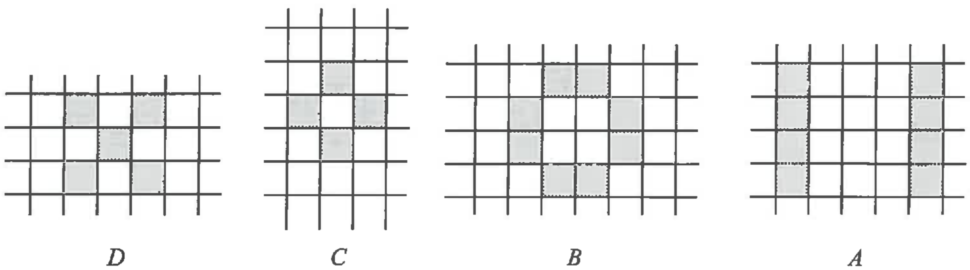
ج) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ د) ۲

ه) با طولهای فوق نمی‌توان دو شکل رسم کرد.

۱۶. مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی مانند n به‌طوری که $n(n+۱)(n+۲)$ دقیقاً سه مقسوم‌علیه اول متمایز داشته باشد، چند است؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

۱۷. در هر خانه از جدولی ۱۰۰×۱۰۰ عددی طبیعی قرار دارد، به‌طوری که مجموع اعداد واقع در هر مربع ۲×۲ عددی زوج است. مجموعه‌ای از خانه‌های جدول را ویژه می‌نامیم، هرگاه مجموع اعداد واقع در این خانه‌ها زوج باشد. مثلاً هر مربع ۴×۴ ویژه است، ولی مستطیل ۲×۱ لزوماً ویژه نیست. چهار مجموعهٔ A، B، C و D از خانه‌های جدول همان‌گونه که در شکل زیر می‌بینید داده شده‌اند.



چند تا از این چهار مجموعه قطعاً ویژه‌اند؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۸. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد. M و N را به‌ترتیب محل برخورد AO با ضلع BC و دایرهٔ محیطی مثلث ABC بگیرید. اگر $OM = MN$ و $AB \neq AC$، آنگاه کدام حکم زیر در مورد زاویهٔ A صحیح است؟

الف) $\angle A = ۴۵^\circ$ ب) $\angle A < ۴۵^\circ$

ج) $\angle A = ۶۰^\circ$ د) $\angle A > ۶۰^\circ$

ه) $۴۵^\circ < \angle A < ۶۰^\circ$

۱۹. دربارهٔ تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ می‌دانیم که $f(۱) = ۱۳۸۳$ و

$$f(۱) + f(۲) + \cdots + f(n) = n^۲ f(n), \qquad n = ۲, ۳, \ldots$$

در این صورت مقدار $f(۱۳۸۳)$ برابر است با

الف) $\frac{۱}{۶۹۲}$ ب) $\frac{۲}{۱۳۸۳}$ ج) $\frac{۱}{۱۳۸۳!}$ د) $\frac{۲}{۶۹۲}$ ه) $\frac{۱}{۱۳۸۴}$

۲۰. تعداد زوجهای نامنفی مانند (x, y) که در رابطهٔ $x^۳ + y^۳ = (x + y)^۲$ صدق می‌کنند، چند تاست؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۸

۲۱. روی هر رأس مکعبی یکی از اعداد ۱ و ۱− نوشته شده است. روی هر یک از یالهای مکعب حاصل‌ضرب اعداد واقع در دو سر یال را می‌نویسیم و روی هر یک از وجوه مکعب حاصل‌ضرب اعداد واقع در چهار رأس وجه را می‌نویسیم. فرض کنید $S_۰$ مجموع اعداد واقع در ۸ رأس، $S_۱$ مجموع اعداد واقع در ۱۲ یال و $S_۲$ مجموع اعداد واقع در ۶ وجه باشد. کدام‌یک از عبارتهای زیر هیچ‌گاه برابر صفر نیست؟

الف) $S_۱$ ب) $S_۲$

ج) $S_۱ + S_۲$ د) $S_۰ + S_۱$

ه) $S_۰ + S_۱ + S_۲$

۲۲. آیا اعدادی طبیعی مانند $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n وجود دارند که $x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n$ و

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} + \cdots + \frac{۱}{x_n} = ۱$$

الف) فقط برای $n = ۱$ و nهایی که اول‌اند چنین اعدادی وجود دارند.

ب) برای تعدادی متناهی عدد طبیعی مانند n چنین اعدادی وجود دارند.

ج) به‌ازای هر nای چنین اعدادی وجود دارند.

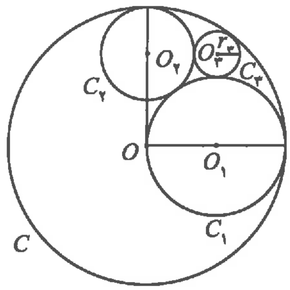
د) به غیر از برخی از nها که تعداد آنها متناهی است برای بقیه چنین اعدادی وجود دارند.

ه) هیچ‌کدام

۲۳. فرض کنید $a_۰ = ۰$، $a_۱ = ۱$ و به‌ازای هر $n \geq ۱$، $a_{n+۱} = ۲a_n + a_{n-۱}$. در این صورت بزرگترین توان ۲ که $a_{۴۸}$ بر آن بخش‌پذیر است چند است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲۴. در شکل زیر O مرکز دایرهٔ C و O_1 و O_2 به‌ترتیب مرکزهای دو دایرهٔ C_1 و C_2اند. اگر $\angle O_2OO_1 = 90^\circ$ و r_3 شعاع دایرهٔ کوچک باشد، آنگاه مقدار $\frac{r_3}{r_2}$ برابر است با



الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{2}{5}$ هـ) $\frac{1}{3}$

۲۵. مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی مانند n که بر همهٔ اعداد کوچکتر از یا مساوی با $\frac{n}{10}$ بخش‌پذیر است، چند است؟

الف) ۱۵ ب) ۱۳ ج) ۱۷ د) ۷ هـ) ۶

۲۶. S زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد صحیح است، به‌طوری که از هر سه عضو متمایز S مجموع دوتا از آنها متعلق به S است. حداکثر تعداد اعضای S کدام است؟

الف) ۳ ب) ۵
ج) ۷ د) ۹
هـ) حداکثر تعداد اعضای S وجود ندارد.

۲۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A = 90^\circ$)، مربع $MNPQ$ طوری محاط شده است که M روی AB و N روی AC قرار دارد و P و Q روی BC قرار دارند. اگر $S_{PNC} = 20$ و $S_{BQM} = 5$، آنگاه S_{AMN} برابر است با

الف) ۴ ب) $4\sqrt{2}$ ج) ۶ د) ۱۰ هـ) $5\sqrt{2}$

۲۸. کمترین مجموع ارقام در میان مضربهای عدد ۱۶۵ چند است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۹ هـ) ۱۲

۲۹. فرض کنید p عددی اول و فرد باشد. در این صورت تعداد جوابهای طبیعی معادلهٔ

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_p} = 1$$

درکدام شرط زیر صدق می‌کند؟

الف) به‌شکل kp است.
ب) به‌شکل ۱ + kp است.
ج) به‌شکل ۱ − kp است.
د) به‌شکل $kp^۲$ است.
ه) وابسته به p است و شکل خاصی ندارد.

۳۰. زاویهٔ قائمهٔ xOy مفروض است. دنبالهٔ نامتناهی از دایره‌ها، $\{\omega_i\}_{i=۱}^{\infty}$، را در نظر بگیرید که $\omega_۱$ دایره‌ای است به شعاع واحد که بر اضلاع زاویه مماس است و ω_i بر $\omega_{i-۱}$ و اضلاع زاویه مماس است. (شعاع ω_i از شعاع $\omega_{i-۱}$ کوچکتر است.) مجموع شعاع این دنباله از دایره‌ها چقدر است؟

الف) $۱ + \sqrt{۲}$
ب) $۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$
ج) $\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}$
د) $\frac{۲\sqrt{۲} - ۱}{۲}$
ه) $\sqrt{۲}$

بیست و پنجمین تورنمنت شهرها

دور پاییزی، ۲۰۰۴

سؤالهای دو سال اول

سطح معمولی

۱. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۲۰۰۴ را طوری در یک ردیف چید که مجموع هر ده عدد مجاور بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد؟

۲. در جعبه‌ای ۱۱۱ توپ وجود دارد که هر یک از آنها یا سبز است یا قرمز یا سفید یا آبی. اگر ۱۰۰ توپ را به‌طور تصادفی از جعبه بیرون بیاوریم، همواره ۴ توپ به رنگهای مختلف در میان آنها وجود دارد. کمترین تعداد توپهایی که باید، به‌طور تصادفی، بیرون آورد تا مطمئن باشیم که ۳ توپ به رنگهای مختلف در میان آنها وجود دارد چقدر است؟

۳. در روسیه چند شهر وجود دارد که خط اتوبوسی مستقیم میان هر دو تا از آنها وجود دارد و اتوبوسها در میان راه توقف نمی‌کنند. الکسی فروگال برای هر یک از مسیرها یک بلیط خریده است که می‌توان با آن در هر یک از دو جهت مسافرت کرد اما نمی‌توان از همین مسیر برگشت. او از مسکو شروع به حرکت می‌کند، از همهٔ بلیطهایش استفاده می‌کند و هیچ بلیط تازه‌ای نمی‌خرد و سرانجام به کالینگراد می‌رسد. بوریس لاویش برای هر مسیر n بلیط می‌خرد و از مسکو شروع به حرکت می‌کند. البته، پس از مصرف کردن چند تا از بلیطهایش، در یکی از شهرها متوقف می‌ماند و اگر بلیط جدیدی نخرد نمی‌تواند این شهر را ترک کند. ثابت کنید او یا در مسکو متوقف شده است یا در کالینگراد.

۴. خطی راست و دایره‌ای که خط را قطع نکرده است مفروض‌اند. با استفاده از خط‌کش و پرگار مربعی رسم کنید که دو رأس مجاورش روی خط موردنظر و دو رأس دیگرش روی دایره باشند (فرض کنید چنین مربعی وجود دارد).

۵. به چند طریق می‌توان ۲۰۰۴ را به‌شکل مجموع یک عدد طبیعی یا تعداد بیشتری عدد طبیعی که به‌طور غیرنزولی مرتب شده‌اند نوشت، به‌طوری که تفاضل جملهٔ آخر و جملهٔ اول حداکثر برابر با ۱ باشد؟

سطح پیشرفته

۱. زاویه‌ای را گویا می‌نامیم که اندازه‌اش برحسب درجه عددی گویا باشد. مثلثی را گویا می‌نامیم که همهٔ زاویه‌هایش گویا باشند. ثابت کنید درون هر مثلث حادهٔ گویا دست‌کم سه نقطهٔ متمایز وجود دارند که وقتی هر یک از آنها را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم سه مثلث گویا به‌دست می‌آوریم.

۲. دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر ضلعهای BC، CA و AB به‌ترتیب در نقطه‌های D، E و F مماس است. اگر $AD = BE = CF$، آیا نتیجه می‌شود که ABC متساوی‌الاضلاع است؟

۳. حداکثر چند اسب می‌توان روی صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ طوری قرار داد که هر یک از آنها حداکثر هفت اسب دیگر را تهدید کند؟

۴. روی تخته‌سیاه چهار عدد نوشته شده است. این عددها، به‌ترتیبی، برابرند با $x+y$، $x-y$، xy و $\frac{x}{y}$، که در آنها x و y عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید x و y به‌طور یکتا مشخص می‌شوند.

۵. K نقطه‌ای روی ضلع BC از مثلث ABC است. دایرهٔ محاطی مثلث BAK بر BC در نقطهٔ M مماس است. دایرهٔ محاطی مثلث CAK بر BC در نقطهٔ N مماس است. ثابت کنید $BM \times CN > KM \times KN$.

۶. دو نفر قالب پنیری را به روش زیر قطعه‌قطعه می‌کنند. آنها به نوبت یکی از قطعه‌های موجود را به دو قسمت می‌کنند، و این کار را ادامه می‌دهند تا اینکه پنج قطعه به‌دست بیاورند. سپس به نوبت و هر بار یک قطعه پنیر برمی‌دارند. کسی که اولین برش را انجام می‌دهد اولین قطعه را هم برمی‌دارد. هر یک از این دو نفر می‌خواهد تا جایی که ممکن است مقدار بیشتری پنیر به‌دست بیاورد. بهترین استراتژی برای هر کدام چیست و هر کدام قطعاً چه مقداری از پنیر را می‌تواند بردارد؟

۷. از دو مستطیل به تعداد کافی داریم. ثابت کنید اگر بتوانیم مستطیلی متشابه مستطیل اول را با چسباندن تعدادی از مستطیلهای دوم به‌دست بیاوریم، می‌توانیم با چسباندن تعدادی از مستطیلهای اول مستطیلی متشابه مستطیل دوم به‌دست بیاوریم (در هر دو مورد همپوشانی مستطیلها مجاز نیست).

سؤالهای دو سال آخر

سطح معمولی

۱. سه دایره از نقطهٔ X گذشته‌اند و نقطه‌های برخوردشان (به غیر از X) A، B و C هستند. فرض کنید A' دومین نقطهٔ برخورد خط راست AX و دایرهٔ محیطی مثلث BCX باشند. نقطه‌های B' و C' به‌همین ترتیب تعریف می‌شوند. ثابت کنید مثلثهای ABC'، $AB'C$ و $A'BC$ متشابه‌اند.

۲. در جعبه‌ای ۱۰۰ توپ وجود دارد که هر یک از آنها یا قرمز است یا آبی یا سفید. اگر ۲۶ توپ را به‌طور

تصادفی از جعبه بیرون بیاوریم، همواره ۱۰ توپ یکرنگ در میان آنها وجود دارد. کوچکترین عدد مانند N را طوری پیدا کنید که اگر، به‌طور تصادفی، N توپ بیرون بیاوریم حتماً ۳۰ توپ یکرنگ در میان آنها وجود داشته باشد.

۳. $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ایهایی‌اند که درجه‌شان مثبت است و به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x،

$$P\big(P(x)\big) = Q\big(Q(x)\big), \qquad P\big(P\big(P(x)\big)\big) = Q\big(Q\big(Q(x)\big)\big)$$

آیا لزوماً $P(x) = Q(x)$؟

۴. به چند طریق می‌توان ۲۰۰۴ را به‌شکل مجموع یک عدد طبیعی یا تعداد بیشتری عدد طبیعی که به‌طور غیرنزولی مرتب شده‌اند نوشت، به‌طوری که تفاضل جملهٔ آخر و جملهٔ اول حداکثر برابر با ۱ باشد؟

۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند N را طوری پیدا کنید که بتوان عددهای ۱، ۲، ... و N را طوری مرتب کرد که میانگین حسابی هیچ گروهی از دو یا تعداد بیشتری از عددهای پشت سر هم در میان آنها عددی طبیعی نباشد.

سطح پیشرفته

۱. دربارهٔ تابعهای f و g می‌دانیم که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی مانند x و y، $g\big(f(x)\big) = x$ و $f\big(g(y)\big) = y$. اگر به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $f(x) = kx + h(x)$، که در آن k مقداری ثابت و h تابعی متناوب است، ثابت کنید g را هم می‌توان به‌شکل مجموع تابعی خطی و تابعی متناوب نوشت.

۲. دو بازیکن به‌نوبت از ظرفی مهره بیرون می‌آورند. در هر حرکت، بازیکن اول باید یا ۱ مهره بیرون بیاورد یا ۱۰ مهره و بازیکن دوم باید یا m مهره بیرون بیاورد یا n مهره. کسی که نتواند حرکتی بکند می‌بازد. اگر بازیکن اول، بدون در نظرگرفتن تعداد اولیهٔ مهره‌ها، استراتژی برد داشته باشد، m و n را پیدا کنید.

۳. روی تخته‌سیاه چهار عدد نوشته شده است. این عددها، به‌ترتیبی، برابرند با $x+y$، $x-y$، xy و $\frac{x}{y}$، که در آنها x و y عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید x و y به‌طور یکتا مشخص می‌شوند.

۴. دایره‌ای به مرکز I درون دایرهٔ دیگری به مرکز O قرار دارد. AB وتری متغیر از دایرهٔ بزرگتر است که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث IAB را پیدا کنید.

۵. از دو مستطیل به تعداد کافی داریم. ثابت کنید اگر بتوانیم مستطیلی متشابه مستطیل اول را با چسباندن تعدادی از مستطیلهای دوم به‌دست بیاوریم، می‌توانیم با چسباندن تعدادی از مستطیلهای اول مستطیلی متشابه مستطیل دوم به‌دست بیاوریم (در هر دو مورد همپوشانی مستطیلها مجاز نیست).

۶. فرض کنید n عددی اول و فرد و بزرگتر از ۳ باشد. مثلثی را پذیرفتنی می‌نامیم که اندازهٔ هر یک از زاویه‌هایش به‌شکل $\frac{m}{n}180^\circ$ باشد، که در آن m عددی طبیعی است. در ابتدا مثلثی پذیرفتنی روی تخته وجود دارد. در هر حرکت می‌توان مثلثی از روی تخته انتخاب کرد و آن را به دو مثلث پذیرفتنی که متشابه با هیچ‌یک از مثلثهای روی تخته نیستند تقسیم کرد. دو مثلث جدید را هم به روی تخته برمی‌گردانیم. پس از مدتی دیگر نمی‌توان هیچ حرکتی کرد. ثابت کنید در این زمان، هر مثلث پذیرفتنی با مثلثی روی تخته متشابه است.

۷. از نقطهٔ O چهار نیمخط OA، OC، OB و OD، به‌همین ترتیب، طوری رسم شده‌اند که

$$\angle AOB = \angle COD$$

دایره‌ای که بر OA و OB مماس است دایره‌ای را که بر OC و OD مماس است در نقطه‌های E و F قطع کرده است. ثابت کنید $\angle AOE = \angle DOF$.

شانزدهمین المپیاد ریاضی آسیا-اقیانوسیه

مارس ۲۰۰۴

۱. همهٔ مجموعه‌های ناتهی و متناهی از عددهای طبیعی مانند S را طوری پیدا کنید که اگر i و j عضو S باشند،

$$\frac{i+j}{(i,j)}$$

هم عضو S باشد ((a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است).

۲. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABC باشد. ثابت کنید مساحت یکی از مثلثهای AOH، BOH و COH برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث دیگر.

۳. S مجموعه‌ای از ۲۰۰۴ نقطه در صفحه است که هیچ سه تایی از آنها روی یک خط نیستند. فرض کنید $\mathcal{L}$ مجموعهٔ همهٔ خطهایی باشد که از دو تا از نقطه‌های مجموعهٔ S می‌گذرند. ثابت کنید می‌توان نقطه‌های S را حداکثر با دو رنگ طوری رنگ کرد که به‌ازای هر دو نقطه در S مانند p و q، تعداد خطهایی در $\mathcal{L}$ که p و q را از هم جدا می‌کنند وقتی و فقط وقتی فرد است که p و q یکرنگ باشند.

۴. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\left\lfloor \frac{(n-۱)!}{n(n+۱)} \right\rfloor$$

عددی زوج است.

۵. ثابت کنید به‌ازای هر سه عدد حقیقی و مثبت مانند a، b و c،

$$(a^۲+۲)(b^۲+۲)(c^۲+۲) \geq ۹(ab+bc+ca)$$

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۳)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول اردیبهشت ۱۳۸۴ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۱۶. آیا می‌توان ۱۳۸۳ عدد طبیعی متمایز را طوری روی دایره‌ای قرار داد که هر دو تا از آنها را که انتخاب کنیم، نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر عددی اول باشد؟

۱۱۷. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که $m^۳+n$ و $n^۳+m$ بر $m^۲+n^۲$ بخش‌پذیر باشند.

۱۱۸. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر ۱۵ عدد طبیعی مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۱۵}$،

$$(a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_{۱۵}^n)a_۱a_۲\cdots a_{۱۵}$$

بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد.

۱۱۹. k و n عددهایی طبیعی‌اند و $n > ۲$. ثابت کنید معادلهٔ $x^n - y^n = ۲^k$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد.

۱۲۰. a، b، c، x، y و z عددهایی حقیقی و مثبت‌اند و

$$a + x = b + y = c + z = ۱$$

ثابت کنید

$$(abc + xyz)\left(\frac{۱}{ay} + \frac{۱}{bz} + \frac{۱}{cx}\right) \geq ۳$$

۱۲۱. همهٔ چندجمله‌ایها مانند $P(x)$ را طوری پیدا کنید که اگر $u+v$ عددی گویا باشد، $P(u)+P(v)$ هم عددی گویا باشد.

۱۲۲. همهٔ تابعها مانند $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ را طوری پیدا کنید که $f(-۱)=f(۱)$ و به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند m و n،

$$f(m) + f(n) = f(m + ۲mn) + f(n - ۲mn)$$

راه‌حل. ثابت می‌کنیم هر مجموعه‌ای که ویژگیهای موردنظر را داشته باشد یکی از مجموعه‌های

$$n, n, \ldots, n, \qquad ۳n, n, n, \ldots, n$$

است، که در آنها n عددی طبیعی است. بدون اینکه از کلی بودن اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که عددهای موردنظر مقسوم‌علیه مشترکی ندارند. اگر u، v، w، x و y پنج تا از این عددها باشند، آن‌وقت

$$u \mid u^۴ + v^۴ + w^۴ + x^۴, \qquad u \mid u^۴ + v^۴ + w^۴ + y^۴$$

درنتیجه $u \mid x^۴ - y^۴$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$v^۴ \equiv w^۴ \equiv x^۴ (\text{به‌پیمانهٔ } u)$$

بنابراین $u \mid ۳v^۴$. اگر u مقسوم‌علیه اولی به غیر از ۳ داشته باشد، نتیجه می‌گیریم که هر یک از عددهای دیگر هم بر این عدد اول بخش‌پذیرند، که خلاف فرضمان است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر u بر ۹ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت هر یک از عددهای دیگر هم بر ۳ بخش‌پذیرند. بنابراین همهٔ عددها یا برابر با ۱ هستند یا برابر با ۳. علاوه‌بر این، اگر یکی از عددها برابر با ۳ باشد، بقیهٔ عددها به‌پیمانهٔ ۳ همنهشت‌اند، بنابراین همهٔ آنها یا برابر با ۳ هستند (که با فرض تناقض دارد) یا برابر با ۱. اثبات کامل شده است.

۸۳. m و n عددهایی طبیعی‌اند و $m > n$. ثابت کنید

$$[m, n] + [m + ۱, n + ۱] > \frac{۲mn}{\sqrt{m - n}}$$

($[a, b]$ کوچکترین مضرب مشترک عددهای طبیعی a و b است.)

راه‌حل. توجه کنید که اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b برابر با (a, b) باشد،

$$[a, b](a, b) = ab$$

بنابراین باید ثابت کنیم

$$\frac{mn}{(m, n)} + \frac{(m + ۱)(n + ۱)}{(m + ۱, n + ۱)} \geq \frac{۲mn}{\sqrt{m - n}}$$

بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\frac{mn}{(m, n)} + \frac{(m + ۱)(n + ۱)}{(m + ۱, n + ۱)} \geq ۲\sqrt{\frac{m(m + ۱)n(n + ۱)}{(m, n)(m + ۱, n + ۱)}}$$

$$> \frac{۲mn}{\sqrt{(m, n)(m + ۱, n + ۱)}} \qquad (*)$$

توجه کنید که

$$(m,n) \mid m-n, \qquad (m+۱,n+۱) \mid m-n$$

درنتیجه، چون (m,n) و $(m+۱,n+۱)$ نسبت به هم اول‌اند،

$$(m,n)(m+۱,n+۱) \mid m-n$$

یعنی

$$m-n \geq (m,n)(m+۱,n+۱)$$

بنابراین حکم موردنظر از نابرابری $(*)$ به‌دست می‌آید.

۸۴. a، b، c و d عددهایی در بازهٔ $[۰,۱]$اند. ثابت کنید عددی مانند x در بازهٔ $[۰,۱]$ وجود دارد که

$$\frac{۱}{|x-a|}+\frac{۱}{|x-b|}+\frac{۱}{|x-c|}+\frac{۱}{|x-d|}<۴۰$$

راه‌حل. اگر نقطه‌های ۰، $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۳}{۸}$، $\frac{۵}{۸}$، $\frac{۷}{۸}$ و ۱ از بازهٔ $[۰,۱]$ حذف شوند، پنج بازهٔ غیرهمپوشان باقی می‌مانند: طول دو تا از این بازه‌ها برابر با $\frac{۱}{۸}$ است و طول بقیهٔ آنها برابر با $\frac{۱}{۴}$ است. معلوم است که یکی از این بازه‌ها شامل هیچ‌یک از عددهای a، b، c و d نیست. این بازه را I بنامید.

فرض کنید x نقطه‌ای از I (یا یکی از دو سر آن) باشد و اگر طول I برابر با $\frac{۱}{۸}$ باشد، یکی از نقطه‌های ۰ یا ۱ باشد، و در غیر این صورت نقطهٔ وسط I باشد. در این صورت چون a، b، c و d در I نیستند،

$$|x-a| \geq \frac{۱}{۸}, \quad |x-b| \geq \frac{۱}{۸}, \quad |x-c| \geq \frac{۱}{۸}, \quad |x-d| \geq \frac{۱}{۸}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{|x-a|}+\frac{۱}{|x-b|}+\frac{۱}{|x-c|}+\frac{۱}{|x-d|} \leq ۳۲ < ۴۰$$

۸۵. a و b عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\sqrt[۳]{\frac{a}{b}}+\sqrt[۳]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[۳]{۲(a+b)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)}$$

راه‌حل اول. اگر دو طرف نابرابری موردنظر را در $\sqrt[۳]{ab}$ ضرب کنیم معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم

$$\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{b^۲} \leq \sqrt[۳]{۲(a+b)^۲}$$

یا اگر $\sqrt[۳]{a}=x$ و $\sqrt[۳]{b}=y$ $(x,y>۰)$،

$$x^۲+y^۲ \leq \sqrt[۳]{۲(x^۳+y^۳)^۲}$$

بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$3x^4y^2 \le x^6 + x^3y^3 + x^3y^3, \qquad 3x^2y^4 \le y^6 + x^3y^3 + x^3y^3$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع و به دو طرف نابرابری به‌دست آمده $x^6 + y^6$ را اضافه کنیم معلوم می‌شود که

$$x^6 + y^6 + 3x^2y^2(x^2 + y^2) \le 2(x^6 + y^6 + 2x^3y^3)$$

یا

$$(x^2 + y^2)^3 \le 2(x^3 + y^3)^2$$

بنابراین

$$x^2 + y^2 \le \sqrt[3]{2(x^3 + y^3)^2}$$

راه‌حل دوم. بنابر نابرابری میانگین توان‌دار،

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2}\right)^2$$

نابرابری موردنظر از این نابرابری و تساوی

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

به‌دست می‌آید.

۸۶. $P(x)$ چندجمله‌ایی است که ضریبهایش عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید اگر نابرابری

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \ge \frac{1}{P(x)}$$

به‌ازای $x = 1$ درست باشد، به‌ازای هر عدد مثبت مانند x هم درست است.

راه‌حل. فرض کنید

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

در این صورت، اگر x عددی مثبت باشد، از نابرابری کشی-شوارتز نتیجه می‌شود

$$P(x)P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{a_k x^k}\right)^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{a_k x^{-k}}\right)^2\right) \ge \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^2$$

چون $P(1) \geq 1$، حکم موردنظر به‌دست می‌آید.

۸۷. ۹ خط راست مربعی را قطع کرده‌اند و هر یک از آنها این مربع را به دو چهارضلعی تقسیم کرده است که نسبت مساحتهایشان $\frac{2}{3}$ است. ثابت کنید دست‌کم سه تا از این خطهای راست از یک نقطه می‌گذرند.

راه‌حل. معلوم است که هر یک از خطهای موردنظر مربع را به دو ذوزنقه تقسیم کرده است که نسبت مساحت آنها $\frac{2}{3}$ است. بنابراین هر یک از این خطها از یکی از چهار نقطه‌ای گذشته است که پاره‌خطهایی که وسطهای دو ضلع روبه‌روی هم در مربع را به هم وصل می‌کنند به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌کنند. درنتیجه، دست‌کم سه تا از خطهای موردنظر از یکی از این چهار نقطه می‌گذرند.

۸۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$، $\angle BCD = \angle CDA$ و نیمساز زاویهٔ ABC ضلع CD را در نقطهٔ E قطع کرده است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی $\angle AEB = 90^\circ$ که $AB = AD + BC$.

راه‌حل. فرض کنید $\angle AEB = 90^\circ$. در این صورت $\angle CEB < 90^\circ$ و نقطه‌ای مانند F روی ضلع AB وجود دارد که

$$\angle BEF = \angle BEC$$

بنابراین مثلثهای BEC و BEF همنهشت‌اند و درنتیجه $BC = BF$ و

$$\angle BFE = \angle BCE$$

از طرف دیگر

$$\frac{AE}{\sin \angle AFE} = \frac{AF}{\sin \angle AEF}, \qquad \frac{AE}{\sin \angle ADE} = \frac{AD}{\sin \angle AED} \qquad (*)$$

چون

$$\angle AED = \angle AEF, \qquad \angle AFE + \angle ADE = 180^\circ$$

پس $AF = AD$ و درنتیجه $AB = AD + BC$.

اکنون فرض کنید $AB = AD + BC$. نقطه‌ای مانند F روی پاره‌خط AB وجود دارد که $AF = AD$ و $BF = BC$. بنابراین مثلثهای BFE و BCE همنهشت‌اند و درنتیجه

$$\angle BFE = \angle BCE, \qquad \angle BEF = \angle BEC$$

بنابراین از تساویهای $(*)$ و تساوی $AF = AD$ نتیجه می‌شود که

$$\sin \angle AED = \sin \angle AEF$$

چون $\angle AED + \angle AEF < 180^\circ$، پس $\angle AED = \angle AEF$ و درنتیجه $\angle AEB = 90^\circ$.

۸۹. n عدد حقیقی داریم که دست‌کم یکی از آنها غیر صفر است و مجموعشان برابر با صفر است. ثابت کنید جایگشتی از این عددها مانند a_1، a_2، ... و a_n وجود دارد که

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0$$

راه‌حل. فرض کنید عددهای موردنظر (به‌ترتیب دلخواهی) b_1، b_2، ... و b_n باشند. به‌ازای هر جایگشت از $\{1, 2, \ldots, n\}$ مانند π، مجموع

$$b_{\pi(1)}b_{\pi(2)} + b_{\pi(2)}b_{\pi(3)} + \cdots + b_{\pi(n-1)}b_{\pi(n)} + b_{\pi(n)}b_{\pi(1)}$$

را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ثابت کنیم که دست‌کم یکی از این مجموعها منفی است. فرض کنید چنین نباشد. به‌ازای دو عدد متمایز مانند i و j در مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$، جملهٔ b_ib_j، N بار در میان این مجموعها ظاهر شده است، که بنابر تقارن، N به i و j بستگی ندارد (و درحقیقت $(N = n(n-2)!)$).
چون هر یک از مجموعهای موردنظر غیرمنفی است، اگر همهٔ آنها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود که

$$\sum_{i \neq j} b_ib_j \geq 0$$

از طرف دیگر $\sum_i b_i^2 > 0$. بنابراین

$$(b_1 + \cdots + b_n)^2 = \sum_i b_i^2 + \sum_{i \neq j} b_ib_j > 0$$

و چون $b_1 + \cdots + b_n = 0$، به تناقض رسیده‌ایم.

۹۰. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۲۱ را در خانه‌های جدولی 11×11 طوری نوشت که هر دو عدد متوالی در خانه‌هایی نوشته شده باشند که ضلعی مشترک دارند و عددهایی که مربع کامل‌اند در یک ستون نوشته شده باشند؟

راه‌حل. خیر، نمی‌توان. اگر بتوان چنین کاری را کرد، مسیری که از خانه‌های جدول به‌ترتیب عددهای نوشته شده در آنها می‌گذرد، ستون موردنظر را فقط در خانه‌هایی قطع می‌کند که در آنها مربعی کامل نوشته شده است. بنابراین عددهای بین 1^2 و 2^2 در یک طرف این ستون نوشته شده‌اند، عددهای بین 2^2 و 3^2 در طرف دیگر این ستون نوشته شده‌اند و همین‌طور تا آخر. اما در این صورت تعداد ستونهایی که در طرفی قرار دارند که ۲ نوشته شده است برابر است با

$$\frac{2^2 - 1^2 - 1 + 4^2 - 3^2 - 1 + \cdots + 10^2 - 9^2 - 1}{11} = \frac{2 + 6 + 10 + 14 + 18}{11}$$

که عددی طبیعی نیست.

تورنمنت شهرها

فروزان خردپژوه

تورنمنت شهرها ۱۹۸۴ـ ۱۹۸۰، مؤلف: پ. ج. تیلور، مترجم: ارشک حمیدی، ویراستار: بردیا حسام، سال انتشار: ۱۳۸۲، تعداد صفحات: ۱۳۳

تورنمنت شهرها ۱۹۸۹ـ ۱۹۸۴، مؤلف: پ. ج. تیلور، مترجم: ارشک حمیدی، ویراستار: بردیا حسام، سال انتشار: ۱۳۸۳، تعداد صفحات: ۲۱۴

«تورنمنت شهرها» مسابقه‌ای است که از سال ۱۹۸۰، به‌شیوه‌ای نه چندان متعارف در اتحاد جماهیر شوروی سابق برگزار می‌شود و به‌تدریج، شهرهایی از کشورهای مختلف هم به آن پیوسته‌اند. شرح نسبتاً کاملی دربارهٔ این مسابقه در شمارهٔ اسفند ۸۱ نشریهٔ ریاضیات آمده است.

در ایران در حال حاضر فقط شهر اصفهان است که از سال ۱۳۸۱ به‌طور رسمی در این مسابقه شرکت می‌کند. این مسابقه در اصفهان به‌همت خانهٔ ریاضیات اصفهان برگزار می‌شود و با توجه به تفاهم کمیتهٔ مرکزی مسابقات و کمیتهٔ برگزاری در خانهٔ ریاضیات اصفهان، دانش‌آموزان اصفهانی به‌صورت تیمی در این مسابقه شرکت می‌کنند.

در دو سال اخیر با توجه به افزایش تعداد تیمهای داوطلب، این مسابقه که به‌نام مسابقهٔ تیمی خانهٔ ریاضیات اصفهان معروف است در دو مرحله برگزار می‌شود. در سال جاری، مرحلهٔ اول را انجمن علمی آموزشی معلمان

با همکاری گروههای آموزشی مناطق مختلف استان اصفهان برگزار کرده است. همکاری دبیران ریاضی و انجمن علمی آموزشی معلمان ریاضی استان اصفهان در برگزاری مرحلهٔ اول بسیار موفقیت‌آمیز بوده است و جلوه‌های زیبایی از توانمندی معلمان را در انجام آزمونهایی از این دست متجلی ساخته است.

مسأله‌های این مسابقه، به‌نوعی نشان‌دهندهٔ سنت ریاضیات مقدماتی روسی‌اند: مسأله‌هایی که حلشان، بیش از اینکه به ابزار و روشهای پیچیده نیاز داشته باشد، محتاج ایده‌های ناب اما کم و بیش ساده‌اند. مجموعهٔ این مسأله‌ها، به‌همراه حلشان، در چند مجلد توسط دکتر پیتر تیلور، استاد ریاضی دانشگاه کانبرا و رئیس بنیاد ریاضی استرالیا جمع‌آوری و چاپ شده است.

خوشبختانه، مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی اقدام به انتشار ترجمهٔ این مجموعه کرده است و تاکنون دو مجلد از این مجموعه را منتشر کرده است. انتشار ترجمهٔ فارسی این اثر، فرصت مناسبی را برای آشنایی خوانندگان علاقه‌مند فارسی‌زبان با این نوع مسأله‌ها فراهم می‌آورد و به‌علاوه، منبعی غنی از مسأله‌های جذاب در سطح ریاضیات دبیرستانی را در اختیار دانش‌آموزان و دبیران قرار می‌دهد.

به‌عنوان حسن ختام، در پایان چند نمونه از مسأله‌های این مجموعه را آورده‌ایم.

۱. ثابت کنید هر عدد حقیقی و مثبت را می‌توان به‌شکل مجموع نُه عدد نوشت که نمایش اعشاری آنها فقط از رقمهای ۰ و ۷ تشکیل شده است. (۱۹۸۱، اِ. تورکویچ)

۲. دنبالهٔ

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \dots$$

را در نظر بگیرید.

الف) آیا می‌توان از جمله‌های این دنباله تصاعدی حسابی به طول ۵ تشکیل داد؟

ب) آیا می‌توان از جمله‌های این دنباله تصاعدی حسابی به طول بیشتر از ۵ تشکیل داد؟

(۱۹۸۲، گ. گالپرین)

۳. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند n،

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[۳]{n}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_۲ n\rfloor + \cdots + \lfloor\log_۳ n\rfloor + \cdots + \lfloor\log_n n\rfloor$$

(۱۹۸۲، و. و. کیسیل)

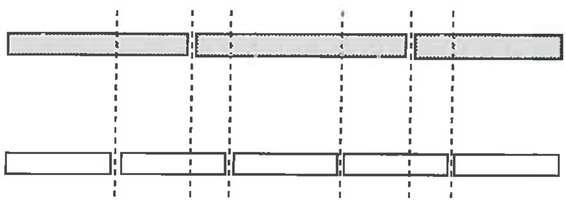
۴. شش‌ضلعی منتظمی را به n متوازی‌الاضلاع با مساحتهای برابر بریده‌ایم. ثابت کنید n بر سه بخش‌پذیر است.
(۱۹۸۹، و. پراسلوف و ای. شاریگین)

۵. مکعبی ۲۰ × ۲۰ × ۲۰ از ۲۰۰۰ قوطی ۱ × ۲ × ۲ تشکیل شده است. ثابت کنید می‌توان به مکعب سوزنی فرو کرد که از آن بگذرد اما از هیچ‌یک از قوطیها نگذرد. (۱۹۸۸، ا. اندیانس)

راه‌حلها

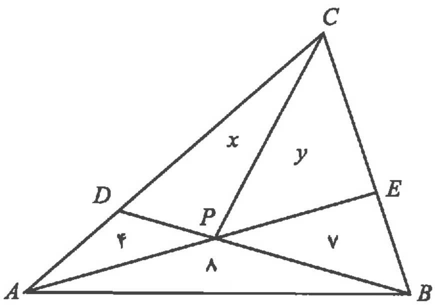
از باب تفریح

۱. بله، می‌توان. تکه‌چوبها را طوری چسبیده به هم قرار دهید که دو سطر موازی تشکیل دهند، یکی قرمز و دیگری آبی. سپس هر یک از سطرها را در امتداد خطهای عمودی که از شکافهای میان تکه‌چوبهای سطر دیگر می‌گذرند ببرید.



۲. حداکثر ۱۹۹۹۹۹۹۹۹۹. فرض کنید a و b دو عدد بزرگتر از ۱ میان عددهای موردنظر باشند. اگر به‌جای یکی از این عددها ab و به‌جای دیگری ۱ بگذاریم، حاصل‌ضرب عددها تغییر نمی‌کند، اما مجموعشان بزرگتر می‌شود، زیرا از $(a-1)(b-1) > 0$ نتیجه می‌شود $ab + 1 > a + b$. بنابراین بیشترین مقدار مجموع عددهای موردنظر وقتی به‌دست می‌آید که یکی از آنها برابر با یک میلیارد باشد و بقیه برابر با ۱ باشند.

۳. مانند شکل زیر فرض کنید مساحت مثلث CPD برابر با x و مساحت مثلث CPE برابر با y باشد.



توجه کنید که چون ارتفاعهای نظیر رأس B در مثلثهای APB و BPE برابر است، پس

$$\frac{S_{APB}}{S_{BPE}} = \frac{AP}{PE}$$

یعنی $\frac{AP}{AE} = \frac{۸}{۷}$. از طرف دیگر، چون ارتفاعهای نظیر رأس C در مثلثهای APC و CPE برابر است، پس

$$\frac{S_{APC}}{S_{CPE}} = \frac{AP}{PE} = \frac{۸}{۷}$$

بنابراین

$$\frac{x+۴}{y} = \frac{۸}{۷}$$

به‌همین ترتیب، با در نظر گرفتن مثلثهای CPD و CPB معلوم می‌شود

$$\frac{x}{y+۷} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

اگر دستگاه معادله‌های به‌دست آمده را حل کنیم معلوم می‌شود $x = \frac{۲۸}{۳}$ و $y = \frac{۳۵}{۳}$. بنابراین $x + y = ۲۱$.

۴. توجه کنید که ۵ و ۵۱ + ۴۹ مضرب ۵اند، پس اگر در حرکت اول دو کپهٔ بزرگتر را یکی کنیم، تعداد خرده‌سنگهای هر کپه که از آن پس به‌دست می‌آید، مضرب ۵ است. از طرف دیگر، ۴۹ + ۵ و ۵۱ مضرب ۳اند، پس اگر در حرکت اول کپه‌هایی را که ۵ خرده‌سنگ و ۴۹ خرده‌سنگ دارند یکی کنیم، از آن پس تعداد خرده‌سنگهای کپه‌ها همواره مضرب ۳ است. اگر در حرکت اول کپه‌هایی را که ۵ خرده‌سنگ و ۵۱ خرده‌سنگ دارند یکی کنیم، چون ۴۹ و ۵۱ + ۵ مضرب ۷اند، پس از آن تعداد خرده‌سنگهای همهٔ کپه‌ها همواره مضرب ۷ است. بنابراین هیچ‌گاه به وضعیتی نمی‌رسیم که ۱۰۵ کپه داشته باشیم که هر کدام یک خرده‌سنگ دارد.

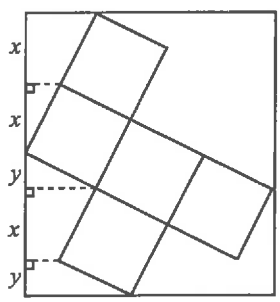
۵. با نمادگذاری شکل زیر معلوم می‌شود که

$$۸ = ۳x + ۲y$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$۷ = ۳x + y$$

بنابراین $x = ۲$ و $y = ۱$. پس طول ضلع هر یک از مربعها برابر است با $\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}$ یا $\sqrt{۵}$.



شانزدهمین المپیاد ریاضی آسیا-اقیانوسیه

۱. فرض کنید مجموعهٔ S ویژگیهای موردنظر را داشته باشد و $k \in S$. در این صورت

$$\frac{k+k}{(k,k)} = ۲$$

پس ۲ عضو S است. فرض کنید M بزرگترین عدد فرد در S باشد. در این صورت

$$\frac{M+۲}{(M,۲)} = M+۲$$

پس $M + ۲$ هم عضو S است، که تناقض است، زیرا $m + ۲$ عددی فرد است که از M بزرگتر است. بنابراین عضوهای S عددهایی زوج‌اند.

فرض کنید m کوچکترین عضو S باشد که از ۲ بزرگتر است. اگر $m = ۲n$، آن‌وقت

$$\frac{m+۲}{(m,۲)} = n+۱$$

پس $n + ۱$ عضو S است. چون $n > ۱$، پس $۲n > n + ۱$ و درنتیجه $۲n = ۲$، یعنی $n = ۱$، که تناقض است. پس تنها عضو S، ۲ است. معلوم است که اگر $S = \{۲\}$، مجموعهٔ S ویژگیهای موردنظر را دارد. بنابراین فقط یک مجموعه با ویژگیهای موردنظر وجود دارد: $S = \{۲\}$.

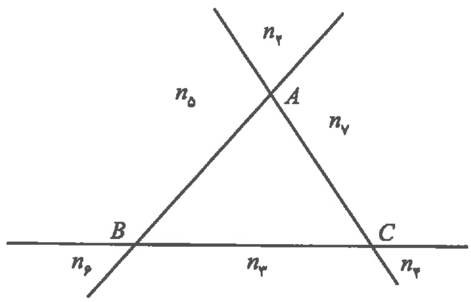
۲. فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد. توجه کنید که OH خط اویلر مثلث ABC است و درنتیجه G روی OH قرار دارد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که A در یک طرف خط OH قرار دارد و B و C در طرف دیگر. فرض کنید M وسط BC باشد. در این صورت طول پاره‌خط عمود از M بر OH با میانگین طولهای پاره‌خطهای عمود از B و C بر OH برابر است. بنابراین، اگر $\angle MGO = \alpha$،

$$S_{BOH} + S_{COH} = OH \times GM \sin\alpha = OH \times \frac{AG}{۲}\sin\alpha = S_{AOH}$$

۳. فرض کنید d_{XY} تعداد خطهایی در $\mathcal{L}$ باشد که X و Y را از هم جدا می‌کنند. نقطه‌ای مانند X انتخاب و آن را آبی کنید. سپس نقطه‌ای مانند Y را وقتی و فقط وقتی آبی کنید که d_{XY} عددی فرد باشد. این طرح وقتی درست از آب درمی‌آید که به‌ازای هر سه نقطه مانند A، B و C، $d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}$ عددی فرد باشد.

خطهایی را در نظر بگیرید که از درون یکی از پاره‌خطهای AB، BC و CA یا تعداد بیشتری از آنها می‌گذرند. هیچ‌یک از این خطها از هر سه این پاره‌خطها نمی‌گذرد. اگر خطی از دو تا از این پاره‌خطها بگذرد، هیچ تأثیری در زوجیت $d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}$ ندارد. بنابراین خطهایی را در نظر بگیرید که از A و (درون) پاره‌خط BC می‌گذرند، و همین‌طور در مورد نقطه‌های B و C. فرض کنید $n_۱$، $n_۲$، ... و $n_۷$ تعداد نقطه‌ها

(بجز A، B و C) در ناحیه‌های مختلف باشند (شکل را ببینید).



تعداد خطهایی که از A و BC می‌گذرند برابر است با $n_۱ + n_۲ + n_۳$. بنابراین

$$d_{AB} + d_{BC} + d_{CA} = (n_۱ + n_۴ + n_۵) + (n_۱ + n_۲ + n_۳) + (n_۱ + n_۶ + n_۷)$$
$$\equiv n_۱ + n_۲ + n_۳ + n_۴ + n_۵ + n_۶ + n_۷$$
$$= (۲۰۰۴ - ۳) \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

۴. اگر $n \leq ۵$، آن‌وقت

$$\left\lfloor \frac{(n-۱)!}{n(n+۱)} \right\rfloor = ۰$$

فرض کنید $n \geq ۶$. اگر n و $n+۱$ مرکب باشند، هر دو $(n-۱)!$ را می‌شمارند، و چون نسبت به هم اول‌اند،

$$n(n+۱) \mid (n-۱)!$$

توجه کنید که دقیقاً یکی از عددهای n و $n+۱$ عددی زوج است. اگر $m \geq ۶$، نمای بزرگترین توان ۲ که $(m-۲)!$ را می‌شمارد از نمای بزرگترین توان ۲ که m را می‌شمارد بزرگتر است. پس

$$\frac{(n-۱)!}{n(n+۱)}$$

عددی زوج است.

فرض کنید n عددی اول باشد و $k = \frac{(n-۱)!}{n+۱}$. در این صورت k عددی زوج است، پس $k+۱$ عددی فرد است. بنابر قضیهٔ ویلسون،

$$k(n+۱) \equiv -۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } n)$$

درنتیجه $\frac{k+۱}{n}$ عددی طبیعی و فرد است. بنابراین از تساوی

$$\left\lfloor \frac{(n-۱)!}{n(n+۱)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = \frac{k+۱}{n} - ۱$$

نتیجه می‌شود که حکم درست است.

فرض کنید $n+۱$ عددی اول باشد. در این صورت n عددی مرکب است و درنتیجه $n \mid (n-۱)!$.
فرض کنید
$$k = \frac{(n-۱)!}{n}$$
بنابر قضیهٔ ویلسون،
$$(n-۱)! \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } n+۱)$$
درنتیجه
$$kn \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } n+۱)$$
و
$$k \equiv -۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } n+۱)$$
پس $\frac{k+۱}{n+۱}$ عددی طبیعی است. اما k عددی زوج است، پس $k+۱$ و درنتیجه $\frac{k+۱}{n+۱}$ عددی فرد است.
اکنون توجه کنید که
$$\left\lfloor \frac{(n-۱)!}{n(n+۱)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k}{n+۱} \right\rfloor = \frac{k+۱}{n+۱} - ۱$$
پس حکم درست است.

۵. توجه کنید که
$$\begin{aligned}(a^۲+۲)(b^۲+۲)(c^۲+۲) &= \left((abc)^۲+۱+۱\right) + a^۲+b^۲+c^۲+۳(a^۲+b^۲+c^۲) \\ &\quad + ۲\left(((ab)^۲+۱)+((bc)^۲+۱)+((ca)^۲+۱)\right) \\ &\geq ۳\sqrt[۳]{(abc)^۲} + a^۲+b^۲+c^۲ \\ &\quad + ۳(ab+bc+ca) + ۴(ab+bc+ca)\end{aligned}$$
اکنون توجه کنید که اگر از نابرابری معروف
$$x^۳+y^۳+z^۳+۳xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$
و نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود
$$x^۳+y^۳+z^۳+۳xyz \geq ۲\left((xy)^{\frac{۳}{۲}}+(yz)^{\frac{۳}{۲}}+(zx)^{\frac{۳}{۲}}\right)$$
بنابراین، اگر فرض کنیم $x=a^{\frac{۲}{۳}}$، $y=b^{\frac{۲}{۳}}$ و $z=c^{\frac{۲}{۳}}$، به‌دست می‌آید
$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\sqrt[۳]{(abc)^۲} \geq ۲(ab+bc+ca)$$
به این ترتیب
$$(a^۲+۲)(b^۲+۲)(c^۲+۲) \geq ۲(ab+bc+ca)+۷(ab+bc+ca) = ۹(ab+bc+ca)$$

تئوری ریاضی موسیقی

پیام سراجی و امیرحسین دامادی

قسمت دوم:

گام فیثاغورث:

همانطورکه در قسمت قبل مشاهده شد، درگام معتدل توانستیم با داشتن فرکانس نت ابتدایی گام، فرکانس سایر نتها را محاسبه کنیم. اما درگام فیثاغورث همین کار را با روش دیگری انجام می‌دهیم.

ابتدا یادآوری می‌کنیم که فرکانس هر نت در اکتاو بعد دقیقاً دو برابر فرکانس همان نت در اکتاو قبل است.

حال اگر نت ابتدای گام را نت Do گرفته و عدد ۱ را به آن نسبت دهیم، طبیعتاً نت Doی اکتاو بعد عدد ۲ را به خود اختصاص خواهد داد. (یک و دو به‌منزلهٔ نسبت فرکانسهای مربوط به این دو نت هستند).

حال درگام فیثاغورث عدد $\frac{۳}{۲}$ را به نت Sol و $\frac{۴}{۳}$ را به نت Fa نسبت می‌دهیم (به فاصلهٔ $\frac{۳}{۲}$ «پنجم درست» و به فاصلهٔ $\frac{۴}{۳}$ «چهارم درست» گوییم).

پنجم درست

DO Re Mi Fa Sol La Si DO

$\frac{۴}{۳}$ $\frac{۳}{۲}$

چهارم درست

شکل ۴

از این دو نسبت، نسبتهای مربوط به سایر نتها را با روش زیر به‌دست می‌آوریم:

نت Sol ۳٫۵ پرده (= یک فاصله پنجم درست) از نت Doی ابتدای گام فاصله دارد و فرکانسش $\frac{۳}{۲}$ برابر آن است (مطابق شکل زیر):

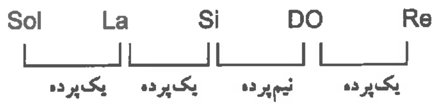
یک‌پرده یک‌پرده نیم‌پرده یک‌پرده

DO Re Mi Fa Sol La Si DO

۱ $\frac{۳}{۲}$ ۲

شکل ۵

ضمناً فاصلهٔ نت Sol تا نت Reی اکتاو بعد نیز ۳٫۵ پرده است (مطابق شکل صفحهٔ بعد):



شکل ۶

پس

$$\frac{\text{Sol}}{\text{Do}} = \frac{\text{اکتاو بعد Re}}{\text{Sol}}$$

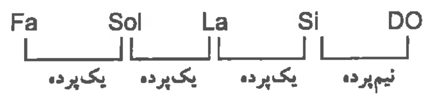
و در نتیجه فرکانس نت Re اکتاو بعد $\frac{۳}{۲}$ برابر فرکانس نت Sol اکتاو قبل یعنی برابر $\frac{۹}{۴} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲}$ می‌شود. بنابراین فرکانس Re اکتاو قبل برابر نصف این مقدار یعنی $\frac{۹}{۸} = ۲ \div \frac{۹}{۴}$ می‌شود. به‌طورکلی در این نحوهٔ چیدن گام، برای به‌دست آوردن فرکانس نتی که در فاصلهٔ پنجم درست بعد از یک نت قرار دارد، باید فرکانس نت ابتدایی را در عدد $\frac{۳}{۲}$ ضرب کرد. در قدم دوم، فرکانس نت La (که ۳/۵ پرده بعد از نت Re قرار دارد) برابر $\frac{۲۷}{۱۶} = \frac{۹}{۸} \times \frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید و با تکرار این روند نسبتهای مربوط به کلیهٔ نتها در یک گام بالارونده، به‌دست می‌آید.

در جدول زیر این نسبتها نشان داده شده‌اند.

Do	Do♯	Re	Re♯	Mi	Mi♯	Fa♯	Sol	Sol♯	La	La♯	Si	Si♯
۱	$\frac{۳^{۷}}{۲^{۱۱}}$	$\frac{۹}{۸}$	$\frac{۹}{۸} \times \frac{۳^{۷}}{۲^{۱۱}}$	$\left(\frac{۹}{۸}\right)^{۲}$	$\left(\frac{۹}{۸}\right)^{۲} \times \frac{۳^{۷}}{۲^{۱۱}}$	$\left(\frac{۹}{۸}\right)^{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲} \times \frac{۳^{۷}}{۲^{۱۱}}$	$\frac{۳}{۲} \times \frac{۹}{۸}$	$\frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۳^{۷}}{۲^{۱۱}}$	$\frac{۳}{۲} \times \left(\frac{۹}{۸}\right)^{۲}$	$\frac{۳^{۱۲}}{۲^{۸}}$

البته در مرحلهٔ آخر به نت Si♯ می‌رسیم که ظاهراً باید همان نت Do باشد. ولی نسبت (Si♯/Do) کمی بیشتر از یک است. به این مقدار «کمای فیثاغورثی» می‌گوییم که مقدار آن برابر $۱٫۰۱۲ \approx \frac{۳^{۱۲}}{۲^{۱۹}}$ و تقریباً برابر $\frac{۱}{۹}$ پرده است.

اگر روند فوق را به‌صورت قرینه انجام دهیم، یعنی از ۱ شروع کرده، ولی به‌جای ضربهای متوالی در $\frac{۳}{۲}$ تقسیمهای متوالی بر $\frac{۳}{۲}$ انجام دهیم، مجدداً ۱۲ نت گام به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال اگر از نت Do سه‌ونیم پرده عقب برویم به نت Fa می‌رسیم:



شکل ۷

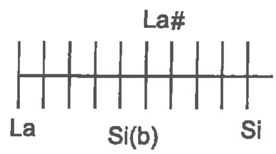
پس فرکانس Fa برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}}$ می‌شود (و فرکانس Fa در اکتاو بعد $\frac{۴}{۳} = ۲ \times \frac{۲}{۳}$ خواهد بود). با ادامهٔ این روند، نسبتهای سایر درجات در یک گام پایین‌رونده به‌دست می‌آیند (مطابق جدول زیر):

$Re_{\flat\flat}$	$Re_{\flat}$	$Mi_{\flat\flat}$	$Mi_{\flat}$	$Fa_{\flat}$	Fa	$Sol_{\flat}$	$La_{\flat\flat}$	$La_{\flat}$	$Si_{\flat\flat}$	$Si_{\flat}$	$Do_{\flat}$	Do
$\frac{۲^{۱۸}}{۳^{۱۲}}$	$\frac{۲^{۷}}{۳^{۵}}$	$\frac{۲^{۱۵}}{۳^{۱۰}}$	$\frac{۲^{۴}}{۳^{۳}}$	$\frac{۲^{۱۳}}{۳^{۸}}$	$\frac{۲}{۳}$	$\left(\frac{۸^{۳}}{۹}\right)$	$\frac{۲^{۱۷}}{۳^{۱۱}}$	$\left(\frac{۸}{۹}\right)^{۲}$	$\frac{۲^{۶}}{۳^{۴}}$	$\frac{۸}{۹}$	$\frac{۲^{۱۱}}{۳^{۷}}$	۱

از مقایسهٔ این جدول با جدول قبل نمایان است که برخلاف گام معتدل که در آن نسبتهای نیم‌پردهٔ بعد (دییز) و نیم‌پردهٔ قبل (بِمُل) با هم برابر بودند، این نسبتها درگام فیثاغورث با هم برابر نیستند و دقیقاً یک کمای فیثاغورثی با هم اختلاف دارند. برای مثال $La\sharp \neq Si\flat$ چون

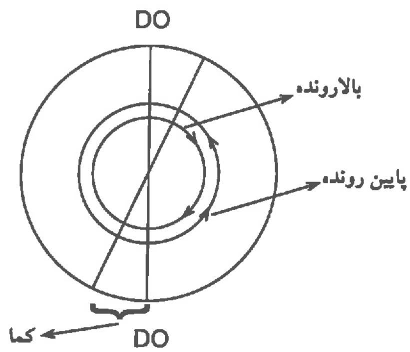
$$\frac{La\sharp}{Si\flat}=\frac{\frac{۳^{۱۰}}{۲^{۱۵}}}{\frac{۲^{۴}}{۳^{۲}}}=\frac{۳^{۱۲}}{۲^{۱۹}}=\text{یک کمای فیثاغورثی}$$

درواقع $La\sharp$ تقریباً ۵ کما از La، ولی $Si\flat$ تقریباً ۴ کما از La فاصله دارد.



شکل ۸

یکی از زیباییهای گام فیثاغورث این است که در یک رفت و برگشت کامل می‌شود. یعنی اگر از یک نت مثلاً Do شروع کنیم و فقط روش بالارونده را اعمال کنیم، هرگز مجدداً به یک نت Do نخواهیم رسید (که علت آن کمای فیثاغورثی است) ولی چنانچه هر دو روش را اعمال کنیم این امر امکان‌پذیر می‌شود.



شکل ۹

مقایسهٔ گام فیثاغورث و گام معتدل

با مشاهدهٔ نسبتهای گام فیثاغورث و گام معتدل، دیده می‌شود که تنها اشتراک این دو گام در نسبتهای نت Do است. چون نسبتهای مربوط به سایر نتها درگام معتدل اعدادی گنگ ولی درگام فیثاغورث اعدادی گویا هستند.[۱]

۱. جالب است که اولین کسانی که به وجود اعداد گنگ پی بردند نیز فیثاغورثیان بودند و گویی ارتباطی بین تحقیقات آنها در تئوری موسیقی و این مطالب وجود دارد.

حال انتظار می‌رود گام معتدل، که براساس نسبتهای گنگ است برای گوش ناخوشایند باشد ولی آزمایش با کامپیوتر نشان می‌دهد که برای گوش گام معتدل تفاوت محسوسی با گام فیثاغورث ندارد. دلیل این موضوع ساده است: برای مثال نسبت Sol درگام معتدل برابر $۱٫۴۹۸ \cong \sqrt[۱۲]{۲^۷}$ است و درگام فیثاغورث برابر $۱٫۵ = \frac{۳}{۲}$ است. همانطورکه مشاهده می‌کنید اختلاف این دو عدد کمتر از ۰٫۰۰۲ است و این تفاوت برای گوش آنچنان محسوس نیست. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که برای سایر نتها هم وضعیت مشابه است. این آزمایش شاید این تردید را ایجاد کند که نسبتهای واقعی موسیقیایی همان نسبتهای گام معتدل باشند نه آنچه گام فیثاغورث بیان می‌کند. ولی همانطورکه مشاهده کردیم نسبتهای گام فیثاغورث اعدادی گویا هستند و نسبتهای گام معتدل، به‌استثنای نسبت $\left(\frac{۲}{۱}\right)$ اعدادی گنگ هستند. اگر گویا بودن نسبتها نقشی در درست شکل گرفتن گام نداشته باشد پس تغییر تنها نسبت گویای باقیمانده درگام معتدل، یعنی $\frac{۲}{۱}$ نیز نباید تغییر محسوسی ایجاد کند. ولی یک آزمایش ساده با کامپیوتر نشان می‌دهد که اگر نسبت $\left(\frac{۲}{۱}\right)$ درگام معتدل حتی اندکی، مثلاً ۰٫۱ تغییر کند (و در نتیجه قدر نسبت تصاعد برابر $\sqrt[۱۲]{۲٫۱}$ شود) تناسب و زیبایی موسیقی به‌روشنی از بین می‌رود پس نسبت $\left(\frac{۲}{۱}\right)$ در تشکیل گام نقش اساسی دارد.

با این مشاهده به‌نظر می‌رسد نسبتهای گویای به‌کار برده شده درگام فیثاغورث (که ازکسرهای ساده $\left(\frac{۳}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۴}{۳}\right)$ به‌دست می‌آیند) طبیعی‌تر از نسبتهای گنگ موجود درگام معتدل باشند. زیبا است، کلیهٔ نسبتهایی را که با اعداد ۴ و ۳ و ۲ و ۱ می‌توان ساخت، نسبتهایی موسیقیایی (درگام فیثاغورث) هستند که در فاصلهٔ چهار اوکتاو قرار می‌گیرند:

$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳	۴
DO	Fa	DO	Fa	Sol	DO	Fa	Sol	DO	Sol	DO

شکل ۱۰

فواصلی که در این نسبتها به‌وجود می‌آید همگی چهارم درست یا پنجم درست یا پرده هستند و زیباتر آنکه همین نسبتها بودند که در تشکیل گام فیثاغورث نقش اساسی داشتند.

از دیدگاه فلسفهٔ افلاطونی (دیدگاه سمبولیک یا نمادین) همین نسبتها هستند که نقش اساسی در خلقت انسان و جهان دارند. علت تأثیر این نسبتها در وجود آدمی این است که اگر درست اعمال شوند تار وجودی آدمی با این نسبتها هارمونی خود را دوباره به‌دست می‌آورد. افلاطون درکتاب تیمائوس این موضوع را به تفصیل بررسی می‌کند و این کتاب احتمالاً قدیمی‌ترین کتابی است که در آن نحوهٔ تشکیل نسبتهای مربوط به درجات گام موسیقی شرح داده شده است (تیمائوس ۳۵).

خلاصهٔ روش افلاطون به این صورت است: ابتدا در فاصلهٔ ۱ تا ۲ دو نسبت $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۴}{۳}$ را قرار می‌دهد.

$$۱ \qquad \frac{۴}{۳} \qquad \frac{۳}{۲} \qquad ۲$$

چون در بین $\left(\frac{3}{2}\right)$ و $\left(\frac{4}{3}\right)$ نسبت جدید $\frac{3}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{9}{8}$ به‌دست می‌آید. فاصلهٔ بین ۱ تا $\frac{4}{3}$ و $\frac{3}{2}$ تا ۲ را با فاصله‌های کوچکتر $\frac{9}{8}$ پر می‌کند و فقط یک قسمت که نسبت آن برابر $\frac{256}{243}$ است باقی می‌ماند (مطابق شکل زیر):

$$1 \qquad \frac{9}{8} \qquad \underbrace{\left(\frac{9}{8}\right)^2 \qquad \frac{4}{3}}_{\frac{4}{3}/\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{256}{243}} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}\times\frac{9}{8} \qquad \underbrace{\frac{3}{2}\times\left(\frac{9}{8}\right)^2 \qquad 2}_{2/\left(\frac{3}{2}\times\left(\frac{9}{8}\right)^2\right)=\frac{256}{243}}$$

شکل ۱۱

و اینها همان نسبتهایی هستند که قبلاً درگام فیثاغورث برای درجات اصلی گام به‌دست آوردیم.

ادامه دارد. . .

همنهشتیهای متناوب

فرزام انصاری‌پور، متین آزادمنش، اسماعیل صدری، مهدی حق‌شناس [1]

قسمت دوم (آخر):

خوب، تا حالا صورت اصلی مسئله‌رو مشخص کردیم که به این صورت بود:

$$\forall a, m \in N \;\; \exists b_\circ \in N \mid b \geq b_\circ \Rightarrow a^{\phi(m)+b} \equiv a^b \pmod m$$

برای اثبات هم به این طریق عمل می‌کنیم که از دو عدد s و r کمک می‌گیریم. حالا s و r چه اعدادی هستند؟

s رو بزرگترین مقسوم‌علیه m در نظر می‌گیریم که نسبت به a اول باشد و r رو هم خارج‌قسمت m بر s در نظر می‌گیریم، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه m که تمام عوامل اولش در a وجود دارن. در مورد a و s که متباین هستند، می‌تونیم بگیم قضیهٔ اویلر برقراره $(a,s) = ۱ \Rightarrow a^{\phi(s)} \overset{s}{\equiv} ۱$ از طرف دیگه می‌دونیم که چون s، m رو می‌شماره پس $\phi(s)$ هم $\phi(m)$ رو عاد می‌کنه (می‌شه اثبات کرد) پس عددی مثل y وجود داره که $\phi(m) = \phi(s) \times y$ پس

$$\left(a^{\phi(s)}\right)^y \overset{s}{\equiv} ۱^y \Rightarrow a^{\phi(m)} \overset{s}{\equiv} ۱$$

حالا اگر رابطهٔ $r \mid a^b$ برقرار باشه، داریم

$$\left.\begin{array}{l} s \mid a^{\phi(m)-۱} \\ r \mid a^b \end{array}\right\} \Rightarrow s \cdot r \mid \left(a^{\phi(m)} - ۱\right) \times a^b \Rightarrow m \mid a^{\phi(m)+b} - a^b \Rightarrow a^{\phi(m)+b} \equiv a^b \pmod m$$

پس برقراری همنهشتی آخر که هدف ما هم هست، مشروط بر اینه که آیا r، عدد a^b رو عاد می‌کنه یا نه...

از طرفی می‌دونیم که هر عامل اولی که در r باشه، در a هم هست ولی این دلیل نمی‌شه که r، a رو بشماره اما می‌تونیم نمای توان a یعنی عدد b رو به‌اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیریم که حتی اگه $r \nmid a$ ولی داشته باشیم $r \mid a^b$. درضمن همیشه عددی مثل $b_\circ$ وجود داره که برای bهای بزرگتر یا مساوی اون، رابطهٔ $r \mid a^b$ و درنتیجه همنهشتی موردنظر برقرار باشه. برای راحتی کار $b_\circ$ رو کوچکترین عددی در نظر می‌گیریم که $b \geq b_\circ \Rightarrow r \mid a^b$.

پس به‌ازای دو عدد a و m می‌تونیم بگیم که کدوم مقدارهای b (هرچند تعدادشون کم باشه) مانع از برقراری همنهشتیه و به‌ازای کدوم مقدار b و بزرگتر از اون، رابطه درست از آب درمیاد.

۱. دانش‌آموزان دبیرستانهای سادات، شهدای ادب و شهید اژه‌ای اصفهان

به‌عنوان مثال تصمیم داریم دو رقم سمت راست ۲^b رو به‌ازای bهای مختلف بررسی کنیم.

$$a = ۲, m = ۱۰۰, s = ۲۵, r = ۴, \phi(m) = ۴۰$$

شرط موفقیت: $r \mid a^b \Rightarrow ۴ \mid ۲^b \leftrightarrow \underline{b \geq ۲}$

پس به‌ازای bهای بزرگتر یا مساوی ۲ $(b_0 = ۲)$ می‌تونیم بگیم که $۲^{۴۰+b} \equiv ۲^b (\mathrm{mod}\ ۱۰۰)$ و $r \mid a^b \Rightarrow ۴ \mid ۲^b \Rightarrow b \geq ۲$ به‌عبارت دیگه دو رقم سمت راست عددهای زیر با هم برابرند

$$b \geq ۲ \Rightarrow ۲^b \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲^{۴۰+b} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲^{۸۰+b} \overset{۱۰۰}{\equiv} \ldots \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲^{۴۰k+b}$$

یکی از مطالبی هم که در این مورد مشخص می‌شه، اینه که $\phi(m)$ می‌تونه طول تناوب موردنظر ما باشه. حالا یه سؤال مطرحه و اونم این که آیا می‌شه به‌جای $\phi(m)$ عدد کوچکتری (بر حسب a و m) قرار بدیم یا نه؟

برای ادامهٔ کار تابع مرتبه (order) رو یادآوری می‌کنیم:

اگر دو عدد x و y متباین باشن، کوچکترین عددی رو که x به توان اون عدد، همنهشت یک (هنگ y) باشه، مرتبهٔ x نسبت به y در نظر می‌گیریم و با نماد order_y^x نشون می‌دیم یعنی order_y^x کوچکترین عدد طبیعیه که می‌تونه به‌عنوان توان x قرار بگیره و همنهشتی $x^{\mathrm{order}_y^x} \equiv ۱$ رو برقرار کنه و می‌شه ثابت کرد که مقدار این تابع یکی از مقسوم‌علیه‌های $\phi(y)$ خواهد بود.

حالا در نظر داریم این مسئله رو بررسی کنیم که اگر طول تناوب برای پایهٔ a و پیمانهٔ m رو برابر با مقدار تابع $f(a,m)$ در نظر بگیریم، بتونیم بگیم

$$f(a,m) = \mathrm{order}_s^a$$

اثبات این مسئله هم به این صورته:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{order}_s^a = h \Rightarrow a^h \overset{s}{\equiv} ۱ \rightarrow & s \mid a^h - ۱ \\ & r \mid a^b \end{matrix}\right\} \rightarrow s \cdot r \mid (a^h - ۱) \times a^b \Rightarrow a^{h+b} \overset{m}{\equiv} a^b$$

و چون h کوچکترین عددیه که به‌ازای اون $a^h \overset{s}{\equiv} ۱$، پس h کوچکترین عددیه که به‌ازای اون $a^{h+b} \overset{m}{\equiv} a^b$.

یکی از نتایجی که تا اینجا می‌شه گرفت اینه که برای هر دو عدد a و m، مقدار تابع $f(a,m)$، یکی از مقسوم‌علیه‌های $\phi(m)$ خواهد بود. چونکه

$$\left.\begin{matrix} f(a,m) = \mathrm{order}_s^a \mid \phi(s) \\ s \mid m \Rightarrow \phi(s) \mid \phi(m) \end{matrix}\right\} \rightarrow f(a,m) \mid \phi(m)$$

اگه یه نگاهی به مثال قبلی بندازیم، می‌بینیم که

$$a = ۲, \quad m = ۱۰۰, \quad \phi(m) = ۴۰, \quad s = ۲۵, \quad r = ۴$$

$$f(۲, ۱۰۰) = \mathrm{order}_{۲۵}^۲ = ۲۰ \Rightarrow ۲^{۲۰+b} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲^b \quad (b > ۱)$$

یعنی اگه دونستن دو رقم سمت راست عدد 2^n (هرچند n بزرگ باشه) مطلوب باشه، به تعداد دفعات کافی، ۲۰ واحد از n کم می‌کنیم تا عدد 2^q به‌دست بیاد (یعنی q رو باقیماندهٔ n بر ۲۰ در نظر بگیریم). حالا دونستن دهگان و یکان 2^q که همون دهگان و یکان 2^n هم هست کار آسون‌تریه. ($n \equiv q(\mathrm{mod}\ 20)$) و این یعنی ساده کردن شرایط برای قضاوت راجع به اعداد توانی بزرگ وقتی از دریچهٔ همنهشتی به اونها نگاه کنیم.

پایان

سؤالات مسابقهٔ این دوره

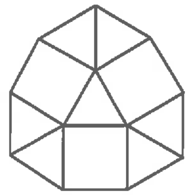
برای شرکت در مسابقهٔ این دوره، حل هر کدام از سؤالات زیر کافیست:

۱. اگر شکل مسطح A به‌اندازهٔ ۴۸ درجه حول نقطهٔ O دوران کند بر خود A منطبق می‌شود. آیا می‌توان گفت این شکل با ۹۰ درجه دوران حول نقطهٔ O لزوماً بر خودش منطبق می‌شود؟ با ۷۲ درجه چطور؟ چرا؟

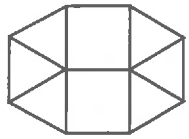
۲. تابع $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد صحیح هستند. اگر $|f(3)| = |f(7)| = 1$ باشد، آیا $f(x)$ می‌تواند ریشهٔ صحیح داشته باشد؟ یعنی آیا عدد صحیحی مثل r می‌توان یافت که برای آن داشته باشیم: $f(r) = 0$؟

برندگان مسابقهٔ دورهٔ قبل بدین قرار می‌باشد: خانم زهرا آقابابایی از اصفهان و آقای حسن کفاش امیری از بابل، هدایای این عزیزان به‌زودی به آدرس پستی آنها ارسال خواهد شد. جوابهای سؤالات مسابقهٔ این دوره را به آدرس: اصفهان، صندوق پستی ۳۵۶ – ۸۱۶۴۵، خانهٔ ریاضیات اصفهان ارسال نمایید.

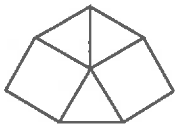
حل مسألهٔ مسابقهٔ دورهٔ قبل



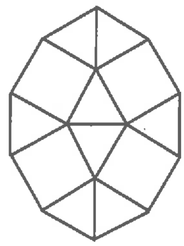
۹ ضلعی



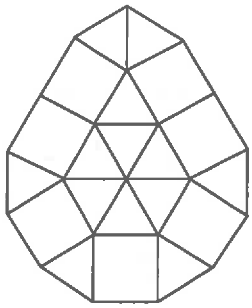
۸ ضلعی



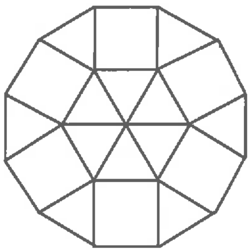
۷ ضلعی



۱۰ ضلعی



۱۱ ضلعی



۱۷ ضلعی

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

منتشر می‌کند: