نشریهٔ ریاضیات

سال پنجم / ۴
شمارهٔ پیاپی: ۱۸
اسفند ۱۳۸۳
قیمت: ۹۰۰ تومان

- بازاریابی زنجیره‌ای یا کلاهبرداری زنجیره‌ای؟
- عددهای ۲ ای
- نقاط جالب مثلث
- مسأله‌های پیشنهادی به چهل و چهارمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

به نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال پنجم/ ۴ ● شمارهٔ پیاپی: ۱۸ ● اسفند ۱۳۸۳

فهرست:

روی جلد: لطفاً پینوکیو نشوید!
مقالهٔ «بازاریابی زنجیره‌ای یا کلاهبرداری زنجیره‌ای؟» را ببینید.
برگرفته از روزنامهٔ جام جم، ۱۳ مهر ۱۳۸۳

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش
مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، ایرج ضرغام
سردبیر: ارشک حمیدی
هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، بهروز طوری، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه بندی: مریم مهری
رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵
تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ ۸۹۷۱۵۸۳
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

مهندس جعفر علاقه‌مندان

۱۳۳۰ـ ۱۳۸۳

مهندس جعفر علاقه‌مندان معاون وزارت آموزش و پرورش به‌طور ناگهانی در ششم بهمن‌ماه ۱۳۸۳ چشم از جهان فرو بست و فرهنگیان کشور را داغدار کرد. علاقه‌مندان پایه‌گذار نوآوریهای گوناگونی در آموزش و پرورش بود، شاید آینده‌نگری و شجاعت پذیرش نوآوریها مهمترین ویژگی او شمرده شود؛ او مدتها به‌عنوان معاون آموزشی وزارت آموزش و پرورش خدمت کرد و حاصل این دوره از فعالیت او نظام جدید آموزش و پرورش است که سرآغاز تحول در آموزش و پرورش محسوب می‌شود. به‌قول مهندس علاقه‌مندان، مهمترین ویژگی این نظام، دوره‌های کارـ دانش است که جوانان بیشتری را پس از گذراندن دورهٔ راهنمایی به تحصیل فرا خوانده است و درنتیجه موجب افزایش سطح آموزش در کشور همراه با مهارت‌آموزی شده است. پس از آن، مرحوم علاقه‌مندان به‌عنوان معاون وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی فعالیتهای گوناگونی را در امر پژوهش در تعلیم و تربیت و ایجاد تحول درکتابهای درسی دنبال کرد. در این مرحله نیز روحیهٔ نوآور او موجب پیدایش و پذیرش ایده‌های نو بود. علاقه‌مندان در اوج بالندگی بود که از میان ما رفت. نشریهٔ ریاضیات یاد او را گرامی می‌دارد و برای پاس‌داشت اندیشه‌های مرحوم علاقه‌مندان نوشتهٔ زیر را که بخشی از سخنرانی او در «همایش اقتصاد آموزش و پرورش» در ۲۱ مهرماه ۱۳۸۳ است، برای آگاهی خوانندگان نشریه می‌آورد.

یحیی تابش

«ما در تعلیم و تربیت محتاج یک نظریهٔ اجتماعی هستیم که براساس آن تعلیم و تربیت به دغدغهٔ اجتماعی و خواست مردم تبدیل شود. در هدایت نظام تعلیم و تربیت یک چالش هم داریم؛ سرمایه‌گذاری مردم محتاج پاسخ به خواست آنهاست. چنین امری آموزش و پرورش را از یک نظام بسته به یک نظام باز تبدیل می‌کند. دو نظریهٔ اجتماعی وجود دارد: ادارهٔ آموزش و پرورش به‌صورت یک نظام بسته که این نظریه تبدیل به یک نظریهٔ امنیتی می‌شود که در خیلی از کشورها وجود دارد و ناظر بر نگرانی نسبت به نسل آینده است و یکی هم نظریهٔ اجتماعی آموزش و پرورش باز که براساس خواست مردم است. این دو نظریه مقابل هم هستند. با کدام نظریهٔ اجتماعی می‌خواهیم آموزش و پرورش را هدایت کنیم؟ اقتصاد آموزش و پرورش محتاج مردم است؟ پس باید به خواست مردم پاسخ داد. برای پاسخگویی به خواست مردم باید آموزش و پرورش بسته را به آموزش و پرورش باز تبدیل کرد. اما وقتی نگرانی امنیتی اصل قرار گیرد، نظام باز باید تبدیل به نظام بسته شود. اینها دو نظریهٔ اجتماعی رودررو هستند و به‌شدت اقتصاد آموزش و پرورش را تحت تأثیر قرار می‌دهند.

یکی از دوستان سؤال کرده است شما که ربع قرن در مدیریت آموزش و پرورش بوده‌اید، در عینیت بخشیدن به دیدگاههای خود چه قدمهایی برداشته‌اید؟ من اعتقاد دارم که آموزش و پرورش مبتنی بر یک نظریهٔ اجتماعی باید ارائه شود و آن نظریهٔ اجتماعی، نظریهٔ مدیریت باز است که آثار مثبت فراوانی دارد و طبعاً آسیبهایی هم دارد که باید آسیبها را شناخت. وقتی از مدیریت باز سخن می‌گوییم باید حق انتخاب به مردم بدهیم یعنی باید تنوع را بپذیریم. هیچ‌وقت به مدرسهٔ غیرانتفاعی از دیدگاه سوسیالیستی نگاه نکرده‌ایم که بگوییم مردود است، معتقدیم که مدرسهٔ غیرانتفاعی یک ظرفیتی دارد نه به‌عنوان مدرسه‌ای برای اقشار مرفه بلکه به‌عنوان نمادی از نظام باز و مستقل از اینکه چه کسی از آن استفاده می‌کند. قبلاً طرحی در آموزش و پرورش داده بودیم که اگر کسی در آموزش فنی و حرفه‌ای بخش غیرانتفاعی ثبت‌نام کند ما هزینهٔ دولتی تحصیل دانش‌آموز را می‌پردازیم که این را به‌صورت تبصره درآوردیم و ردیف بودجه هم داشت این نظریه را چگونه عمل کردیم؟ گفتیم حق انتخاب با مردم است ولی دولت هزینهٔ آن را به بخش خصوصی می‌دهد که این نوع آموزش را اجرا کند؛ مردم این حق را در انتخاب مدرسه، در مدیریت و در برنامهٔ آموزشی و درسی دارند. آموزش‌های ما تا چه مقدار باید منطقه‌ای شود؟ آیا به تمام کسانی که آموزش کشاورزی می‌دهیم باید یک برنامهٔ درسی ارائه دهیم؟ در منطقه‌ای، تولید اصلی آن برنج و در منطقهٔ دیگر تولید اصلی گندم است. باید اجازه دهیم دانشگاه ما و هنرستان ما در هر منطقه برنامهٔ درسی خاص خودش را اجرا کند. چرا در اصفهان، کرمان و تبریز که بهترین قالی ایران را می‌بافند آموزش این رشته توسعه نیابد؟ تا چه مقدار می‌خواهیم همه‌چیز را از بالا به‌صورت دستوری اعمال کنیم. چرا اجازه ندهیم که مدارس الگوی انتخاب برای بهبود کیفیت و رقابت بین خود را داشته باشند؟ آموزش و پرورش موردنظر ما مبتنی بر این نظریه است. در مدیریت بسته ۳۰ سال بود که روی توسعهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای کار می‌کردند قبل از انقلاب حداکثر به ۱۶ درصد رسانده بودند و بعد از انقلاب به ۱۲ درصد رسیده بود. ما توانستیم با وجود رشد سه‌برابر دانش‌آموزان متوسطه، این رقم را به ۴۰ درصد برسانیم. این ۴۰ درصد چگونه اتفاق افتاد؟ ما به‌سراغ مدیریت باز رفتیم. ابتدا در آموزش و پرورش این نظریه را رد می‌کردند ولی ثابت شد که مدیریت باز توسعه به‌دنبال دارد. شما نمی‌توانید در جایی نظریهٔ سوسیالیستی را اجرا کنید و در جای دیگر معتقد به نظریهٔ مدیریت آزاد باشید نمی‌توانید در جایی سرمایه را آزاد بگذارید و در جای دیگر رقابت را محدود کنید. نمی‌شود جلب سرمایه کرد و رقابت را محدود کرد. نمی‌توان گفت که مردم در آموزش و پرورش سرمایه‌گذاری کنند ولی انتفاعی از سرمایه‌شان نبرند. نمی‌توانید از یک طرف به اقتصاد دولتی نظر داشته باشید و از طرفی دنبال توسعه باشید. ممکن نیست در اقتصاد دولتی آموزش و پرورش توسعه یابد. تجربهٔ کشورهای سوسیالیستی پیش روی ماست. به هر حال معتقدم که یکی از راهبردهای جدی آموزش و پرورش نظریهٔ مدیریت باز است. خوشبختانه

آموزش و پرورش گامهایی در این راه برداشته است. اینکه می‌گویند مدرسه بایدْ هیأت امنایی باشد حرف درستی است. چرا و با چه استدلالی درِ مدارس نمونه‌مردمی را بستند؟ بهتر بود ضعفها و عیبها را جبران می‌کردیم. بگذاریم معلمها نظر بدهند اول نظر بدهند که چگونه یک مدرسه قابل اداره کردن است. چرا وقتی پول از مردم می‌خواهیم دعوتشان می‌کنیم ولی وقتی مردم می‌خواهند راجع به کیفیت آموزش اظهارنظر کنند می‌گوییم، نمی‌توانید! بگوییم ما می‌خواهیم شما را هدایت کنیم. آزادی و حق انتخاب مردم را نباید حذف کرد. اینها بحثهای اساسی آموزش و پرورش است. چرا نباید اجازه دهیم که مثلاً سه تیپ فیزیک تدریس شود؟ چرا یک‌سری مسائل ملی مانند زبان فارسی و دین را به شکل یکنواخت و سراسری تدریس می‌کنیم؟ چرا معلم، دانش‌آموز و مدرسه حق انتخاب نداشته باشند. وقتی معلم را از گردونهٔ تولید اطلاعات خارج کنیم قطعاً رشد معلم را متوقف کرده‌ایم. اگر در طول بیست سال خدمتگزاری به یک چیز باید افتخار کنم، اجرای نظام جدید متوسطه خواهد بود.»

در این شماره:

خوب است بدانید که ایدهٔ «بازاریابی زنجیره‌ای»، که این روزها نقل مجالس است، چندان هم جدید نیست و سابقه‌ای دست‌کم یکصد ساله دارد. می‌توانید شرحی از نحوهٔ فعالیت شرکتهای «بازاریابی زنجیره‌ای» و تحلیل ریاضی عملکرد آنها را در مقالهٔ «بازاریابی زنجیره‌ای یا کلاهبرداری زنجیره‌ای؟» بخوانید. در مقالهٔ «عددهای ۲ ای» با ردهٔ خاصی از عددهای pای (p عددی اول است) آشنا می‌شوید. بررسی خواص «حسابی» عددهای pای از موضوعات مهم پژوهشی نظریهٔ اعداد در قرن گذشته بوده است و سرگئی وستوکوف، از نویسندگان مقالهٔ «عددهای ۲ ای»، از محققان برجستهٔ این رشته و «نظریهٔ اعداد موضعی» به‌شمار می‌رود. در نشریهٔ کوچک ریاضیات مسأله‌هایی که در مرحلهٔ اول تورنمنت شهرها در شهر اصفهان داده شده آورده شده است. شاید وقت آن رسیده باشد که تورنمنت شهرها در شهرهای دیگری از ایران هم برگزار شود ...

بازاریابی زنجیره‌ای یا کلاهبرداری زنجیره‌ای؟

امید نقشینه‌ارجمند

مقدمه

شاید تاکنون نام شرکتهایی چون پنتاگونو، مای سون دایموند و گلدکوئست را شنیده باشید. آیا هیچ‌گاه به شما یا آشنایانتان پیشنهاد شده است که با سرمایه‌گذاری در یکی از این شرکتها در زمانی کوتاه به پول هنگفتی برسید؟ هدف از این مقاله بررسی نحوهٔ عملکرد این‌گونه شرکتهای به‌ظاهر اقتصادی است.

همان‌طور که در طول مقاله خواهید دید، تحلیل نحوهٔ عملکرد چنین شرکتهایی نیاز به اطلاعات ریاضی پیشرفته‌ای ندارد؛ مهم این است که یاد بگیریم در مسائل زندگی، علم و دانش خود را به‌کار بگیریم.

با توجه به اینکه این‌گونه شرکتها هر از چندگاهی با نام و روشی به‌ظاهر جدید در جامعه ظاهر می‌شوند، در این مقاله خصوصیات اصلی آنها را بیان می‌کنیم.

بازاریابی شبکه‌ای، کار، ثروت و دوستیهای فرهنگی!

بازاریابی شبکه‌ای و نقشهٔ هرمی طی سالهای اخیر از طریق فعالیت شرکتهایی چون کیمبرلی، سولیتایر، پریم بانک، مای سون دایموند و غیره به جامعه نفوذ پیدا کرده است. هر کدام از این شرکتها با مطرح کردن شعاری پا به‌عرصه گذاشته است و افراد بسیاری را از میان کسانی که جویای کارند جذب خود کرده است. ظاهراً ایران بستر مناسبی برای فعالیت طراحان چنین برنامه‌هایی به‌شمار می‌آید!

این شرکتها با تأکید بر اینکه انتخاب این سیستمها، نوعی تجارت و شروع دوستی فرهنگی است، به افراد تازه‌وارد توصیه می‌کنند در یاد گرفتن این سیستم و توضیح آن به دیگران عجله نکنند و تنها پس از یادگیری کامل سیستم، اطلاعاتشان را در اختیار دیگران قرار دهند. آنها به زیرشاخه‌ها یادآوری می‌کنند که شاید در ماههای اول فعالیت، سود کمی دریافت کنند اما وقتی زمان بگذرد و آنها نیز فعالیت کنند، مبالغ قابل‌توجهی عایدشان خواهد شد.

آنها به قوانین خود پایبندند

نکتهٔ بسیار مهم این است که ایراد این‌گونه شرکتها، که همه به‌نحوی کار خود را بازاریابی شبکه‌ای[1] می‌نامند، لزوماً این نیست که قوانین خود را زیر پا بگذارند، جنسی تقلبی به مشتری عرضه کنند و یا اینکه شرکت خود را تعطیل کنند و بگریزند. بلکه آنها قوانین خود را، هوشمندانه، با اهداف کاملاً سودجویانه طراحی کرده‌اند و تمام تلاششان این است

1. Network Marketing

که با رعایت و اجرای دقیق این قوانین، به نتیجهٔ مطلوب خود برسند. پس خبرهایی از این قبیل که شرکتی مانند گلدکوئست به وعده‌های خود عمل نکرده است و یا اینکه اجناسش تقلبی است، به‌نظر ما مسائلی حاشیه‌ای‌اند و ترفند این شرکتها چیز دیگری است. لذا مطالب این نوشته با این فرض است که شرکت موردنظر به قوانین خود پایبند است.

مثال اصلی در این مقاله شرکت گلدکوئست است، ولی این بدان معنی نیست که موضوع محدود به همین شرکت خاص است.

شرکت گلدکوئست

فعالیت اصلی شرکت گلدکوئست فروش محصولات کلکسیونی مؤسسه و ضرابخانه «بی‌اچ‌مایر» آلمانی است. محصولاتی که توسط ضرابخانهٔ «بی اچ مایر» تولید و از سوی شرکت گلدکوئست توزیع می‌شود، سکه‌های طلای سمبلیک (با طرحهایی از پاپ، خانهٔ کعبه، امام خمینی (ره) و ...)، ساعت طلا، گردنبند و غیره است که همراه با شناسنامه‌ای بین‌المللی به خریداران تحویل داده می‌شود.

با کمی زحمت پولدار شوید!

اگر برحسب اتفاق در یکی از جلسات آشنایی با گلدکوئست شرکت کنید، برای شما توضیح خواهند داد که برای ورود به این تجارت باید یکی از اجناس متنوع شرکت را که قیمت واقعی‌اش چیزی در حدود ۳۰۰ دلار امریکاست به چندین‌برابر قیمت پیش‌خرید کرد. پس از آن، وظیفهٔ ظاهراً سادهٔ دیگری نیز بر عهده‌تان خواهد بود. باید دو مشتری جدید برای شرکت دست‌وپا کنید. این دو نفر نیز، که اصطلاحاً بازوهای راست و چپ شما نامیده می‌شوند، خود

همین کار را انجام خواهند داد و نفرات بعدی نیز همین کار را تکرار می‌کنند. به این ترتیب درختی از مشتریها به‌وجود می‌آید. هرگاه سمت راست شما دست‌کم شامل ۳ مشتری و سمت چپ شما نیز دست‌کم شامل ۳ مشتری شود، شرکت گلدکوئست اولین پورسانت شما را، که چیزی در حدود ۲۵۰ دلار امریکاست، پرداخت خواهد کرد. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود «تعادل» شما ۳ شده است. از این به بعد نیز طبق قوانینی خاص، با افزایش تعادل، پورسانتهای بیشتری پرداخت خواهد شد. مجموعه قوانین پورسانت گرفتن از این بیشتر است، ولی دانستن همین مقدار از قوانین برای بررسیهای علمی کافی است.

نکته‌ای بسیار مهم این است که مبلغان این شرکتها (که اکثراً همان مشتریان شرکت‌اند) به شما وعده می‌دهند که «اگر فعالیت کنید می‌توانید در مدت کوتاهی، مثلاً یک ماه یا چیزی در همین حدود مشتریهای جدید را به شرکت معرفی کنید. اگر با کسانی مواجه شدید که نتوانسته‌اند دو مشتری خود را پیدا کنند، بی‌شک خودشان مقصرند. مگر پیدا کردن دو نفر واجد شرایط در بین این همه دوست و آشنا کار سختی است؟!»

فرض کنیم مبلغان راست می‌گویند

بیایید فرض کنیم این مبلغان راست می‌گویند و متوسط مدت پیدا کردن دو مشتری را «مدت طی یک مرحله» می‌نامیم. در این صورت پس از گذشت مدت طی یک مرحله، تعداد افراد آلوده در پایینترین لایه، دو برابر افراد لایه قبل می‌شود. اگر در ابتدا تنها یک نفر آلوده باشد، فکر می‌کنید چقدر طول می‌کشد تا یک‌میلیون نفر آلوده شوند؟ گمان می‌کنید زمان آلوده شدن یک‌میلیارد نفر و یا زمان آلوده شدن ده میلیارد نفر چقدر است؟

گلدکوئست‌بازان چه می‌گویند؟ محاسبات ریاضی چه می‌گوید؟

اگر دو سؤال آخر را از یک گلدکوئست‌باز بپرسید می‌گوید «خیلی زیاد، قرنها و شاید هم هیچ‌وقت».

ولی می‌توانید با ماشین‌حسابی معمولی جواب سؤالهای بالا را پیدا کنید؛ رشد افراد آلوده بسیار سریعتر از آن چیزی است که در ابتدا تصور می‌شود. به دنبالهٔ اعداد زیر توجه کنید؛ این دنباله با ۱ آغاز می‌شود و هر جمله دو برابر جملهٔ قبلی‌اش است. اگر ابتدای کار را مرحلهٔ صفر فرض کنیم، عدد به‌دست آمده در مرحلهٔ nاُم، 2^n است.

۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, ۱۲۸, ۲۵۶, ۵۱۲, ۱۰۲۴, ۲۰۴۸, ۴۰۹۶, ۸۱۹۲, ۱۶۳۸۴, ...

در مرحلهٔ دهم ۱۰۲۴ نفر و در مرحلهٔ چهاردهم بیش از شانزده هزار نفر آلوده شده‌اند. تا اینجا هنوز مشخص نیست که این دنباله با چه سرعت عجیبی رشد می‌کند. برخی جمله‌های بعدی را در ستون روبه‌رو نوشته‌ایم.

۳۲۷۶۸
۶۵۵۳۶
۱۳۱۰۷۲
۲۶۲۱۴۴
۵۲۴۲۸۸
۱۰۴۸۵۷۶
۲۰۹۷۱۵۲
۴۱۹۴۳۰۴
۸۳۸۸۶۰۸
۱۶۷۷۷۲۱۶
۳۳۵۵۴۴۳۲
۶۷۱۰۸۸۶۴
۱۳۴۲۱۷۷۲۸
۲۶۸۴۳۵۴۵۶
۵۳۶۸۷۰۹۱۲
۱۰۷۳۷۴۱۸۲۴
۲۱۴۷۴۸۳۶۴۸
۴۲۹۴۹۶۷۲۹۶
۸۵۸۹۹۳۴۵۹۲
۱۷۱۷۹۸۶۹۱۸۴

در مرحلهٔ هفدهم بیش از صد هزار نفر و در مرحلهٔ بیستم بیش از یک میلیون نفر آلوده شده‌اند! کی به ده میلیارد نفر می‌رسیم؟ بعد از چند قرن؟!

در مرحلهٔ بیست و چهارم شانزده میلیون، در مرحلهٔ سی‌ام یک میلیارد، و در مرحلهٔ سی و چهارم بیش از هفده میلیارد نفر آلوده شده‌اند! و اگر مدت طی‌شدن هر مرحله را یک ماه فرض کنیم، این زمان، کمتر از سه سال خواهد بود و نه در حدود چند قرن!

روشی ساده‌تر برای محاسبه

بدون انجام این محاسبات طولانی نیز می‌توان تخمینهای خوبی به‌دست آورد:

$$1000 < 1024 = 2^{10}$$

$$1000000 = (1000)^2 < (1024)^2 = (2^{10})^2 = 2^{20}$$

$$1000000000 = (1000)^3 < (1024)^3 = (2^{10})^3 = 2^{30}$$

و به‌همین ترتیب می‌توانید وضعیت مرحله‌های مختلف را با تقریب خوبی محاسبه کنید.

واقعیت امر چیست؟

چیزی که درواقع رخ می‌دهد این است که با گذشت زمان و گسترش آلودگی، «مدت طی یک مرحله» به مرور زیاد می‌شود، و آنقدر این مدت طولانی می‌شود که دیگر وارد شدن در این فعالیت برای کسی که از جریان آگاه است جذاب نخواهد بود، و به‌تدریج بازار به‌حالت رکود می‌رسد.

نظر آنهایی که آلوده شده‌اند چیست؟

نکتهٔ بسیار مهم این است که همهٔ کسانی که آلودهٔ این بازی شده‌اند لازم است برای جبران ضرر اولیه و رسیدن به سودهای وعده داده‌شده، رکود بازار و وضعیت بد پیش‌آمده برای خود را مخفی کنند و با راضی نشان دادن خود، مشتریان بیچارهٔ جدیدی را به زیر شاخه‌های خود اضافه کنند! این افراد در مواجهه با طعمهٔ خود چنین وانمود می‌کنند که گویی چند روزی بیشتر نیست که به‌دنبال مشتری می‌گردند، در حالی‌که چندین ماه از وقتشان را برای این کار بیهوده تلف کرده‌اند. همین باعث می‌شود که عوارض منفی اجتماعی و اخلاقی این به‌اصطلاح بازاریابیها بسیار ناگوار باشد و به‌علاوه به‌سختی بتوان فهمید چه کسی واقعاً در این فعالیت باخته است.

چرا این کار بازاریابی نیست؟

وظیفهٔ بازاریاب رساندن تولیدکننده به فروشنده یا مشتری است، مثلاً بازاریاب مؤسسه‌ای انتشاراتی، باید به دنبال مراکزی باشد که به خرید و عرضهٔ محصولات این مؤسسه علاقه‌مندند.

ولی در مواردی مثل شرکت گلدکوئست، افراد مشتری واقعی اجناس عرضه‌شده نیستند و وقتی که دیگران را به معامله با شرکت تشویق می‌کنند، محور اصلی تبلیغشان این است که افراد با وارد شدن در این کار می‌توانند پولدار شوند؛ آنها درواقع بیش از اینکه بازاریاب اجناس باشند بازاریابِ بازاریابی هستند!

به‌عنوان مثال وقتی طعمه‌ای پیدا می‌کنند از او نمی‌پرسند که آیا به سکه‌های طلا و یا ساعتهای گران‌قیمت احتیاج یا علاقه داری، بلکه می‌گویند آیا می‌خواهی شغلی پردرآمد داشته باشی؟ آیا می‌خواهی در مدت کوتاهی پولدار شوی؟

به‌همین دلیل، ترجیح می‌دهیم به‌جای استفاده از اصطلاح «بازاریابی» از کلمهٔ «بازی» استفاده کنیم.

آیا ایدهٔ گلدکوئست متعلق به عصر اینترنت است؟

کسی که دعوت به بازیهایی نظیر گلدکوئست می‌شود ممکن است از خود بپرسد «چگونه ممکن است که با چنین روش ساده‌ای بدون داشتن هیچ تخصصی هرکس بتواند در مدتی نه‌چندان طولانی به ثروتی هنگفت برسد؟!»

در این وضع یکی از راههای توجیه طعمه این است که به او گفته شود «روش اقتصادی گلدکوئست یکی از ابداعات عظیم عصر جدید است که با تکیه بر تکنولوژی به‌وجود آمده است؛ همان‌طور که بسیاری از ابداعات و اختراعات برای گذشتگان باورنکردنی بوده‌اند، این روش اقتصادی نیز برای اکثر افراد عجیب و باورنکردنی است.»

بازاریابی زنجیره‌ای در روسیهٔ تزاری!

یاکو ایسیدوروویچ پرلمان، ریاضیدانی روسی است که از اوایل قرن بیستم تا اواخر جنگ جهانی دوم زندگی می‌کرده است. از وی چند کتاب به فارسی ترجمه شده است که از جملهٔ آنها کتاب «ریاضیات زنده» است. نسخه‌ای که به آن استناد می‌کنیم، ترجمه‌ای از استاد پرویز شهریاری است که نشر میترا آن را چاپ کرده است.

در صفحه‌های ۱۴۶_۱۴۲ این کتاب مطلبی آمده است که قسمتی از آن را برایتان نقل می‌کنم.

دوچرخه‌های ارزان

در کشور روسیه، در سالهای قبل از حکومت شوروی (به احتمالی هم‌اکنون در بعضی از کشورهای دیگر) کسانی بودند که برای فروش کالای خود، دست به ابتکارهای جالبی می‌زدند. آنها کار خود را از اینجا آغاز می‌کردند که مثلاً در روزنامه‌ها و مجله‌های پرتیراژ آگهی روبه‌رو را تبلیغ می‌کردند.

دوچرخه با ۱۰ روبل

هرکس می‌تواند با پرداخت ۱۰ روبل مالک دوچرخه شود.

از این موقعیت استفاده کنید.

به‌جای ۵۰ روبل فقط ۱۰ روبل

کم نبودند کسانی که فریب این تبلیغها را می‌خوردند و خواهش می‌کردند که مؤسسه، شرایط این خرید غیرعادی را برای آنها بفرستد.

آنها در پاسخ تقاضای خود اطلاع مختصری دریافت می‌داشتند که بنابر آن می‌فهمیدند: برای آنها در ازای ۱۰ روبل دوچرخه فرستاده نمی‌شد، بلکه ۴ بلیت داده می‌شد که باید هر یک از آنها را به یکی از آشنایان خود بفروشند. ۴۰ روبل که به این ترتیب جمع می‌شد، باید به مؤسسه تحویل داده می‌شد تا دوچرخه برای آنها فرستاده شود. به این ترتیب به‌راستی، دوچرخه برای خریدار ۱۰ روبل تمام می‌شد زیرا ۴۰ روبل بقیه را او از جیب خود نپرداخته بود.

درحقیقت علاوه‌بر پرداخت ۱۰ روبل پول نقد، خریدار می‌بایستی زحمت فروش بلیتها را به آشنایان خود تحمل کند، ولی این زحمتِ کوچک به‌حساب نمی‌آمد.

موضوع این بلیتها چه بود؟ کسی که آنها را می‌خرید، در ازای پرداخت ۱۰ روبل چه نفعی می‌برد؟ درحقیقت، صاحب هر بلیت، این حق را داشت که در مؤسسه آن را با ۵ بلیت دیگر معاوضه کند، به دیگر سخن می‌توانست این امکان را به‌دست آورد که ۵۰ روبل برای تهیهٔ دوچرخه فراهم کند، در حالی‌که در ازای آن تنها ۱۰ روبل پرداخته بود (یعنی قیمت بلیت).

صاحبان بلیتهای جدید هم این حق را داشتند که در ازای بلیت خود ۵ بلیت برای انتشار دریافت کنند و الی‌آخر.

در نگاه اول، هیچ‌گونه نیرنگی به چشم نمی‌خورد. وعدهٔ تبلیغها انجام می‌شد و دوچرخه برای خریدار، تنها ۱۰ روبل تمام می‌شد. مؤسسه هم در این زمینه ضرر نمی‌کرد، زیرا در ازای کالای خودش قیمت کامل آن را می‌گرفت.

ولی درحقیقت، همهٔ این بازیها بدون تردید یک تقلب و حقه‌بازی است. این کلاه‌گذاری بر این پایه است که در فروش بلیت آنقدر شریک وارد می‌کردند، که دیگر امکان فروش آنها وجود نداشت. و هم اینها بودند که جریمهٔ اختلاف بین ۵۰ روبل قیمت دوچرخه و ۱۰ روبل پرداختی به مؤسسه را می‌پرداختند. دیر یا زود ولی ناگزیر زمان آن می‌رسید که دارندگان بلیت نمی‌توانستند برای بلیتهای خود مشتری پیدا کنند. اگر زحمت این را به خودتان بدهید و با قلم و کاغذ حساب کنید که عدهٔ

افراد با چه سرعتی زیاد می‌شود، می‌توانید به‌خوبی لحظهٔ فرا رسیدن زمان توقف فروش بلیتها را بفهمید.

اولین دستهٔ خریدار، که بلیت خود را به‌طور مستقیم از مؤسسه می‌گیرد، تقریباً بدون هیچ زحمتی برای بلیتهای خود خریدار پیدا می‌کند: هر یک از اعضای این دسته نیز به‌نوبهٔ خود یک دستهٔ چهار نفری برای فروش بلیتها به‌وجود می‌آورد.

این چهار نفر باید ۴×۵ یعنی ۲۰ خریدار برای بلیتهای خود پیدا کنند و آنها را متقاعد کنند که این خرید شامل سودهایی برای آنهاست. فرض می‌کنیم که در این کار موفق شوند و ۲۰ خریدار برای خود پیدا کنند. «بهمن» جلو می‌رود. ۲۰ خریدار جدید باید بلیتهای خود را به $۲۰ \times ۵ = ۱۰۰$ نفر دیگر بدهند.

تا حالا هر کدام از افرادی که برای بار اول به مؤسسه مراجعه کرده‌اند، در داخل «بهمنی» که تشکیل داده‌اند به‌اندازهٔ

$$۱۰۰ + ۲۰ + ۴ + ۱ = ۱۲۵ \text{ نفر}$$

نفر را گرد آورده‌اند. از این ۱۲۵ نفر تنها ۲۵ نفر دوچرخه خود را گرفته‌اند و ۱۰۰ نفر بقیه امیدوارند که به دوچرخه برسند و در ازای این امید ۱۰ روبل پرداخته‌اند.

حالا دیگر «بهمن» از بین آشنایان نزدیک خارج می‌شود به طرف شهر سرازیر می‌شود، جایی که پیدا کردن آشنا و همراه، سخت و سخت‌تر می‌شود. ۱۰۰ نفر اخیر صاحب بلیت باید ۵۰۰ همشهری جدید برای بلیتهای خود پیدا کنند که آنها هم به‌نوبهٔ خود، نیاز به ۲۵۰۰ قربانی جدید دارند. شهر به‌سرعت از بلیتها اشباع می‌شود و پیدا کردن داوطلب برای خرید بلیت کار بسیار مشکلی می‌شود. می‌بینید که تعداد افراد جمع‌شده در این «بهمن»، به‌همان سرعتی پیش می‌رود که ما وقتی دربارهٔ انتشار شایعه صحبت می‌کردیم، با آن روبه‌رو شدیم. این است هرم عددی که دراین‌باره به‌دست می‌آید:

۱
۴
۲۰
۱۰۰
۵۰۰
۲۵۰۰
۱۲۵۰۰
۶۲۵۰۰

اگر شهری بزرگ باشد و تمام مردم شهر هم امکان دوچرخه‌سواری را داشته باشند، در دور هشتم ۶۲٫۵ هزار نفر از جمعیت شهر را فرا می‌گیرد و دیگر باید «بهمن» تمام شود، چون همهٔ افراد در آن فرو رفته‌اند. ولی تنها ۲۰٪ آنها صاحب دوچرخه شده‌اند و بقیهٔ ۸۰٪ در دست خود بلیتهایی دارند که نمی‌دانند آنها را به چه کسی عرضه کنند. برای شهرهای با جمعیت زیادتر و حتی برای پایتختهایی که جمعیت میلیونی دارند، زمان اشباع چند دور دیرتر فرا می‌رسد، زیرا تعداد افرادی که در «بهمن» جمع شده‌اند با سرعت باورنکردنی رو به افزایش می‌گذارد. قشرهای بعدی هرم عددی ما چنین است:

۳۱۲۵۰۰
۱۵۶۲۵۰۰
۷۸۱۲۵۰۰
۳۹۰۶۲۵۰۰

همان‌طور که می‌بینید «بهمن» می‌تواند در دور دوازدهم، جمعیت یک کشور بزرگ را، به‌طور کامل، در خود جمع کند که ۸۰٪ این جمعیت، گرفتار نیرنگ بانیان این «بهمن» شده‌اند.

حالا می‌بینیم که مؤسسه با به‌وجود آوردن این «بهمن» به چه نتیجه‌ای رسیده است. مؤسسه ۸۰٪ مردم را وادار به

پرداخت پول کالا می‌کند، در حالی‌که خود کالا تنها به‌دست ۲۰٪ جمعیت می‌رسد. به دیگر سخن، این مؤسسه چهار نفر را مجبور می‌کند که جور نفر پنجم را بکشند. علاوه بر این، مؤسسه، به این ترتیب، تعداد زیادی کارمند فعال پیدا می‌کند، که به‌طور مجانی برای فروش کالا، فعالیت می‌کنند. اژدهای عدد، که زیر این کلاهبرداری، خود را از دیده‌ها پنهان کرده است، کسانی را تنبیه می‌کند، که نمی‌توانند با محاسبه‌های عددی برای حمایت از منافع خود، در ازای حقه‌بازها، دفاع کنند.

توجه کنید که «سالهای قبل از حکومت شوروی»، یعنی دوران قبل از انقلاب کمونیستی اکتبر ۱۹۱۷. پس همان‌طور که می‌بینید، این نوع کلاهبرداری سابقه‌ای دست‌کم در حدود یک قرن دارد.

توصیف آماری وضعیت مشتریان گلدکوئست

همان‌طور که دیدید هر بازاریابی زنجیره‌ای پس از مدتی سراسر جامعهٔ مشتاقانش را فرا می‌گیرد. زمان اشباع، به مسائلی از قبیل جمعیت علاقه‌مندان به بازی، توانایی ایشان به جذب طعمه‌های جدید، نوع قوانین بازی و مسائل فرهنگی و قانونی جامعه بستگی دارد.

در این نوع بازیها، هرچه زمان می‌گذرد افراد بیشتری آلوده می‌شوند و درنتیجه مدت یافتن مشتری جدید بیشتر و بیشتر می‌شود.

حال سؤال این است که پس از اشباع نسبی جامعه، چند درصد سود کرده‌اند و چند درصد ضرر. واضح است که پاسخ دقیق دادن به این سؤال احتیاج به اطلاعاتی در مورد روابط اجتماعی دارد که می‌توان گفت دست‌یافتنی نیست. با این وجود، می‌توان با ارائهٔ مدلهایی تقریبی، جوابهای نسبتاً قابل قبولی به‌دست آورد.

مدل بازاریابان فوق حرفه‌ای!

در مدلی که در این قسمت توصیف می‌کنم فرض بر این است که عملکرد اعضای گلدکوئست آنقدر درخشان است که پس از آلوده‌شدن، تقریباً به‌طور هم‌زمان دو بازوی خود را تکمیل می‌کنند. توجه کنید که برای ما مدت انجام این کار اهمیتی ندارد، زیرا به‌دنبال محاسبهٔ زمان اشباع جامعه نیستیم.

شکل صفحهٔ بعد نشان‌دهندهٔ درختی است که با یک نفر شروع می‌شود، در مرحلهٔ بعد دو نفر به آن اضافه می‌شوند، در مرحلهٔ بعد چهار نفر و همین‌طور تا آخر.

به این ترتیب اگر لایهٔ بالایی را مرحلهٔ صفر بنامیم، در هر مرحله دو برابر مرحلهٔ قبل به درخت، مشتری اضافه می‌شود، پس تعداد مشتریان لایهٔ nام، ۲^n است.

محاسبهٔ تعداد کل افراد آلوده در مرحلهٔ nام کار ساده‌ای است:

$$\text{تعداد افراد آلوده تا مرحلهٔ } n\text{ام} = ۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲^n = ۲^{n+۱} - ۱$$

افراد دو لایهٔ آخر تعادلشان به ۳ نرسیده است و طبق قوانین گلدکوئست، به آنها پورسانتی داده نشده است.

$$\text{تعداد افرادی که تعادلشان کمتر از ۳ است} = ۲^{n-۱} + ۲^n = ۳ \times ۲^{n-۱}$$

لایهٔ سوم از پایین، کسانی هستند که تعادلشان به ۳ رسیده است و درنتیجه تنها یک بار پورسانت گرفته‌اند.

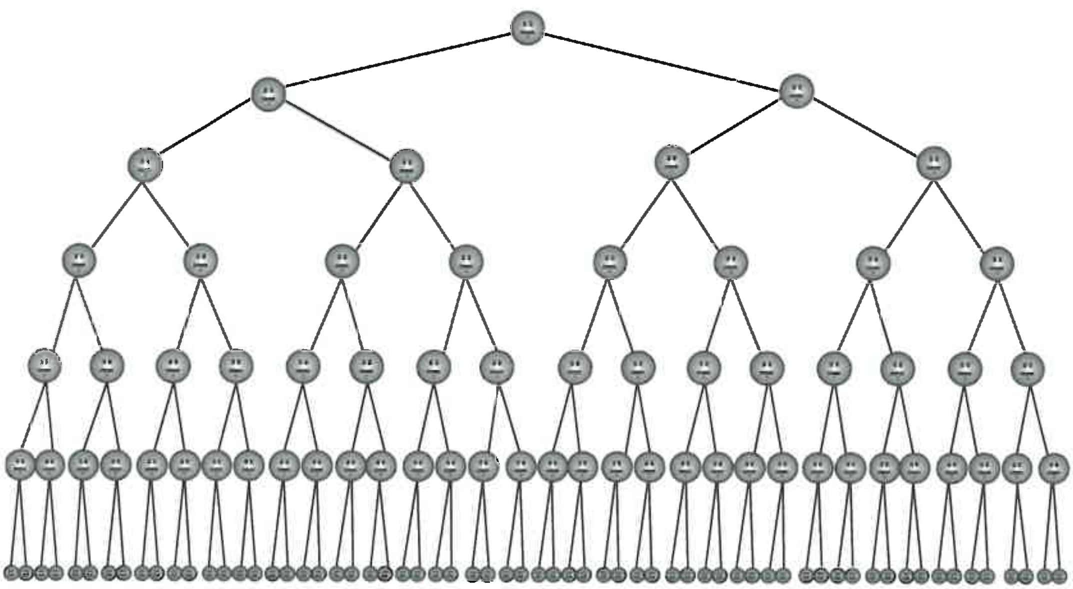
$$2^{n-2}$$ = تعداد افرادی که تعادلشان ۳ است

لایهٔ چهارم از پایین کسانی هستند که تعادلشان بین ۶ و ۸ است و درنتیجه تنها دوبار پورسانت گرفته‌اند.

$$2^{n-3}$$ = تعداد افرادی که تعادلشان بین ۶ و ۸ است

اکنون با محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود که ضررکرده‌ها تقریباً ۷۵٪، یک بار پورسانت گرفته‌ها تقریباً ۱۲/۵٪ و دوبار پورسانت گرفته‌ها تقریباً ۶/۲۵٪ هستند. ۶/۲۵٪ باقی‌مانده هم افرادی هستند که بیش از دوبار پورسانت گرفته‌اند.

البته توجه کنید که این اعداد و ارقام در حالتی به‌دست می‌آید که درخت افراد آلوده کاملاً منظم رشد کرده باشد. در حالت واقعی، که رشد درخت منظم نیست، وضع بسیار وخیمتر است.



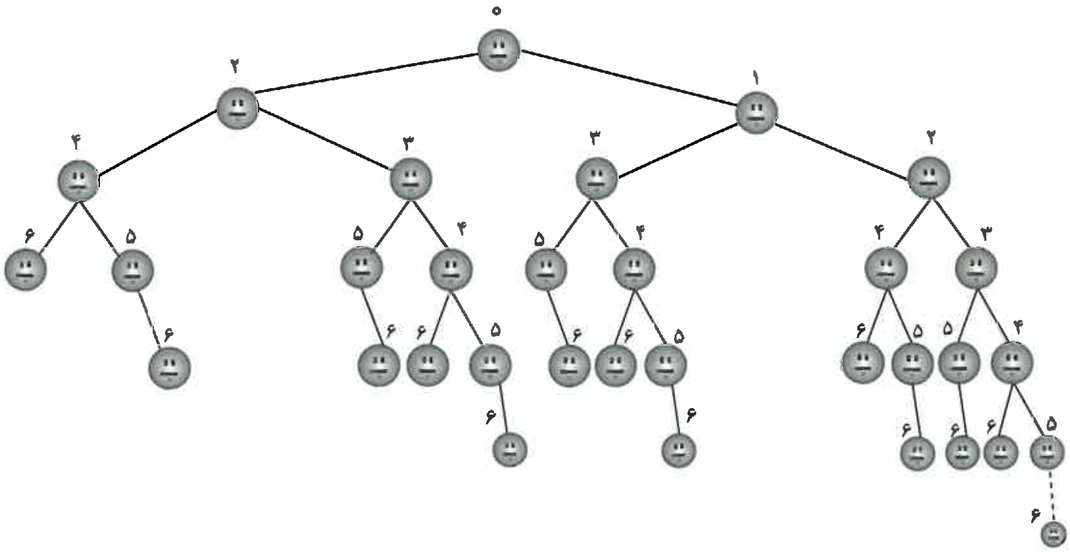
مدل بازاریابان حرفه‌ای!

در این قسمت مدل خود را بهبود می‌بخشیم. در حالت عادی، کمتر پیش می‌آید که فردی به‌طور هم‌زمان بتواند هر دو مشتری خود را پیدا کند، بلکه ابتدا مشتری اول را پیدا می‌کند و پس از آن باید به‌دنبال مشتری دوم بگردد. این نکته ممکن است چندان جدی به‌نظر نرسد، ولی خواهید دید که تأثیر قابل‌توجهی در نتایج خواهد گذاشت.

در این مدل نیز سرعت رشد درخت گلدکوئست مورد توجه ما نیست. تنها فرض می‌کنیم که در هر مقطع زمانی، مدت لازم برای پیدا کردن یک مشتری، برای همهٔ افراد، ثابت است که البته ممکن است در مقاطع مختلف زمانی

تغییر کند؛ در ابتدا که تنها تعداد اندکی آلوده شده‌اند یافتن یک مشتری بسیار ساده‌تر از مقطعی است که جمعیت انبوهی وارد درخت گلدکوئست شده‌اند.

در مرحلهٔ اول، کسی که رأس درخت است، اولین مشتری را پیدا می‌کند. در ادامه، این شخص به‌دنبال مشتری دوم خود می‌گردد و مشتری قبلی نیز در جستجوی اولین طعمهٔ خود است. پس در مرحلهٔ دوم، دو نفر جدید به درخت اضافه می‌شوند. اکنون اولین فرد دو بازوی خود را تکمیل کرده است و دیگر از طریق او کسی به درخت اضافه نمی‌شود و لذا در این درخت ۴ رأسی، سه نفر به‌دنبال مشتری هستند و درنتیجه در مرحلهٔ بعد درخت ما ۷ رأس دارد. شکل زیر مراحل رشد درخت را تا ۶ مرحله نشان می‌دهد.



تعداد افراد آلوده در چند مرحلهٔ اول به این صورت است:

$$۱, ۲, ۴, ۷, ۱۲, ۲۰, ۳۳, \ldots$$

تعداد رأسها در مرحلهٔ nام را S_n می‌نامیم. در این صورت $S_۰$ برابر ۱ و $S_۱$ برابر ۲ است. می‌توان رابطه‌ای بازگشتی برای این دنباله به‌دست آورد؛ یکی از دو مشتری‌ای که نفر اول وارد کرده است یک مرحله و دیگری دو مرحله از نفر اول عقب‌تر است. پس درختی که در مرحلهٔ nام زیر آن دو تشکیل می‌شود دقیقاً مشابه درخت اصلی در یک مرحلهٔ پیش و درخت اصلی در دو مرحله پیش است. درنتیجه در مرحلهٔ nام در بازوی راست رأس بالایی $S_{n-۱}$ نفر و در بازوی چپ او $S_{n-۲}$ نفر قرار دارد. اگر رأس بالایی را هم در نظر بگیریم رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آید.

$$S_n = S_{n-۱} + S_{n-۲} + ۱$$

اگر دو طرف تساوی اخیر را با یک جمع کنیم و $S_n + ۱$ را P_n بنامیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$P_n = P_{n-۱} + P_{n-۲}$$

اگر با دنبالهٔ فیبوناتچی آشنا باشید می‌دانید که در آن دنباله نیز هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ قبلی است. تفاوت دنبالهٔ $\{P_n\}$ و دنبالهٔ فیبوناتچی ناشی از تفاوت در دو جملهٔ اول است؛ $P_۰$ برابر ۲، و $P_۱$ برابر ۳ است، در حالی‌که $F_۰$ و $F_۱$ هر دو برابر ۱ اند. پس آیا ارتباطی بین جمله‌های دنبالهٔ $\{P_n\}$ و جمله‌های دنبالهٔ فیبوناتچی وجود ندارد؟ نگاهی به چند جملهٔ اول هر دو دنباله می‌اندازیم.

n	P_n	F_n
۰	۲	۱
۱	۳	۱
۲	۵	۲
۳	۸	۳
۴	۱۳	۵
۵	۲۱	۸
۶	۳۴	۱۳
۷	۵۵	۲۱
۸	۸۹	۳۴

اکنون به‌سادگی می‌توان دید که P_n درواقع همان دنبالهٔ فیبوناتچی است که دو جملهٔ اول آن حذف شده است، یعنی $P_n = F_{n+۲}$ و درنتیجه $S_n = F_{n+۲} - ۱$.

تا اینجا توانستیم تعداد افراد آلوده در مرحلهٔ nام را به‌دست آوریم. اکنون سؤال این است که در هر مرحله وضعیت تعادل افراد (یعنی مینیمم تعداد زیردستهای راست و تعداد زیردستهای چپ) چگونه است؟

جواب این سؤال در مورد نفر بالایی تلویحاً داده شده است: در یک سمت این فرد $S_{n-۱}$ نفر و در سمت دیگرش $S_{n-۲}$ نفر قرار دارند و درنتیجه تعادلش $S_{n-۲}$ است که طبق محاسبات انجام‌شده برابر است با $F_n - ۱$.

چون هر عضو دیگر درخت نیز وضعیتی شبیه نفر اول در چند مرحلهٔ قبل دارد، تعادل او نیز به شکل $F_{k-۲}$ است که در آن k برابر تعداد مراحلی است که پس از اتصالش به درخت طی شده است. اکنون ببینیم در مرحلهٔ nام چند نفر چنین تعادلی دارند.

در لحظهٔ ورود این عضو، درخت $n - k$ مرحله رشد کرده است و درنتیجه، در این مقطع، تعداد افراد آلوده از $S_{n-k-۱}$ به S_{n-k} رسیده است، پس $S_{n-k} - S_{n-k-۱}$ نفر به درخت اضافه شده‌اند. با در نظرگرفتن مطالب بالا این مقدار برابر است با $(F_{n-k+۲} - ۱) - (F_{n-k+۱} - ۱)$ که می‌شود F_{n-k}.

پس تا اینجا نشان دادیم که در مدل ارائه‌شده، در مرحلهٔ nام F_{n-k} نفر تعادلشان برابر $F_{k-۱}$ است. البته عبارت اخیر در یک مورد درست نیست؛ به این نکته توجه کنید که تعادل هر فرد در ابتدای ورود به بازی و همچنین پس از گذشت یک مرحله، صفر است ($F_۰ - ۱ = F_۱ - ۱ = ۰$) و درنتیجه تعداد کسانی که تعادلشان صفر است برابر است با $F_n + F_{n-۱}$ که همان $F_{n+۱}$ است. در مراحل بعدی، پس از گذشت هر مرحله، تعادل افزایش پیدا می‌کند. درنتیجه، عبارت موردبحث برای kهای بزرگتر از یک درست است.

به‌بیان دیگر در مرحلهٔ nام، نسبت کسانی که تعادلشان صفر است برابر است با $\frac{F_{n+۱}}{F_{n+۲} - ۱}$ و نسبت کسانی که تعادلشان $F_k - ۱$ است ($k > ۱$)، برابر است با $\frac{F_{n-k}}{F_{n+۲} - ۱}$.

این نسبتها هنوز وضعیت بازی را به‌روشنی توصیف نمی‌کنند. حکم صفحهٔ بعد به ما کمک می‌کند که مدل مورد بحث را بهتر تحلیل کنیم.

حکم. وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ به ϕ میل می‌کند که ϕ ریشهٔ مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم زیر است.

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

ϕ را «عدد طلایی» می‌نامند که مقدار دقیقش برابر با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و مقدار تقریبی‌اش ۱٫۶۲ است.

اثبات این حکم چندان مشکل نیست. اگر هم ایده‌ای برای اثباتش ندارید بد نیست نسبت جمله‌های متوالی دنبالهٔ فیبوناتچی را حساب کنید و «ببینید» که آیا به ϕ میل می‌کند یا خیر!

این حکم نتیجه‌ای دارد که به‌کار می‌آید.

نتیجه. برای هر k، وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، $\frac{F_{n+k}}{F_n}$ به ϕ^k میل می‌کند.

برای اثبات این نتیجه کافی است توجه کنید که کسر یادشده برابر است با

$$\frac{F_{n+k}}{F_{n+k-1}} \times \frac{F_{n+k-1}}{F_{n+k-2}} \times \cdots \times \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

اکنون می‌توانیم وضعیت مشتریان گلدکوئست را بهتر توصیف کنیم. برای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، ϕ^{-1} نسبت افرادی است که تعادلشان صفر است و نسبت کسانی که تعادلشان $F_k - 1$ است ($k > 1$)، برابر است با ϕ^{-k-2}.

جدول زیر که در آن از مقدار تقریبی ϕ استفاده شده است گویاتر است.

تعادل	نسبت افرادی که تعادلشان برابر این مقدار است	تعداد افرادی که تعادلشان کمتر یا مساوی این مقدار است
۰	۶۱٫۸ درصد	۶۱٫۸ درصد
۱	۱۴٫۶ درصد	۷۶٫۴ درصد
۲	۹ درصد	۸۵٫۴ درصد
۴	۵٫۶ درصد	۹۱ درصد
۷	۳٫۴ درصد	۹۴٫۴ درصد
۱۲	۲٫۱ درصد	۹۶٫۶ درصد
۲۰	۱٫۳ درصد	۹۷٫۹ درصد
۳۳	۰٫۸ درصد	۹۸٫۷ درصد
۵۴	۰٫۵ درصد	۹۹٫۲ درصد
۸۸	۰٫۳ درصد	۹۹٫۵ درصد
۱۴۳	۰٫۲ درصد	۹۹٫۷ درصد
۲۳۲	۰٫۱ درصد	۹۹٫۸ درصد

اولین پورسانت هنگامی داده می‌شود که تعادل فرد به ۳ برسد. پس طبق محاسبات انجام‌شده همیشه در حدود ۸۵٫۴ درصد از کسانی که وارد این بازی شده‌اند هیچ پورسانتی دریافت نکرده‌اند!

اصول کلاهبرداری زنجیره‌ای

اکنون می‌توانیم عملکرد این شرکتها را با اصولی ساده مشخص کنیم.

اصل ۱. قوانین این شرکتها به‌گونه‌ای است که هر کس در آغاز باید مبلغی پول به شرکت بپردازد. این کار به‌طرق مختلف انجام می‌شود؛ خرید یک بلیت (مانند شرکت پنتاگونو)، خرید جنسی با قیمتی بیشتر از قیمت واقعی آن و یا پرداخت قسط اول جنسی که وعدهٔ به‌دست آوردن آن به مشتری داده می‌شود (شرکتهای دایموند و گلدکوئست) و یا روشی دیگر که ممکن است بعداً ابداع شود.

اصل ۲. هر مشتری برای جبران ضرر اولیه و رسیدن به سود، لازم است وظایفی را انجام دهد. از جملهٔ این وظایف این است که دست‌کم دو نفر دیگر را وارد معامله با شرکت کند.

بنابر قضیهٔ بعد، هر شرکتی که در دو اصل بالا صدق کند کلاهبردار است.

قضیه. در هر نوع کلاهبرداری زنجیره‌ای، در صورت رشد متوازن درخت مشتریها، همواره بیش از ۵۰ درصد افراد آلوده، پول خود را از دست داده‌اند!

اثبات. فرض کنید هر مشتری باید k نفر دیگر را وارد بازی کند و تا این کار را انجام ندهد ضرر اولیه‌اش جبران نشود. طبق اصل ۲، k دست‌کم ۲ است. اگر a_n تعداد افراد آلوده در لایهٔ nام باشد، به‌راحتی مشاهده می‌شود که $a_n = k^n$. تعداد کل افرادی را که تا مرحلهٔ nام وارد بازی شده‌اند نیز S_n می‌نامیم. برای محاسبهٔ S_n درواقع باید مجموع تصاعدی هندسی را به‌دست آوریم:

$$S_n = a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = ۱ + k + k^۲ + \cdots + k^n = \frac{k^{n+۱} - ۱}{k - ۱}$$

در این مرحله افراد لایهٔ آخر که تعدادشان k^n نفر است کاملاً ضرر کرده‌اند، پس نسبت ضررکرده‌ها دست‌کم برابر $\frac{k^n}{S_n}$ است. مقدار آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{k^n}{S_n} = \frac{k^n(k-۱)}{k^{n+۱}-۱} > \frac{k^n(k-۱)}{k^{n+۱}} = \frac{k-۱}{k} = ۱ - \frac{۱}{k} \geq ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

پس در بهترین شرایط نیمی از افراد به‌جای سود کردن، پول خود را از دست داده‌اند!

دلیل اصلی مضر بودن بازاریابیهای زنجیره‌ای مانند گلدکوئست چیست؟

پیش از هر چیز یادآوری می‌کنیم که «بازاریابی» نامیدن این بازیها غلط مصطلح است؛ مبلغان این بازیها طعمهٔ خود را لزوماً از بین کسانی که مایل به خریدن جنسی مانند سکهٔ طلا هستند انتخاب نمی‌کنند و آنچه تبلیغ می‌کنند، درحقیقت برتری جنس عرضه‌شده نیست، بلکه افراد را به طمع پولدارشدن جذب بازی می‌کنند. خروج ارز نیز مسألهٔ اصلی نیست و چنین فعالیتهایی حتی از نوع داخلی‌اش نیز مضر است.

در هر بازاریابی زنجیره‌ای، در هر مقطع زمانی درصدی از افراد هستند که در انتهایِ شبکهٔ درختی قرار دارند و در حالی‌که پولشان را از دست داده‌اند امیدوارند که در آینده ضررشان جبران شود و سود مادی کنند. این در حالی است که این افراد به آرزویشان نمی‌رسند مگر اینکه تعداد ضررکرده‌ها را چند برابر کنند.

مثلاً اگر فرض کنیم در بازی گلدکوئست حتی یک پورسانت هم ضرر اولیه را جبران کند، افراد ضررکرده ضررشان جبران نمی‌شود مگر اینکه تعداد کل افراد آلوده چهار برابر شود و این روند همچنان ادامه پیدا خواهد کرد تا اینکه یا جامعهٔ علاقه‌مندان به این بازی همگی آلوده شوند و یا به‌دلیلی دیگر بازی متوقف شود. سود بردن در این نوع فعالیتها، مانند قمار، ناشی از ضرر دیگران است و تا کسانی نباشند که ضرر کنند کسی جز شرکت سود نمی‌کند!

کمی بیشتر در این مورد

اگر می‌خواهید در مورد کلاهبرداری زنجیره‌ای بیشتر بدانید، می‌توانید به وبلاگ «کلاهبرداری زنجیره‌ای» (http://www.antigq.persianblog.com) مراجعه کنید.

عددهای ۲ ای

ب. بکر، س. وُستوکوف، ی. آیونین

اگر از شما بخواهند که «فاصله‌ای میان دو عدد گویا» تعریف کنید، احتمالاً پاسخ می‌دهید که فاصلهٔ میان دو عدد گویا قدرمطلق تفاضلشان است. پاسختان کاملاً منطقی است: این تعریف در همهٔ اصول موضوع فاصله صدق می‌کند. با وجود این، معلوم شده است که فاصلهٔ دیگری میان عددهای گویا می‌توان تعریف کرد که آن هم در همهٔ اصول موضوع فاصله صدق می‌کند. این فاصله را کورت هنسل (۱۸۶۱ـ۱۹۴۱م)، ریاضیدان آلمانی، معرفی کرده است. او دسته‌ای کامل از چنین فاصله‌هایی ساخته است؛ در اینجا یکی از آنها را مطرح می‌کنیم.

اهمیت کارهای هنسل در جبر و به‌طورکلی در ریاضیات به اثبات رسیده است. در این مقاله از فاصلهٔ هنسل برای حل کردن دو مسأله استفاده می‌کنیم که با نگاه اول به‌نظر نمی‌رسد به هیچ فاصله‌ای ربطی داشته باشند.

فاصلهٔ ۲ ای

فرض کنید a و b عددهایی گویا باشند. اگر $a \neq b$، تفاضل $a-b$ را به شکل $a-b=۲^k\left(\frac{m}{n}\right)$ می‌نویسیم که در آن، m و n عددهایی صحیح و فردند و k عددی صحیح (مثبت، منفی یا صفر) است. فاصلهٔ ۲ ای میان عددهای a و b $(a\neq b)$ را عدد $\rho(a,b)=\frac{۱}{۲^k}$ تعریف می‌کنیم. اگر $a=b$، تعریف می‌کنیم $\rho(a,b)=۰$.

تابع فاصله یا متریک را معمولاً تابعی مانند ρ از دو متغیر عددی تعریف می‌کنند که در اصول موضوع زیر صدق می‌کند:

A۱. اگر $a\neq b$، $\rho(a,b)>۰$ و اگر $a=b$، $\rho(a,b)=۰$.

A۲. $\rho(a,b)=\rho(b,a)$.

A۳. $\rho(a,c)\leq\rho(a,b)+\rho(b,c)$.

روشن است که شرطهای A۱ و A۲ در مورد فاصلهٔ ۲ ای برقرارند. شرط A۳ هم در حالتی که $a=b=c$ به‌وضوح برقرار است.

اکنون شرط A۳ را در حالتی که a، b و c عددهای گویای متمایزی باشند ثابت می‌کنیم. فرض کنید $a-b=۲^{k_۱}\left(\frac{m_۱}{n_۱}\right)$، $b-c=۲^{k_۲}\left(\frac{m_۲}{n_۲}\right)$ و $a-c=۲^{k_۳}\left(\frac{m_۳}{n_۳}\right)$ که در اینجا همهٔ m_iها و n_iها عددهایی صحیح و فردند. چون $a-c=(a-b)+(b-c)$، $k_۳$ از عدد کوچکتر در میان عددهای $k_۱$ و $k_۲$ کوچکتر نیست. در این صورت $\frac{۱}{۲^{k_۳}}$ از عدد بزرگتر در میان عددهای $\frac{۱}{۲^{k_۱}}$ و $\frac{۱}{۲^{k_۲}}$ بزرگتر نیست و درنتیجه $\frac{۱}{۲^{k_۳}}\leq\frac{۱}{۲^{k_۱}}+\frac{۱}{۲^{k_۲}}$.

بنابراین ثابت می‌شود که همهٔ اصول موضوع فاصله برقرارند و ρ را می‌توان فاصله نامید.

اما این فاصله چه کمیتی را می‌سنجد؟ با کمی تأمل می‌توان دریافت که این فاصله (با بیانی غیردقیق) درجهٔ بخش‌پذیری عددهای گویا بر ۲ را تعیین می‌کند. «هرچه بیشتر» ۲ عددی را بشمارد (مثلاً وقتی عدد موردنظر عددی صحیح باشد، بزرگترین توان ۲ که آن را می‌شمارد) عدد موردنظر به صفر نزدیکتر است. مثلاً ۸ از $\frac{۱}{۲}$ به صفر نزدیکتر است، ۱۶ از ۸ به صفر نزدیکتر است، ۴۸۰ از ۱۶ و همین‌طور ۳۸۴ از ۴۸۰ به صفر نزدیکتر است.

درحقیقت ثابت کرده‌ایم که فاصلهٔ ۲ ای ویژگی‌ای مانند $\mathbf{A}۳'$ دارد که از $\mathbf{A}۳$ قویتر است:

$\mathbf{A}۳'$. $\rho(a,c)$ از عدد بزرگتر در میان $\rho(a,b)$ و $\rho(b,c)$ بزرگتر نیست.

تمرین ۱. ثابت کنید اگر $\rho(a,b) \neq \rho(b,c)$، آن‌وقت $\rho(a,c)$ برابر با عدد بزرگتر در میان عددهای $\rho(a,b)$ و $\rho(b,c)$ است و اگر $\rho(a,b) = \rho(b,c) \neq ۰$، آن‌وقت

$$\rho(a,c) < \rho(a,b)$$

ویژگی $\mathbf{A}۳'$ نتیجه‌های جالبی دارد. مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا مانند x را که $\rho(a,x) < r$ (در اینجا a عددی گویا و r عددی حقیقی و مثبت است) دایرهٔ ۲ ای به شعاع r و به مرکز نقطهٔ a می‌نامیم.

تمرین ۲. ثابت کنید اگر اشتراک دو دایرهٔ ۲ ای تهی نباشد یکی از آنها شامل دیگری است.

تمرین ۳. ثابت کنید دایرهٔ ۲ ای به شعاع r شامل بی‌نهایت دایرهٔ ۲ ای به شعاع r است که هیچ دوتایشان یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

درست عین قدرمطلق معمولی (که بعضی وقتها آن را نُرم می‌نامند) نُرم ۲ای عددی گویا مانند a را، که آن را با $\|a\|$ نشان می‌دهیم، فاصلهٔ ۲ ای این عدد از صفر تعریف می‌کنیم: اگر $a = ۲^k\left(\frac{m}{n}\right)$ که در آن m و n عددهایی صحیح و فردند، آن‌وقت

$$\|a\| = \rho(۰, a) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^k$$

به‌آسانی می‌توان ویژگیهای نرم ۲ ای را که در زیر آمده‌اند ثابت کرد:

$\mathbf{M}۱$. اگر $a \neq ۰$، $\|a\| > ۰$ و $\|۰\| = ۰$.

$\mathbf{M}۲$. اگر $\|b\| > \|a\|$، آن‌وقت $\|a+b\| = \|a\|$؛ اگر $\|a\| = \|b\| \neq ۰$، آن‌وقت $\|a+b\| < \|a\|$. (بنابراین در هر صورت $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$.)

$\mathbf{M}۳$. $\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|$.

تمرین ۴. ویژگیهای نرم ۲ ای را که در زیر آمده‌اند از ویژگیهای $\mathbf{M}۱$ تا $\mathbf{M}۳$ نتیجه بگیرید:

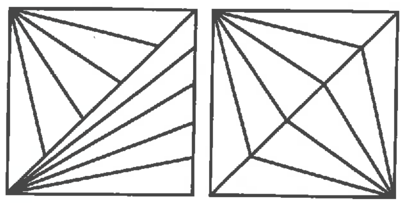
الف) $\|-a\| = \|a\|$؛

ب) اگر $\|a\| \neq \|b\|$، آن‌وقت $\|a+b\| = \|a-b\|$.

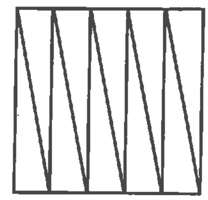
تمرین ۵. ثابت کنید اگر $\|x - ۱\| < ۱$ و $\|y - ۱\| < ۱$، آن‌وقت $\|xy - ۱\| < ۱$.

تجزیهٔ مربع

در شکل ۱ مربعی را نشان داده‌ایم که به مثلثهای همنهشت تجزیه شده است. مربعهای شکل ۲ به مثلثهای هم‌مساحت تجزیه شده‌اند. در هر کدام از این مثالها تعداد مثلثها عددی زوج است.



شکل ۲



شکل ۱

مسأله. ثابت کنید مربع را نمی‌توان به تعدادی فرد مثلث هم‌مساحت تجزیه کرد.

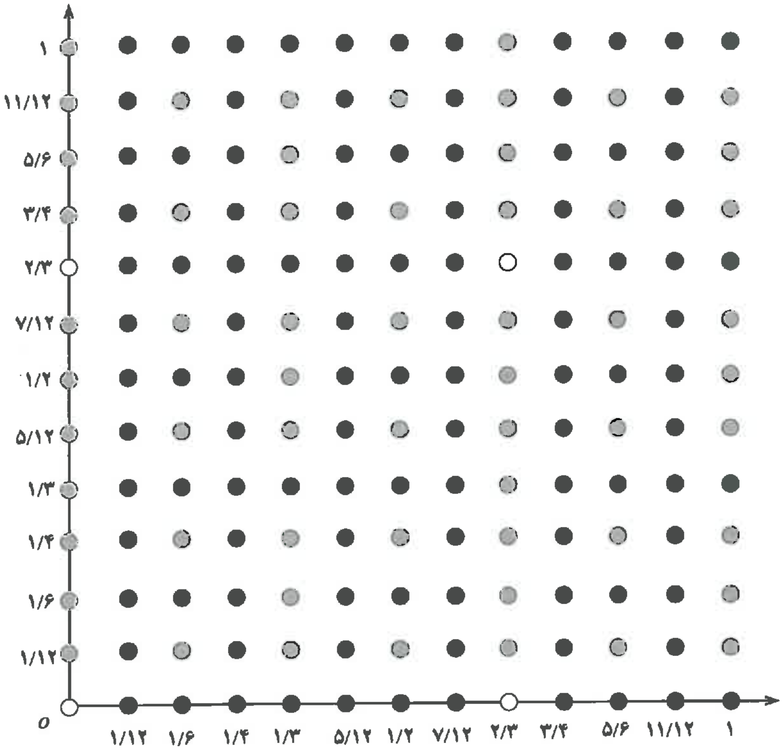
در صفحه، دستگاه مختصاتی انتخاب کنید که مختصات رأسهای O، A، B و C مربع داده‌شده، نقطه‌های $O(0,0)$، $A(1,0)$، $B(1,1)$ و $C(0,1)$ باشند. فرض کنید که این مربع به n مثلث هم‌مساحت تجزیه شده باشد. در این صورت مساحت هر کدام از این مثلثها برابر با $\frac{1}{n}$ است. اگر n عددی فرد باشد، آن‌وقت $\|\frac{1}{n}\| = 1$؛ اگر n عددی زوج باشد، آن‌وقت $\|\frac{1}{n}\| \geq 2$.

حالتی خاص را در نظر بگیرید؛ فرض کنید رأسهای همهٔ مثلثهای تجزیهٔ موردنظر نقاطی باشند که مختصاتشان عددهایی گویا هستند. در این حالت می‌توانیم هر رأس مانند (x,y) را طبق قاعدهٔ زیر با رنگهای سفید، سیاه یا خاکستری رنگ کنیم: اگر $\|x\| < 1$ و $\|y\| < 1$، نقطهٔ موردنظر سفید است؛ اگر $\|y\| \leq \|x\|$ و $\|x\| \geq 1$، نقطهٔ موردنظر سیاه است؛ دست‌آخر، اگر $\|x\| < \|y\|$ و $\|y\| \geq 1$، این نقطهٔ خاکستری است (شکل ۳ را ببینید). فرض می‌کنیم که نه‌تنها رأسهای موردنظر، بلکه همهٔ نقاط گویای صفحه رنگ شده‌اند.

تمرین ۶. الف) ثابت کنید اگر P نقطه‌ای سفید باشد، آن‌وقت تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{PO}$ رنگ این‌گونه نقاط تغییر نمی‌کند.
ب) ثابت کنید هیچ خطی شامل نقاطی از هر سه رنگ نیست.

فرض کنید رأسهای مثلثی از تجزیهٔ موردنظر به سه رنگ مختلف باشند (در پیوست ثابت می‌کنیم که چنین مثلثی وجود دارد). علاوه‌بر این، فرض کنید K رأس سفید این مثلث باشد.

بنابر تمرین ۶ (الف)، تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{KO}$ مثلث دیگری به‌دست می‌آید که رأسهایش به هر سه رنگ‌اند. رأس سیاه این مثلث را با $L_1(x_1, y_1)$ و رأس خاکستری‌اش را با $L_2(x_2, y_2)$ نشان می‌دهیم (رأس سفیدش روی نقطهٔ O قرار می‌گیرد). چون مثلث OL_1L_2 از انتقال مثلثی از تجزیهٔ موردنظر به‌دست می‌آید، مساحتش برابر با $\frac{1}{n}$ است. از طرف دیگر مساحت این مثلث $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ است. (از خواننده می‌خواهیم که این مطلب را ثابت کند.)



شکل ۳

بنابراین رابطهٔ $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ را به‌دست می‌آوریم. اکنون اثبات نابرابری $\|\frac{1}{n}\| \geq 2$ چندان دشوار نیست. درواقع، چون L_1 نقطه‌ای سیاه و L_2 نقطه‌ای خاکستری است، پس

$$\|x_1\| \geq \|y_1\|, \qquad \|x_2\| < \|y_2\|$$

اگر طرفین این دو نابرابری را در هم ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم که $\|x_2\|\|y_1\| < \|x_1\|\|y_2\|$ و درنتیجه، بنابر ویژگی M3، $\|x_2y_1\| < \|x_1y_2\|$. اکنون بنابر ویژگی M2 و تمرین ۴ (ب)، $\|x_1y_2\| = \|x_1y_2 - x_2y_1\|$.
از این گذشته، $\|x_1\| \geq 1$ و $\|y_2\| \geq 1$، درنتیجه

$$\|\frac{1}{n}\| = 2\|x_1\|\|y_2\| \geq 2$$

بنابراین n عددی زوج است.

برای حل کردن این مسأله در حالت کلی کافی است ثابت کنیم که نرم ۲ ای را می‌توان به مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی تعمیم داد. یعنی تابعی مانند $x \to \|x\|$ وجود دارد که روی مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی تعریف شده است، ویژگیهای M1 تا M3 را دارد و روی مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا همان نرم ۲ ای است. چنین تابعی واقعاً وجود دارد اما برای اثبات این مطلب ابزارهایی لازم است که کاملاً فراتر از چهارچوب این مقاله‌اند.

بسط ۲ ای

همان‌طور که می‌دانید هر عدد طبیعی را می‌توان به شکل مجموعی از توانهای ۲ نمایش داد. مثلاً

$$1000 = 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9$$

می‌توانیم این بسط را با استفاده از فاصلهٔ ۲ ای این‌طور به‌دست آوریم: ابتدا توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ ۲ ای آن از ۰ برابر با فاصلهٔ ۲ ای عدد ۱۰۰۰ از ۰ باشد. وقتی این عدد را پیدا کردیم (2^3)، آن را از عدد داده‌شده، یعنی ۱۰۰۰، کم می‌کنیم و در مورد عدد جدید، ۹۹۲، توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ ۲ ای آن از ۰ با فاصلهٔ ۲ ای این عدد از ۰ برابر باشد. سپس توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ ۲ ای آن از ۰ برابر با فاصلهٔ ۲ ای عدد ۹۶۰ ($992 - 2^5 = 960$) از ۰ باشد و همین‌طور تا آخر.

با استفاده از توانهای با نمای منفی ۲ می‌توانیم بسطهای مشابهی برای عددهای گویای به شکل $\frac{m}{2^k}$، که در آن m و k عددهایی طبیعی‌اند، بسازیم. مثلاً،

$$\frac{1477}{256} = \frac{1 + 2^2 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^{10}}{2^8} = 2^{-8} + 2^{-6} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^2$$

عددهای گویای دیگر را نمی‌توان به شکل مجموعی از توانهای ۲ نمایش داد. با وجود این، هر عدد گویا را می‌توان با دقت دلخواه با مجموعهایی از این دست تقریب زد. درواقع، فرض کنید a عددی گویا باشد و $\|a\| = \frac{1}{2^{k_1}}$. تعریف می‌کنیم $a_1 = a - 2^{k_1}$. در این صورت a_1 از a به صفر نزدیکتر است (تمرین ۱). بنابراین یا $a_1 = 0$ یا $\|a_1\| = \frac{1}{2^{k_2}}$ که در اینجا $k_2 > k_1$. اگر فرض کنیم $a_2 = a_1 - 2^{k_2}$، باز هم به‌دست می‌آوریم که یا $a_2 = 0$ یا $\|a_2\| = \frac{1}{2^{k_3}}$ که در آن $k_3 > k_2$ و همین‌طور تا آخر. بنابراین یا a_sای صفر می‌شود و در این صورت a مجموعی از توانهای ۲ است (یعنی $a = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$) یا a_sها همگی غیرصفرند و در این صورت a با دقت دلخواه با مجموعهای $2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$ تقریب زده می‌شود. در این حالت خیلی بیراه نیست که a را برابر با مجموع نامتناهی

$$a = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s} + \cdots$$

فرض کنیم.

تعریف. فرض کنید x_1، x_2، ...، x_n، ... دنباله‌ای از عددهای گویا باشد. در صورتی می‌گوییم a برابر با مجموع نامتناهی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ است که فاصلهٔ ۲ ای میان a و مجموعهای $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$، وقتی که n به بی‌نهایت میل می‌کند، به صفر میل کند. یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \rho(a, S_n) = 0$$

تمرین ۷. ثابت کنید اگر $\|q\| < 1$، آن‌وقت مجموع نامتناهی $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ وجود دارد و برابر با $\frac{a}{1-q}$ است.

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که هر عدد گویا را می‌توان یا به شکل مجموعی نامتناهی مانند

$$۲^{k_۱}+۲^{k_۲}+\cdots+۲^{k_n} \qquad (k_۱<k_۲<\cdots<k_n)$$

نمایش داد و یا به شکل مجموعی نامتناهی مانند

$$۲^{k_۱}+۲^{k_۲}+\cdots+۲^{k_n}+\cdots$$

که در آن k_iها عددهایی صحیح‌اند و $k_۱<k_۲<\cdots$. در هر دو حالت می‌توان این نمایش را، که آن را بسط ۲ ای عدد a می‌نامند، به شکل

$$\varepsilon_k ۲^k+\varepsilon_{k+۱}۲^{k+۱}+\cdots+\varepsilon_{k+n}۲^{k+n}+\cdots$$

نوشت که در آن k عددی صحیح است، هر یک از عددهای

$$\varepsilon_{k+۱},\varepsilon_{k+۲},\ldots,\varepsilon_{k+n},\ldots$$

یا ۰ است یا ۱ و $\varepsilon_k=۱$. عددهای ε_k، $\varepsilon_{k+۱}$، ... را رقمهای ۲ ای عدد $a=\frac{p}{q}$ می‌نامند. اثبات اینکه هر عدد گویا یک و فقط یک بسط ۲ ای دارد چندان دشوار نیست.

تمرین ۸. ثابت کنید که

$$-۱=۱+۲+۲^۲+۲^۳+\cdots+۲^n+\cdots$$

و

$$\frac{۱}{۶}=۲^{-۱}+۱+۲+۲^۲+۲^۴+\cdots+۲^{۲n}+\cdots$$

بنابر تمرین ۸، رقمهای ۲ ای عدد ۱− دنبالهٔ

$$۱,۱,۱,\ldots$$

و رقمهای ۲ ای عدد $\frac{۱}{۶}$ دنبالهٔ

$$۱,۱,۰,۱,۰,۱,۰,۱,\ldots$$

را می‌سازند. هردو این دنباله‌ها متناوب‌اند. می‌توان ثابت کرد که دنبالهٔ رقمهای ۲ ای هر عدد گویا متناوب است. (به همان معنی که کسر اعشاری متناظر عددی گویا متناوب است؛ یعنی از رقمی به بعد دنباله‌ای از رقمها مرتباً تکرار می‌شوند.)

برای اثبات این ادعا دنبالهٔ عددهای صحیح $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، ... را که با تساویهای

$$\frac{p}{q}-\varepsilon_k۲^k=\frac{a_۱}{q}۲^{k+۱}$$

$$\frac{p}{q}-(\varepsilon_k۲^k+\varepsilon_{k+۱}۲^{k+۱})=\frac{a_۲}{q}۲^{k+۲},\ldots$$

$$\frac{p}{q}-(\varepsilon_k۲^k+\varepsilon_{k+۱}۲^{k+۱}+\cdots+\varepsilon_{k+n-۱}۲^{k+n-۱})=\frac{a_n}{q}۲^{k+n}$$

تعریف می‌شوند در نظر بگیرید که در اینجا ε_k، ε_{k+1}، ...، ε_{k+n-1}، ... رقمهای ۲ ای $\frac{p}{q}$اند (می‌توانید بررسی کنید که a_1، a_2، ... به‌راستی عددهایی صحیح‌اند).

اکنون می‌توان دریافت که بسط ۲ ای $\frac{p}{q}$ را می‌توان از بسط ۲ ای $\frac{a_n}{q}$ با ضرب کردن هر کدام از جمله‌های بسط دومی در 2^{k+n} و افزودن

$$\varepsilon_k 2^k + \varepsilon_{k+1} 2^{k+1} + \cdots + \varepsilon_{k+n-1} 2^{k+n-1}$$

به ابتدای مجموع حاصل به‌دست آورد.

بنابراین اگر ثابت کنیم عددی دوبار در دنبالهٔ a_1، a_2، ...، a_n، ... می‌آید متناوب بودن دنبالهٔ موردنظر ثابت می‌شود. درحقیقت، این دنباله کراندار است و چون جمله‌هایش عددهایی صحیح‌اند قطعاً در میان آنها عددهای برابر وجود دارند. کرانداری این دنباله را هم می‌توان با استفاده از نابرابریهای زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{p}{2^{k+n}} - \left(\frac{\varepsilon_k}{2^n} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{\varepsilon_{k+n-1}}{2}\right)q\right| \\ &\leq \left|\frac{p}{2^{k+n}}\right| + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2}\right)|q| \\ &\leq \frac{|p|}{2^k} + |q| \end{aligned}$$

تمرین ۹. با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۷ ثابت کنید که اگر ε_k، ε_{k+1}، ...، ε_{k+n}، ... دنباله‌ای متناوب از رقمهای ۰ و ۱ باشد، آن‌وقت مجموع نامتناهی

$$\varepsilon_k 2^k + \varepsilon_{k+1} 2^{k+1} + \cdots + \varepsilon_{k+n} 2^{k+n} + \cdots$$

بسط ۲ ای عددی گویاست.

عددهای ۲ ای

علاوه‌بر بسطهای متناوب که متناظر با عددهای گویا هستند می‌توان بسطهای غیرمتناوب را هم در نظرگرفت و گفت که اینها مجموعه‌ای جدید از عددها هستند. این عددهای جدید همراه با عددهای گویا مجموعه‌ای مانند $\mathbb{Q}_2$ تشکیل می‌دهند که عضوهای این مجموعه را عددهای ۲ ای می‌نامند.

عضوهای $\mathbb{Q}_2$ را می‌توان با هم جمع و یا در هم ضرب کرد. این اعمال این‌طور انجام می‌شوند: فرض کنید

$$\alpha = \varepsilon_k 2^k + \varepsilon_{k+1} 2^{k+1} + \cdots$$

α را به شکل کسری نامتناهی مانند $\alpha = \varepsilon_k \cdots \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$ بنویسید. مجموع (حاصل‌ضرب) دو عدد که این‌طور نوشته شده‌اند درست عین مجموع (حاصل‌ضرب) دو کسر نامتناهی محاسبه می‌شود فقط با رعایت این شرط که رقمها از چپ به راست منتقل شوند (در شکل ۴ دو مثال آورده‌ایم). این اعمال را نمی‌توانیم با جزئیات

$$\begin{array}{rr} & ۱۱۰/۱۱۰۰۱۱\ldots \\ \times & ۰/۰۱۱۰۱\ldots \\ \hline & ۱/۱۰۱۱۰\ldots \\ & ۰/۱۱۰۱۱\ldots \\ & ۰/۰۰۱۱۰\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline & ۱/۰۰۱\ldots \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & ۱۰۱۱/۰۱۰۱۱\ldots \\ + & ۱۰۱/۱۰۱۰\ldots \\ \hline & ۱۱۱۰/۰۰۰۰\ldots \end{array}$$

شکل ۴

بیشتر در اینجا بررسی کنیم و از خواننده می‌خواهیم خودش ثابت کند که مجموع و حاصل‌ضرب دو عضو $\mathbb{Q}_۲$ هم عضوی از $\mathbb{Q}_۲$ است و این اعمال ویژگیهای تعویض‌پذیری، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری را دارند.

نرم و فاصلهٔ ۲ ای را می‌توان به‌طور طبیعی به $Q_۲$ تعمیم داد: اگر $\alpha \in Q_۲$ و $\alpha = \varepsilon_k ۲^k + \varepsilon_{k+۱} ۲^{k+۱} + \cdots$ (که در آن $\varepsilon_k \neq ۰$)، آن‌وقت $\|\alpha\| = \frac{۱}{۲^k}$؛ اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_۲$، آن‌وقت $\rho(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$.

تمرین ۱۰. اگر بسط عددی مانند α که $\alpha \in \mathbb{Q}_۲$ داده شده باشد، بسط عدد $-\alpha$ را بسازید.

تمرین ۱۱. ثابت کنید مجموع معمولی دو عدد گویا و مجموع این عددها در $\mathbb{Q}_۲$ متناظر با یک عددند. همین حکم را در مورد حاصل‌ضرب دو عدد ثابت کنید.

تمرین ۱۲. عمل تقسیم در $\mathbb{Q}_۲$ چطور انجام می‌شود؟

همان‌طور که می‌دانید مجموع جمله‌های دنباله‌ای نامتناهی مانند $\{x_n\}$ را تحت شرطهای خاصی می‌توان تعریف کرد. شرطی لازم (ولی نه کافی) این است که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$. در مورد عددهای ۲ ای وضعیت ساده‌تر است. شرط $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = ۰$ لازم و کافی است: اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = ۰$، آن‌وقت

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=۱}^{n} x_n$$

وجود دارد.

تمرین ۱۳. کافی بودن شرط $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = ۰$ را ثابت کنید.

تمرین ۱۴. ثابت کنید مجموع

$$۱ \cdot ۱! + ۲ \cdot ۲! + \cdots + n \cdot n! + \cdots$$

وجود دارد و مقدارش را پیدا کنید.

تمرین ۱۵. ثابت کنید اگر $x \in \mathbb{Q}_۲$ و $\|x\| \leq \frac{۱}{۲}$، مجموع

$$\frac{x}{۱} + \frac{x^۲}{۲} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

وجود دارد.

لگاریتم ۲ ای

دست‌آخر مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید: عدد

$$\frac{۲}{۱} + \frac{۲^۲}{۲} + \frac{۲^۳}{۳} + \cdots + \frac{۲^n}{n}$$

را با کسری تحویل‌ناپذیر مانند $\frac{p_n}{q_n}$ نمایش می‌دهیم.

الف) ثابت کنید p_n عددی زوج است.

ب) ثابت کنید اگر $n > ۳$، آن‌وقت p_n بر ۸ بخش‌پذیر است.

ج) ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، می‌توان عددی مانند n پیدا کرد که عددهای p_n، $p_{n+۱}$، $p_{n+۲}$، ... همگی بر ۲^k بخش‌پذیر باشند.

تابع

$$L(x) = \frac{x}{۱} + \frac{x^۲}{۲} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

را در نظر بگیرید که روی مجموعهٔ عددهایی ۲ ای مانند x که نرم آنها از $\frac{۱}{۲}$ بزرگتر نیست تعریف شده است (تمرین ۱۵ را ببینید). برای اثبات حکم (ج) مسأله، کافی است ثابت کنیم که $L(۲) = ۰$. تابع دیگری را با ضابطهٔ $\log x = -L(۱ - x)$ تعریف می‌کنیم. اکنون تساوی $L(۲) = ۰$ یعنی اینکه $\log(-۱) = ۰$. تابع $\log$ (که آن را لگاریتم ۲ ای می‌نامند) ویژگی اصلی تابع لگاریتمی را دارد: $\log(xy) = \log x + \log y$. از این ویژگی بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $\log(-۱) = ۰$. درواقع

$$\log ۱ = \log(۱ \cdot ۱) = \log ۱ + \log ۱ = ۲ \log ۱$$

که از این تساوی به‌دست می‌آید $\log ۱ = ۰$. از طرف دیگر،

$$\log ۱ = \log\left((-۱) \cdot (-۱)\right) = \log(-۱) + \log(-۱) = ۲ \log(-۱)$$

بنابراین، $\log(-۱) = ۰$. لگاریتم ۲ ای در مجموعهٔ عددهای ۲ ای همان نقش لگاریتم معمولی در مجموعهٔ عددهای حقیقی را دارد. لگاریتم ۲ ای به‌ازای xهایی که نرم آنها ۱ است، $\|x\| = ۱$، تعریف شده است، چون درست در این حالت است که $\|x - ۱\| \leq \frac{۱}{۲}$؛ به‌ویژه $\log(-۱)$ تعریف شده است.

علاوه‌بر لگاریتم، تابعهای مهم دیگری با متغیر ۲ ای وجود دارند. یکی از آنها تابع نمایی است که این‌طور تعریف می‌شود:

$$\exp x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

تمرین ۱۶. ثابت کنید تابع نمایی روی مجموعهٔ عددهایی ۲ ای مانند x تعریف می‌شود که در شرط $\|x\| \leq \frac{۱}{۴}$ صدق می‌کنند.

ویژگیهای اصلی تابع نمایی ۲ ای شبیه ویژگیهای اصلی تابع نمایی معمولی است:

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y, \qquad \exp(\log x) = x, \qquad \log(\exp x) = x$$

این اتحادها به‌ازای مقدارهایی از متغیرها که به‌ازای آنها تابعهای متناظر تعریف‌شده‌اند برقرارند.

درست همان‌طور که فاصلهٔ ۲ ای را تعریف کردیم می‌توانیم به‌ازای عدد اول دلخواهی مانند p، فاصلهٔ p ای را تعریف کنیم. ثابت شده است که همهٔ فاصله‌هایی که برای عددهای گویا تعریف شده‌اند با فاصلهٔ معمولی یا با یکی از فاصله‌های p ای معادل‌اند. ولی این مبحث مقاله‌ای دیگر را می‌طلبد.

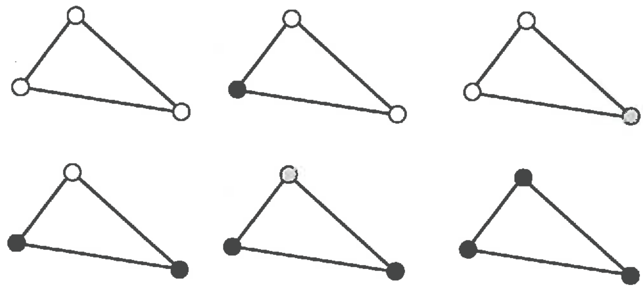
پیوست

فقط مانده است ثابت کنیم مثلثی که رأسهایش به سه رنگ مختلف‌اند وجود دارد. حکمی کلیتر را بیان و ثابت می‌کنیم: فرض کنید مربعی مانند $OABC$ به چند مثلث تجزیه شده باشد. علاوه‌بر این، فرض کنید همهٔ رأسهای این مثلثها طوری با رنگهای سفید، سیاه و خاکستری رنگ شده باشند که هیچ خطی شامل نقاطی از هر سه رنگ نباشد. سرانجام فرض کنید نقطهٔ O سفید باشد، A و B سیاه باشند و C خاکستری باشد. در این صورت در میان مثلثهای این تجزیه، مثلثی وجود دارد که رأسهایش به سه رنگ مختلف‌اند.

اثبات. بهتر است که میان ضلعهای مثلثها و پاره‌خطهایی که بخشی از ضلعهای مثلثها هستند و با رأسهای مثلثهای دیگر که روی این ضلعها می‌افتند تشکیل می‌شوند، تمایز قائل شویم. اگر ضلعی از مثلثی شامل هیچ رأسی از مثلثهای دیگر نباشد آن ضلع را پاره‌خط به‌حساب می‌آوریم.

برحسب رنگهای دو سر پاره‌خطها و ضلعها می‌توان آنها را به شش نوع پاره‌خط و شش نوع ضلع تقسیم کرد: سفید ـ سفید (هر دو سر سفیدند)، سفید ـ سیاه (یک سر سفید و سر دیگر سیاه است) و به‌همین ترتیب تا آخر (سفید ـ خاکستری، سیاه ـ سیاه، سیاه ـ خاکستری و خاکستری ـ خاکستری). ثابت می‌کنیم ضلعهای مثلثی که دو رأس همرنگ داشته باشد شامل تعدادی زوج پاره‌خط سفید ـ سیاه است. درواقع، چون هیچ خطی شامل نقاطی از هر سه رنگ نیست، پاره‌خطهای سفید ـ سیاه فقط ممکن است روی ضلعهای سفید ـ سفید، سفید ـ سیاه و سیاه ـ سیاه قرار داشته باشند؛ ضلعهای سفید ـ سفید و سیاه ـ سیاه شامل تعدادی زوج از چنین پاره‌خطهایی‌اند و ضلعهای سفید ـ سیاه شامل تعدادی فرد. بنابراین ضلعهای هر کدام از مثلثهایی که در شکل ۵ نشان داده

شده‌اند شامل تعدادی زوج پاره‌خطهای سفید-سیاه‌اند (مثلثهایی که دو یا سه رأس خاکستری دارند شامل چنین پاره‌خطهایی نیستند).



شکل ۵

اکنون فرض کنید هیچ‌کدام از مثلثهای تجزیهٔ موردنظر رأسهایش از هر سه رنگ نباشد، یعنی هرکدام از این مثلثها دو رأس همرنگ داشته باشد. هر پاره‌خط که روی ضلعی از مربع $OABC$ قرار داشته باشد متعلق به یک ضلع دقیقاً یکی از مثلثهای تجزیه است و هر پاره‌خط درون مربع متعلق به ضلعهای دوتا از مثلثهای تجزیه است. چون هر مثلث تجزیه دو رأس به رنگهای مختلف دارد، ضلعهای مربع شامل تعدادی زوج پاره‌خط سفید-سیاه هستند. از طرف دیگر، ضلعهای OC و BC شامل پاره‌خطهایی از این دست نیستند، ضلع OA شامل تعدادی فرد و ضلع AB شامل تعدادی زوج از چنین پاره‌خطهایی است که روی هم‌رفته تعدادی فرد از چنین پاره‌خطهایی به‌دست می‌آید. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

B. Becker, S. Vostokov, Y. Ionin, 2-adic numbers, *Quantum*, July/August 1999, pp. 22-26.

نقاط جالب مثلث

ایگور شاریگین

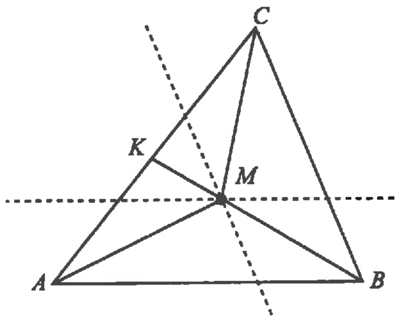
در هندسه چیزهایی دربارهٔ برخی نقاط مهم مثلث مانند مرکزثقل، مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز ارتفاعی می‌آموزیم. در این مقاله چندتا از ویژگیهای غیربدیهی این نقاط را بررسی می‌کنیم. درحقیقت بیشتر این ویژگیها کاملاً معادل با تعریفهای این نقاط‌اند. به‌عبارت دیگر «نقطهٔ مهم» فقط آن نقطه‌ای است که ویژگی‌ای را که توصیف می‌کنیم داشته باشد.

مرکزثقل

یکی از جالبترین نقاط مثلث مرکزثقل آن، یعنی نقطهٔ برخورد میانه‌هایش، است. لحظه‌ای فرض می‌کنیم که خواننده اثبات این قضیه را که میانه‌های مثلث همگی از یک نقطه می‌گذرند ندیده باشد.

درحقیقت، هر آنچه را که دربارهٔ مرکزثقل می‌دانیم به‌کلی کنار می‌گذاریم. ثابت می‌کنیم که درون هر مثلث مانند ABC نقطه‌ای مانند M وجود دارد که مساحتهای سه مثلث ABM، BCM و CAM با هم برابرند (شکل ۱ را ببینید). عملاً این نقطه را مشخص و به این ترتیب ثابت می‌کنیم که نقطهٔ M وجود دارد. اما نقطهٔ M کجا ممکن است باشد؟ مثلثهای ABM و ABC در ضلع AB مشترک‌اند، بنابراین اگر بخواهیم S_{ABM} برابر با S_{ABC} باشد، آن‌وقت ارتفاع وارد بر ضلع AB از مثلث ABM باید برابر با $\frac{1}{3}$ ارتفاع متناظر از مثلث ABC باشد. ازاین‌رو، نقطهٔ M باید روی خطی موازی با AB قرار داشته باشد که فاصله‌اش از آن برابر با $\frac{1}{3}$ ارتفاع وارد بر AB در مثلث ABC است.

اما نقطهٔ M باید همین رابطه را هم با ضلع BC داشته باشد؛ یعنی باید روی خطی موازی با BC قرار داشته باشد که فاصله‌اش از آن برابر با $\frac{1}{3}$ ارتفاع وارد بر BC در مثلث ABC است. تنها گزینهٔ ممکن برای M نقطهٔ برخورد این



شکل ۱

خطهاست (روشن است که این خطها با یکدیگر موازی نیستند). درحقیقت، این نقطه همان نقطهٔ موردنظر است، چون اگر $S_{ABM} = S_{BCM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$، آن‌وقت S_{CAM} هم برابر با $\frac{1}{3}S_{ABC}$ می‌شود و از روشی که به‌کار بردیم معلوم است که این نقطه تنها انتخاب ممکن برای نقطه‌ای مانند M با ویژگیهای موردنظر است.

اکنون به مسألهٔ میانه‌ها بازمی‌گردیم. می‌توانیم ثابت کنیم که هر کدام از میانه‌های مثلث ABC از نقطهٔ M می‌گذرد و این نقطه هر میانه را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند (قسمت بزرگتر طرف رأس مثلث است). درواقع، BM را امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در نقطهٔ K قطع کند. چون $S_{AMB} = S_{BMC}$، ارتفاعهای وارد بر ضلع مشترک این دو مثلث، یعنی BM، با هم برابرند. اکنون با استفاده از این نتیجه می‌توانید به‌آسانی ثابت کنید (مثلاً با رسم این ارتفاعها و بررسی مثلثهای هم‌مساحت) که نقطهٔ K وسط AC است، و بنابراین BK که از نقطهٔ M می‌گذرد میانهٔ مثلث است. دوباره، $S_{AMC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$، بنابراین (همان‌طور که پیش از این دیدیم) فاصلهٔ M از AC برابر با $\frac{1}{3}$ فاصلهٔ B از آن است. اگر از نقاط M و B بر AC عمود کنیم و مثلثهای متشابه‌ای را که با این خطها تشکیل می‌شوند در نظر بگیریم، معلوم می‌شود که $MK = \frac{1}{3}BK$ و بنابراین نقطهٔ M میانهٔ BK را به نسبت ۱ : ۲ از رأس B تقسیم می‌کند. طبیعتاً همین نتیجه‌ها در مورد دو میانهٔ دیگر مثلث ABC هم درست‌اند.

به این ترتیب توصیف متعارف زیر از مرکزثقل را پیدا کرده‌ایم:

تعریف دیگر مرکزثقل: نقطهٔ M وقتی و فقط وقتی مرکزثقل مثلث ABC است که مساحتهای سه مثلث ABM، BCM و CAM با هم برابر باشند.

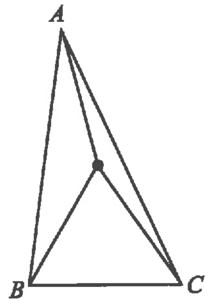
مرکز دایرهٔ محیطی

نقطهٔ مهم دیگر مثلث مرکز دایرهٔ محیطی‌اش است.

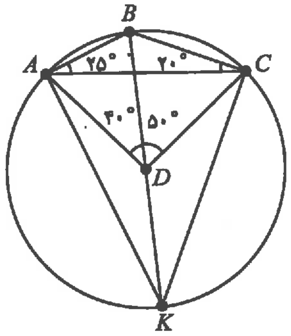
مسألهٔ ۱. در مثلث ABC، $\angle A = 30^\circ$ و $\angle B = 80^\circ$. نقطهٔ K درون مثلث ABC طوری انتخاب شده است که مثلث BCK متساوی‌الاضلاع است. مقدار $\angle KAC$ را پیدا کنید.

راه‌حل. در شرایط این مسأله می‌توانیم قاعدهٔ سینوسها را به‌کار ببریم، اما بهتر است به این نکته توجه کنیم که نقطهٔ K مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. درواقع، در مرکز دایرهٔ محیطی، ضلع BC روبه‌روی زاویه‌ای است که اندازهٔ آن دو برابر $\angle BAC$، یعنی 60°، است (شکل ۲ را ببینید). از طرف دیگر، مرکز دایرهٔ محیطی روی عمودمنصف BC هم قرار دارد. اکنون چندان دشوار نیست که بررسی کنید نقطهٔ K تنها نقطه‌ای است که در هر دو این شرطها صدق می‌کند و بنابراین درحقیقت همان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. اما در این صورت $\angle CKA = 2\angle CBA = 160^\circ$ و درنتیجه $\angle KAC = 10^\circ$.

مسألهٔ ۲. در چهارضلعی محدب $ABCD$، $\angle BAC = 25^\circ$، $\angle BCA = 20^\circ$، $\angle BDC = 50^\circ$ و $\angle BDA = 40^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ حاده‌ای را که قطرهای این چهارضلعی تشکیل می‌دهند پیدا کنید.



شکل ۲



شکل ۳

راه‌حل. به‌طور غیرمستقیم استدلال و ثابت می‌کنیم که D مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. چون مثلث ABC منفرجه است، مرکز دایرهٔ محیطی‌اش روبه‌روی نقطهٔ B و آن طرف ضلع AC، در بیرون مثلث، قرار دارد و در آن، ضلعهای BA و BC به‌ترتیب روبه‌روی زاویه‌های $۴۰°$ و $۵۰°$اند. از خواننده می‌خواهیم بررسی کند که فقط یک نقطه از این دست ممکن است وجود داشته باشد و بنابراین باید نقطهٔ D باشد. اکنون دیگر حل کردن مسأله چندان دشوار نیست.

به هر حال، در هندسه معمولاً استدلال مستقیم بهتر است. اکنون، چون نقش واقعی نقطهٔ D را در این مسأله حدس زده‌ایم می‌توانیم به‌طور مستقیم استدلال کنیم. ابتدا دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و بعد BD را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ K قطع کند (شکل ۳ را ببینید). در مثلث DKA، $\angle DKA = \angle BCA = ۲۰°$ و زاویهٔ خارجی در رأس D برابر با $۴۰°$ است. بنابراین $\angle DAK = ۲۰°$ و درنتیجه $DK = DA$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که $DK = DC$ و بنابراین نقطهٔ D مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. اکنون می‌توانیم به‌آسانی زاویهٔ میان قطرهای این چندضلعی را پیدا کنیم: زاویهٔ موردنظر برابر با $۸۵°$ است.

مرکز دایرهٔ محاطی داخلی

نقطهٔ مهم دیگر مثلث مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌اش است: فرض کنید نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد. ابتدا دو ویژگی این نقطه را بیان می‌کنیم که بعداً وقتی دنبال توصیفهای دیگری از مرکز دایرهٔ محاطی می‌گردیم به‌راحتی ثابت می‌شوند.

ویژگی $I_۱$: اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد، آن‌وقت $\angle AIC = ۹۰° + \frac{۱}{۲}\angle B$.

ویژگی $I_۲$: اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد، خط BI از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AIC می‌گذرد.

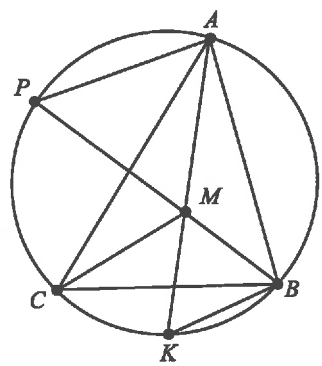
توصیفهای متفاوت زیر از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی براساس ویژگیهای $I_۱$ و $I_۲$ بالا بیان شده‌اند:

شکل دیگر ویژگی $I_۱$: فرض کنید M نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد که $\angle BMC = ۹۰° + \frac{۱}{۲}\angle A$ و خط AM از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMC بگذرد. در این صورت نقطهٔ M مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث

ABC است.

شکل دیگر ویژگی $I_۲$: فرض کنید M نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد که خط AM از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BMC و خط MB از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMC بگذرد. در این صورت نقطهٔ M مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است. (خواننده می‌تواند درستی عکس این حکمها را بررسی کند؛ یعنی اگر نقطهٔ M مرکز دایرهٔ محاطی داخلی باشد، آن‌وقت M دو ویژگی‌ای را که در بالا توصیف شد دارد.)

در اینجا فقط به اثبات شکل دیگر ویژگی $I_۲$ می‌پردازیم. فرض کنید دایرهٔ محیطی مثلث ABC خطهای AM و BM را برای بار دوم به‌ترتیب در نقاط K و P قطع کند (شکل ۴ را ببینید).



شکل ۴

می‌توانیم ثابت کنیم که $\angle MCB = ۹۰^\circ - \angle KMB$. درواقع، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MCB، نقطهٔ O، (در شکل ۴ این نقطه نشان داده نشده است) روی AM قرار دارد و اگر $\angle MCB = x$، آن‌وقت $\angle MOB = ۲x$ و (چون مثلث OMB متساوی‌الساقین است)

$$\angle KMB = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۲x) = ۹۰^\circ - x$$

که این تساوی همان نتیجه‌ای است که می‌خواستیم.

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که $\angle MCA = ۹۰^\circ - \angle PMA$. زاویه‌های KMB و PMA برابرند، پس $\angle MCA$ و $\angle MCB$ هم برابر می‌شوند و درنتیجه MC زاویهٔ C را نصف می‌کند. بنابراین

$$\begin{aligned}\angle KMB &= ۹۰^\circ - \angle MCB \\ &= ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle ACB \\ &= ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle MKB \\ &= \frac{۱}{۲}(\angle KMB + \angle KBM)\end{aligned}$$

به‌عبارت. دیگر، $\angle KMB = \angle KBM$ و بنابراین $KM = KB$. درنتیجه دایرهٔ به مرکز K و شعاع KB از نقطهٔ M می‌گذرد. اثبات اینکه این دایره باید از نقطهٔ C هم بگذرد چندان دشوار نیست. درواقع، $\angle MCB = ۹۰° - \angle KMB$ و $\angle MKB = ۱۸۰° - ۲\angle KMB$. بنابراین $\angle MCB = \frac{۱}{۲}\angle MKB$ و این تساوی یعنی اینکه نقطهٔ C روی دایرهٔ موردنظر قرار دارد.

اما در این صورت نقطهٔ K مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MCB می‌شود، درنتیجه AK زاویهٔ CAB را نصف می‌کند. به همین ترتیب معلوم می‌شود که MB زاویهٔ CBA را نصف می‌کند و نقطهٔ برخوردشان، M، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.

تمرین ۱ـ۳. ویژگیهای $I_۱$، $I_۲$ و شکل دیگر ویژگی $I_۱$ را ثابت کنید.

ویژگی دیگر مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث که در ادامه می‌آید با استفاده از بردارهای هندسی بیان و ثابت می‌شود. این ویژگی در حل بسیاری از مسأله‌ها به‌کار می‌آید. برجسته‌ترین مشخصهٔ این ویژگی این است که می‌توان آن را به فضای سه‌بعدی (و حتی فضاهای با بعد بالاتر) تعمیم داد.

ویژگی $I_۳$: اگر a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC باشند و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌اش باشد، آن‌وقت $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{o}$.

اثبات. فرض کنید I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد و AI، BC را در نقطهٔ $A_۱$ قطع کند. در این صورت

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} &= a\overrightarrow{IA} + b(\overrightarrow{IA_۱} + \overrightarrow{A_۱B}) + c(\overrightarrow{IA_۱} + \overrightarrow{A_۱C}) \\ &= (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IA_۱} + c\overrightarrow{IA_۱}) + (b\overrightarrow{A_۱B} + c\overrightarrow{A_۱C}) \\ &= k\overrightarrow{IA} \end{aligned}$$

(در آخرین تبدیل از ویژگی معروف نیمساز استفاده کرده‌ایم: $\frac{A_۱B}{A_۱C} = \frac{c}{b}$. خوانندگانی که این ویژگی نیمساز را ندیده‌اند می‌توانند اثبات آن را در کتابهای درسی معمولی هندسه پیدا کنند.)

بنابراین مجموع برداری در عبارت حاصل، برداری همراستا با خط AI است. به‌همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که این مجموع همراستا با BI و CI هم هست. بنابراین طول آن باید برابر با ۰ باشد.

تمرین ۴. ثابت کنید معادلهٔ بیان‌کنندهٔ ویژگی $I_۳$ معادل با این حکم است که نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.

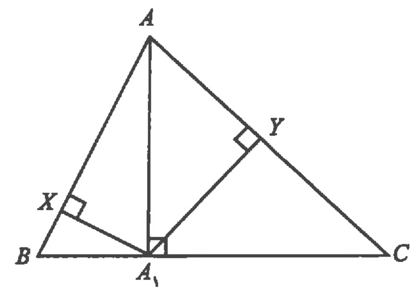
مرکز ارتفاعی

نقطهٔ مهم دیگر مثلث نقطهٔ برخورد ارتفاعها یا مرکز ارتفاعی است. از راههای بسیاری می‌توان ثابت کرد که ارتفاعهای هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. در اینجا اثباتی را می‌آوریم که به اثباتی که برای همرسی میانه‌ها

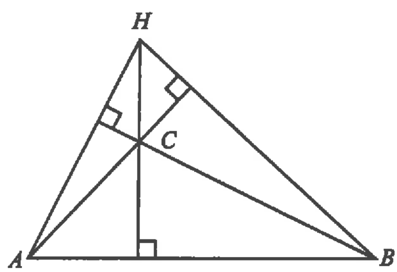
آوریم ربط دارد و به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم که به این رابطه پی ببرد.

ثابت می‌کنیم که ارتفاع وارد بر ضلع BC مجموعهٔ نقاطی است که نسبت فاصله‌هایشان از دو ضلع AB و AC برابر با $\frac{\cos B}{\cos A}$ است.

ابتدا مثلث حاده‌ای مانند ABC را در نظر بگیرید و پیش از هر چیز به فاصلهٔ نقطهٔ $A_۱$ از دو ضلع AB و AC توجه کنید (شکل ۵ را ببینید که در آن پاره‌خطهای متناظر با این فاصله‌ها به‌ترتیب $A_۱X$ و $A_۱Y$ نامگذاری شده‌اند). در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA_۱X$ به‌دست می‌آوریم که $A_۱X = AA_۱ \sin \angle BAA_۱$. اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABA_۱$، $\sin \angle BAA_۱ = \cos B$، درنتیجه می‌توانیم بنویسیم $A_۱X = AA_۱ \cos B$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که $A_۱Y = AA_۱ \cos C$ و درنتیجه $\frac{A_۱X}{A_۱Y} = \frac{\cos B}{\cos C}$.



شکل۵



شکل ۶

اکنون نقطه‌ای مانند P را هر جای دلخواه روی ارتفاع $AA_۱$ هم که انتخاب کنیم نسبت فاصله‌هایش از AB و AC برابر با $\frac{\cos B}{\cos C}$ است. درحقیقت، ارتفاع $AA_۱$ مکان هندسی نقاطی است که نسبت فاصله‌هایشان از AB و AC برابر با $\frac{\cos B}{\cos C}$ است. (این ادعاها و عکسهایشان با استفاده از تشابه مثلثها ثابت می‌شوند که این اثباتها را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم). البته، حکمهای متناظر اینها در مورد دو ارتفاع دیگر هم برقرارند.

اکنون فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $AA_۱$ و $BB_۱$ باشد. در این صورت نسبت فاصله‌های نقطهٔ H از AB و AC، $\frac{\cos B}{\cos C}$ و نسبت فاصله‌هایش از AB و BC، $\frac{\cos A}{\cos C}$ است. بنابراین نسبت فاصله‌های H از AC و BC برابر است با

$$\frac{\frac{\cos B}{\cos C}}{\frac{\cos A}{\cos C}} = \frac{\cos B}{\cos A}$$

اما این نتیجه یعنی اینکه H روی ارتفاع $CC_۱$ قرار دارد و بنابراین سه ارتفاع مثلث همرس‌اند.

یافتن مرکز ارتفاعی مثلثهای قائم‌الزاویه خیلی راحت است: مرکز ارتفاعی این‌گونه مثلثها چیزی نیست جز رأس زاویهٔ قائمه. در حالتی که یکی از زاویه‌ها منفرجه باشد خواننده می‌تواند با کمی تغییر در آنچه پیشتر گفته شد اثباتی برای این مورد هم بیاورد. یا اینکه می‌توان توجه کرد که اگر H نقطهٔ برخورد دو ارتفاع AH و BH از مثلث منفرجه

ABC باشد، آن‌وقت AC و BC در امتداد ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABH قرار دارند (شکل ۶ را ببینید). اما این یعنی اینکه C مرکز ارتفاعی مثلث حادهٔ ABH است و درنتیجه خطی که از H بر AB عمود می‌شود از C می‌گذرد. اما در این صورت ارتفاع سوم مثلث ABC در امتداد این خط قرار دارد و سه ارتفاع مثلث در نقطهٔ H همرس‌اند.

تمرین ۵. در حالت کلی ثابت کنید که اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، آن‌وقت درحقیقت هرکدام از چهار نقطهٔ A، B، C و M مرکز ارتفاعی مثلثی است که سه‌تای دیگر تشکیل می‌دهند.

استفاده از ویژگی زیر بیشتر وقتها در حل کردن مسأله‌های مربوط به مرکز ارتفاعی مثلث مفید است:

ویژگی O_1: شعاع دایره‌ای که از دو رأس مثلث و مرکز ارتفاعی‌اش می‌گذرد برابر با شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث است.

این ویژگی نتیجه‌ای از حکمی نسبتاً قویتر است که می‌توان آن را این‌طور بیان کرد:

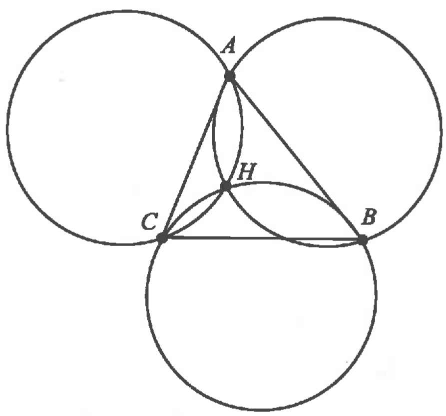
ویژگی O'_1: دایره‌ای که از دو رأس مثلث و مرکز ارتفاعی‌اش می‌گذرد قرینهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث نسبت به ضلع متناظر مثلث است.

تمرین ۶. با اثبات ویژگی O'_1، ویژگی O_1 را ثابت کنید.

این مقاله را با آوردن قضیه‌ای دیگر به پایان می‌رسانیم.

مسألهٔ ۳. سه دایرهٔ برابر از نقطه‌ای مشترک می‌گذرند. ثابت کنید این نقطه مرکز ارتفاعی مثلثی است که نقاط برخورد دیگر (نقاط برخورد دوبه‌دو) این سه دایره تشکیل می‌دهند.

راه‌حل. فرض کنید سه دایرهٔ موردنظر یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند و نقاط برخورد دیگر این دایره‌ها A، B و C باشند (شکل ۷ را ببینید). چون دایره‌ای که از نقاط B، C و H می‌گذرد قرینهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABH (نسبت



شکل ۷

به ضلع BH) است، این دایره باید شامل مرکز ارتفاعی مثلث ABH باشد. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که دایره‌ای که از نقاط A، C و H می‌گذرد شامل مرکز ارتفاعی مثلث ABH است. بنابراین مرکز ارتفاعی مثلث ABH باید نقطهٔ C باشد. اما بنابر تمرین ۵، این یعنی اینکه نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است و این همان‌چیزی است که می‌خواستیم.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

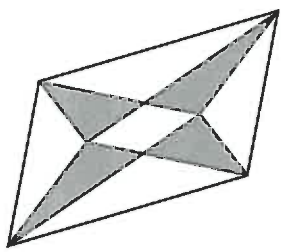
I. F. Sharygin, Points of interest, *Quantum*, March/April 1998, pp. 34-37.

از باب تفریح

۱. در دفتر مدرسه‌تان تابلویی به‌طرز عجیبی به دیوار نصب شده است: دو میخ (به جای یک میخ) به دیوار کوبیده شده و نخ تابلو طوری از این دو میخ رد شده که حتی اگر یکی از میخها را هم از دیوار بیرون بیاوریم تابلو می‌افتد! چگونه این کار انجام شده است؟

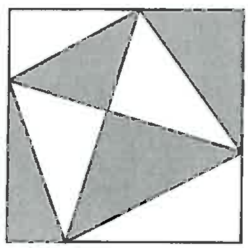
۲. دانش‌آموزان مدرسه‌ای طوری در صف ایستاده‌اند که مربعی تشکیل داده‌اند. بعد صف‌بندی را عوض می‌کنند و در آرایشی مستطیلی طوری می‌ایستند که تعداد ردیفها پنج تا زیاد می‌شود. این مدرسه چند دانش‌آموز دارد؟

۳. مانند شکل زیر دو نقطه درون متوازی‌الاضلاعی انتخاب کرده‌ایم و پاره‌خطهایی که هر یک از آنها را به رأسهای متوازی‌الاضلاع وصل کرده‌اند رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار بالایی با مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار پایینی برابر است.



۴. عرفان چندوجهی محدب کاغذی‌ای را از روی همهٔ یالهایش می‌برد و وجه‌هایش را برای مانی پست می‌کند. مانی این وجه‌ها را به هم می‌چسباند و چندوجهی‌ای محدب می‌سازد. آیا ممکن است این دو چندوجهی همنهشت نباشند؟

۵. مانند شکل زیر دو پاره‌خطِ عمود بر هم درون مربعی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای سایه‌دار با مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهایی که سایه ندارند برابر است.



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۴)

مسأله‌های پیشنهادی به چهل‌وچهارمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

جولای ۲۰۰۳، توکیو، ژاپن

هر سال، هر یک از کشورهای شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی می‌تواند حداکثر شش مسأله برای کشور میزبان المپیاد بفرستد. کمیته‌ای از طرف کشور میزبان موظف می‌شود تا از میان این مسأله‌ها حدود سی مسأله را انتخاب کند تا هیأت داوران، که از سرپرستان اول تیمها تشکیل می‌شود، مسأله‌های المپیاد را از میان این مسأله‌ها انتخاب کند. مطابق قوانین، این مسأله‌ها تا جولای سال بعد منتشر نمی‌شوند تا اگر کشوری خواست، از آنها برای مسابقه‌های ملی یا دوره‌های آموزش تیمش استفاده کند. در زیر، مسأله‌های پیشنهادی به المپیاد چهل‌وچهارم را آورده‌ایم، البته مسأله‌هایی را که برای المپیاد انتخاب شده‌اند حذف کرده‌ایم (می‌توانید این مسأله‌ها و راه‌حل آنها را در نشریهٔ ریاضیات، سال چهارم، شمارهٔ اول، آبان ۱۳۸۲، ببینید).

ترکیبیات

۱. فرض کنید D_1، ... و D_n قرصهایی بسته در صفحه باشند (قرص بسته، ناحیهٔ درون یک دایره به‌انضمام خود این دایره است). فرض کنید هر نقطه در صفحه در حداکثر ۲۰۰۳ تا از این قرصها قرار داشته باشد. ثابت کنید یکی از این قرصها حداکثر $۷ \times ۲۰۰۳ - ۱$ تا از قرصهای دیگر را قطع می‌کند.

۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq ۵$. بزرگترین عدد طبیعی مانند k را طوری پیدا کنید که nضلعی‌ای (محدب یا مقعر، که خودش را قطع نمی‌کند) وجود داشته باشد که k زاویهٔ درونی قائمه داشته باشد.

۳. فرض کنید x_1، ...، x_n، y_1، ... و y_n عددهایی حقیقی باشند. فرض کنید $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ ماتریسی با درایه‌های

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & x_i + y_i \geq ۰ \\ ۰ & x_i + y_i < ۰ \end{cases}$$

باشد. فرض کنید B ماتریسی $n \times n$ باشد که درایه‌هایش ۰ و ۱ هستند و مجموع درایه‌های هر سطر و هر ستون B با مجموع نظیرش در ماتریس A برابر است. ثابت کنید $A = B$.

۴. هر نقطه در صفحه که مختصاتش عددهایی صحیح‌اند مرکز قرصی به شعاع $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است.

الف) ثابت کنید مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود دارد که رأسهایش در قرصهایی متمایز قرار دارند.

ب) ثابت کنید طول ضلع هر مثلث متساوی‌الاضلاع که رأسهایش در قرصهایی متمایز قرار دارند از ۹۶ بزرگتر است.

۵. فرض کنید $f(k)$ تعداد عددهایی صحیح مانند n باشد که

الف) $\circ \leq n < \text{۱۰}^k$، یعنی n (در سیستم دهدهی) دقیقاً k رقم دارد (مجازیم به ابتدای نمایش n صفر اضافه کنیم).

ب) می‌توان جای رقمهای n را طوری تغییر داد که عددی به‌دست بیاید که بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m، $f(\text{۲}m) = \text{۱۰} f(\text{۲}m - \text{۱})$.

جبر

۱. فرض کنید a_{ij}، $\text{۱} \leq i, j \leq \text{۳}$، عددهایی حقیقی باشند و اگر $i = j$، a_{ij} عددی مثبت و اگر $i \neq j$، a_{ij} عددی منفی باشد. ثابت کنید عددهایی حقیقی و مثبت مانند c_1، c_2 و c_3 وجود دارند، به‌طوری که عددهای

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3, \quad a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3, \quad a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3$$

همگی یا مثبت‌اند، یا منفی یا صفر.

۲. همهٔ تابعهای صعودی مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که

الف) $f(\circ) = \circ$ و $f(\text{۱}) = \text{۱}$؛

ب) به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند a و b که $a < \text{۱} < b$،

$$f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab)$$

۳. دو دنباله مانند $(a_n)_{n\geq 1}$ و $(b_n)_{n\geq 1}$ از عددهای حقیقی مثبت در نظر بگیرید که

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots, \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

فرض کنید

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + \cdots + b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

و

$$c_i = \min\{a_i, b_i\}, \quad C_n = c_1 + \cdots + c_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

الف) آیا دو دنباله مانند $(a_n)_{n\geq 1}$ و $(b_n)_{n\geq 1}$ وجود دارند که دنباله‌های $(A_n)_{n\geq 1}$ و $(B_n)_{n\geq 1}$ بی‌کران باشند اما دنبالهٔ $(C_n)_{n\geq 1}$ کراندار باشد؟

ب) اگر به‌علاوه فرض کنیم $b_i = \frac{1}{i}$، $i \geq 1$، آیا پاسخ سؤال قسمت (الف) تغییر می‌کند؟

۴. فرض کنید $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت باشد. همهٔ تابعها مانند $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ را طوری پیدا کنید که

الف) به‌ازای سه عدد در $\mathbb{R}^+$ مانند x، y و z،

$$f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)=f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$$

ب) اگر $1\le x<y$، $f(x)<f(y)$.

۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و فرض کنید $(x_1,\ldots,x_n)$ و $(y_1,\ldots,y_n)$ دو دنباله از عددهای حقیقی مثبت باشند. فرض کنید $(z_2,\ldots,z_{2n})$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی مثبت باشد که

$$z_{i+j}^2\ge x_iy_j,\qquad 1\le i,j\le n$$

فرض کنید $M=\max\{z_2,\ldots,z_{2n}\}$. ثابت کنید

$$\left(\frac{M+z_2+\cdots+z_{2n}}{2n}\right)^2\ge\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}\right)$$

نظریهٔ اعداد

۱. فرض کنید m عددی صحیح و بزرگتر از ۱ باشد. دنبالهٔ $(x_i)_{i\ge 0}$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$x_i=\begin{cases}2^i & 0\le i\le m-1\\ \sum_{j=1}^{m}x_{i-j} & i\ge m\end{cases}$$

بزرگترین عدد طبیعی مانند k را پیدا کنید که دنبالهٔ موردنظر k جملهٔ متوالی داشته باشد که بر m بخش‌پذیر باشند.

۲. رقمهای عدد طبیعی a را به‌ترتیب زیر تغییر می‌دهیم تا عدد $d(a)$ به‌دست بیاید:

الف) رقم آخر a را به ابتدای آن منتقل کنید تا عدد b به‌دست بیاید.

ب) b را به توان دو برسانید تا c به‌دست بیاید.

ج) رقم اول c را به انتهای آن منتقل کنید تا عدد $d(a)$ به‌دست بیاید.

همهٔ عددها مانند a را طوری پیدا کنید که $d(a)=a^2$.

۳. فرض کنید b عددی طبیعی و بزرگتر از ۵ باشد. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n عدد

$$x_n=\underbrace{11\ldots1}_{n-1}\underbrace{22\ldots2}_{n}5$$

را که در مبنای b نوشته شده است در نظر بگیرید. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی $b=10$ که عددی طبیعی

مانند M وجود داشته باشد که به‌ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از M مانند n، x_n مربع کامل باشد.

۴. عدد صحیح n را خوب می‌نامیم، هرگاه $|n|$ مربع کامل نباشد. همهٔ عددهای صحیح مانند m را طوری پیدا کنید که m را بتوان، به تعدادی نامتناهی طریق، به شکل مجموع سه عدد خوب متمایز که حاصل‌ضربشان مربع عددی صحیح و فرد است نوشت.

۵. دنبالهٔ $(a_k)_{k\geq ۰}$ به شکل زیر تعریف شده است:

$$a_۰ = ۲, \quad a_{k+۱} = ۲a_k^۲ - ۱, \quad k \geq ۰$$

ثابت کنید اگر عدد اول و فرد p، a_n را بشمارد، آن‌وقت $۲^{n+۳}$، $p^۲ - ۱$ را می‌شمارد.

۶. فرض کنید p عددی اول و A مجموعه‌ای از عددهای طبیعی باشد که

الف) مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های اول عضوهای A، $p - ۱$ عضو دارد.

ب) حاصل‌ضرب عضوهای هیچ زیرمجموعهٔ ناتهی A توان pام کامل نیست.

بیشترین تعداد ممکن عضوهای A چقدر است؟

هندسه

۱. سه نقطهٔ متمایز A، B و C را روی خطی راست و به‌همین ترتیب انتخاب کرده‌ایم. فرض کنید Γ دایره‌ای باشد که از A و C می‌گذرد و مرکزش روی خط AC قرار ندارد. نقطهٔ برخورد مماسهای بر Γ در نقطه‌های A و C را P بنامید. فرض کنید Γ پاره‌خط PB را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. ثابت کنید محل برخورد نیمساز زاویهٔ AQC و خط AC به نحوهٔ انتخاب Γ بستگی ندارد.

۲. فرض کنید ABC مثلث و P نقطه‌ای درون آن باشد. پای عمودهای وارد از P بر خطهای BC، CA و AB را به‌ترتیب D، E و F بنامید. فرض کنید

$$AP^۲ + PD^۲ = BP^۲ + PE^۲ = CP^۲ + PE^۲$$

مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC را I_A، I_B و I_C بنامید. ثابت کنید P مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $I_AI_BI_C$ است.

۳. فرض کنید $\Gamma_۱$، $\Gamma_۲$، $\Gamma_۳$ و $\Gamma_۴$ دایره‌هایی متمایز باشند، $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۳$ در نقطهٔ P مماس خارج باشند و $\Gamma_۲$ و $\Gamma_۴$ هم در همین نقطهٔ P مماس خارج باشند. فرض کنید $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$؛ $\Gamma_۲$ و $\Gamma_۳$؛ $\Gamma_۳$ و $\Gamma_۴$؛ $\Gamma_۴$ و $\Gamma_۱$ به‌ترتیب یکدیگر را در نقطه‌های A، B، C و D قطع کنند و همهٔ این نقطه‌ها متمایز از P باشند. ثابت کنید

$$\frac{AB \times BC}{AD \times DC} = \frac{PB^۲}{PD^۲}$$

۴. فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الساقین باشد که در آن $AC = BC$ و مرکز دایرهٔ محاطی‌اش I باشد. فرض کنید P نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث AIB باشد و درون مثلث ABC قرار داشته باشد. خط راستی که از P موازی با AB رسم می‌شود، CA و CB را به‌ترتیب در نقطه‌های F و G قطع می‌کند. ثابت کنید خطهای DF و EG یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قطع می‌کنند.

۵. فرض کنید ABC مثلثی باشد که نصف محیطش برابر با s و شعاع دایرهٔ محاطی‌اش برابر با r است. نیمدایره‌هایی به قطرهای BC، CA و AB بیرون مثلث ABC رسم می‌کنیم. شعاع دایره‌ای که بر این سه نیمدایره مماس است برابر با t است. ثابت کنید

$$\frac{s}{۲} < t \leq \frac{s}{۲} + \left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) r$$

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول تیرماه ۱۳۸۴ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۳۱. آیا عددهایی گویا مانند x، y و z وجود دارند که $x^۲ + y^۲ + z^۲ = x + y + z + ۱$؟

۱۳۲. k و n عددهایی طبیعی‌اند، $۲ \geq k$ و $۲k \leq n$. ثابت کنید $\binom{n}{k}$ بر دست‌کم یکی از عددهای n، $n-۱$، ... و $n-k+۱$ بخش‌پذیر نیست.

۱۳۳. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که هر عدد طبیعی که نمایش اعشاری آن از $n-۱$ رقم ۱ و یک رقم ۷ تشکیل شده است اول باشد.

۱۳۴. a و b عددهایی طبیعی‌اند و $ab + ۱$ مربع کامل است. ثابت کنید عددی طبیعی مانند c وجود دارد که $ac + ۱$ و $bc + ۱$ هم مربع کامل‌اند.

۱۳۵. a، b و c عددهایی مثبت‌اند و $a + b + c \geq abc$. ثابت کنید دست‌کم دو تا از نابرابریهای

$$\frac{۲}{a} + \frac{۳}{b} + \frac{۶}{c} \geq ۶, \qquad \frac{۲}{b} + \frac{۳}{c} + \frac{۶}{a} \geq ۶, \qquad \frac{۲}{c} + \frac{۳}{a} + \frac{۶}{b} \geq ۶$$

درست‌اند.

۱۳۶. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\big(x + f(xy)\big) = f\big(x + f(x)f(y)\big) = f(x) + xf(y)$$

۱۳۷. الف) ثابت کنید اگر درجهٔ چندجمله‌ای غیرصفر $p(x)$ عددی زوج باشد، عددی طبیعی مانند k وجود دارد که چندجمله‌ای

$$p(x) + p(x+۱) + \cdots + p(x+k)$$

ریشه‌ای حقیقی ندارد.

ب) ثابت کنید اگر درجهٔ چندجمله‌ای $p(x)$ عددی فرد باشد، عددی طبیعی مانند k وجود دارد که چندجمله‌ای

$$p(x) + p(x+۱) + \cdots + p(x+k)$$

دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۳۸. n عددی طبیعی است و $n \geq ۲$. آیا هر جایگشت از عددهای ۰، ۱، ۲، ... و n شامل تصاعدی حسابی و دست‌کم سه‌عضوی است؟

۱۳۹. n عددی طبیعی و فرد است. n عدد را طوری روی دایره‌ای نوشته‌ایم که هر یک از آنها با اضافه کردن ۱ به همسایه‌اش، در جهت ساعتگرد، یا برعکس کردن علامت این همسایه به‌دست می‌آید. ثابت کنید که همهٔ عددهایی که روی دایره نوشته‌ایم صحیح‌اند و هر عدد مانند m را همان تعداد نوشته‌ایم که $-m$ را نوشته‌ایم.

۱۴۰. در n نقطهٔ متمایز روی پیستی دایره‌ای‌شکل n اتومبیل قرار گرفته‌اند و آمادهٔ حرکت‌اند. هر یک از آنها دور دایره را در یک ساعت طی می‌کند. با شنیدن صدای حرکت هر یک از آنها جهتی را انتخاب می‌کند و بلافاصله حرکت می‌کند. اگر دو اتومبیل به هم برسند جهتشان را عوض می‌کنند و بی‌آنکه از سرعتشان چیزی کم شود به حرکت درمی‌آیند. ثابت کنید زمانی می‌رسد که همهٔ اتومبیلها در نقطهٔ شروع حرکتشان قرار دارند.

۱۴۱. چندوجهی‌ای در نظر بگیرید که دست‌کم پنج وجه دارد و در هر رأسش دقیقاً سه یال به هم می‌رسند. دو نفر به طریق زیر بازی می‌کنند: هر یک از آنها، یکی در میان، نامش را روی یکی از وجه‌هایی که قبلاً نامی روی آن نوشته نشده می‌نویسد. بازیکنی که زودتر بتواند نامش را روی سه وجهی که رأسی مشترک دارند بنویسد برنده است. ثابت کنید بازیکنی که اول بازی می‌کند استراتژی برد دارد.

۱۴۲. مجموع فاصله‌های هر نقطه درون چهارضلعی‌ای محدب تا چهار خطی که ضلعهای چهارضلعی روی آنها قرار دارند مقداری ثابت است. ثابت کنید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۴۳. نقطه‌های O، I و H به‌ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز دایرهٔ محاطی و محل برخورد ارتفاعهای مثلث حاده و غیرمتساوی‌الاضلاع ABCاند. ثابت کنید اگر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث OIH از یکی از رأسهای مثلث ABC بگذرد، از رأس دیگری از آن هم می‌گذرد.

۱۴۴. $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ نیمسازهای مثلث ABCاند و $\angle AC_۱B_۱ = \angle AA_۱C$. $\angle BCA$ را پیدا کنید.

۱۴۵. پنج‌ضلعی محدبی را با رسم کردن قطرهایش به یازده ناحیه تقسیم کرده‌ایم: به یک پنج‌ضلعی و ده مثلث. مساحت حداکثر چندتا از این مثلثها ممکن است برابر باشد؟

راه‌حلها

۹۱. a، b و c عددهایی حقیقی و نامنفی‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a+b+c}{۳}-\sqrt[۳]{abc}\leq \max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^۲,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^۲\}$$

راه‌حل. فرض کنید x، y و z عددهایی نامنفی باشند. بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$۲x^۳y^۳\leq x^۴y^۲+x^۲y^۴$$
$$۲y^۳z^۳\leq y^۴z^۲+y^۲z^۴$$
$$۲z^۳x^۳\leq z^۴x^۲+z^۲x^۴$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$(۱)\quad ۲(x^۳y^۳+y^۳z^۳+z^۳x^۳)\leq x^۲y^۲(x^۲+y^۲)+y^۲z^۲(y^۲+z^۲)+z^۲x^۲(z^۲+x^۲)$$

توجه کنید که اگر x، y و z عددهایی نامنفی باشند، بنابر نابرابری شور،

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\leq x^۳+y^۳+z^۳+۳xyz$$

از این نابرابری نتیجه می‌شود

$$(۲)\quad x^۲y^۲(x^۲+y^۲)+y^۲z^۲(y^۲+z^۲)+z^۲x^۲(z^۲+x^۲)\leq x^۶+y^۶+z^۶+۳x^۲y^۲z^۲$$

بنابراین، از نابرابریهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$۲(x^۳y^۳+y^۳z^۳+z^۳x^۳)\leq x^۶+y^۶+z^۶+۳x^۲y^۲z^۲$$

اگر فرض کنیم $a=x^۶$، $b=y^۶$ و $c=z^۶$، از این نابرابری نتیجه می‌شود

$$۲(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\leq a+b+c+۳\sqrt[۳]{abc}$$

بنابراین

$$a+b+c-۳\sqrt[۳]{abc}\leq ۲a+۲b+۲c-۲\sqrt{ab}-۲\sqrt{bc}-۲\sqrt{ca}$$

یا

$$\frac{a+b+c}{۳}-\sqrt[۳]{abc}\leq \frac{۱}{۳}\left((\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^۲+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^۲\right)$$

چون میانگین سه عدد از بزرگترین آنها کوچکتر نیست، پس

$$\frac{a+b+c}{۳}-\sqrt[۳]{abc}\leq \max\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^۲,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^۲\right\}$$

۹۲. همهٔ تابعها مانند $f : (\circ, +\infty) \to (\circ, +\infty)$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند x و y،

$$f(xf(y)) = f(xy) + x$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگی موردنظر را داشته باشد. اگر x و y عددهایی حقیقی و مثبت باشند،

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f\big(f(x)y\big) + f(x)$$

یعنی

$$f\big(f(x)y\big) = f\big(f(x)f(y)\big) - f(x)$$

از طرف دیگر، از تساوی

$$f\big(xf(y)\big) = f(xy) + x$$

نتیجه می‌شود

$$f\big(f(x)y\big) = f(yx) + y$$

بنابراین،

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(yx) + y + f(x)$$

سمت چپ این تساوی نسبت به x و y متقارن است، پس

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y)$$

یعنی $y + f(x) = x + f(y)$، یا

$$f(x) - x = f(y) - y$$

بنابراین $f(x) - x$ مقداری ثابت است. فرض کنید $f(x) - x = c$. در این صورت

$$f\big(xf(y)\big) = xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c$$

و

$$f(xy) + x = (xy + c) + x = xy + x + c$$

یعنی $c = ۱$ و $f(x) = x + ۱$.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر

$$f(x) = x + ۱, \qquad x \in (\circ, +\infty)$$

تابع f ویژگی موردنظر را دارد.

۹۳. همهٔ عددهای اول مانند p، q و r را پیدا کنید که $p \leq q \leq r$ و عددهای

$$pq + r, \quad pq + r^۲, \quad qr + p, \quad qr + p^۲, \quad rp + q, \quad rp + q^۲$$

همگی اول باشند.

راه‌حل. فرض کنید که عددهای اول p، q و r ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. توجه کنید که اگر p، q و r هر سه عددهایی فرد باشند، مثلاً $pq+r$ عددی زوج و بزرگتر از ۲ است، پس عددی اول نیست. چون $p \le q \le r$، پس $p = ۲$. اگر $q = ۲$، آن‌وقت

$$qr + p = ۲(r+۱)$$

و درنتیجه $qr+p$ عددی مرکب است، که تناقض است. بنابراین $q > ۲$. اگر q و r هر دو از ۳ بزرگتر باشند، باقیماندهٔ تقسیم qr بر ۳ یا ۱ است یا ۲، و درنتیجه یا $qr+۲$ یا $qr+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است، که تناقض است. بنابراین $q = ۳$.

به این ترتیب $r \ge ۳$ و عددهای

$$۶+r, \quad ۶+r^۲, \quad ۳r+۲, \quad ۳r+۴, \quad ۲r+۳, \quad ۲r+۹$$

همگی اول‌اند. اگر r بزرگتر از ۵ باشد، یکی از عددهای $r+۱$، r، $r+۲$، $r+۳$ و $r+۴$ بر ۵ بخش‌پذیر است. درنتیجه، از تساویهای

$$۶+r = (r+۱)+۵, \qquad ۲r+۹ = ۲(r+۲)+۵$$

$$۳r+۴ = ۳(r+۳)-۵, \qquad ۲r+۳ = ۲(r+۴)-۵$$

معلوم می‌شود که $r = ۵$. یعنی $(p,q,r) = (۲,۳,۵)$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این مقدارهای p، q و r ویژگیهای موردنظر را دارند.

۹۴. همهٔ عددهای صحیح مانند a را طوری پیدا کنید که $\frac{a^{۲۰۰۰}-۱}{a-۱}$ مربع کامل باشد.

راه‌حل. فرض کنید عدد صحیح a ویژگی موردنظر را داشته باشد. اگر $a < -۱$، $\frac{a^{۲۰۰۰}-۱}{a-۱}$ منفی است، پس مربع کامل نیست. اگر $a = -۱$ یا $a = ۰$، عبارت موردنظر مربع کامل است. فرض کنید $a > ۱$. می‌توان نوشت

$$\frac{a^{۲۰۰۰}-۱}{a-۱} = (a^{۱۰۰۰}+۱)(a^{۵۰۰}+۱)\,\frac{a^{۵۰۰}-۱}{a-۱}$$

عاملهای سمت راست این تساوی را به‌ترتیب A، B و C بنامید. توجه کنید که B و C هر دو $A-۲$ را می‌شمارند و C هم $B-۲$ را می‌شمارد. بنابراین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو تا از عددهای A، B و C حداکثر برابر با ۲ است. درنتیجه، برای اینکه حاصل‌ضرب عددهای A، B و C مربع کامل باشد، هر یک از این عددها یا باید مربع کامل باشد یا باید دو برابر مربعی کامل باشد. معلوم است که نه A مربع کامل است نه B، زیرا هر یک از آنها یک واحد بیشتر از مربعی کامل است. فرض کنید هر یک از عددهای A و B دو برابر مربعی کامل باشد. در این صورت $۴AB$ هم مربع کامل است. اما

$$۴AB = ۴a^{۱۵۰۰} + ۴a^{۱۰۰۰} + ۴a^{۵۰۰} + ۴$$

درنتیجه، چون $a > ۱$،

$$(۲a^{۷۵۰} + a^{۲۵۰})^۲ < ۴AB < (۲a^{۷۵۰} + a^{۲۵۰} + ۱)^۲$$

پس $۴AB$ مربع کامل نیست، که تناقض است.

عبارت موردنظر فقط به‌ازای $a = -۱$ و $a = ۰$ مربع کامل است.

۹۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند m، n و l را طوری پیدا کنید که

$$m + n = (m,n)^۲, \quad n + l = (n,l)^۲, \quad l + m = (l,m)^۲$$

((a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای طبیعی a و b است.)

راه‌حل. فرض کنید عددهای طبیعی m، n و l ویژگیهای موردنظر را داشته باشند و d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m، n و l باشد. در این صورت $d \mid (m,n)$، $d^۲ \mid (m,n)^۲$ و درنتیجه $d^۲ \mid m + n$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $d^۲ \mid n + l$ و $d^۲ \mid l + m$. درنتیجه

$$d^۲ \mid (m + n) + (l + m) - (n + l)$$

یعنی $d^۲ \mid ۲m$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود $d^۲ \mid ۲n$ و $d^۲ \mid ۲l$. بنابراین $d^۲ \mid (۲a, ۲b, ۲c)$، یعنی $d^۲ \mid ۲d$. پس یا $d = ۱$ یا $d = ۲$.

توجه کنید که کوچکترین مضرب مشترک (m,n) و (l,m)، که برابر است با $\frac{(m,n)(l,m)}{d}$، m را می‌شمارد، پس

$$m \geq \frac{(m,n)(l,m)}{d}$$

که برابر است با $\frac{(m,n)(l,m)}{d}$، m را می‌شمارد، پس اگر نابرابریهای مشابهی را برای n و l بنویسیم، معلوم می‌شود که

$$(m,n)^۲ = m + n \geq \frac{(m,n)\big((l,m) + (n,l)\big)}{d}$$

درنتیجه

$$d(m,n) \geq (l,m) + (n,l)$$

اگر نابرابریهای مشابه را هم بنویسیم و این نابرابریها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$d\big((m,n) + (n,l) + (l,m)\big) \geq ۲\big((m,n) + (n,l) + (l,m)\big)$$

یعنی $d \geq ۲$. پس $d = ۲$ و در همهٔ نابرابریهای قبلی تساوی داشته‌ایم، یعنی

$$۲(m,n) = (l,m) + (n,l)$$

$$۲(n,l) = (m,n) + (l,m)$$

$$۲(l,m) = (n,l) + (m,n)$$

بنابراین

$$(m,n)=(n,l)=(l,m)=(m,n,l)=2$$

درنتیجه

$$m+n=n+l=l+m=4$$

پس $m=n=l=2$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این مقدارهای m، n و l ویژگیهای موردنظر را دارند.

۹۶. در هر یک از خانه‌های جدولی 3×3 عددی حقیقی نوشته‌ایم. عددی که در خانه‌ای که در سطر iام و ستون jام قرار دارد نوشته‌ایم برابر است با قدرمطلق تفاضل مجموع عددهای سطر iام و مجموع عددهای ستون jام. ثابت کنید هر عدد در این جدول یا برابر است با مجموع دو عدد دیگر از این جدول یا برابر است با تفاضل دو عدد دیگر از این جدول.

راه‌حل. فرض کنید p_1، p_2 و p_3 به‌ترتیب مجموع عددهای نوشته‌شده در سطرهای اول، دوم و سوم باشند. فرض کنید q_1، q_2 و q_3 به‌ترتیب مجموع عددهای نوشته‌شده در ستونهای اول، دوم و سوم باشند. معلوم است که

$$p_1+p_2+p_3=q_1+q_2+q_3$$

بنابراین عضوهای سطر اول و ستون اول برابرند با $|p_1-q_1|$. از طرف دیگر،

$$|p_1-q_1|=|p_2+p_3-q_2-q_3|$$

و درنتیجه

$$|p_1-q_1|=\varepsilon_1|p_2-q_2|+\varepsilon_2|p_3-q_3|$$

که در آن $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{-1,1\}$. چون $|p_1-q_1|\geq 0$، معلوم است که ممکن نیست $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-1$. بنابراین $|p_1-q_1|$ یا برابر است با مجموع $|p_2-q_2|$ و $|p_3-q_3|$ یا برابر است با تفاضل این دو عدد. به‌همین روش می‌توان ثابت کرد که بقیهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول هم ویژگی موردنظر را دارند.

۹۷. m عددی طبیعی است. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a و b وجود دارند که $|a|\leq m$، $|b|\leq m$ و

$$0<a+\sqrt{2}b<\frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$$

راه‌حل. فرض کنید $f(x,y)=x+\sqrt{2}y$ و

$$S=\{f(a,b):\ 0\leq a,b\leq m \text{ و } a \text{ و } b \text{ عددهایی صحیح‌اند}\}$$

چون $\sqrt{2}$ گنگ است، S، $(m+1)^2$ عضو متمایز دارد که بزرگترین آنها $m(1+\sqrt{2})$ است. بازهٔ $[0,m(1+\sqrt{2})]$ را به m^2+2m زیربازه به طول $\frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$ تقسیم کنید. بنابر اصل لانه کبوتری، دو عضو متمایز S مانند $f(a_1,b_1)$ و $f(a_2,b_2)$ در یکی از زیربازه‌ها قرار دارند. بدون اینکه از کلی بودن

اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم

$$f(a_1, b_1) > f(a_2, b_2) > 0$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $a = a_1 - a_2$ و $b = b_1 - b_2$، عددهای a و b ویژگی موردنظر را دارند.

۹۸. P نقطه‌ای درون مثلث ABC است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی

$$\angle PCB = \angle PAC, \quad \angle PBC = \angle PAB$$

که

$$BP \times AC = CP \times AB, \quad \angle BPC + \angle BAC = 180^\circ$$

راه‌حل. ابتدا فرض کنید

$$\angle PCB = \angle PAC, \quad \angle PBC = \angle PAB$$

AP را امتداد دهید تا BC را در نقطهٔ M و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطهٔ Q قطع کند. CQ و QB را رسم کنید. توجه کنید که

$$\angle QBC = \angle QAC = \angle PCB, \quad \angle QCB = \angle QAB = \angle PCB$$

بنابراین چهارضلعی $PBQC$ متوازی‌الاضلاع است. درنتیجه $\angle BPC = \angle BQC$ و زاویهٔ BPC مکمل زاویهٔ BAC است. توجه کنید که $CM = MB$ و درنتیجه $S_{QCA} = S_{ABQ}$. درنتیجه

$$QC \times AC \sin \angle QCA = QB \times AB \sin \angle ABQ$$

بنابراین $BP \times AC = CP \times AB$.

برعکس، فرض کنید

$$BP \times AC = CP \times AB, \quad \angle BPC + \angle BAC = 180^\circ$$

فرض کنید Q رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی باشد که با $\overrightarrow{PB}$ و $\overrightarrow{PC}$ مشخص می‌شود. فرض کنید AQ، BC را در نقطهٔ M قطع کند. چون $\angle BQC = \angle BPC$، پس زاویه‌های BQC و BAC مکمل‌اند و درنتیجه چهارضلعی $ABQC$ محیطی است. بنابراین

$$\begin{aligned} S_{QCA} &= \frac{1}{2} QC \times AC \sin \angle QCA \\ &= \frac{1}{2} BP \times AC \sin \angle QCA \\ &= \frac{1}{2} CP \times AB \sin \angle ABQ \\ &= \frac{1}{2} QB \times AB \sin \angle ABQ = S_{ABQ} \end{aligned}$$

بنابراین $CM = MB$. به این ترتیب، A، P، M و Q روی یک خط راست قرار دارند، زیرا P و A روی QM قرار دارند. بنابراین

$$\angle PCB = \angle QBC = \angle PAC$$

و

$$\angle PBC = \angle QCB = \angle PAB$$

۹۹. نقطه‌های P و Q درون مربع $ABCD$ به‌طول ضلع ۱ قرار دارند. ثابت کنید

$$۱۳(PA + QC) + ۱۴PQ + ۱۵(PB + QD) > ۳۸$$

راه‌حل. مثلثهای ABX و CDY را بیرون مربع $ABCD$ طوری رسم کنید که

$$AX = CY = \frac{۱۵}{۱۴}, \quad BX = DY = \frac{۱۳}{۱۴}$$

از قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعیهای $AXBP$ و $CYDQ$ نتیجه می‌شود

$$\frac{۱۳}{۱۴} PA + \frac{۱۵}{۱۴} PB \geq XP, \quad \frac{۱۳}{۱۴} QC + \frac{۱۵}{۱۴} QD \geq QY$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$۱۳(PA + QC) + ۱۴PQ + ۱۵(PB + QD) \geq ۱۴(XP + PQ + QY) \geq ۱۴XY$$

فرض کنید R و S به‌ترتیب پای عمودهای وارد از X و Y بر پاره‌خطهای AB و CD باشند. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$XR = YS = \frac{۱۲}{۱۴}, \quad AR = CS = \frac{۹}{۱۴}, \quad BR = DS = \frac{۵}{۱۴}$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

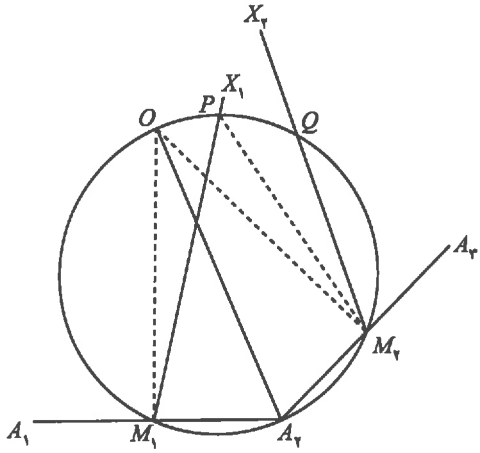
$$XY = \sqrt{(XR + AD + SY)^۲ + (AR - DS)^۲} = \frac{۱}{۷}\sqrt{۳۶۵}$$

بنابراین

$$۱۳(PA + QC) + ۱۴PQ + ۱۵(PB + QD) \geq ۱۴XY = ۲\sqrt{۳۶۵} > ۳۸$$

۱۰۰. کیکی به شکل nضلعی‌ای منتظم است که درون دایره‌ای به شعاع ۱ محاط شده است. از وسط هر ضلع این nضلعی برشی به طول ۱ در جهت دلخواه و درون کیک ایجاد می‌کنیم. ثابت کنید دست‌کم یک تکه از کیک جدا می‌شود.

راه‌حل. چندضلعی منتظم موردنظر را $A_۱A_۲\ldots A_n$ بنامید و فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی این چندضلعی و M_i وسط ضلع $A_iA_{i+۱}$ باشد $(A_{n+۱} = A_۱)$.



فرض کنید طول برش M_iX_i برابر با ۱ باشد و برشها یکدیگر را قطع نکنند. برش $M_۱X_۱$ را در نظر بگیرید. بدون اینکه از کلی بودن اثباتمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم

$$\angle X_۱M_۱A_۲ \leq ۹۰^\circ$$

ثابت می‌کنیم

$$\angle OM_۱X_۱ < OM_۲X_۲, \qquad \angle X_۲M_۲X_۳ \leq ۹۰^\circ$$

دایرهٔ به قطر $OA_۲$ را Γ بنامید. چون $OA_۲ = ۱ = M_۱X_۱$، $OA_۲$ قطر دایرهٔ Γ است و $\angle X_۱M_۱A_۱ \leq ۹۰^\circ$، پس پاره‌خط $M_۱X_۱$ کمان $OM_۲$ از دایرهٔ Γ را در نقطه‌ای مانند P روی این کمان قطع می‌کند. چون

$$M_۲X_۲ = ۱ > OM_۲ \geq M_۲P$$

و $M_۲X_۲$، $M_۱X_۱$ را قطع نمی‌کند، پس $M_۲P$ کمان $M_۲X_۲$ را در نقطه‌ای روی آن قطع می‌کند. درنتیجه

$$\angle OM_۱X_۱ = \angle OM_۱P = \angle OM_۲P < \angle OM_۲Q = \angle OM_۲X_۲$$

و

$$\angle X_۲A_۲M_۳ = ۹۰^\circ - \angle OM_۲A_۲ < ۹۰^\circ$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد

$$\angle OM_۲X_۲ < \angle OM_۳X_۳, \qquad \angle X_۳M_۳A_۲ < ۹۰^\circ$$

$$\vdots$$

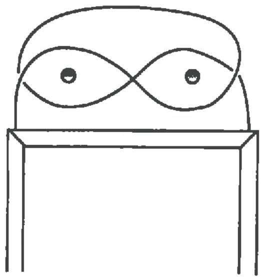
$$\angle OM_nX_n < \angle OM_۱X_۱$$

که درست نیست.

راه‌حلها

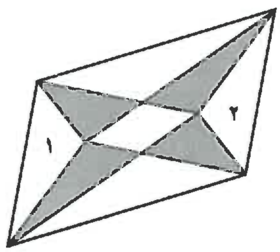
از باب تفریح

۱. شکل زیر را ببینید.

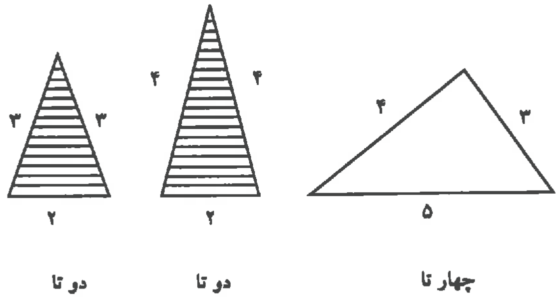


۲. فرض کنید دانش‌آموزان ابتدا در مربعی $n \times n$ به صف ایستاده‌اند، و درنتیجه تعداد دانش‌آموزان $n^۲$ تاست. بنابر شرطهای مسأله، $n^۲$ باید بر $n + ۵$ بخش‌پذیر باشد (تا بتوان $n + ۵$ ردیف تشکیل داد). چون $n^۲ = (n - ۵)(n + ۵) + ۲۵$، پس ۲۵ بر $n + ۵$ بخش‌پذیر است. تنها مقسوم‌علیه ۲۵ که از ۵ بزرگتر است، خود ۲۵ است. بنابراین $n + ۵ = ۲۵$ و $n = ۲۰$. تعداد دانش‌آموزان ۴۰۰ تاست.

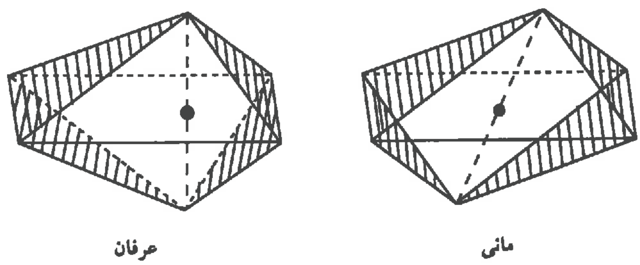
۳. مجموع مساحتهای مثلثهای ۱ و ۲ در شکل زیر با مساحتهای مثلثهای سایه‌دار بالایی برابر است با نصف مساحت متوازی‌الاضلاع. همین مطلب در مورد مثلثهای سایه‌دار پایینی هم درست است. بنابراین مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار پایینی با مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار بالایی برابر است.



۴. بله، ممکن است. مثالی از وجه‌هایی که می‌توان آنها را به دو طریق به هم چسباند که دو چندوجهی مختلف تشکیل شود، در شکل ۱ آمده است. چندوجهیها را هم در شکل ۲ نشان داده‌ایم.



شکل ۱

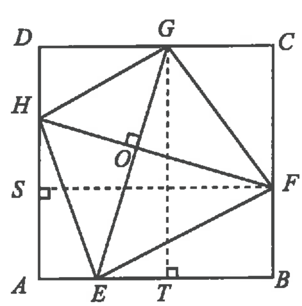


شکل ۲

۵. همهٔ مثلثهای موردنظر قائم‌الزاویه‌اند. شعاع دایرهٔ محاطی مثلثی قائم‌الزاویه که طول دو ضلع زاویهٔ قائمه‌اش a و b و طول وترش c است برابر است با $a+b-c$. تفاضل مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای سایه‌دار و مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهایی که سایه ندارند برابر است با

$$r_{AHE}+r_{EDF}+r_{FCG}+r_{GOH}-r_{GDH}-r_{HOE}-r_{EBF}-r_{FOG}$$
$$=AE-EB-BF+FC+CG-GD-DH+HA=۲(\mathbf{P}_{FH}-\mathbf{P}_{EG})$$

که در آن $\mathbf{P}_{FH}$ تصویر FH بر AD و $\mathbf{P}_{EG}$ تصویر EG بر AB است. بنابراین کافی است ثابت کنیم این تصویرها برابرند. توجه کنید که چون زاویه‌های SFH و TGE برابرند (زیرا ضلعهایشان بر هم عمودند)، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SFH و TGE همنهشت‌اند. بنابراین HS و TE برابرند.



تئوری ریاضی موسیقی

پیام سراجی، امیرحسین دامادی

قسمت سوم

فواصل ربع پرده

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، گام فیثاغورث براساس اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ یعنی $(\frac{۴}{۳})$، $(\frac{۳}{۲})$ و $(\frac{۲}{۱})$ به‌وجود آمده، وکوچکترین فاصله در این گام برابر نیم‌پرده بود که اگر قرار باشد فواصل دیگری (حدود نیم‌پرده و یا کمتر) در گام ظاهر شوند، باید حاصل از نسبت اعداد سادهٔ بعدی یعنی ۵، ۶، ۷ و ... باشند.

ادامهٔ طبیعی دنبالهٔ

$$\frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}$$

به‌صورت زیر است:

$$\frac{۲}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۴}, \frac{۶}{۵}, \frac{۷}{۶}, \ldots, \frac{n+۱}{n}, \ldots$$

اولین فاصلهٔ جدیدی که ظاهر می‌شود فاصلهٔ $\frac{۵}{۴}$ تا $\frac{۴}{۳}$ یعنی $\frac{۱۶}{۱۵} = (\frac{۵}{۴})/(\frac{۴}{۳})$ است که تقریباً برابر نیم‌پرده فیثاغورثی، $\frac{۲۵۶}{۲۴۳}$ است. اگر درگام ماهورـDo (Do-major) به‌جای فاصلهٔ Mi تا Fa که برابر $\frac{۲۵۶}{۲۴۳}$ بود، فاصلهٔ جدید $\frac{۱۶}{۱۵}$ را جایگزین کنیم، نسبت به‌دست آمدهٔ نت Mi برابر $\frac{۵}{۴} = (\frac{۱۶}{۱۵})/(\frac{۴}{۳})$ خواهد بود که نسبتهای $\frac{۵}{۳}$ را برای La و $\frac{۱۵}{۸}$ را برای Si به‌دست می‌دهد (چون $\frac{۵}{۳} = (\frac{۴}{۳}) \times (\frac{۵}{۴})$ و $\frac{۱۵}{۸} = (\frac{۳}{۲}) \times (\frac{۵}{۴})$). پس نسبتهای مربوط به درجات این گام به‌صورت زیر می‌شود:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
۱	$\frac{۹}{۸}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱۵}{۸}$	۲

شکل ۱۲

به این نحوهٔ تشکیل نسبتهای گام، «گام زارلین» (هارمونیک) گویند.

دو فاصلهٔ بعدی، یعنی فاصلهٔ $(\frac{۵}{۴})$ تا $(\frac{۶}{۵})$ که مساوی $(\frac{۲۵}{۲۴})$ است و فاصلهٔ $(\frac{۶}{۵})$ تا $(\frac{۷}{۶})$ که مساوی $(\frac{۳۶}{۳۵})$ است، به‌طور مشخص از نیم‌پرده کوچکترند.

در موسیقی سنتی ایران علاوه‌بر فواصل پرده و نیم‌پرده، فواصل کوچکتری که به «ربع پرده» مشهورند نیز وجود دارند و برای نامیدن آنها پسوندهای کرن (𝄲) و سری (𝄰) را به اسامی نتها اضافه می‌کنیم. کرن برای «ربع» پردهٔ قبل و سری برای «ربع» پردهٔ بعد (شبیه بمل و دیز برای نیم‌پرده‌ها)

Do Re♭ Do♯ Re(𝄲) Re Re𝄰 Mi♭ Re♯ Mi

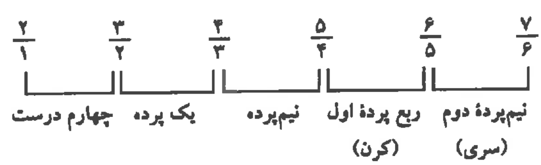
شکل ۱۳

نسبتهای $(\frac{۲۵}{۲۴})$ و $(\frac{۳۶}{۳۵})$ ذکرشده در بالا، با دقت بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی[۱] برای فواصل «ربع‌پرده» مطابقت دارند:

بنابر نتایج آزمایشگاهی، فاصلهٔ ربع‌پردهٔ بزرگ (کرن) «حدوداً برابر ۷۰ سنت» و ربع‌پردهٔ کوچک (سری) «حدوداً برابر ۴۵ سنت» هستند که با مقادیر: سنت $\dots ۷۰/۶ = (\frac{۲۵}{۲۴})$ و سنت $\dots ۴۸/۷ = (\frac{۳۶}{۳۵})$ به‌خوبی مطابقت دارند. (سنت واحدی برای اندازه‌گیری فواصل موسیقیایی و برابر $\frac{۱}{۲۰۰}$ پرده است)[۲] پس می‌توان نتیجه گرفت که:

«فواصل موسیقی سنتی ایران از تعمیم طبیعی فواصل گام فیثاغورث به‌دست می‌آیند.»

(به شکل زیر توجه کنید.)



شکل ۱۴

البته در موسیقی قدیم ایران نیز نسبتهای متعددی برای ربع‌پرده‌ها ذکر شده است. مثلاً برای Mi𝄲 در کتاب الموسیقی‌الکبیر فارابی نسبت $(\frac{۲۷}{۲۲})$ (وسطای زَلزَل) ذکر شده که فقط ۱۷ سنت با نسبت معرفی شده در این مقاله فرق دارد. همچنین ابن‌سینا برای همین نت نسبت $(\frac{۳۹}{۳۲})$ را به‌دست آورد که تفاوت آن با نسبت ذکرشده در این مقاله فقط ۵ سنت است.

اگر فواصل کرن و سری را برحسب کمای فیثاغورثی حساب کنیم، کرن تقریباً برابر ۳ کما و سری تقریباً برابر ۲ کما می‌باشد.

---

۱. بررسیهای جدید آزمایشگاهی در مورد گام موسیقی ایران، دکتر ساسان سپنتا، فصلنامهٔ ماهور، شمارهٔ ۱، پاییز ۱۳۷۷.

۲. شیوهٔ محاسبهٔ یک نسبت برحسب سنت: یک سنت $\frac{۱}{۲۰۰}$ پرده و درنتیجه $\frac{۱}{۱۲۰۰}$ اکتاو است (چون اکتاو برابر ۶ پرده است) و چون نسبت اکتاو $\frac{۲}{۱}$ است پس یک سنت برابر $\sqrt[۱۲۰۰]{۲}$ می‌شود. حال اگر بخواهیم بدانیم نسبت $\frac{m}{n}$ برابر چند سنت است باید معادلهٔ $(\sqrt[۱۲۰۰]{۲})^x = \frac{m}{n}$ را حل کنیم که جواب آن برابر با $x = \log_{\sqrt[۱۲۰۰]{۲}} \frac{m}{n} = ۱۲۰۰ \log_۲ \frac{m}{n}$ است. برای مثال $\frac{۲۵}{۲۴}$ برابر $۱۲۰۰ \log_۲ \frac{۲۵}{۲۴} = ۷۰/۶$ سنت است.

سؤالات مرحلهٔ اول تورنمنت شهرها در شهر اصفهان

مقدمه

همان‌طور که در شماره‌های قبلی نشریهٔ ریاضیات ذکر شد، تورنمنت شهرها مسابقه‌ای ریاضی است که بین دانش‌آموزان دبیرستانی شهرهای مختلف جهان، به‌طور تقریباً همزمان، برگزار می‌شود. این مسابقه در شهر اصفهان توسط خانهٔ ریاضیات اصفهان همانند سایر شهرهای شرکت‌کنندهٔ دنیا ـ ولی به‌صورت تیمی ـ برگزار می‌شود.

به‌دلیل استقبال زیاد دانش‌آموزان شهر اصفهان از این مسابقه و همچنین محدودیت امکانات اجرایی، مسئولان خانهٔ ریاضیات با همکاری آموزش و پرورش شهر اصفهان اقدام به برگزاری این مسابقه در دو مرحله نمودند. مرحلهٔ اول این مسابقه بین تیمهای مختلف نواحی مختلف آموزشی برگزار می‌شود که طرح سؤالات این مرحله بر عهدهٔ نواحی مزبور است. درنهایت تیمهای منتخب هر ناحیه در مرحلهٔ اول مسابقه، جواز حضور در مرحلهٔ نهایی و اصلی تورنمنت شهرها را خواهند داشت.

مرحلهٔ اول تورنمنت شهرها در آذرماه امسال نیز به‌همین ترتیب در شهر اصفهان برگزار شد. در این شماره، برای آشنایی با سؤالات این مرحلهٔ تورنمنت شهرها در شهر اصفهان، سؤالات آزمونهای برگزارشده در نواحی پنجگانهٔ آموزش و پرورش شهر اصفهان در آذر ۱۳۸۳ درج می‌گردد.

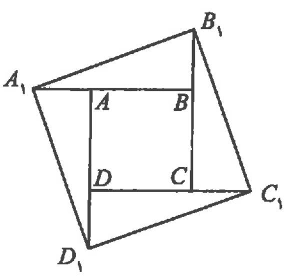
سؤالات نواحی یک و سه

قسمت اول

۱. از رابطهٔ $\{1,2\} \subset A \subset \{1,2,\{1,2\},\varnothing,\{\{\}\}\}$

الف) به چند طریق می‌توان مجموعهٔ A را انتخاب کرد؟

ب) کلیهٔ جوابهای ممکن برای A را بنویسید. (۲ امتیاز)



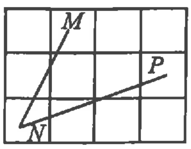
۲. مربع $ABCD$ به مساحت S_0 مفروض است. اگر هر ضلع آن را (مطابق شکل) به‌اندازهٔ نصف خودش امتداد دهیم چهار نقطهٔ A_1، B_1، C_1 و D_1 به‌دست می‌آید.

الف) ثابت کنید چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ مربع است.

ب) اگر مساحت $A_1B_1C_1D_1$ را S_1 بنامیم مطلوب است محاسبهٔ S_1.

ج) انجام فرایند فوق را برای $A_1B_1C_1D_1$ و نیز مربعهای به‌دست آمدهٔ بعدی مرتباً ادامه می‌دهیم. مطلوب است نسبت S_{20} به S_0. (۳ امتیاز)

قسمت دوم



۳. مستطیلی به اضلاع ۴ و ۳ مفروض است. با توجه به شکل، اندازهٔ زاویهٔ MNP را به‌دست آورید. (M، N و P مراکز مربعها هستند.)

(۴ امتیاز)

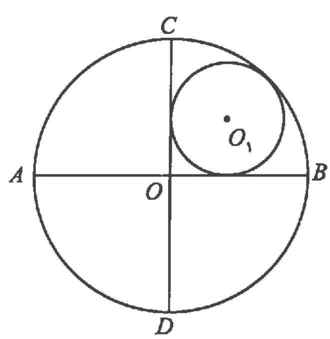
۴. سه شخص a، b و c کاری را در مدت‌زمانی انجام می‌دهند، این زمان ۶ ساعت کمتر از وقتی است که شخص a به‌تنهایی آن را انجام دهد و ۱ ساعت کمتر از زمانی است که شخص b آن را به‌تنهایی انجام دهد و نصف زمانی است که شخص c آن را به‌تنهایی انجام دهد. مطلوب است زمانی را که فقط اشخاص a و b آن را انجام دهند. (۵ امتیاز)

۵. اگر $x, y \in Z$، $a \neq 0$ و $a \in \mathbb{R}$، دو مقدار a^x و a^y را برحسب مقادیر مختلف y، x و a مقایسه کنید (با ذکر دلیل). (۶ امتیاز)

سؤالات ناحیهٔ دو

قسمت اول

۱. در دایرهٔ به مرکز O و شعاع R دو قطر AB و CD مطابق شکل بر هم عمودند. اگر دایره به مرکز O_1 بر دو قطر AB و CD و نیز بر دایرهٔ به مرکز O مماس باشد، مقدار شعاع آن را برحسب R محاسبه کنید.



(۳ نمره)

۲. عدد طبیعی n را چنان تعیین کنید که $n^3 - 1$ اول باشد (استدلال کنید). (۳ نمره)

قسمت دوم

۳. باغداری مقداری سیب دارد، می‌خواهد آنها را بین ۷ نفر به این شکل تقسیم کند: به نفر اول نصف سیبها به‌اضافهٔ یک سیب دیگر، به نفر دوم نصف سیبهای باقیمانده به‌اضافهٔ یک سیب دیگر و تا نفر هفتم به‌همین شکل ادامه می‌دهد. اگر در پایان یک سیب برای خودش باقی بماند تعداد کل سیبها را به‌دست آورید.
(۴ نمره)

۴. n نقطه را روی دایره‌ای با فواصل مساوی انتخاب کرده‌ایم. اگر آنها را یکی‌درمیان به هم وصل کنیم، مجموع زوایایی از شکل حاصل را که رأس آنها روی دایره است در حالات $n = ۵$ و $n = ۲k + ۱$ به‌دست آورید.
(۵ نمره)

۵. اعدادی چهاررقمی را به‌دست آورید که دو رقم سمت راست آنها با هم مساوی و دو رقم سمت چپ آنها نیز با هم مساوی بوده و آن اعداد مربع کامل باشند. (۶ نمره)

سؤالات ناحیهٔ چهار

قسمت اول

۱. در حاصل‌ضرب زیر به‌جای هر کدام از ۰ها ارقام مناسب بنویسید.

$$\begin{array}{r} ۱۹۸۷ \\ \times\ ۰۰۰۰ \\ \hline ۰۰۰۰۰ \\ ۰۰۰۰۰ \\ ۰۰۰۰۰ \\ \hline ۰۰۰۱۹۸۶ \end{array}$$

(۲ نمره)

۲. اگر برای تابع حقیقی و غیرثابت f داشته باشیم

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - ۲f(xy)$$

آنگاه $f(۱۳۸۴)$ را بیابید. توضیح دهید. (۳ نمره)

قسمت دوم

۳. نقطهٔ O درون مثلث ABC از سه ضلع BC، AC و AB به‌ترتیب به فاصله‌های $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ است ثابت کنید

$$\frac{l_۱}{h_a} + \frac{l_۲}{h_b} + \frac{l_۳}{h_c} = ۱$$

(h_c، h_b و h_a به‌ترتیب ارتفاعهای وارد بر اضلاع AB، AC و BC هستند.) (۵ نمره)

۴. برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a، b و c نشان دهید

$$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)\geq ۶abc$$ (۵ نمره)

۵. در صفحهٔ محورهای مختصات، همهٔ نقاط با مختصات صحیح را در نظر بگیرید. حداکثر مساحت مربعی که داخل آن حتی یکی از این نقاط نباشد چیست؟ چرا؟ (۷ نمره)

سؤالات ناحیهٔ پنج

قسمت اول

۱. اگر $a^۲-۳a-۵=۰$، حاصل $(a-۱۰)\ (a-۴)\ (a+۱)\ (a+۷)$ را به‌دست آورید.
(۳ نمره)

۲. تقسیم زیر را کامل کنید. (هر ○ نمایندهٔ یک رقم است.)


```
○○○○ |○○
○○○    ○۸
-----
  ○○
  ○○
-----
  ○○
```

(۴ نمره)

قسمت دوم

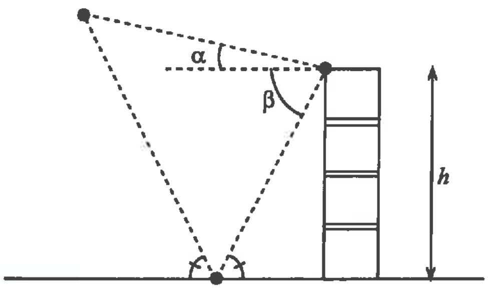
۳. هرگاه عدد $a-۲b+۴c$ مضرب ۲۱ باشد، ثابت کنید عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ نیز مضرب ۲۱ خواهد بود.
(۵ نمره)

۴. اگر میانهٔ AM از مثلث ABC را سه قسمت کنیم به‌طوری که $PM=\frac{۱}{۳}AM$، از P خطی رسم می‌کنیم که موازی BC نیست ولی دو ضلع AC و AB را در D و E قطع می‌کند. ثابت کنید جمع فاصلهٔ B و C از DE مساوی فاصلهٔ A از DE است. (۶ نمره)

۵. چند سکهٔ مساوی داریم. می‌توانیم آنها را هم به‌صورت یک مربع و هم به‌صورت یک مثلث متساوی‌الاضلاع پهلوی هم قرار دهیم ولی وقتی که به‌صورت مثلث درمی‌آوریم در هر ضلع دو سکه بیش از تعداد سکه‌های هر ضلع مربع جا می‌گیرد. اگر فرض کنیم سکه‌ها، سطح مربع (و همچنین مثلث) را هم پوشانده باشند تعداد سکه‌ها را پیدا کنید. (۵ نمره)

مسابقه

سؤال مسابقهٔ این دوره



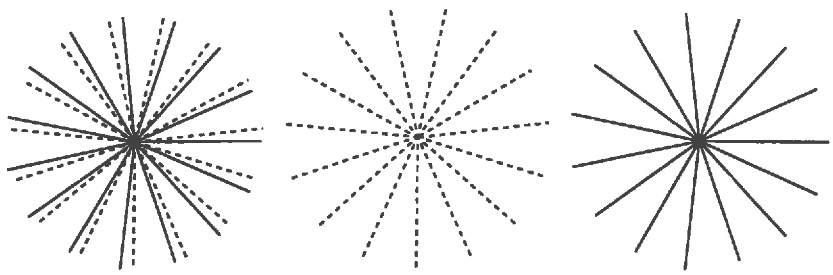
فردی از پنجرهٔ اتاقش، لانهٔ پرنده‌ای را با زاویهٔ α تماشا می‌کند. این فرد متوجه می‌شود که می‌تواند لانهٔ این پرنده را با زاویهٔ β در نهر آب روبه‌روی خانه‌اش نیز تماشا کند. اگر ارتفاع چشم ناظر از سطح آب نهر h باشد، ارتفاع آشیانهٔ این پرنده از سطح نهر آب چقدر است؟

حل این مسأله را به نشانی: اصفهان، خیابان سعادت‌آباد، روبه‌روی مقبرهٔ بانو امین، خانهٔ ریاضیات اصفهان و یا به صندوق پستی: ۳۵۶ـ۸۱۶۴۵ بفرستید. به راه‌حلهای برتر به قید قرعه جوایزی ارزنده تعلق می‌گیرد.

حل مسائل مسابقهٔ دورهٔ قبل

مسألهٔ ۱ . برای دوران ۹۰ درجه می‌توان مثال نقض زد. مثلاً قسمت (الف) شکل زیر را در نظر بگیرید (طول همهٔ خطها مساویند و همهٔ زاویه‌ها ۲۴ درجه‌اند و O را مرکز شکل در نظر بگیرید) این شکل با ۹۰ درجه دوران به شکل (ب) تبدیل می‌شود که با (الف) متفاوت است. (در شکل (ج) شکل (ب)، روی (الف) قرار داده شده است تا این موضوع بهتر مشخص شود.)

پس در حالت کلی برای ۹۰ درجه درست نیست. حال ثابت می‌کنیم برای ۷۲ درجه درست است. چرخش در



(ج) (ب) (الف)

جهت عقربه‌های ساعت را مثبت و خلاف آن را منفی در نظر می‌گیریم. برای ادامهٔ بررسی حالت ۷۲ درجه، قضیه و نتایج زیر را در نظر بگیرید:

قضیه. فرض کنید α و β اعداد حقیقی باشند؛ اگر شکل A به‌اندازهٔ α درجه حول O و سپس شکل حاصل به‌اندازهٔ β درجه حول O دوران کند، شکل نهایی برابر شکل حاصل از دوران A حول O به‌اندازهٔ $\alpha + \beta$ درجه می‌باشد.

نتیجهٔ ۱. شکل A طبق فرض با ۴۸ درجه دوران حول O به خودش تبدیل می‌شود. حال اگر شکل حاصل بار دیگر ۴۸ درجه حول O، باز هم به خودش تبدیل می‌شود. طبق قضیهٔ بالا این دو دوران معادل دورانی به‌اندازهٔ $48 + 48 = 96$ درجه حول O هستند. با تکرار همین بحث می‌توان نشان داد که شکل A با دورانی به‌اندازهٔ $48x$ (x عدد طبیعی دلخواه) به خودش منطبق می‌شود.

نتیجهٔ ۲. شکل A با دورانی به‌اندازهٔ ± 360 درجه حول هر نقطهٔ صفحه و از جمله O به خودش تبدیل می‌شود. با استدلال مشابه بالا نتیجه می‌شود که شکل A با دورانی به‌اندازهٔ $360y$ (y عدد طبیعی دلخواه) به خودش منطبق می‌شود.

۶۳

نتیجهٔ ۳. از نتیجهٔ ۱ و ۲ و قضیه، نتیجه می‌شود که دورانی به‌اندازهٔ $48x - 360y$ (که x و y اعداد طبیعی دلخواهند) حول O، شکل A را بر خودش منطبق می‌کند (چرا؟)

حال فرض کنید x و y طبیعی وجود داشته باشند که $48x - 360y = 72$. در این صورت با توجه به نتیجهٔ ۳ می‌دانیم که دورانی به‌اندازهٔ $48x - 360y$ شکل A را به خودش منطبق می‌کند و چون $48x - 360y = 72$، پس نتیجه می‌شود دوران ۷۲ درجه هم شکل A را به خودش منطبق می‌کند. پس کافی است اعداد طبیعی x و y را بیابیم که $48x - 360y = 72$. می‌توان تحقیق کرد که $x = 9$ و $y = 1$ جواب این معادله‌اند.

مسألهٔ ۲ . ابتدا ثابت می‌کنیم اگر b و c دو عدد صحیح باشند و $f(x)$ تابعی با ضرایب صحیح باشد داریم

$$(c-b) \mid \big(f(c)-f(b)\big) \qquad \text{رابطهٔ ۱}$$

برهان. می‌دانیم $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ که در آن $a_0, a_1, \ldots, a_n$ اعداد صحیح هستند. داریم

$$\begin{aligned} f(c)-f(b) &= (a_0+a_1c+a_2c^2+\cdots+a_nc^n)-(a_0+a_1b+a_2b^2+\cdots+a_nb^n) \\ &= a_1(c-b)+a_2(c^2-b^2)+\cdots+a_n(c^n-b^n)=(c-b)M(c,b) \end{aligned}$$

که تساوی آخر با توجه به اتحاد $c^i-b^i=(c-b)(c^{i-1}+c^{i-2}b+\cdots+cb^{i-2}+b^{i-1})$ و فاکتورگیری عامل $(c-b)$ به‌دست می‌آید. (و در آن، $M(c,b)$ تابعی از c و b است.) ■

اکنون حکم مسأله را به کمک برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $f(x)$ دارای یک ریشهٔ صحیح (مثلاً r) باشد پس داریم: $f(r)=0$؛ حال اگر در رابطهٔ ۱ فرض کنیم $c=3$ و $b=r$ معلوم می‌شود که $f(3)-f(r)$ بر $3-r$ بخش‌پذیر است. اما $f(3)-f(r)=f(3)$ و $f(3)$ یا ۱ است یا ۱−. توجه کنید که در هر دو حالت نتیجه می‌شود که یا $3-r=1$ یا $3-r=-1$. پس یا $r=2$ یا $r=4$. اکنون اگر در رابطهٔ ۱ فرض کنیم $c=7$ و $b=r$ با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود که یا $r=6$ یا $r=8$. این تناقض نشان می‌دهد که $f(x)$ ریشهٔ صحیح ندارد.

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

منتشر می کند: