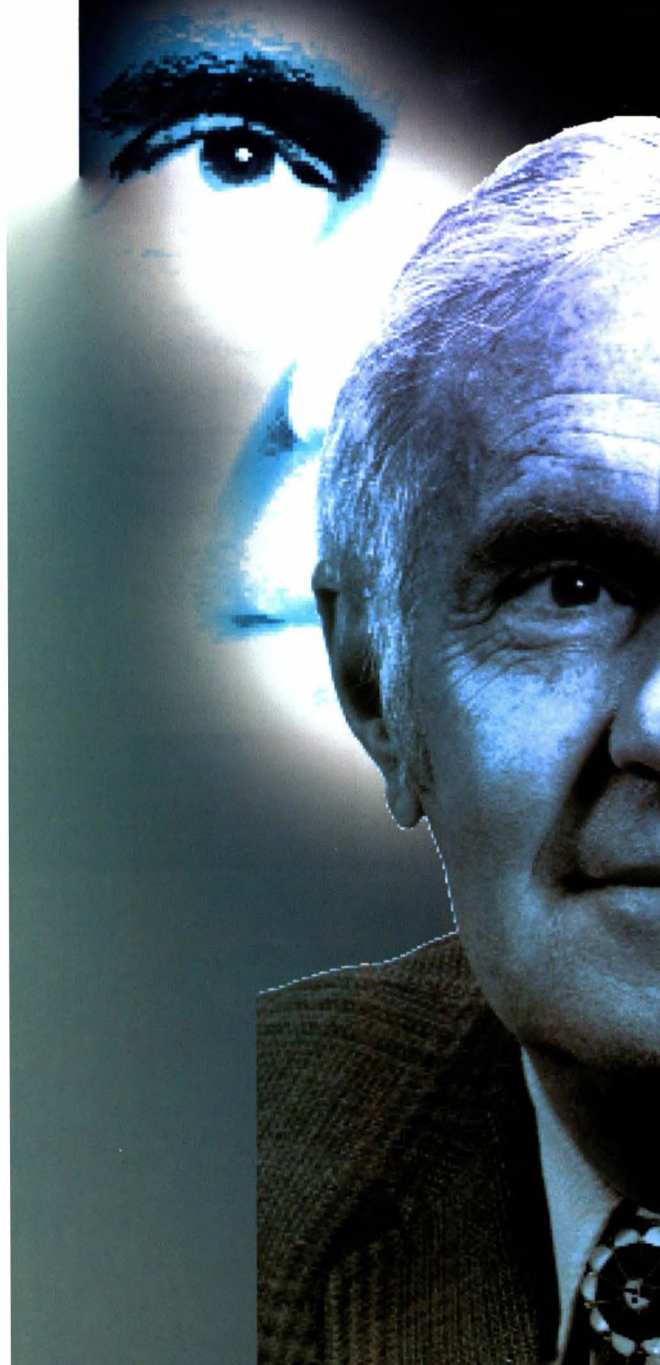
نشریهٔ

ریاضی

- ماری سیمور کلامکین
- فرش کردن
- اعداد مختلط
- رابطهٔ بین محیط و مساحت دو مستطیل

یات

سال پنجم / ۵
شمارهٔ پیاپی: ۱۹
اردیبهشت ۱۳۸۴
قیمت: ۹۰۰ تومان



مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز

طرح مشترک با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

هدف از تهیه و انتشار کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز کمک به توسعه و درک بهتر مفاهیم کتاب‌های درسی و ایجاد مهارت برای پاسخگویی به پرسش‌ها، مسائل و آزمون‌های گوناگون است. کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز بر اساس برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی تهیه شده است. در این کتاب‌ها ابتدا بعضی از مفاهیم کتاب‌های درسی با ذکر مصادیق تشریح شده است و بعد از توسعهٔ آن مفاهیم، مصادیق آن در قالب تمرین‌های طبقه‌بندی شده برای یادگیری عمیق آمده است. این کتاب‌ها جانشینی برای کتاب‌های درسی نیست، بلکه باید همراه با مطالعهٔ کتاب‌های درسی مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد.

بسیاری از کتاب‌های این مجموعه، در سومین جشنوارهٔ کتاب‌های آموزشی رشد مورد تقدیر قرار گرفته یا برگزیده شده‌اند.

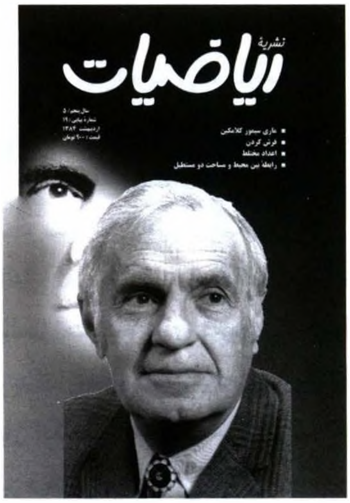
کتاب‌های تقدیری
سومین جشنوارهٔ کتاب‌های آموزشی رشد

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال پنجم/ ۵ • شمارهٔ پیاپی: ۱۹ • اردیبهشت ۱۳۸۴

فهرست:



روی جلد: مارِی سیمور کلامکین

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، ایرج ضرغام

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، بهروز طوری، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ ۸۹۷۱۵۸۳

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

استاندارد یونی‌کد و خط فارسی

یحیی تابش

در عصر اطلاعات، نمایش و تبادل داده‌ها و اطلاعات از طریق شبکه و در رایانه‌ها اهمیت ویژه‌ای دارد. در سراسر دنیا مجموعه‌های اطلاعاتی به زبانهای زنده و زبانهای محلی تولید می‌شوند و به انباره‌های داده سپرده می‌شوند تا در مواردی بازیابی و استفاده شوند. هرچند که مجموعه‌های اطلاعاتی به زبان انگلیسی به‌نحو چشم‌گیری شبکهٔ اینترنت را احاطه کرده است، ولی فرهنگهای مختلف در اقصی نقاط جهان نیز فرصتی برای مطرح شدن در شبکهٔ اینترنت یافته‌اند. این مهم با تبادل اطلاعات میسر می‌شود و این امر مستلزم وجود امکانات نمایش و تبادل اطلاعات برای زبانهای مختلف تحت استاندارد ویژه‌ای است که همهٔ کاربران کامپیوتر و شبکه بتوانند از آن استفاده کنند؛ این کار تحت استاندارد یونی‌کد[1] سامانی جهانی یافته است.

یونی‌کد برای هر کاراکتر کدی یکتا تعیین می‌کند که مستقل از سیستم عامل، برنامهٔ کامپیوتری و یا زبان از آن استفاده می‌شود. به‌طور پایه‌ای، کامپیوترها فقط با اعداد کار می‌کنند و حروف الفبا و سیار کاراکترها را با کد عددی آنها ذخیره و بازیابی می‌کنند. قبل از اینکه سیستم یونی‌کد فراگیر شود، صدها سیستم کدگذاری برای کاراکترها وجود داشت که وضعیت تشتت‌آمیزی ایجاد کرده بود. ولی سیستم یونی‌کد به این وضع نابسامان پایان داد و با کدگذاری یکتا برای کاراکترها در همهٔ زبانهای دنیا، با ظرفیت بیش از یک میلیون کاراکتر، امکان تبادل و نمایش اطلاعات را فراهم کرده است.

سیستم یونی‌کد در اواخر دههٔ ۸۰ میلادی، به ابتکار شرکتهای معتبر کامپیوتری نظیر آی‌بی‌ام، مایکروسافت، اوراکل و بسیاری دیگر شکل گرفت، ولی پس از دوران آغازین و اهمیتی که این سیستم در تبادل اطلاعات و ایجاد صرفه‌های اقتصادی در زمینهٔ تولید نرم‌افزار پیدا کرد، به ایجاد کنسرسیوم یونی‌کد انجامید. در حال حاضر کنسرسیوم یونی‌کد سازمانی غیرانتفاعی در سطح بین‌المللی است که گسترش، توسعه و ترویج استاندارد یونی‌کد را در دستور کار دارد. سازمانها، نهادها و شرکتهای متعددی در سطح جهان عضو کنسرسیوم یونی‌کد هستند و با تبادل نظر و همکاری گستردهٔ بین‌المللی به ترویج و توسعهٔ فناوری اطلاعات یاری می‌رسانند.

خط فارسی نیز تحت استاندارد یونی‌کد سامانی درخور یافته است، به‌گونه‌ای که امکان نمایش و تبادل اطلاعات به زبان فارسی بر روی سیستم‌عاملهای مختلف نظیر ویندوز و لینوکس میسر شده و امکان نشر و توسعهٔ فرهنگی به زبان فارسی فراهم آمده است. این کار با حمایت شورای عالی انفورماتیک کشور صورت گرفته است و در حال حاضر شورا عضو کنسرسیوم یونی‌کد است و جایگاه ویژه‌ای در کنسرسیوم دارد. استاندارد خط فارسی تحت یونی‌کد به‌عنوان استاندارد ملی نیز در سال ۱۳۸۰ به تصویب مؤسسهٔ استاندارد و تحقیقات صنعتی کشور رسیده است و

1. Unicode

مورد حمایت ملی نیز قرار دارد.

مهمترین اهمیت استاندارد یونی‌کد کمک به توسعهٔ فرهنگی و تکنولوژیک در عصر اطلاعات است؛ گفتیم که به هر کاراکتر، عددی یکتا به‌عنوان کد نسبت داده می‌شود و در هنگام تبادل اطلاعات، رشته‌های عددی از کامپیوتری به کامپیوتر دیگر منتقل می‌شوند، و سپس رشته‌های عددی رمزگشایی شده و مجدداً به کاراکترها تبدیل می‌شوند و امکان نمایش و تبادل داده‌ها و اطلاعات را فراهم می‌آورند. به‌عبارتی دیگر جهان به زبان عدد است و به کلام ابوریحان بیرونی: عدد چیست؟ جمله‌ای است از یکها برآمده!

یادنامهٔ
مارِی سیمور کلامکین (۱۹۲۱_۲۰۰۴)

اندی لیو

در میان علاقه‌مندان به مسأله حل‌کردن، احتمالاً کسی نیست که نام مارِی کلامکین را نشنیده باشد. علاقه‌مندان ایرانی اما او را بیشتر برای کتابهایی که از او به فارسی ترجمه شده می‌شناسند: المپیادهای بین‌المللی ریاضیات، ۱۹۷۸_۱۹۸۵ (مرکز نشر دانشگاهی)، المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۲_۱۹۸۶ (مرکز نشر دانشگاهی) و پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو (انتشارات فاطمی).

متن زیر را پروفسور اندی لیو، که از دوستان نزدیک کلامکین و نیز مسأله حل‌کن مشهوری است، به یاد مارِی کلامکین نوشته است.

پیش از هر چیز لازم است توضیح دهم که این نوشته در مدح کلامکین نیست. بر این باورم که مدح و ستایش وقتی به‌کار می‌آید که بخواهیم زندگی درگذشتگان را بسیار بهتر از آنچه بوده است وانمود کنیم. در این مورد نه‌تنها این کار لازم نیست بلکه واقعاً چنین چیزی غیرممکن است. مارِی سیمور کلامکین عمرش را به سازنده‌ترین و پربارترین طریق ممکن صرف دو عرصهٔ دانشگاه و صنعت کرد.

از اوایل زندگی‌اش چیزی زیادی نمی‌دانم بجز اینکه در سال ۱۹۲۱ در محلهٔ بروکلین نیویورک که پدرش در آنجا دکان نانوایی داشت به دنیا آمد. از قرار معلوم همین هم باعث علاقهٔ همیشگی‌اش به نان شده است. در سوابق شغلی‌اش خواندم که مدرک کارشناسی را در رشتهٔ مهندسی شیمی در سال ۱۹۴۲ از مؤسسهٔ آموزش عالی مهندسی کوپر یونیون گرفت. آن‌طور که خانم جودیت هورن، خواهر کوچکترش، می‌گفت، در زمان جنگ جهانی به یکی از واحدهای جنگ شیمیایی مستقر در مریلند پیوسته است.

در سال ۱۹۴۷ از مؤسسهٔ پلی‌تکنیک نیویورک مدرک کارشناسی ارشد گرفت و تا سال ۱۹۵۷ که به بخش تحقیق و توسعهٔ پیشرفتهٔ اَوْکو پیوست، در همان‌جا تدریس می‌کرد.

در سال ۱۹۶۲ برای مدت کوتاهی به دانشگاه بازگشت و استاد دانشگاههای دولتی نیویورک، در بوفالو، و بعد استاد مدعو دانشگاه مینه‌سوتا شد. در سال ۱۹۶۵ باز هم هوای صنعت به سرش زد و به‌عنوان مدیر بخش تحقیقات به شرکت موتور فورد پیوست و تا سال ۱۹۷۶ در همان‌جا ماند.

در تمام این سالها بی‌اندازه در زمینهٔ مسأله حل‌کردن فعال بود. عمده‌ترین فعالیتش در این عرصه، ویراستاری بخش مسألهٔ مجلهٔ سیام ریویو بود. همچنین رابطهٔ کاری همه‌جانبه‌ای هم با جامعهٔ ریاضی امریکا داشت که این امر تا حدی ناشی از نقش وی در مسابقات ریاضی ویلیام لاول پاتنام بود.

در سال ۱۹۷۲ جامعهٔ ریاضی امریکا المپیاد ریاضی امریکا را به‌راه انداخت که با این کار زمینهٔ ورود این کشور به المپیاد ریاضی بین‌المللی در سال ۱۹۷۴، که میزبانی آن را در آن سال آلمان شرقی عهده‌دار بود، فراهم شد.

مارِی نتوانست از شرکت فورد مرخصی بگیرد تا سرپرست تیم شود. به همین دلیل دلسرد شد و تصمیم گرفت که در جایی دیگر به شغل دیگری بپردازد. همین انگیزه او را به کاناد آورد و ابتدا استاد ریاضیات کاربردی در دانشگاه واترلو شد.

هرچند، این امر تحقق نیافت تا وقتی که پیشنهادی از دانشگاه آلبرتا برایش آمد و به وی کمک کرد تا تصمیمش را بگیرد و شرکت فورد را ترک کند. هرگز نفهمیدم که مارِی قبلاً در بانف بوده است یا نه، اما در هر صورت در آن زمان فقط در مدتی که با مسئولین دانشگاه گفتگو می‌کرده می‌توانسته از این مکان توریستی دیدن کند و عاشق آنجا شود و در مورد مذاکراتش به نتیجهٔ قطعی برسد.

در مقام ریاست، روش مدیریتی بخش خصوصی را اعمال می‌کرد. از قرار معلوم این‌طور نبود که همه از روش او راضی باشند، اما شور و اشتیاق عجیبی در میان افراد برمی‌انگیخت و برنامه‌های تحقیقاتی آنان را دوباره احیا می‌کرد.

هیچ‌وقت از علاقه‌اش به هندسهٔ اقلیدسی کاسته نشد. اغلب برایم از سالهای دبیرستانش می‌گفت، وقتی که او و یکی از دوستانش در ترسیمهای اقلیدسی مختلف یکدیگر را به چالش می‌طلبیدند. با وجود اینکه در آن‌موقع ریاست دانشکده وظیفهٔ تدریس نداشت، خودش همیشه یک کلاس هندسه می‌گرفت.

همزمان با کار در دانشگاه، ویراستاری بخش المپیاد کروکس ماتماتیکوروم را هم آغاز کرد، مجله‌ای که آن‌وقتها با هزینهٔ شخصی پرفسور لئو ساو از دانشگاه اتاوا منتشر می‌شد. این مجله اکنون از نشریه‌های رسمی انجمن ریاضی کاناداست. او همچنین مسابقات ریاضی ویژهٔ دانشجویان سال اول و دورهٔ کارشناسی را درگروه ریاضی بنیان نهاد.

هندسه، مسابقات ریاضی و کروکس ماتماتیکوروم باعث شدند تا توجه مارِی به من جلب شود. در آن‌موقع، بورسیهٔ دورهٔ فوق دکتری بودم که دنبال کار می‌گشتم و تازه از دانشکده‌ای که تصدی آن را بر عهده داشت فارغ‌التحصیل شده بودم. بنابراین حاضر بودم که هرکاری انجام دهم و از قضا علایق من با علایق مارِی یکی بود. وقتی درکلاس هندسه بود، کارهای دفترش را انجام می‌دادم، در برگزاری مسابقات گروه ریاضی کمکش می‌کردم و در ویراستاری دستیارش بودم.

یادم می‌آید یک روز مرا به دفترش صدا کرد. مسأله‌ای پیشنهادی برای کروکس ماتماتیکوروم تازه به دستش رسیده بود. گفت: «این مسأله خیلی زیباست اما راه‌حل طراح آن مزخرف است. راه‌حلی خوب برایش پیدا کن و تا بعدازظهر جمعه آن را به من برسان!»

هرچند که مسأله حل‌کردن را دوست داشتم، اما مطمئن نبودم که بتوانم کار را طبق برنامهٔ زمانبندی‌شده تمام کنم. با وجود این، به‌ویژه وقتی که از شوک اولیه درآمدم، دریافتم که نمی‌توانم از زیر این کار شانه خالی کنم و گرچه قادر نیستم هربار رضایتش را جلب کنم، باید بهتر از وقتی که برای خودم کار می‌کنم از عهدهٔ این کار برآیم.

در سالهای آخر دههٔ هفتاد، دانشگاهیان که با بحران کمبود فرصتهای شغلی آموزشی در سطوح بالاتر از دورهٔ دبیرستان مواجه بودند روزگار سختی را می‌گذراندند. نامم در فهرست نهایی همهٔ سمتهای موردنیاز گروه قرار داشت، اما همیشه همین که به من می‌رسید همه‌چیز تمام می‌شد. دست آخر، به مدت یک سال برای فرصت مطالعاتی به‌جای دیگری رفتم. مارِی برای مصاحبه با من برای سمتی جدید به دیدنم آمد، حکمم را به تصویب هیأت استخدام رساند و در سال ۱۹۸۰ مرا برگرداند.

از سال ۱۹۷۵ سرپرست دوم تیم المپیاد ریاضی امریکا در المپیاد بین‌المللی ریاضی شده بود. در سال ۱۹۸۱ امریکا میزبان المپیاد بین‌المللی ریاضی شد، این برای نخستین‌بار بود که المپیاد ریاضی در کشوری غیراروپایی برگزار می‌شد. سَم گرایترز، سرپرست تیم، مسئول برگزاری المپیاد شد و مارِی مسئولیت سرپرستی تیم را بر عهده گرفت و بنابراین سمت من هم به‌عنوان سرپرست دوم قطعی شد.

به مدت چهار سال در این سمت بودم و در سال ۱۹۸۲ چون المپیاد بین‌المللی ریاضی در بوداپست برگزار می‌شد، برای نخستین‌بار به اروپا سفر کردم. به‌دنبال آن، در سال ۱۹۸۳ همراه تیم به المپیاد بین‌المللی ریاضی در پاریس و در سال ۱۹۸۴ به پراگ رفتم. تحت تأثیر محیط آن گردهمایی جهانی قرار گرفته بودم اما دریافتم که تک‌تک آن افراد مرعوب حضور مارِی شده‌اند. مسلماً او معروفترین مسأله حل‌کن در سراسر جهان بود.

بعد از المپیاد سال ۱۹۸۴ هردومان از المپیاد بین‌المللی ریاضی کناره‌گیری کردیم (هرچند که بعدها می‌توانستم به آن بازگردم). دورهٔ ریاستش در گروه ریاضی هم در سال ۱۹۸۱ به پایان رسید. بنابراین رابطه‌مان دانشگاهی و شخصی شد. او و همسرش ایرن بچه نداشتند اما خیلی اهل معاشرت بودند. به‌طور مرتب مهمانشان می‌شدم و آنها هم زود به زود در منزل محقرم به دیدنم می‌آمدند.

در همین دوره بود که به بُعد متفاوت دیگری از شخصیت مارِی پی بردم. پیش از آن او را شخصی بسیار جدی شناخته بودم که استعداد بسیار زیادش از بصیرت نافذ و قابلیتهای ظاهری‌اش نمایان بود. در این زمان او را شخصی مهربان و خونگرم با علایق بسیار گوناگون یافتم: از موسیقی کلاسیک و رمان گرفته تا فیلمهای کونگ‌فو و ورزش، به‌ویژه بسکتبال.

گرچه به هر کاری که دست می‌زد در آن حسابی موفق می‌شد، اما یادش احتمالاً بیشتر به‌سبب نقش و سهمی که در گسترش هنر مسأله حل‌کردن و برگزاری مسابقات ریاضی داشت در ذهنها زنده خواهد ماند. چهارتا کتاب مسأله را تألیف و ویراستاری کرد و در هر مجلهٔ ریاضی نسبتاً مهمی که بخشی از آن به مسأله اختصاص دارد نشانه‌های کارهایش به چشم می‌خورد. همچنین از دانشگاه واترلو دکترای افتخاری گرفت و عضو انجمن سلطنتی بلژیک بود. جوایز متعددی را برد و بر چند جایزه هم نامش را گذارده‌اند.

مارِی در همهٔ عمر طولانی‌اش فوق‌العاده تندرست بود. وقتی در ماه سپتامبر سال ۲۰۰۰ تحت عمل جراحی بای‌پَس قرار گرفت حالش رو به وخامت گذاشت. بعد از مرخص‌شدن از بیمارستان، فشار آوردن به خودش را از سر گرفت: پیاده‌روی تا دفترش در طبقهٔ ششم و پاتیناژ کردن در سالن مرکز خرید اِدمونتون غربی.

در ماه نوامبر دریچهٔ قلبش گرفت ولی خوشبختانه این حادثه وقتی اتفاق افتاد که برای فیزیوتراپی به بیمارستان رفته بود. مدت زیادی در اغما بود. یک روز وقتی به عیادتش رفتم آئورتش به‌شدت خونریزی می‌کرد. دکتر به‌طور ضمنی به من گفت که امید ندارد ماری تا غروب دوام بیاورد.

به هر طریقی که بود قوای درونی‌اش بازگشت و از خطر جست و در عیادت بعدی کاملاً هشیار بود. به من گفت که مقدمات جشن هشتادمین سال تولدش را فراهم کنم و با اطمینان اظهار داشت که تا آن‌موقع از بیمارستان مرخص خواهد شد. خوب شد که حرفهایش را جدی گرفتم چون تا آن‌موقع واقعاً از بیمارستان مرخص شده بود و آماده بود که در جشن تولدش شرکت کند.

یکی از آخرین کارهایش در ریاضیات ویراستاری بخش مسألهٔ نشریهٔ جدید جامعهٔ ریاضی امریکا به‌نام افقهای ریاضیات بود. در آن روزهای سخت که حالش چندان مساعد نبود، از من خواست تا کار ویراستاری را با هم انجام دهیم. بعدها مسئولیت این ستون را به من واگذار کرد اما نشانه‌های کارهایش هنوز هم در جای‌جای صفحاتش به چشم می‌خورد.

اکنون باید سعی کنم جای خالی‌اش را، بی‌آنکه از نصایح و درایتش بهره‌مند شوم، پر کنم. درگذشت ماری نشانهٔ پایان یک دورهٔ تاریخی در عالم مسابقات ریاضی و مسأله حل‌کردن است. جای خالی‌اش به‌شدت احساس می‌شود.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

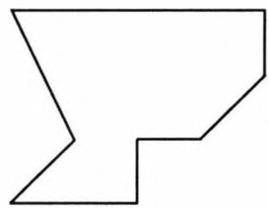
A. Liu, Obituary, Murray Seymour Klamkin (1921-2004), *CMS Notes*, November 2004, pp. 19-20.

فرش‌کردن

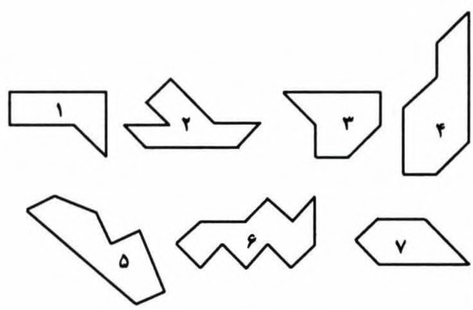
ریچارد استنلی، فدریکو آردیلا

۱. مقدمه

جورچین زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ناحیهٔ

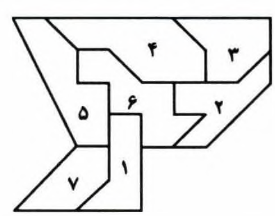


را با استفاده از هفت کاشی



بپوشانیم. ناحیهٔ موردنظر باید کاملاً پوشانده شود و کاشیها نباید همپوشانی داشته باشند. می‌توانیم به هر طریقی که بخواهیم این هفت کاشی را جابه‌جا کنیم یا بچرخانیم، اما از هر یک از آنها دقیقاً باید یک بار استفاده کنیم.

در ابتدا ممکن است متوجه شویم که برخی از این کاشیها به‌خوبی در برخی قسمتهای ناحیهٔ موردنظر جا می‌روند. با این همه، راه‌حل مسأله فقط با آزمون و خطا به‌دست می‌آید.



به همین دلیل، با اینکه این مسأله سرگرم‌کننده است، اما از نظر ریاضی چندان جالب توجه نیست.

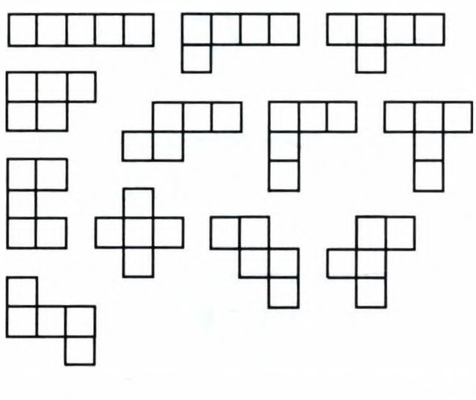
به هر حال، این مسأله نمونه‌ای از مسأله‌های مربوط به فرش‌کردن است. در مسأله‌های فرش‌کردن باید ناحیه‌ای مفروض را با مجموعه‌ای از کاشیهای داده‌شده بپوشانیم، به‌طوری که جای خالی وجود نداشته باشد و کاشیها هم همپوشانی نداشته باشند. چنین پوشاندنی را فرش‌کردن می‌نامند. البته توجه‌مان را به ناحیه‌ها و کاشیهای خاصی که منجر به مسأله‌های ریاضی جالبی می‌شوند، معطوف می‌کنیم.

اگر ناحیه و مجموعه‌ای از کاشیها داده شده باشند، می‌توانیم سؤالهای مختلفی را مطرح کنیم. برخی از این سؤالها که به آنها خواهیم پرداخت از این قرارند:

- آیا روشی برای فرش‌کردن وجود دارد؟
- چند روش برای فرش‌کردن وجود دارد؟
- حدوداً چند روش برای فرش‌کردن وجود دارد؟
- آیا یافتن روشی برای فرش‌کردن ساده است؟
- آیا به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که روشی برای فرش‌کردن وجود ندارد؟
- آیا به‌سادگی می‌توان دیگران را متقاعد کرد که روشی برای فرش‌کردن وجود ندارد؟

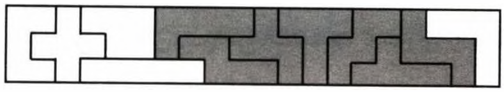
۲. آیا روشی برای فرش‌کردن وجود دارد؟

معمولاً با نگاهی به کاشیها و ناحیه‌ای که می‌خواهیم آن را بپوشانیم به‌سادگی معلوم نمی‌شود که آیا روشی برای فرش‌کردن وجود دارد یا خیر. جورچین بخش ۱ نمونه‌ای از چنین وضعیتی است. در اینجا جورچین مشابهی در نظر می‌گیریم، که در آن کاشیها از نظر ریاضی جالبترند.



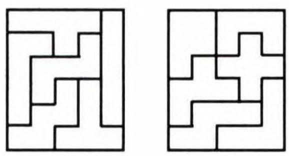
پنج‌مربعی گردایه‌ای از پنج مربع واحد است که از روی ضلعهایشان به هم چسبانده شده‌اند. پنج‌مربعی را می‌توان به‌سادگی برگرداند یا دوران داد. در شکل بالا دوازده نوع مختلفِ پنج‌مربعی را نشان داده‌ایم. چون مجموع

مساحتهای اینها ۶۰ است می‌توان سؤال کرد که آیا می‌توان مستطیلی ۲۰ × ۳ را با این کاشیها طوری پوشاند که از هر یک از آنها دقیقاً یک بار استفاده شده باشد؟



این جورچین را دست‌کم به دو طریق می‌توان حل کرد. یکی از راه‌حلها در شکل بالا نشان داده شده است. اگر بلوک سایه‌دار را °۱۸۰ دوران دهیم راه‌حلی دیگر به‌دست می‌آید. درحقیقت، پس از اینکه مدتی در پی یافتن روشی برای فرش‌کردن تلاش کردیم، قانع می‌شویم که این دو روش (و دورانها و بازتابهای آنها) تنها راه‌حلها هستند.

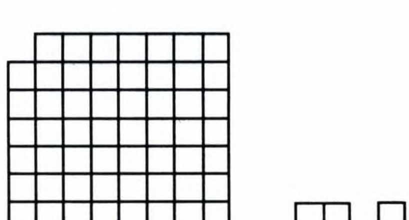
همچنین می‌توان پرسید که آیا می‌توان دو مستطیل ۵ × ۶ را طوری فرش کرد که از هر یک از پنج‌مربعیها دقیقاً یک بار استفاده شده باشد؟ فقط یک راه برای این کار وجود دارد، که آن را در شکل زیر نشان داده‌ایم. اگر راه‌حل یکتا باشد، مسأله جالبتر (و دشوارتر) می‌شود.



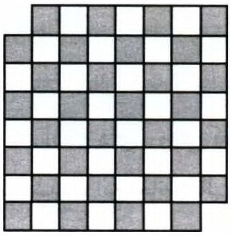
با دانستن جواب مسألهٔ قبل می‌توان حدس زد که چندین راه برای فرش‌کردن مستطیلی ۱۰ × ۶ با استفاده از این دوازده پنج‌مربعی وجود دارد. اما نمی‌توان حدس زد که تعداد این راهها چندتاست. تحقیق جامعی با استفاده از کامپیوتر نشان داده است که ۲۳۳۹ راه برای این کار وجود دارد.

با این سؤالها می‌توان جورچینهای زیبایی طرح کرد، اما از نظر ریاضی مسأله‌های جالبی که می‌خواهیم نیستند. برای اینکه معنی این حرف را روشن کنیم، مسأله‌ای را می‌آوریم که در ظاهر شبیه مسأله‌های قبلی است اما استدلال ریاضی راه‌حل آن قانع‌کننده‌تر است.

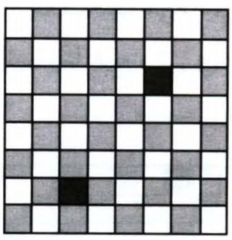
فرض کنید دو خانهٔ گوشه‌ای روبه‌روی هم را از صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ جدا کرده‌ایم. سؤال این است که آیا می‌توان شکل باقی‌مانده را با ۳۱ دومینو فرش کرد؟



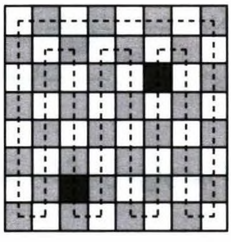
البته لازم نیست که خانه‌های این صفحه یکی در میان سیاه و سفید باشند، اما همان‌طور که خواهیم دید این رنگ‌آمیزی در پیداکردن راه‌حل این مسأله نقشی تعیین‌کننده دارد.



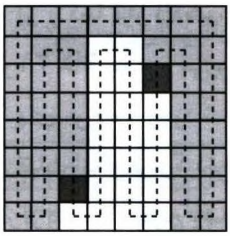
توجه کنید که هر دومینو، صرفنظر از اینکه آن را کجا قرار داده‌ایم، یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید صفحه را می‌پوشاند. بنابراین، ۳۱ دومینو ۳۱ خانهٔ سیاه و ۳۱ خانهٔ سفید را می‌پوشانند. اما صفحهٔ موردنظر کلاً ۳۲ خانهٔ سیاه و ۳۰ خانهٔ سفید دارد، پس فرش‌کردنی با ویژگیهای موردنظر وجود ندارد. راه‌حل این مسأله نمونه‌ای از استدلال به کمک رنگ‌کردن است؛ این نحوهٔ استدلال برای اثبات اینکه فرش‌کردنی وجود ندارد خیلی متداول است.
مسألهٔ دیگری از این نوع این است که این‌بار از صفحهٔ شطرنج یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید برداریم. در این صورت تعداد خانه‌های سیاه صفحه با تعداد خانه‌های سفید آن برابر است؛ آیا می‌توان این صفحه را با دومینوها فرش کرد؟



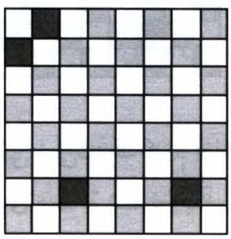
ثابت می‌کنیم که پاسخ مثبت است و فرقی نمی‌کند که کدام خانهٔ سیاه یا کدام خانهٔ سفید را حذف کرده‌ایم. مسیری بسته در نظر بگیرید که از همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج بگذرد (مانند مسیری که در شکل زیر نشان داده شده است).



اکنون روی این مسیر، درست از جایی که پس از خانهٔ سیاه حذف شده آغاز می‌شود، شروع به حرکت کنید. خانه‌های اول و دوم روی این مسیر را با یک دومینو بپوشانید؛ این خانه‌ها به‌ترتیب سفید و سیاه‌اند. سپس خانه‌های سوم و چهارم روی مسیر را با یک دومینو بپوشانید؛ این خانه‌ها به‌ترتیب سفید و سیاه‌اند. این کار را به همین منوال ادامه دهید تا به دومین خانهٔ حذف‌شده از صفحهٔ شطرنج برسید. خوشبختانه این خانه سفید است و هیچ خانهٔ خالی‌ای میان آخرین دومینو گذاشته شده و این خانهٔ خالی وجود ندارد. بنابراین می‌توانیم از این خانه چشم‌پوشی کنیم و پوشاندن مسیر را با دومینوهای پشت سر هم ادامه دهیم. وقتی که از روی مسیر به اولین خانهٔ خالی می‌رسیم، باز هم خانه‌ای خالی میان آخرین دومینو گذاشته شده و این خانهٔ خالی وجود ندارد. به این ترتیب، صفحهٔ موردنظر را کاملاً با دومینوها فرش کرده‌ایم. این فرایند را در شکل زیر نشان داده‌ایم.

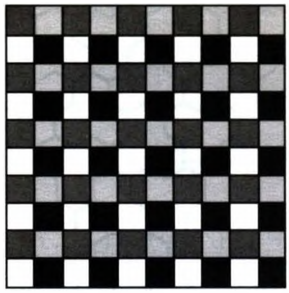


اگر دو خانهٔ سیاه و دو خانهٔ سفید را حذف کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ به روشنی معلوم است که اگر چهار خانهٔ نزدیکتر به یکی از گوشه‌های صفحهٔ شطرنجی را حذف کنیم، می‌توانیم بقیهٔ صفحه را با دومینوها بپوشانیم. از طرف دیگر، نمی‌توانیم شکل زیر را با دومینوها بپوشانیم، زیرا هیچ راهی برای اینکه دومینویی خانهٔ گوشهٔ سمت چپ بالا را بپوشاند وجود ندارد.

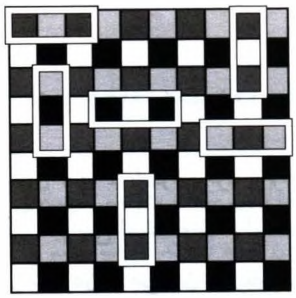


معلوم است که این مسأله از مسألهٔ قبلی دشوارتر است. اینکه کدام زیرمجموعه‌های صفحهٔ شطرنج را می‌توان با دومینوها پوشاند منجر به ابداع ریاضیات بسیار زیبایی می‌شود. در این باره در بخش ۵ بیشتر خواهیم گفت.

اکنون نمونه‌ای پیچیده‌تر از استدلال به کمک رنگ‌کردن می‌آوریم، تا نشان دهیم که صفحهٔ ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با مستطیلهای ۴ × ۱ فرش کرد.



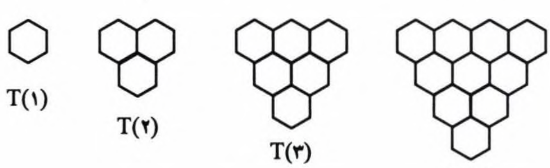
در اینجا اگر صفحه را شطرنجی کنیم، هیچ دلیلی برای وجود راهی برای فرش‌کردن پیدا نمی‌کنیم. در عوض، از چهار رنگ استفاده می‌کنیم (شکل بالا را ببینید). توجه کنید که هر کاشی ۴×۱ای را که روی این صفحه قرار دهیم، تعداد خانه‌هایی که از هر رنگ می‌پوشاند عددی زوج است (ممکن است این تعداد صفر باشد).



بنابراین اگر بتوانیم صفحهٔ موردنظر را فرش کنیم، تعداد خانه‌های هر یک از رنگها عددی زوج است. اما از هر رنگ ۲۵ خانه داریم و درنتیجه فرش‌کردن این صفحه با کاشیهای ۴×۱ ممکن نیست.

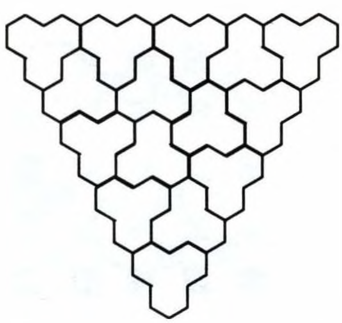
با در نظر داشتن این مثالها می‌توانیم مثالهای مشابهی پیدا کنیم که در آنها با نوعی رنگ کردن صفحه معلوم می‌شود که روشی برای فرش‌کردن وجود ندارد. اکنون مثالی را بررسی می‌کنیم که نمی‌توان با تکنیک رنگ‌کردن آن را حل کرد.

فرض کنید $T(n)$ آرایه‌ای مثلثی از $\frac{n(n+۱)}{۲}$ شش‌ضلعی منتظم واحد باشد.



T(۱) T(۲) T(۳) T(۴)

$T(۲)$ را سه‌تیغ می‌نامیم. می‌خواهیم nهایی را پیدا کنیم که می‌توان $T(n)$ را با سه‌تیغها فرش کرد. مثلاً، $T(۹)$ را می‌توان مانند شکل صفحهٔ بعد فرش کرد.



چون هر سه‌تیغ ۳ شش‌ضلعی را می‌پوشاند، برای اینکه بتوان $T(n)$ را فرش کرد $\frac{n(n+۱)}{۲}$ باید مضرب ۳ باشد. با این همه، از این شرط معلوم نمی‌شود که چرا نمی‌توان $T(۳)$ و $T(۵)$ را فرش کرد.

کانوی ثابت کرده است که آرایهٔ مستطیلی $T(n)$ را وقتی و فقط وقتی می‌توان با سه‌تیغها فرش کرد که به‌ازای عددی صحیح و نامنفی مانند k،

$$n = ۱۲k,\ \ ۱۲k+۲,\ \ ۱۲k+۹,\ \ ۱۲k+۱۱$$

کوچکترین مقدارهای n که به‌ازای آنها می‌توان $T(n)$ را فرش کرد برابرند با ۲، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۲۱، ۲۳، ۲۴، ۲۶، ۳۳ و ۳۵. در اثبات کانوی از گروههایی غیرآبلی استفاده شده است که اطلاعاتی دربارهٔ فرش‌کردن دارند که هیچ رنگ‌کردنی ندارد (استدلال به کمک رنگ‌کردن را می‌توان به زبان گروههای آبلی از نو بیان کرد). درحقیقت، می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان نتیجه‌ای را که کانوی به‌دست آورده است با تکنیک رنگ‌کردن به‌دست آورد.

۳. تعداد دقیق راههای فرش‌کردن

وقتی که می‌دانیم مسألهای دربارهٔ فرش‌کردن جواب دارد می‌توانیم بپرسیم که چند جواب وجود دارد؟

همان‌طور که قبلاً دیدیم اگر بخواهیم از هر یک از ۱۲ پنج‌مربعی دقیقاً یک‌بار استفاده کنیم، برای فرش‌کردن مستطیلی ۱۰×۶ (بدون در نظر گرفتن آنهایی که قرینهٔ یکدیگرند) ۲۳۳۹ راه وجود دارد. شاید جالب باشد که این عدد اینقدر بزرگ است، اما این جواب دقیق خیلی هم جالب نیست، به‌ویژه به این دلیل که به کمک کامپیوتر به‌دست آمده است.

نخستین نتیجهٔ مهم در شمارش تعداد راههای فرش‌کردن را در سال ۱۹۶۱، فیشر و تمپرلی و مستقل از آنها کاستلین به‌دست آوردند. آنها پی بردند که تعداد راههای فرش‌کردن مستطیلی $۲m \times ۲n$ با $۲mn$ دومینو برابر است با

$$۴^{mn} \prod_{j=۱}^{m} \prod_{k=۱}^{n} \left(\cos^{۲} \frac{j\pi}{۲m+۱} + \cos^{۲} \frac{k\pi}{۲n+۱} \right)$$

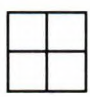
چه فرمول جالبی! عددهایی که در هم ضرب شده‌اند عددهایی صحیح نیستند؛ خیلی از آنها حتی گویا هم نیستند. اما وقتی که آنها را در هم ضرب می‌کنیم در کمال ناباوری عددی صحیح به‌دست می‌آوریم که دقیقاً تعداد راههای فرش‌کردن مستطیلی $۲n \times ۲m$ با دومینوهاست.

مثلاً، اگر $m = ۲$ و $n = ۳$، این عدد برابر است با

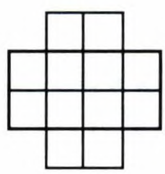
$$\begin{aligned}
&۴^۶(\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۲۵٫۷۱\ldots^\circ) \times (\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۵۱٫۴۳\ldots^\circ)\\
&\times (\cos^۲ ۳۶^\circ + \cos^۲ ۷۷٫۱۴\ldots^\circ) \times (\cos^۲ ۷۲^\circ + \cos^۲ ۲۵٫۷۱\ldots^\circ)\\
&\times (\cos^۲ ۷۲^\circ + \cos^۲ ۵۱٫۴۳\ldots^\circ) \times (\cos^۲ ۷۲^\circ + \cos^۲ ۷۷٫۱۴\ldots^\circ)\\
&= ۴^۶(۱٫۴۶۶۲\ldots)(۱٫۰۴۳۲\ldots)(۰٫۷۰۴۰\ldots)\\
&\times (۰٫۹۰۷۲\ldots)(۰٫۴۸۴۲\ldots)(۰٫۱۴۵۰\ldots)\\
&= ۲۸۱
\end{aligned}$$

از خوانندهٔ شکاکی که وقتی زیادی دارد می‌خواهیم که همهٔ راههای فرش‌کردن مستطیلی ۶ × ۴ را با دومینوها بیابد و تحقیق کند که تعداد دقیق آنها ۲۸۱ است.

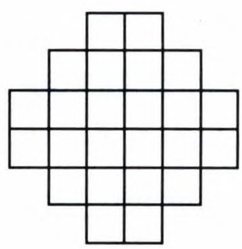
بگذارید چند کلمه‌ای هم دربارهٔ اثباتهای این نتیجه بگوییم. کاستلین جواب را برحسب فافین نوشته و محاسبات را تبدیل به محاسبهٔ دترمینانی مربوط به آن کرده است. اثبات فیشر و تمپرلی فرق دارد و در آن از روش ماتریس انتقال استفاده کرده‌اند که تکنیکی متداول در مکانیک آماری و ترکیبیات شمارشی است.



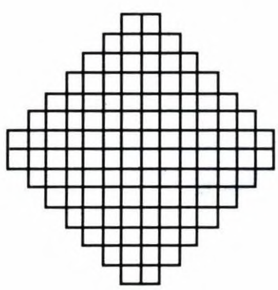
AZ(۱)



AZ(۲)



AZ(۳)



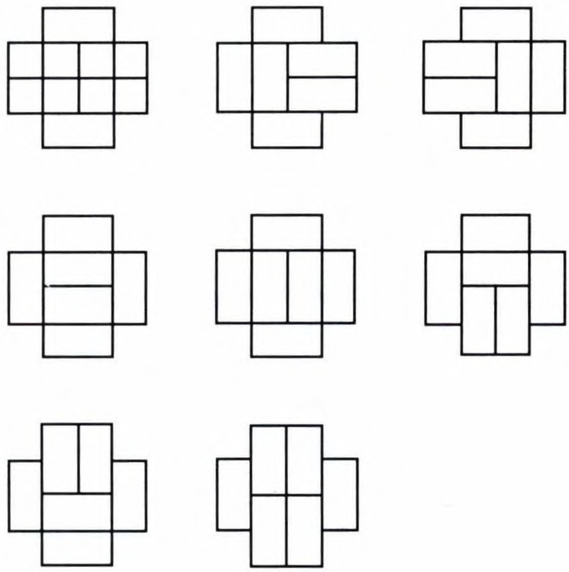
AZ(۷)

گروهی دیگر از ناحیه‌ها وجود دارند که تعداد راههای فرش‌کردن آنها با دومینوها عددی سرراست است. الماس آزتکی مرتبهٔ n، که آن را با $AZ(n)$ نشان می‌دهیم، از به‌هم چسباندن سطرهای هم‌محور به طول

$$۲, ۴, \ldots, ۲n, ۲n, \ldots, ۴, ۲$$

به‌دست می‌آید (شکل صفحهٔ قبل را ببینید).

الماس آزتکی مرتبهٔ ۲، یعنی $AZ(۲)$، را می‌توان به هشت روش زیر فرش کرد:



اِلکیس، کوپر برگ، لارسِن و پراپسا ثابت کرده‌اند که تعداد راههای فرش‌کردن $AZ(n)$ با دومینوها برابر است با $۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$. در جدول زیر تعداد راههای فرش‌کردن $AZ(n)$ را به‌ازای چند مقدار اولیهٔ n نشان داده‌ایم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۸	۶۴	۱۰۲۴	۳۲۷۶۸	۲۰۹۷۱۵۲

چون

$$\frac{۲^{\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}}}{۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}} = ۲^{n+۱}$$

می‌توان سعی کرد که $۲^{n+۱}$ راه فرش‌کردن الماس آزتکی مرتبهٔ $n+۱$ را به هر یک از راههای فرش‌کردن الماس آزتکی مرتبهٔ n طوری ربط داد که هر یک از راههای فرش‌کردن الماس آزتکی مرتبهٔ $n+۱$ دقیقاً یک بار ظاهر

شود. این روش یکی از چهار روش اولیهٔ اثبات حکم موردنظر است؛ اکنون ۱۲ اثبات برای این حکم می‌شناسیم. هیچ‌یک از این اثباتها به‌سادگی جواب نهایی، یعنی $۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$، نیست.

۴. تعداد تقریبی راههای فرش‌کردن

گاهی می‌خواهیم تعداد راههای فرش‌کردن ناحیه‌ای را برآورد کنیم. در مواردی این کار را می‌کنیم، زیرا نمی‌توانیم تعداد دقیق را پیدا کنیم. در مواردی دیگر، در کمال ناباوری، مقدار تقریبی را به مقدار واقعی ترجیح می‌دهیم. مثالی خوب از این دست تعداد راههای فرش‌کردن مستطیل است. با اینکه فرمولی دقیق برای محاسبهٔ این عدد در اختیار داریم، اما این فرمول هیچ اطلاعی از اینکه این عدد چقدر بزرگ است نمی‌دهد.

مثلاً، چون الماسهای آزتکی مربعهایی «کج»اند، ممکن است بپرسیم که تعداد راههای فرش‌کردن الماس آزتکی با دومینوها چه ربطی به تعداد راههای فرش‌کردن مربعی به‌همان ابعاد با دومینوها دارد؟ با چندبار آزمایش می‌توان دریافت که گذاردن دومینویی روی مرز الماس آزتکی، معمولاً نحوهٔ گذاردن چند دومینوی دیگر را هم مشخص می‌کند. اما در مورد مربع چنین چیزی به‌ندرت اتفاق می‌افتد. برای همین ممکن است حدس بزنیم که تعداد راههای فرش‌کردن مربع از تعداد راههای فرش‌کردن الماس آزتکی بیشتر است.

برای اینکه این ایده‌ها را دقیق کنیم، تعریفی را یادآوری می‌کنیم. اگر ناحیه‌ای N خانه و T راه برای فرش‌کردن داشته باشد، می‌گوییم که میزان استقلالش از هر خانه $\sqrt[N]{T}$ است. وجه تسمیهٔ این نامگذاری، با کمی تسامح چنین است: اگر هر خانه بتواند آزادانه تصمیم بگیرد که چگونه پوشانده شود و $\sqrt[N]{T}$ انتخاب برای این کار داشته باشد، آن‌وقت تعداد کل راههای فرش‌کردن T است.

در مورد الماس آزتکی $AZ(n)$،

$$N = ۲n(n+۱), \qquad T = ۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

بنابراین، میزان استقلال الماس آزتکی از هر خانه‌اش برابر است با

$$\sqrt[N]{T} = \sqrt[۴]{۲} = ۱/۱۸۹۲۰۷۱۱۵\ldots$$

از فرمولی که برای محاسبهٔ تعداد راههای فرش‌کردن مربع $۲n \times ۲n$ داریم نمی‌توان فهمید که این عدد چقدر بزرگ است. خوشبختانه، همان‌طورکه کاستلین، فیشر و تمپرلی متوجه شده‌اند، با استفاده از فرمول آنها می‌توان ثابت کرد که تعداد راههای فرش‌کردن مربعی $۲n \times ۲n$ با دومینوها تقریباً برابر است با $C^{۴n^۲}$، که در آن

$$C = e^{\frac{G}{\pi}}$$
$$= ۱/۳۳۸۵۱۵۱۵۲\ldots$$

در اینجا، G ثابت کاتالان است و این‌طور تعریف می‌شود:

$$G = ۱ - \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۵^۲} - \frac{۱}{۷^۲} + \cdots$$
$$= ۰/۹۱۵۹۶۵۵۹۴۱\ldots$$

بنابراین آنچه به‌طور شهودی به آن رسیده‌ایم درست است. صفحهٔ مربعی را «ساده‌تر» از الماس آزتکی می‌توان فرش کرد، به این معنی که میزان استقلالش از هر خانه تقریباً برابر است با ...۱/۳۳۸۵ و در مورد الماس آزتکی این عدد ...۱/۱۸۹۲ است.

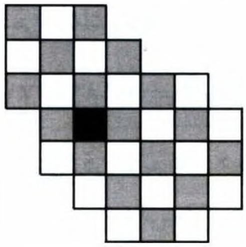
۵. اثبات اینکه روشی برای فرش‌کردن وجود ندارد

همان‌طور که در بخش ۱ دیدیم، مسأله‌های فرش‌کردن زیادی وجود دارند که در آنها راهی برای فرش‌کردن وجود دارد، اما در آنها یافتن چنین راهی دشوار است. با وجود این، همین که چنین راهی را یافتیم، قانع کردن دیگران به قبول وجود چنین راهی خیلی ساده است: کافی است ناحیهٔ فرش‌شده را نشانشان دهیم!

در حالتی که روشی برای فرش‌کردن وجود ندارد، آیا باز هم می‌توانیم چنین چیزی بگوییم؟ باز هم همان‌طور که در بخش ۱ دیدیم، ممکن است اثبات اینکه روشی برای فرش‌کردن وجود ندارد دشوار باشد. اگر روشی برای فرش‌کردن وجود نداشته باشد، آیا قانع‌کردن دیگران به قبول چنین چیزی ساده است؟

جواب این سؤال به تعبیری معمولاً خیر است، حتی در مورد فرش‌کردن با مستطیلهای ۳×۱ چنین است. با این همه، با کمال تعجب، در مورد فرش کردن با دومینوها پاسخ مثبت است.

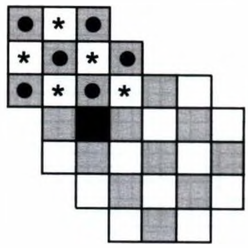
پیش از اینکه حکم کلی را بگوییم، مثالی می‌آوریم. ناحیهٔ زیر را که از ۱۶ خانهٔ سایه‌دار و ۱۶ خانهٔ سفید تشکیل شده است در نظر بگیرید (خانهٔ سیاه حفره‌ای در این ناحیه است).



می‌توان حالتهای مختلف را بررسی کرد و متقاعد شد که نمی‌توان این ناحیه را با دومینوها پوشاند. با اینکه این را می‌دانیم، آیا می‌توانیم راهی ساده‌تر و سریعتر برای متقاعد کردن دیگران به قبول این موضوع پیدا کنیم؟

یکی از این راهها را در اینجا می‌آوریم. شش خانهٔ سایه‌داری را که با • مشخص کرده‌ایم در نظر بگیرید. این

خانه‌ها کلاً با پنج خانهٔ سفید، که آنها را با * مشخص کرده‌ایم، همسایه‌اند. برای اینکه شش خانهٔ سیاه مشخص‌شده را بپوشانیم شش کاشی مختلف احتیاج داریم و هر یک از این کاشیها باید یکی از پنج خانهٔ سفید مشخص‌شده را بپوشاند. بنابراین فرش‌کردن این ناحیه ممکن نیست.



فیلیپ هال ثابت کرده است که اگر نتوان ناحیه‌ای را با دومینوها پوشاند، می‌توان با چنین روشی ثابت کرد که این کار نشدنی است. به‌طور دقیقتر، می‌توان k خانه به یک رنگ پیدا کرد که تعداد همسایگانشان از k کمتر است. به این ترتیب، برای اینکه کسی را قانع کنید که فرش‌کردن ناحیهٔ موردنظر ممکن نیست، فقط کافی است این k خانه و همسایگانشان را نشان دهید.

حکمی که هال ثابت کرده است از اینکه گفتیم کلی‌تر است و معمولاً به آن قضیهٔ ازدواج می‌گویند. وجه تسمیهٔ این نامگذاری این است که خانه‌های سیاه را مردها و خانه‌های سفید را زنها در نظر می‌گیریم. این مردها و زنها خیلی بلندپرواز نیستند، چرا که می‌خواهند فقط با یکی از همسایگانشان ازدواج کنند. ما هم واسطهٔ این ازدواجها هستیم؛ سعی می‌کنیم که ترتیبی بدهیم که هر کس ازدواج موفقی داشته باشد. قضیهٔ ازدواج دربارهٔ این است که دقیقاً چه‌وقت می‌توانیم از پس این کار برآییم.

۶. فرش‌کردن مستطیل با مستطیلها

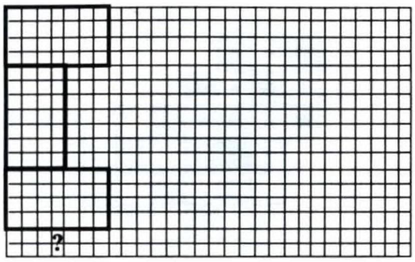
یکی از ساده‌ترین مسأله‌های فرش‌کردن، فرش‌کردن مستطیل با مستطیلهای کوچکتر است. در این بخش سه نتیجهٔ زیبا در این باره بیان می‌کنیم.

اولین مسأله‌ای که بررسی می‌کنیم این است: چه‌وقت می‌توانیم مستطیلی $m \times n$ را با مستطیلهای $a \times b$ بپوشانیم (جهت قرار دادن مستطیلها مهم نیست)؟ ابتدا چند مثال را بررسی می‌کنیم.

آیا می‌توان مستطیلی ۱۰ × ۷ را با مستطیلهای ۳ × ۲ فرش کرد؟ معلوم است که این کار نشدنی است، زیرا هر مستطیل ۳ × ۲ شش خانه دارد، اما تعداد خانه‌های مستطیلی ۱۰ × ۷ برابر با ۷۰ است، که مضرب ۶ نیست. برای اینکه بتوان راهی برای فرش‌کردن پیدا کرد، باید تعداد خانه‌های مستطیل بزرگ مضربی از تعداد خانه‌های مستطیل کوچک باشد. آیا این شرط کافی است؟

فرش‌کردن مستطیلی ۲۸ × ۱۷ را با مستطیلهای ۷ × ۴ امتحان می‌کنیم. در اینجا نمی‌توان از استدلال بند

قبل استفاده کرد؛ از این استدلال فقط متوجه می‌شویم که تعداد کاشیهای موردنیاز ۱۷ است. ابتدا سعی می‌کنیم که ستون سمت چپ مستطیل را بپوشانیم.



در وهلهٔ نخست به جایی نمی‌رسیم. پس از اینکه ۴ خانهٔ اول را با کاشی اول، ۷ خانهٔ بعدی را با کاشی دوم و ۴ خانهٔ بعدی را با کاشی سوم پوشاندیم، جایی برای گذاشتن کاشی چهارم برای پوشاندن دو خانهٔ باقی‌مانده نمی‌ماند. درحقیقت، اگر بتوانیم ۱۷ خانهٔ ستون اول را با کاشیهای 7×4 بپوشانیم، ۱۷ را به‌شکل مجموع تعدادی ۴ و ۷ نوشته‌ایم. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این کار ممکن نیست، بنابراین راهی برای فرش‌کردن مستطیل موردنظر وجود ندارد. استدلال دیگری برای اینکه راهی برای فرش‌کردن وجود ندارد یافته‌ایم: ممکن است نتوانیم سطر اول یا ستون اول را بپوشانیم، زیرا m یا n را نمی‌توان به‌شکل مجموع تعدادی a و b نوشت.

آیا می‌توان مستطیلی 15×10 را با مستطیلهای 6×1 فرش کرد؟ ۱۵۰ مضرب ۶ است و ۱۰ و ۱۵ را هم می‌توان به‌شکل مجموع تعدادی ۱ و ۶ نوشت. با این همه، باز هم راهی برای فرش کردن وجود ندارد!

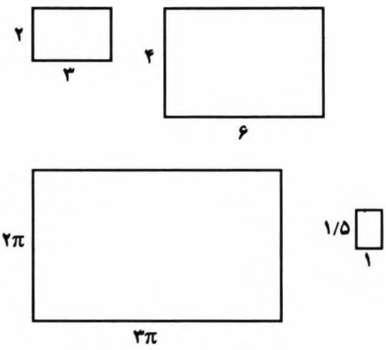
پاسخ کامل سؤالمان را دو بروین و کلارنر داده‌اند. این دو ثابت کرده‌اند که وقتی و فقط وقتی می‌توان مستطیل $m \times n$ را با مستطیلهای $a \times b$ فرش کرد که

- mn بر ab بخش‌پذیر باشد.
- بتوان سطر اول و ستون اول را پوشاند؛ یعنی، بتوان m و n را به‌شکل مجموع تعدادی a و b نوشت.
- m یا n بر a بخش‌پذیر باشد و m یا n بر b بخش‌پذیر باشد.

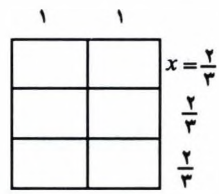
چون نه ۱۰ بر ۶ بخش‌پذیر است نه ۱۵، مستطیل 15×10 را نمی‌توان با مستطیلهای 6×1 فرش کرد. در حال حاضر چندین اثبات برای قضیهٔ دو بروین و کلارنر وجود دارد. در یکی از زیباترین آنها از ویژگیهای ریشه‌های مختلط واحد استفاده می‌شود.

دومین مسأله‌ای که می‌خواهیم از آن صحبت کنیم مسألهٔ زیر است. فرض کنید x عددی مثبت باشد، مثلاً $x = \sqrt{2}$. آیا می‌توان مربعی را با تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $x \times 1$ فرش کرد (جهت قرار دادن مستطیلها مهم نیست)؟ به بیان دیگر، آیا می‌توان مربعی را با تعدادی متناهی مستطیل، که همگی به‌شکل $a \times ax$ هستند (a ممکن است تغییر کند)، فرش کرد؟

مثلاً، اگر $x = \frac{۲}{۳}$، برخی از کاشیهایی که می‌توانیم از آنها استفاده کنیم کاشیهای زیرند:



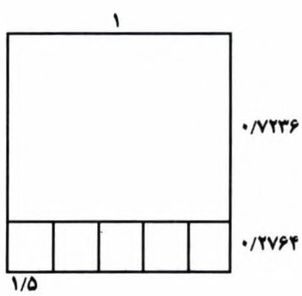
شکل این کاشیها یکسان است، اما ابعادشان با هم فرق دارد. با این همه، در این حالت فقط به یکی از آنها احتیاج داریم، زیرا می‌توان مربع ۲ × ۲ را با شش مربع $\frac{۲}{۳} \times ۱$ فرش کرد.



به دلایلی که بعداً مشخص می‌شوند، خاطرنشان می‌کنیم که $x \times \frac{۲}{۳}$ در معادلهٔ $۳x - ۲ = ۰$ صدق می‌کند. توجه کنید که به‌ازای هر عدد گویای مثبت می‌توان از همین روش برای ساختن مربع استفاده کرد.

سعی می‌کنیم که مربعی را با مستطیلهای متشابهی که دست‌کم از دو اندازهٔ مختلف‌اند فرش کنیم. فرش‌کردنی وجود دارد که تقریباً به‌شکل زیر است. در این شکل مستطیلها متشابه‌اند، زیرا

$$\frac{۰/۷۲۳۶\ldots}{۱} = \frac{۰/۲}{۰/۲۷۶۴\ldots}$$



چگونه این شکل را پیدا کرده‌ایم؟ فرض کنید می‌خواهیم با قرار دادن پنج نسخه از یک مستطیل در یک ردیف و گذاشتن مستطیلی بزرگتر و متشابه با آنها روی آنها مربعی درست کنیم (شکل صفحهٔ قبل را ببینید). فرض کنید می‌دانیم که طول ضلع مربع ۱ است، اما ابعاد مستطیلها را نمی‌دانیم. فرض کنید ابعاد مستطیل بزرگ $x \times ۱$ باشد. در این صورت طول مستطیلهای کوچک برابر با $۱ - x$ است. چون مستطیلهای کوچک با مستطیلهای بزرگ متشابه‌اند، عرض هر یک از آنها برابر با $x(۱ - x)$ است. چون این مستطیلها را کنار هم قرار داده‌ایم، عرض کلی آنها $۵x(۱ - x)$ است، که باید برابر با ۱ باشد.

بنابراین، اگر x در معادلهٔ $۵x(۱ - x) = ۱$ یا $۵x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ صدق کند، شکل بالا جواب مسألهٔ ماست. یکی از مقدارهای x که در معادلهٔ موردنظر صدق می‌کند برابر است با

$$x = \frac{۵ + \sqrt{۵}}{۱۰} = ۰/۷۲۳۶۰۶۷۹۷۷\ldots$$

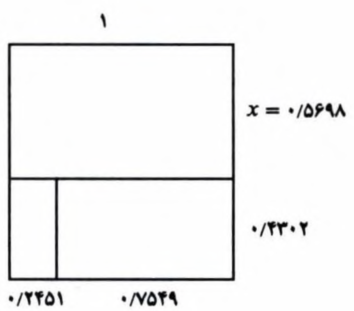
که به‌ازای این مقدار x، فرش‌کردنی به‌دست می‌آید که در بالا نشان داده‌ایم.

البته به‌یاد آورید که هر معادلهٔ درجهٔ دوم دو ریشه دارد؛ ریشهٔ دوم معادلهٔ موردنظر برابر است با

$$x = \frac{۵ - \sqrt{۵}}{۱۰} = ۰/۲۷۶۳۹۳۲۰۲۳\ldots$$

که به‌ازای این مقدار x، فرش‌کردن دیگری به‌دست می‌آید که آن هم ویژگیهای موردنظر مسأله را دارد.

البته اینکه مسأله‌مان به‌ازای این دو مقدار عجیب و غریب برای x جواب دارد دور از انتظار است. درحقیقت، ممکن است وضعیت از این هم پیچیده‌تر شود. سعی می‌کنیم که با استفاده از سه مستطیل متشابه به ابعاد مختلف راهی برای فرش‌کردن پیدا کنیم.



فرض کنید که ابعاد بزرگترین مستطیل $x \times ۲$ باشد. اگر از همان روش استدلال قبلی استفاده کنیم معلوم می‌شود که x باید در معادلهٔ $x^۳ - x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ صدق کند. یکی از مقدارهای x که در این معادله صدق می‌کند برابر است با

$$x = ۰/۵۶۹۸۴۰۲۹۱۰\ldots$$

به‌ازای این مقدار x، راه‌حل مسأله همان است که در بالا نشان داده‌ایم. معادلهٔ درجهٔ سوم بالا دو جواب دیگر هم دارد، که تقریباً برابرند با

$$۰/۲۱۵ + ۱/۳۰۷\sqrt{-۱}, \qquad ۰/۲۱۵ - ۱/۳۰۷\sqrt{-۱}$$

از این دو عدد مختلط جواب واقعی برای مسأله به‌دست نمی‌آید.

در حالت کلی، لاشکوویچ و ژکرس برای این مسأله جواب شگفت‌آور زیر را به‌دست آورده‌اند. وقتی و فقط وقتی می‌توان مربعی را با تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $x \times ۱$ فرش کرد که

- x ریشه‌ای از چندجمله‌ایی باشد که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند.
- اگر $a + b\sqrt{-۱}$ ریشه‌ای از چندجمله‌ایی با کمترین درجه باشد که x ریشه‌ای از آن است، آن‌وقت $a > ۰$.

خیلی جالب است که این ریشه‌های مختلط که اصلاً به مسأله ربطی ندارند، نقشی اساسی در آن ایفا می‌کنند. در مثال بالا، فقط جوابی برای مستطیل $۰/۵۶۹۸\ldots \times ۱$ وجود دارد، زیرا $۰/۲۱۵\ldots$ مثبت است.

این نتیجه را با آوردن چند مثال بیشتر توضیح می‌دهیم.

اگر $x = \sqrt{۲}$، x در معادلهٔ چندجمله‌ایی که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند، یعنی $x^۲ - x = ۰$، صدق می‌کند. البته، جواب دیگر معادله $-\sqrt{۲}$ است، که منفی است. بنابراین نمی‌توان مربعی را با تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $\sqrt{۲} \times ۱$ فرش کرد.

از طرف دیگر، اگر $x = \sqrt{۲} + \frac{۱۷}{۱۲}$، x در معادلهٔ درجهٔ دوم $۱۴۴x^۲ - ۴۰۸x + ۱ = ۰$ صدق می‌کند، که ریشهٔ دیگرش برابر است با

$$-\sqrt{۲} + \frac{۱۷}{۱۲} = ۰/۰۰۲۴۵۳\ldots > ۰$$

بنابراین می‌توان با تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $\left(\sqrt{۲} + \frac{۱۷}{۱۲}\right) \times ۱$ مربعی را فرش کرد. اما واقعاً چگونه؟

به همین ترتیب، اگر $x = \sqrt[۳]{۲}$، x در معادلهٔ $x^۳ - ۲ = ۰$ صدق می‌کند. دو ریشهٔ دیگر این معادله $-\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲} \pm \frac{\sqrt[۳]{۲}\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{-۱}$ هستند. چون $-\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲} < ۰$، نمی‌توان با تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $\sqrt[۳]{۲} \times ۱$ مربعی را فرش کرد.

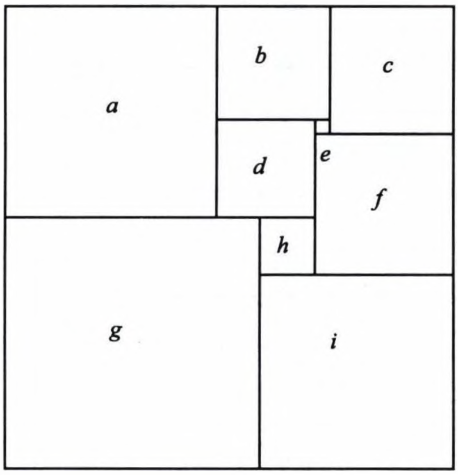
آخر سر، فرض کنید $\frac{r}{s}$ عددی گویا باشد و $x = \frac{r}{s} + \sqrt[۳]{۲}$. باز هم می‌توان تحقیق کرد که x ریشهٔ چندجمله‌ایی درجهٔ سوم است که دو ریشهٔ دیگرش برابرند با

$$\left(\frac{r}{s} - \frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}\right) \pm \frac{\sqrt[۳]{۲}\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{-۱}$$

درنتیجه، وقتی و فقط وقتی می‌توان با تعدادی متناهی مستطیل متشابه با مستطیل $\left(\frac{r}{s} + \sqrt[3]{۲}\right) \times ۱$ مربعی را فرش کرد که $\frac{r}{s} > \frac{\sqrt[3]{۲}}{۲}$.

جورچینی جالب این است که کسری دلخواهتان که از $\frac{\sqrt[3]{۲}}{۲}$ بزرگتر است انتخاب کنید و مربعی را با مستطیلهایی متشابه با مستطیل $\left(\frac{r}{s} + \sqrt[3]{۲}\right) \times ۱$ فرش کنید.

سومین مسأله‌ای که می‌خواهیم بررسی کنیم از مسألهٔ فوق‌العاده جالب زیر، که فرش‌کردن مستطیلی با نه مربع به ابعاد مختلف است، به ذهنمان رسیده است. (به‌زودی معلوم می‌شود که ابعاد مربعها و مستطیل چقدرند.) چنین فرش‌کردنهایی را در حال حاضر فرش‌کردن کامل می‌نامند.

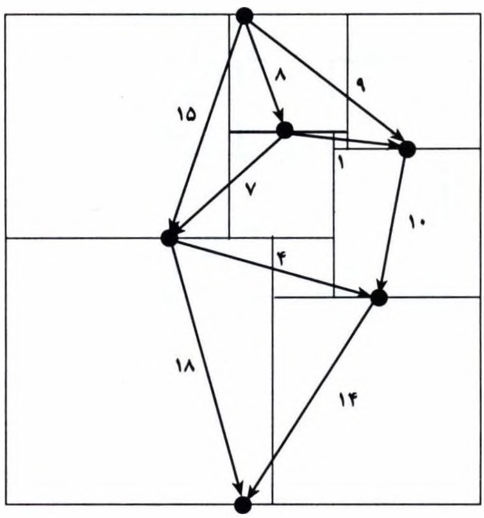


برای یافتن فرش‌کردن کامل مستطیل از روش مسألهٔ قبل استفاده می‌کنیم. ترکیبی آزمایشی از مربعها، مانند آنچه در بالا نشان داده‌ایم، در نظر بگیرید. طول ضلع هر یک از مربعها را با متغیری نامگذاری می‌کنیم. به‌ازای هر خط افقی درون مستطیل معادلهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم: مجموع طولهای ضلعهای مربعهایی را که روی این خط قرار دارند با مجموع طولهای ضلعهای مربعهایی که از این خط آویزان‌اند برابر قرار می‌دهیم. مثلاً، «معادله‌های افقی» $a + d = g + h$ و $b = d + e$ به‌دست می‌آیند. به همین ترتیب، به‌ازای هر خط عمودی «معادله‌ای عمودی» به‌دست می‌آوریم، مانند معادله‌های $a = b + d$ و $d + h = e + f$. آخر سر، معادله‌هایی را می‌نویسیم که به‌معنی برابر بودن ضلعهای بالا و پایین مستطیل‌اند، همین‌طور در مورد ضلعهای چپ و راست مستطیل. در مورد شکل بالا، معادله‌ها $a + b + c = g + i$ و $a + g = c + f + i$ هستند. فقط باید امیدوار باشیم که دستگاه معادله‌های خطی به‌دست آمده جواب داشته باشد و البته جوابها مثبت و متمایز باشند. در مورد ترکیبی که در بالا نشان داده‌ایم، دستگاه موردنظر، بدون در نظر گرفتن اندازهٔ شکل، جوابی یکتا دارد:

$$(a, b, c, d, e, f, g, h, i) = (۱۵, ۸, ۹, ۷, ۱, ۱۰, ۱۸, ۴, ۱۴)$$

ابعاد مستطیل بزرگ ۳۳ × ۳۲ است.

درکمال ناباوری، به‌ازای هر ترکیبی از مربعها، دستگاه معادله‌های خطی به‌دست آمده همواره جوابی یکتا، بدون در نظرگرفتن اندازهٔ شکل، دارد. (متأسفانه، «طول ضلعهای» به‌دست آمده معمولاً مثبت و متمایز نیستند.) در سال ۱۹۳۶، بروکس، اسمیت، استون و تات این نتیجه را به زیبایی توصیف کردند. آنها گرافی جهتدار رسم کردند که رأسهایش خطهای افقی‌ای هستند که در مستطیل پیدا می‌شوند. به‌ازای هر مربع کوچک یک یال وجود دارد، که از خط افقی پایینی‌اش کشیده شده است. در شکل زیر گراف موردنظر را برای فرش‌کردن کامل مستطیل ۳۳ × ۳۲، که قبلاً آن را پیدا کردیم، نشان داده‌ایم.

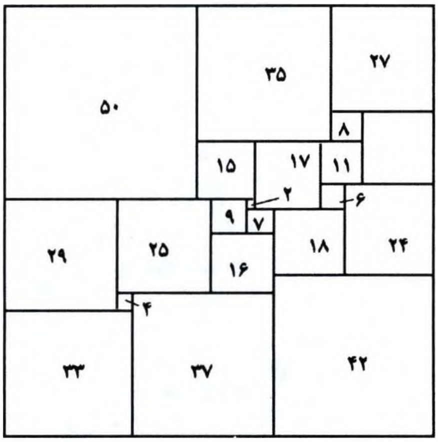


می‌توانیم این گراف را مداری الکتریکی از مقاومتهای به‌اندازهٔ یک در نظر بگیریم، که در آن جریان در هر سیم برابر است با طول ضلع مربع نظیرش در مستطیل فرش‌شده. «معادله‌های افقی» برای طول ضلعهای مربعها معادل معادله‌های بقای جریان در این مدارند، و «معادله‌های عمودی» معادل قانون اهم‌اند. با در نظر داشتن این موضوع، حکمی که گفتیم معادله قضیهٔ کیرشهف است: جریان در هر سیم را می‌توان به‌طور یکتا مشخص کرد، به‌شرطی که اختلاف پتانسیل میان دو رأس را بدانیم.

بروکس، اسمیت، استون و تات اصولاً به تحقیق دربارهٔ فرش‌کردنهای کامل مربعها علاقه‌مند بودند. این موضوع هم تعبیر زیبایی به زبان مدارها دارد. برای اینکه فرش‌کردنی با مربعها پیدا کنیم، به معادلهٔ خطی دیگری هم احتیاج داریم، که می‌گوید طول ضلعهای عمودی و افقی مستطیل باید برابر باشند. به زبان مدارهای الکتریکی، معنی این حرف این است که مقاومت کل مدار ۱ باشد.

با اینکه تناظر میان فرش‌کردن و مدارها از نظر مفهوم خیلی زیباست، به‌سادگی منجر به پیدا کردن فرش‌کردن کاملی با مربعها یا حتی با مستطیلها نمی‌شود. درحقیقت، پس از شکل‌گرفتن این نظریه، استون مدتی را صرف کرد

تا ثابت کند که فرش‌کردن کامل مربع ممکن نیست. سرانجام، رولند اسپراگ در سال ۱۹۳۹ مربعی به طول ضلع ۴۲۰۵ را با ۵۵ مربع فرش کرد. پس از آن خیلی تلاش کردند و ساعتها با کامپیوتر سعی کردند تا مثالی بهتر بیابند. دوی‌ویستین با کامپیوترش ثابت کرد که کمترین تعداد مربعها در فرش‌کردن کامل مربعها برابر با ۲۱ است. فقط یک چنین فرش‌کردنی وجود دارد که آن را در شکل زیر نشان داده‌ایم.



• ترجمهٔ ارشک حمیدی

آنچه خواندید، ترجمهٔ قسمتهایی از مقاله‌ای است که پروفسور ریچارد استنلی و فدریکو آردیلا براساس متن سخنرانی ریچارد استنلی در چارچوب «سخنرانیهای عامه‌فهم» مؤسسهٔ ریاضیات کِلِی نوشته‌اند. اصل مقالهٔ موردنظر را می‌توانید در وب‌سایت مؤسسهٔ ریاضیات کِلِی، http://www.claymath.org، پیدا کنید.

اعداد مختلط

بهزاد اسلامی مسلّم

«در حوزهٔ اعداد حقیقی، کوتاهترین راه بین دو واقعیت راهی است که از حوزهٔ اعداد مختلط می‌گذرد.»
ژ. آدامار

ضرب و جمع دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است ولی تقسیم و تفریق دو عدد طبیعی ممکن است عددی طبیعی نباشد. با گسترش اعداد طبیعی به اعداد صحیح، محدودیت در مورد تفریق از میان رفت و با گسترش اعداد صحیح به اعداد گویا، محدودیت در مورد تقسیم (بجز تقسیم بر صفر که بی‌معناست) از میان برداشته شد. همچنین، ممکن است نسبت طولهای دو پاره‌خط عددی گویا نباشد؛ مثلاً نسبت طول قطر مربع به طول ضلعش. این واقعیت به گسترش اعداد گویا به اعداد حقیقی انجامید. اما باز هم محدودیتی وجود داشت: معادلهٔ $x^۲ = -۱$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد (زیرا مربع هر عدد حقیقی نامنفی است.). آیا می‌توانیم مجموعهٔ اعداد حقیقی را گسترش دهیم و در مجموعهٔ جدید، جواب یا جوابهایی برای معادلهٔ $x^۲ = -۱$ بیابیم؟ بله! این کار شدنی است. البته، نتیجه وجود عددهایی است که ممکن است با شهود ما سازگار نباشند. در قدیم، ریاضیدانان وجود اعداد عجیبی مثل $\sqrt{-۱}$ (یعنی جواب معادلهٔ $x^۲ = -۱$) را قبول نداشته‌اند و آنها را اعداد موهومی نامیده‌اند.

لئونهارت اویلر (۱۷۸۳_۱۷۰۷) با کارهایی استادانه روی اعداد موهومی نتایج جالبی به‌دست آورد و کارل فریدریش گاوس (۱۸۵۵_۱۷۷۷) اعداد موهومی را اعداد مختلط نامید و از آنها برای یافتن نتایجی شگفت‌انگیز در نظریهٔ اعداد استفاده کرد. هرچه زمان جلوتر می‌رفت اهمیت اعداد مختلط آشکارتر می‌شد. در این مقاله با اعداد مختلط آشنا می‌شویم.

در متن، تمرینهایی گنجانده شده‌اند که حل آنها به درک بیشتر مطلب کمک می‌کند. سعی کنید وقتی به آنها رسیدید دست به کار شوید و حلشان کنید.

رسم بر این است که $\sqrt{-۱}$ (یعنی جواب معادلهٔ $x^۲ = -۱$) را با i (که ابتدای واژهٔ imaginary به‌معنای موهومی است) نشان دهند. پس $i^۲ = -۱$. بعداً می‌توانید بررسی کنید که $-i$ هم جواب معادلهٔ $x^۲ = -۱$ است.

عدد مختلط، عددی مثل $a + ib$ است که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند. a را جزء حقیقی و b را جزء موهومی $a + ib$ می‌نامیم. دو عدد مختلط $a + ib$ و $c + id$ برابرند، اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$. جمع دو عدد مختلط $a + ib$ و $c + id$ به‌صورت

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

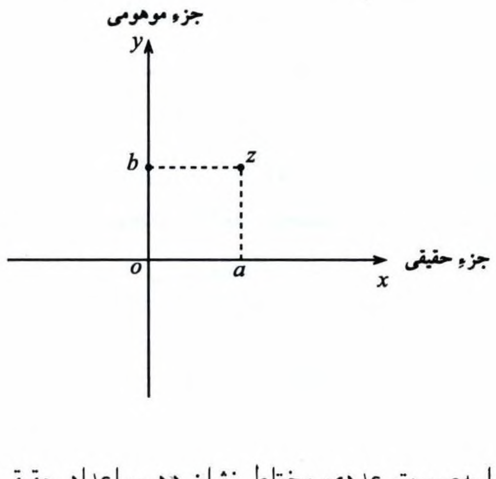
است. پس تعریف جمع خیلی طبیعی است. تعریف ضرب هم تقریباً طبیعی است (پرانتزها را جمله‌به‌جمله در هم ضرب کنید):

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac+iad+ibc+i^{2}bd \\ &= ac+iad+ibc-bd \qquad (i^{2}=-1 \text{ چون}) \\ &= (ac-bd)+i(ad+bc)\end{aligned}$$

توجه کنید که اگر s عددی حقیقی باشد، می‌توان s را به‌صورت $s+i0$ نمایش داد؛ پس مجموعهٔ اعداد حقیقی زیرمجموعهٔ مجموعهٔ اعداد مختلط است. ضمناً به‌سادگی معلوم می‌شود که جمع و ضرب اعداد حقیقی با تعریف جمع و ضرب مختلط، با جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی تفاوتی ندارد؛ پس مجموعهٔ اعداد مختلط واقعاً گسترش مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مجموعهٔ اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم که ابتدای واژهٔ Complex به‌معنای مختلط است.

ویلیام راوئن همیلتون (۱۸۶۵ـ۱۸۰۵)، در سال ۱۸۳۳ اعداد مختلط را به‌صورت زوجهای مرتب از اعداد حقیقی نشان داد؛ یعنی $a+ib$ را به‌صورت زوج مرتب (a,b) نمایش داد. پس می‌توانیم هر عدد مختلط را نقطه‌ای از صفحهٔ مختصات در نظر بگیریم. بنابراین، اگر $z=a+ib$، وقتی می‌گوییم نقطهٔ z، منظورمان مشخص است.



پرسش. اگر هر عدد حقیقی را به‌صورت عددی مختلط نشان دهیم، اعداد حقیقی در کجای دستگاه مختصات قرار می‌گیرند؟

اگر $z=a+ib$، مزدوج عدد z را به‌صورت $a-ib$ تعریف می‌کنیم و با $\overline{z}$ نمایش می‌دهیم.

پرسش. اگر z و $\overline{z}$ را در صفحهٔ مختصات نمایش دهیم، این دو نقطه چه رابطه‌ای با هم دارند؟ اگر r عددی حقیقی باشد، مزدوج r چیست؟

تمرین. فرض کنید w و z دو عدد مختلط باشند. ثابت کنید که $\overline{w+z}=\overline{w}+\overline{z}$ و $\overline{wz}=\overline{w}\,\overline{z}$.

قدر مطلق عدد مختلط $z = a + ib$ را به‌صورت $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف می‌کنیم و با $|z|$ نمایش می‌دهیم. پس $|z|$ فاصلهٔ نقطهٔ z از مبدأ مختصات است.

تمرین. فرض کنید w و z دو عدد مختلط باشند. ثابت کنید $|wz| = |w||z|$.

عدد $۰ + i۰$ را با ۰ و عدد $۱ + i۰$ را با ۱ نمایش می‌دهیم.

ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط را در زیر فهرست کرده‌ایم. جمع و ضرب اعداد حقیقی هم این ویژگیها را دارند.

۱. جمع تعویض‌پذیر است: اگر $z, w \in \mathbb{C}$، آنگاه $z + w = w + z$.

۲. جمع شرکت‌پذیر است: اگر $z, w, v \in \mathbb{C}$، آنگاه $z + (w + v) = (z + w) + v$.

۳. عضو بی‌اثر جمع ۰ است: اگر $z \in \mathbb{C}$، آنگاه $z + ۰ = ۰ + z = z$.

۴. هر عددی قرینهٔ جمعی دارد: اگر $z \in \mathbb{C}$، آنگاه عددی مختلط مانند w وجود دارد که $z + w = w + z = ۰$. w را با $-z$ نشان می‌دهیم و قرینهٔ جمعی z می‌نامیم.

۵. ضرب تعویض‌پذیر است: اگر $z, w \in \mathbb{C}$، آنگاه $zw = wz$.

۶. ضرب شرکت‌پذیر است: اگر $z, w, v \in \mathbb{C}$، آنگاه $z(wv) = (zw)v$.

۷. عضو بی‌اثر ضرب ۱ است: اگر $z \in \mathbb{C}$، آنگاه $z۱ = ۱z = z$.

۸. هر عدد ناصفر وارون ضربی دارد: اگر $z \in \mathbb{C}$ و $z \neq ۰$، آنگاه عددی مختلط مانند w وجود دارد که $zw = wz = ۱$. w را با $z^{-۱}$ نمایش می‌دهیم و وارون ضربی z می‌نامیم.

۹. ضرب نسبت به جمع پخش می‌شود: اگر $z, w, v \in \mathbb{C}$، آنگاه

$$z(w + v) = zw + zv$$
$$(w + v)z = wz + vz$$

تمرین. ویژگی (۴) را ثابت کنید.

تمرین. ویژگی (۸) را ثابت کنید. (راهنمایی: اگر $z \neq ۰$، $z\bar{z}$ را حساب کنید.)

تمرین. A را مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی‌ای بگیرید که می‌توان آنها را به‌صورت مجموع مربعهای دو عدد صحیح نمایش داد. (مثل ۱، زیرا $۱ = ۱^۲ + ۰^۲$، و مثل ۵ زیرا $۵ = ۲^۲ + ۱^۲$.) ثابت کنید اگر $m \in A$ و $n \in A$، آنگاه $mn \in A$.

(راهنمایی: فرض کنید $m = a^۲ + b^۲$ و $n = c^۲ + d^۲$. در این صورت $m = |a + ib|^۲$ و $n = |c + id|^۲$.

اکنون از اینکه $|wz| = |w||z|$ استفاده کنید.)

معادلهٔ $x^۲ + x + ۴ = ۰$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. آیا این معادله در مجموعهٔ اعداد مختلط جواب دارد یا باید دستگاه اعداد مختلط را گسترش دهیم؟ معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ را در نظر بگیرید که در آن a، b و c اعدادی حقیقی‌اند، $a \neq ۰$ و $b^۲ - ۴ac < ۰$. می‌دانیم این معادله در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب ندارد. ثابت می‌کنیم که این معادله در مجموعهٔ اعداد مختلط جواب دارد. فرض کنید $D = ۴ac - b^۲$. در این صورت $D > ۰$. توجه کنید که معادله‌های زیر هم‌ارزند:

$$ax^۲ + bx + c = ۰$$
$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰$$
$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{b^۲}{۴a^۲}\right) + \frac{c}{a} = ۰$$
$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{-c}{a} + \frac{b^۲}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲} = \frac{-D}{۴a^۲}$$

اکنون توجه کنید که $D > ۰$، پس $\sqrt{D}$ عددی حقیقی است. به این ترتیب

$$x + \frac{b}{۲a} = \frac{\pm i\sqrt{D}}{۲a}$$

پس

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{۲a}$$

یعنی اگر ضرایب معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ عددهایی حقیقی باشند، این معادله حتماً جوابهایی مختلط دارد.

معادلات چندجمله‌ای با درجه‌های بالاتر چطور؟ آیا آنها هم در مجموعهٔ عددهای مختلط جواب دارند؟ اگر معادله‌ای چندجمله‌ای با ضرایب مختلط داشته باشیم، آیا در مجموعهٔ عددهای مختلط جواب دارد یا باید مجموعهٔ اعداد مختلط را گسترش دهیم؟ قضیهٔ زیر به این پرسشها جواب می‌دهد:

قضیهٔ اساسی جبر. هر معادله به‌شکل

$$c_n x^n + c_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + c_۱ x + c_۰ = ۰$$

که در آن $c_۰$، $c_۱$، ... و c_n اعدادی مختلط‌اند و $c_n \neq ۰$ و $n \geq ۱$، در مجموعهٔ اعداد مختلط جواب دارد.

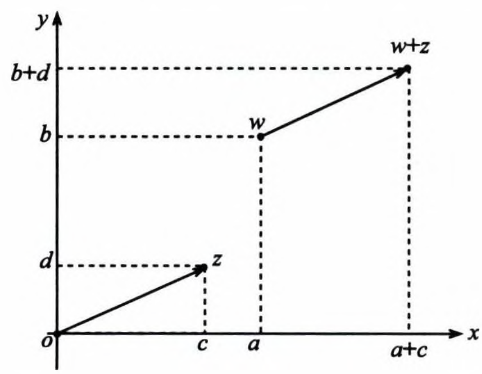
اولین برهان کاملاً قانع‌کنندهٔ قضیهٔ اساسی جبر را گاوس در سال ۱۷۹۹ در رسالهٔ دکترایش ارائه کرده است.

کاربرد جالبی از قضیهٔ اساسی جبر را در انتهای مطلب خواهید دید: طرحی برای اثبات اینکه هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای درجهٔ ۲ و چندجمله‌ایهای درجهٔ ۱ با ضرایب حقیقی نوشت می‌آوریم.

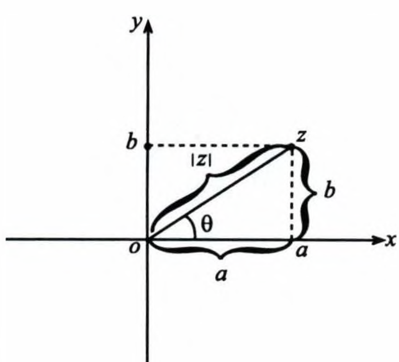
تا اینجای کار حتماً موافق‌اید که اعداد مختلط از نظر جبری بسیار مفیدند. حالا می‌خواهیم ببینیم اعدادی که با هدف حل معادلهٔ $x^۲ = -۱$ ابداع شدند از نظر هندسی چه کاربردی دارند.

به نمایش اعداد مختلط در دستگاه مختصات برمی‌گردیم. فرض کنید $w = a + ib$ و $z = c + id$. در این صورت $w + z = (a + c) + i(b + d)$.

با توجه به شکل زیر، می‌بینید که $w + z$، انتقال‌یافتهٔ z با بردار $\overrightarrow{Ow}$ (و نیز انتقال‌یافتهٔ w با بردار $\overrightarrow{Oz}$) است.



برای بیان مفهوم هندسی ضرب، ابتدا شیوهٔ دیگری برای نمایش اعداد مختلط معرفی می‌کنیم. فرض کنید $z = a + ib$ و $z \neq ۰$. فرض کنید زاویهٔ بین نیمهٔ مثبت محور x و بردار $\overrightarrow{Oz}$ برابر با θ باشد. در این صورت، با توجه به شکل، می‌توان نوشت



$$\sin\theta = \frac{b}{|z|}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

پس

$$b = |z|\sin\theta, \qquad a = |z|\cos\theta$$

بنابراین

$$z = a + ib = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

با فرض $۰^\circ \leq \theta < ۳۶۰^\circ$، θ به‌طور یکتا تعیین می‌شود. θ را با نماد $\arg z$ نمایش می‌دهند و آن را شناسهٔ z می‌نامند.

دلیل اینکه z را مخالف صفر گرفتیم این است که اگر $z = ۰$، θ را می‌توان هر مقدار دلخواهی در نظر گرفت، پس θ به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

نمایش $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ را، وقتی که $z \neq ۰$، نمایش قطبی z می‌نامند.

فرض کنید $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. در این صورت

$$\begin{aligned} wz &= |w||z|(\cos\alpha\cos\theta + i\cos\alpha\sin\theta + i\sin\alpha\cos\theta + i^۲\sin\alpha\sin\theta) \\ &= |w||z|\big((\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) + i(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta)\big) \end{aligned}$$

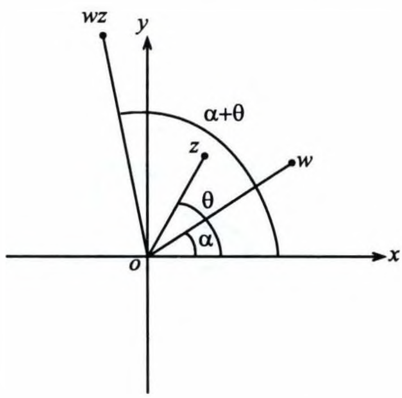
با استفاده از اتحادهای

$$\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta$$

$$\sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta$$

نتیجه می‌گیریم

$$wz = |w||z|\big(\cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)\big)$$



پس زاویه‌ای که نیمهٔ مثبت محور xها با بردار $\overrightarrow{Owz}$ می‌سازد، به‌اندازهٔ $\arg w$ بیشتر از زاویه‌ای است که نیمهٔ مثبت محور x با بردار $\overrightarrow{Oz}$ می‌سازد.

توجه کنید که $۰^\circ \leq \arg w + \arg z < ۷۲۰^\circ$. اگر $۰^\circ \leq \arg w + \arg z < ۳۶۰^\circ$، آنگاه

$$\arg wz = \arg w + \arg z$$

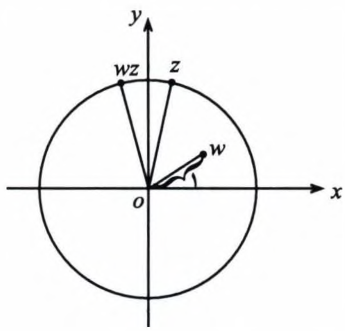
و اگر $۳۶۰^\circ \le \arg w + \arg z < ۷۲۰^\circ$، آنگاه

$$\arg wz = \arg w + \arg z - ۳۶۰^\circ$$

زیرا شناسهٔ هر عدد مختلط، کمتر از ۳۶۰° و بیشتر از یا مساوی با ۰° است.

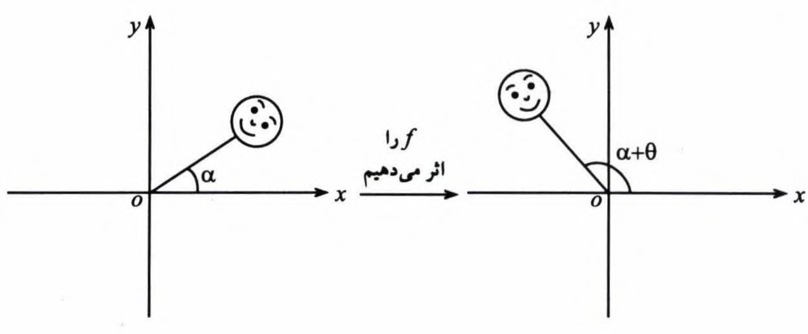
فرض کنید $|w| = ۱$. در این صورت، از $|wz| = |z|$ و آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که wz دوران‌یافتهٔ z به‌اندازهٔ $\arg w$ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات است. پس اگر بخواهیم دوران‌یافتهٔ (a, b) به‌اندازهٔ α در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات را بیابیم، $a + ib$ را در $\cos\alpha + i\sin\alpha$ ضرب می‌کنیم. حاصل، دوران‌یافتهٔ (a, b) به‌اندازهٔ موردنظر است.

از این به بعد، منظورمان از دوران به‌اندازهٔ θ، دوران به‌اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی است.

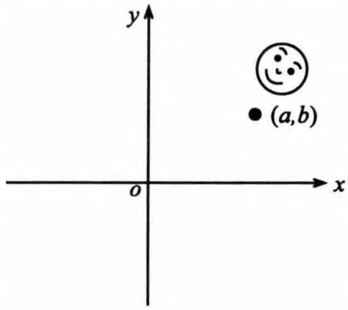


تمرین. باکمک اعداد مختلط و به روشی که ذکر شد، دوران‌یافتهٔ نقطهٔ $(۱, \sqrt{۳})$ به‌اندازهٔ ۶۰° حول مبدأ مختصات را بیابید.

نقطه‌ای را که دوران حول آن صورت می‌گیرد مرکز دوران می‌نامیم. در دوران صفحهٔ مختصات حول مرکز P به‌اندازهٔ θ، همهٔ نقاط، بجز P، به‌اندازهٔ θ حول P دوران می‌یابند و P ثابت می‌ماند. پس اگر بخواهیم صفحهٔ مختصات را به‌اندازهٔ θ حول مبدأ دوران دهیم، فرض می‌کنیم $w = \cos\theta + i\sin\theta$ و تابع $f(z) = wz$ را روی تمام نقاط اثر می‌دهیم. این تابع، هر نقطه را به‌اندازهٔ θ حول O دوران می‌دهد.

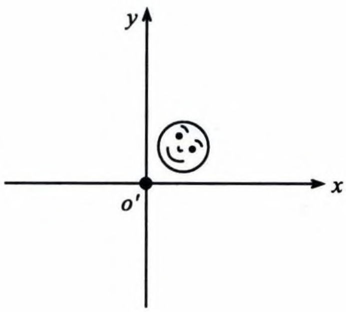


حالا فرض کنید می‌خواهیم صفحهٔ مختصات را حول نقطهٔ (a,b) به‌اندازهٔ θ دوران دهیم.

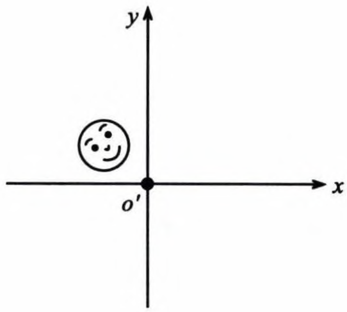


این کار را در سه مرحله انجام می‌دهیم.

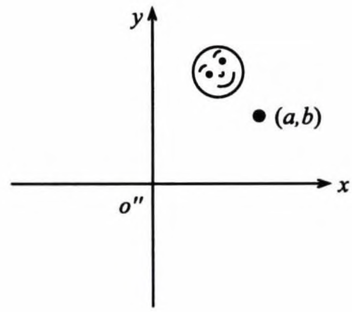
۱. تمام نقاط صفحه را با بردار $\overrightarrow{T_1} = (-a,-b)$ انتقال می‌دهیم. پس نقطهٔ (a,b) به $(0,0)$ منتقل می‌شود.



۲. تمام نقاط را حول $(0,0)$ به‌اندازهٔ θ دوران می‌دهیم.



۳. تمام نقاط را با بردار $\overrightarrow{T_2} = (a,b)$ انتقال می‌دهیم. پس نقطهٔ $(0,0)$ به (a,b) منتقل می‌شود.



نتیجهٔ انجام این سه عمل، دوران صفحهٔ مختصات حول (a, b) به‌اندازهٔ θ است.

با توجه به آنچه دربارهٔ مفهوم هندسی جمع و ضرب گفتیم، می‌توانیم هر یک از مراحل ۱، ۲ و ۳ را با اثر دادن تابعی مناسب بر نقاط صفحه (اعداد مختلط) انجام دهیم.

۱. انتقال با بردار $\overrightarrow{T_۱} = (-a, -b)$: $f_۱(z) = -(a + ib) + z$.

۲. دوران حول O به‌اندازهٔ θ: $f_۲(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z$.

۳. انتقال با بردار $\overrightarrow{T_۲} = (a, b)$: $f_۳(z) = (a + ib) + z$.

ترکیب سه تابع $f_۱$، $f_۲$ و $f_۳$، یعنی $f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱$، تابعی است که نتیجهٔ اثر آن بر z، دوران z حول (a, b) به‌اندازهٔ θ است.

مثال. می‌خواهیم دوران‌یافتهٔ نقطهٔ $(۲, ۲)$ به‌اندازهٔ ۴۵° حول $(۱, ۱)$ را بیابیم. توجه کنید که

$$\begin{aligned} f_۱(۲ + ۲i) &= -(۱ + i) + (۲ + ۲i) = ۱ + i \\ f_۲\big(f_۱(۲ + ۲i)\big) &= f_۲(۱ + i) = (\cos ۴۵^\circ + i \sin ۴۵^\circ)(۱ + i) \\ &= \Big(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}i\Big)(۱ + i) = \sqrt{۲}i \\ f_۳\big(f_۲(f_۱(۲ + ۲i))\big) &= f_۳(\sqrt{۲}i) = (۱ + i) + \sqrt{۲}i = ۱ + (۱ + \sqrt{۲})i \end{aligned}$$

پس نقطهٔ مطلوب، نقطهٔ $(۱, ۱ + \sqrt{۲})$ است.

قضیهٔ زیر دورانها و انتقالهای صفحهٔ مختصات را به‌طور کامل مشخص می‌کند.

قضیه. انتقالها و دورانهای صفحه، توابعی به‌صورت $f(z) = cz + d$ هستند که در آن c و d اعدادی مختلط‌اند و $|c| = ۱$. برعکس، هر تابع به‌صورت $f(z) = cz + d$ که در آن $|c| = ۱$، دوران یا انتقال است.

اثبات. دیدیم که انتقال با بردار $\overrightarrow{T_۲} = (a, b)$ با تابع $f_۳(z) = (a + ib) + z$، و دوران حول O به‌اندازهٔ θ، با تابع $f_۲(z) = (\cos\theta + i\sin\theta)z$ صورت می‌گیرد که هر دو به‌شکل $f(z) = cz + d$ هستند، که در اینجا $|c| = ۱$.

ضمناً دوران حول نقطهٔ (a,b) به‌اندازهٔ θ با تابع $f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱$ صورت می‌گیرد $(f_۱(z) = -(a+ib)+z)$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱$ به‌شکل $f(z) = cz + d$ است، که در آن $|c| = ۱$. پس دورانها و انتقالهای صفحهٔ مختصات به‌شکل موردنظراند.

برعکس، اگر $f(z) = cz + d$ و $|c| = ۱$، ثابت می‌کنیم f دوران یا انتقال است. اگر $c = ۱$، f انتقال است (با چه برداری؟). اگر $c \neq ۱$، نقطه‌ای مثل P می‌یابیم که نتیجهٔ اثر f بر صفحهٔ مختصات دوران صفحهٔ مختصات حول P باشد.

فرض کنید می‌خواهیم صفحهٔ مختصات را حول نقطهٔ e به‌اندازهٔ θ دوران دهیم، که در اینجا $e = e_۱ + ie_۲$ و $\theta = \arg c$. توجه کنید که

$$f_۱(z) = -(e_۱ + ie_۲) + z$$
$$f_۲(z) = cz$$
$$f_۳(z) = (e_۱ + ie_۲) + z$$

پس

$$\begin{aligned} f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱(z) &= f_۳ \circ f_۲\big(-(e_۱ + ie_۲) + z\big) \\ &= f_۳\big(-c(e_۱ + ie_۲) + cz\big) \\ &= (e_۱ + ie_۲)(۱ - c) + cz \end{aligned}$$

اگر قرار باشد به‌ازای هر عدد مختلط مانند z، $f(z)$ و $f_۳ \circ f_۲ \circ f_۱(z)$ برابر باشند، لازم و کافی است که $(e_۱ + ie_۲)(۱ - c) = d$ و $c \neq ۱$، یعنی $۱ - c \neq ۰$. پس $۱ - c$ وارون ضربی دارد.

طرفین تساوی آخر را در $(۱ - c)^{-۱}$ ضرب می‌کنیم. به این ترتیب $e_۱ + ie_۲ = d(۱ - c)^{-۱}$. پس f دورانی حول $(e_۱, e_۲)$ به‌اندازهٔ $\arg c$ است.

اکنون، همان‌طور که قول داده بودیم، طرحی برای اثبات اینکه هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به‌صورت ضرب چندجمله‌ایهایی درجهٔ ۲ و درجهٔ ۱ با ضرایب حقیقی نوشت می‌آوریم.

مرحلهٔ ۱. ثابت کنید اگر $w = a + ib$ و $z = c + id$، آنگاه

$$\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}, \qquad \overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$$

(این حکم، یکی از تمرینهای متن هم هست.)

مرحلهٔ ۲. با استفاده از مرحلهٔ قبل نتیجه بگیرید $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

مرحلهٔ ۳. با استفاده از مرحلهٔ قبل نتیجه بگیرید اگر $z \in \mathbb{C}$ و $a_۰$، ... و a_n اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

$$\overline{a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + \cdots + a_۱ z + a_۰} = a_n \overline{z}^n + a_{n-۱}\overline{z}^{n-۱} + \cdots + a_۱ \overline{z} + a_۰$$

مرحلهٔ ۴. با استفاده از مرحلهٔ قبل نتیجه بگیرید که اگر

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0 \qquad (\text{ها اعدادی حقیقی‌اند } a_i)$$

و z_0 جواب $p(z) = 0$ باشد، آنگاه $\overline{z_0}$ هم جواب $p(z) = 0$ است.

مرحلهٔ ۵. ثابت کنید اگر z عددی مختلط باشد، آنگاه $z + \overline{z}$ عددی حقیقی است.

مرحلهٔ ۶. اگر اثبات حکم زیر را نمی‌دانید، آن را بدون اثبات بپذیرید:

حکم. اگر

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0, \qquad c_n \neq 0 \qquad (\text{ها اعداد مختلط‌اند } c_i)$$

و z_0 جوابی از $p(z) = 0$ باشد، آنگاه چندجمله‌ایی با درجهٔ $n - 1$ با ضرایب مختلط مثل $q(z)$ وجود دارد که

$$p(z) = (z - z_0) q(z)$$

مرحلهٔ ۷. فرض کنید $p(z)$ همان چندجمله‌ای مرحلهٔ ۴ باشد. ثابت کنید n عدد مختلط مانند α_1، ... و α_n وجود دارند که

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$$

(لزومی ندارد α_1، ... و α_n دوبه‌دو نابرابر باشند.)

(راهنمایی: چون $a_n \neq 0$، پس می‌توانیم چندجمله‌ای $p(z)$ را بر a_n تقسیم کنیم و به چندجمله‌ای $p_1(z)$ برسیم که $p_1(z) = \frac{p(z)}{a_n}$ و ضریب z^n در $p_1(z)$ برابر یک است.

بنابر قضیهٔ اساسی جبر، $p_1(z) = 0$ در $\mathbb{C}$ جوابی مثل α_1 دارد. با استفاده از حکمی که در مرحلهٔ ۶ گفتیم، چندجمله‌ایی با درجهٔ $n - 1$ مثل $q_1(z)$ وجود دارد که

$$p_1(z) = (z - \alpha_1) q_1(z)$$

بنابر قضیهٔ اساسی جبر، $q_1(z) = 0$ در $\mathbb{C}$ جوابی مثل α_2 دارد. بنابر حکمی که در مرحلهٔ ۶ گفتیم، چندجمله‌ایی با درجهٔ $n - 2$ مثل $q_2(z)$ وجود دارد که

$$q_1(z) = (z - \alpha_2) q_2(z)$$

پس

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) q_2(z)$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.)

مرحلهٔ ۸. اگر α_i یکی از α_1، ... و α_n باشد و حقیقی نباشد، با استفاده از مرحلهٔ ۴ نتیجه بگیرید jای وجود

دارد که $1 \leq j \leq n$، $j \neq i$ و $\alpha_j = \overline{\alpha_i}$.

مرحلهٔ ۹. ثابت کنید $(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})$ چندجمله‌ایی با ضرایب حقیقی است.
(راهنمایی: از مرحلهٔ ۵ استفاده کنید.)

مرحلهٔ ۱۰. این حکم را نتیجه بگیرید: $p(z)$ به‌صورت ضرب چندجمله‌ایهایی درجهٔ ۲ و درجهٔ ۱ با ضرایب حقیقی تجزیه می‌شود.

منابع

۱. لیانگ-شین هان، اعداد مختلط و هندسه، ترجمهٔ محمد بهفروزی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۶.

۲. هاورد و. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد دوم، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۲.

۳. ریچارد کورانت، هربرت رابینز، ریاضیات چیست؟، ویراست دوم: یان استیوارت، ترجمهٔ سیامک کاظمی، نشر نی، ۱۳۷۹.

4. John Stillwell, *Numbers and Geometry*, Springer-Verlag, 1998.

از باب تفریح

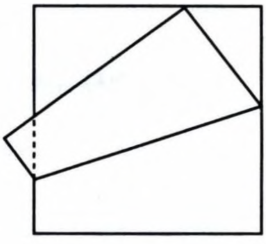
۱. دو عدد را آینه‌ای می‌نامیم که هر یک از آنها از برعکس کردن ترتیب رقمهای دیگری به‌دست بیاید. دو عدد آینه‌ای پیدا کنید که حاصل‌ضربشان برابر با ۹۲۵۶۵ باشد.

۲. صفحهٔ شطرنجی را با ۳۲ دومینو طوری پوشانده‌ایم که هر دومینو دقیقاً دوتا از خانه‌های صفحهٔ شطرنج را پوشانده است. معلوم شده است که تعداد دومینوهایی که افقی قرارگرفته‌اند و تعداد دومینوهایی که عمودی قرار گرفته‌اند عددهایی زوج‌اند. آیا هر طورکه صفحهٔ شطرنج را با این ۳۲ دومینو بپوشانیم همین اتفاق می‌افتد؟

۳. دو نسخه از مجله را مطابق شکل زیر روی هم قرار داده‌ایم. مساحت کدام قسمت از مجلهٔ زیرین بزرگتر است: قسمتی که دیده می‌شود یا قسمتی که دیده نمی‌شود؟

۴. تعدادی نامتناهی زاویه داریم. آیا می‌توانیم صفحه را با ناحیه‌های درون این زاویه‌ها بپوشانیم؟

۵. صفحه‌ای مربعی‌شکل را طوری تا می‌کنیم که یکی از رأسهایش بر نقطه‌ای درونی از یکی از ضلعهایی که این رأس را دربر ندارد قرار بگیرد. به این ترتیب سه مثلث پدید می‌آید. ثابت کنید محیط یکی از این مثلثها با مجموع محیطهای دو مثلث دیگر برابر است.



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۶)

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول آبان ماه ۱۳۸۴ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۴۶. آیا عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $n!$ با ۱۳۸۴ شروع شود؟

۱۴۷. تعداد مقسوم‌علیه‌های همهٔ جمله‌های دنباله‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی برابر است. ثابت کنید زیردنباله‌ای نامتناهی از این دنباله وجود دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عضو آن برابر است.

۱۴۸. S مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی بزرگتر از ۱ است. می‌دانیم که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n عضوی از S مانند s وجود دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک s و n یا ۱ است یا s. ثابت کنید دو عضو از S مانند s و t وجود دارند که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک s و t عددی اول است.

۱۴۹. a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند، $a > b > c > d$ و

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

هر یک از عددهای $ab + cd$، $ac + bd$ و $ad + bc$ دست‌کم چند مقسوم‌علیه اول دارد؟

۱۵۰. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\sum_{m=۱}^{۶n-۱} \min\left(\left\{\frac{m}{۶n}\right\}, \left\{\frac{m}{۳n}\right\}\right) = n$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد حقیقی t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$.)

۱۵۱. a، b، c، x، y و z عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^۲ + b^۲ + c^۲)(x^۲ + y^۲ + z^۲)} \geq \frac{۲}{۳}(a + b + c)(x + y + z)$$

۱۵۲. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\big(x-f(y)\big) = f(x+y^{۱۳۸۴}) + f\big(f(y)+y^{۱۳۸۴}\big) + ۱$$

۱۵۳. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان هر n عدد گنگ، سه عدد وجود داشته باشند که مجموع هر دو تا از آنها عددی گنگ باشد.

۱۵۴. n عددی طبیعی است و $n \geq ۳$. در هر خانهٔ جدولی $n \times n$ عددی صحیح نوشته‌ایم. می‌دانیم که مجموع عددهای نوشته‌شده در هر جدول ۳×۳ و نیز مجموع عددهای نوشته در هر جدول ۵×۵ در جدول اصلی عددی زوج است. همهٔ عددها مانند n را طوری تعیین کنید که مجموع همهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول عددی زوج باشد.

۱۵۵. n عددی طبیعی است و $n \geq ۳$. خانه‌های جدولی $n \times n$ را مانند صفحهٔ شطرنج با رنگهای سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. در هر حرکت می‌توانید جدولی ۲×۲ را از جدول اصلی انتخاب کنید و رنگ هر یک خانهٔ آن را به رنگ مخالف آن درآورید. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که پس از تعدادی متناهی حرکت بتوان همهٔ خانه‌های جدول را به یک رنگ درآورد.

۱۵۶. مختصات رأسهای پنج‌ضلعی‌ای محدب عددهایی صحیح‌اند. ثابت کنید درون یا روی پنج‌ضلعی محدبی که رأسهایش نقطه‌های برخورد قطرهای پنج‌ضلعی اصلی‌اند دست‌کم یک نقطه وجود دارد که مختصاتش عددهایی صحیح‌اند.

۱۵۷. نقطه‌های M و N را به‌ترتیب روی ضلعهای AB و AC مثلث حادهٔ ABC انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ به قطر BN و دایرهٔ به قطر CM یکدیگر را در نقطه‌های P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید نقطه‌های P و Q و محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

۱۵۸. بارون مونهاوزن باغش را با درختهای سیب و گلابی پوشانده است. درضمن، روی هر دایره‌ای به مرکز هر درخت سیب و به شعاع ۱۰ متر دقیقاً ۱۰ درخت گلابی کاشته است. بارون معتقد است که در باغش تعداد درختان سیب از تعداد درختان گلابی بیشتر است. آیا چنین چیزی ممکن است؟

۱۵۹. پاره‌خطهای AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند. نقطه‌های K و M به‌ترتیب روی AB و CD قرار دارند و KM از نقطهٔ E گذشته است. ثابت کنید $KM \leq \max\{AC, BD\}$.

۱۶۰. چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. نقطه‌های E و F به‌ترتیب پای عمودهایی‌اند که از نقطهٔ برخورد قطرهای این چهارضلعی بر AB و CD رسم شده‌اند. ثابت کنید EF بر خطی که از وسطهای AD و BC می‌گذرد عمود است.

راه‌حلها

۱۰۱. الف) n و d عددهای طبیعی‌اند و $۲n^۲$ بر d بخش‌پذیر است. ثابت کنید $n^۲+d$ مربع کامل نیست.

ب) p عددی اول و n عددی طبیعی است. ثابت کنید $pn^۲$ حداکثر یک مقسوم‌علیه غیرصفر مانند d دارد که $n^۲+d$ مربع کامل است.

راه‌حل. الف) چون $۲n^۲$ بر d بخش‌پذیر است، عددی طبیعی مانند k وجود دارد که $۲n^۲=kd$. اگر $n^۲+d$ مربع کامل باشد، $k^۲(n^۲+d)$ هم مربع کامل است. توجه کنید که

$$\begin{aligned} k^۲(n^۲+d) &= k^۲n^۲+k^۲d \\ &= k^۲n^۲+k(۲n^۲) \\ &= n^۲(k^۲+۲k) \\ &= n^۲\big((k+۱)^۲-۱\big) \end{aligned}$$

بنابراین $(k+۱)^۲-۱$ مربع کامل است، که ممکن نیست.

ب) فرض کنید d مقسوم‌علیه $pn^۲$ و $n^۲+d$ مربع کامل باشد. در این صورت عددی طبیعی مانند m وجود دارد که $n^۲+d=m^۲$، پس

$$d=m^۲-n^۲=(m-n)(m+n)$$

فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $m-n$ و $m+n$ برابر با d' باشد. در این صورت عددهایی طبیعی مانند a و b وجود دارند که

$$m-n=ad', \qquad m+n=bd'$$

توجه کنید که $b>a$ و

$$d=abd'^۲, \qquad ۲n=(b-a)d'$$

چون $pn^۲$ بر d بخش‌پذیر است، عددی صحیح مانند k وجود دارد که $pn^۲=kd$. بنابراین

$$p(b-a)^۲d'^۲=۴abd'^۲k$$

و درنتیجه $p(b-a)^۲=۴abk$. پس a و b، $p(b-a)^۲$ را می‌شمارند. اما a و b نسبت به $(b-a)^۲$ اول‌اند. پس a و b، p را می‌شمارند؛ یعنی، $a=۱$ و $b=p$. بنابراین

$$k=\left(\frac{۱}{۲}(p-۱)\right)^۲, \qquad d'=\frac{۲n}{p-۱}$$

و درنتیجه $d=p\left(\frac{۲n}{p-۱}\right)^۲$ (توجه کنید که اگر $p=۲$، حکم را در قسمت (الف) ثابت کرده‌ایم).

۱۰۲. a و b عددهایی صحیح‌اند و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $۲^n a + b$ مربع کامل است. ثابت کنید $a = ۰$.

راه‌حل از آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. فرض کنید $a \neq ۰$. در این صورت a عددی مثبت است، زیرا اگر a عددی منفی باشد، می‌توانیم n را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که $۲^n a + b$ عددی منفی باشد، که چون $۲^n a + b$ مربع کامل است ممکن نیست.

اگر $b = ۰$، بنابر فرض، $۲^{۲n} a$ و $۲^{۲n+۱} a$ هر دو مربع کامل‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آنها، یعنی $۲^{۴n+۱} a^۲$، مربع کامل است، که ممکن نیست، زیرا $۴n + ۱$ عددی فرد است.

بنابر فرض، عددهایی طبیعی مانند A و B وجود دارند که

$$۲^n a + b = A^۲, \qquad ۲^{n+۱} a + b = B^۲$$

بنابراین $۲^{n+۱} a + ۴b = (۲A)^۲$، و درنتیجه

$$(۲A)^۲ - B^۲ = ۳b$$

یا

$$(۲A - B)(۲A + B) = ۳b$$

و چون $b \neq ۰$، پس $۲A > B$ و درنتیجه $۲A - B \geq ۱$. اکنون توجه کنید که می‌توانیم A و B را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که $۲A + B > ۳b$ (می‌توانیم n را به‌دلخواه بزرگ انتخاب کنیم). پس

$$(۲A - B)(۲A + B) > ۳b$$

که ممکن نیست. پس حتماً $a = ۰$.

۱۰۳. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را پیدا کنید که در میان هر n عدد صحیح بتوان ۱۸ عدد پیدا کرد که مجموعشان بر ۱۸ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم کوچکترین مقدار موردنظر برای n، ۳۵ است. برای اینکه مطمئن شویم $n \geq ۳۵$، کافی است مجموعه‌ای ۳۴ عضوی که از ۱۷ صفر و ۱۷ یک تشکیل شده است در نظر بگیریم. ثابت می‌کنیم از میان هر ۳۵ عدد صحیح می‌توان ۱۸ عدد انتخاب کرد که مجموعشان بر ۱۸ بخش‌پذیر باشد. درحقیقت، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، از میان هر $۲n - ۱$ عدد صحیح می‌توان n عدد انتخاب کرد که مجموعشان بر n بخش‌پذیر باشد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۱$، درستی حکم معلوم است. فرض کنید حکم به‌ازای مقدارهای کوچکتر از n درست باشد. اگر n عددی مرکب باشد، مثلاً $n = pq$، می‌توانیم، مادامی که دست‌کم $۲p - ۱$ عدد باقی مانده است، مجموعه‌هایی از p عدد پیدا کنیم که مجموعشان بر p بخش‌پذیر است؛ از این مجموعه‌ها می‌توانیم $۲q - ۱$ تا انتخاب کنیم، که باز هم بنابر فرض استقرا، مجموع q از آنها بر q بخش‌پذیر است.

اکنون فرض کنید n عددی اول باشد. عدد صحیح x وقتی و فقط وقتی بر n بخش‌پذیر است که

$$x^{n-۱} \not\equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } n)$$

بنابراین، اگر حکم درست نباشد،

$$\sum_{\substack{\{a_۱,\ldots,a_n\} \text{ زیرمجموعه‌ای} \\ \text{از عددهای موردنظر است}}} (a_۱+\cdots+a_n)^{n-۱} \equiv \binom{۲n-۱}{n-۱} \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } n)$$

از طرف دیگر، مجموع جمله‌هایی به‌شکل $a_۱^{e_n}\cdots a_n^{e_n}$ که در آن $e_۱+\cdots+e_n \le n-۱$، بر n بخش‌پذیر است، زیرا اگر k تا $(k \le n-۱)$ از e_iها غیرصفر باشند، هر جمله $\binom{۲n-۱-k}{n-k}$ بار تکرار می‌شود و $\binom{۲n-۱-k}{n-k}$ بر n بخش‌پذیر است. به تناقض رسیده‌ایم و بنابراین حکم مسأله در این حالت هم درست است.

۱۰۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که $m^۲+۱$ بر n و $n^۳+۱$ بر $m^۲$ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. فرض کنید عددهای طبیعی m و n ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. توجه کنید که اگر $m=n$، آن‌وقت $m=n=۱$. اگر $n=۱$، آن‌وقت $m=۱$، و اگر $n=۲$، آن‌وقت $m=۱$ یا $m=۳$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر

$$(m,n)=(۱,۱),(۱,۲),(۳,۲)$$

m و n ویژگیهای موردنظر را دارند.

اکنون فرض کنید $m \ne n$ و $n > ۲$. توجه کنید که چون $\frac{m^۲+۱}{n}$ و $\frac{n^۳+۱}{m^۲}$ عددهایی طبیعی‌اند، حاصل‌ضربشان هم عددی طبیعی است و چون

$$\frac{m^۲+۱}{n} \times \frac{n^۳+۱}{m^۲} = n^۲ + \frac{m^۲+n^۳+۱}{m^۲n}$$

پس $\frac{m^۲+n^۳+۱}{m^۲n}$ عددی طبیعی است. بنابراین $m^۲+n^۳+۱ \ge m^۲n$. درنتیجه

$$m^۲(n-۱) \le n^۳+۱$$

و

$$m^۲ \le \frac{n^۳+۱}{n-۱} = n^۲+n+۱+\frac{۲}{n-۱} \le n^۲+n+۱+۱ < (n+۱)^۲$$

پس $m < n+۱$. درنتیجه، چون $m \ne n$، $m < n$. چون $m^۲+۱$ بر n بخش‌پذیر است، عددی طبیعی مانند $n_۱$ وجود دارد که $m^۲+۱ = n_۱n$. فرض کنید $m > ۱$. اگر $n_۱ \ge m$، آن‌وقت

$$n_۱n \ge m(m+۱) = m^۲+m > m^۲+۱$$

که درست نیست. بنابراین $m > n_1$. توجه کنید که $m^2 + 1$ بر n_1 بخش‌پذیر است. از طرف دیگر،

$$n^3 + 1 = \frac{(m^2+1)^3}{n_1^3} + 1 = \frac{(m^2+1)^3 + n_1^3}{n_1^3}$$

و چون $n^3 + 1$ بر m^2 بخش‌پذیر است، پس $(m^2+1)^3 + n_1^3$ و درنتیجه $n_1^3 + 1$ بر m^2 بخش‌پذیر است. اکنون اگر $n_1 > 2$، مانند قبل می‌توانیم ثابت کنیم که $m < n_1$، که درست نیست. بنابراین $n_1 \leq 2$.

- فرض کنید $n_1 = 1$. در این صورت $m = 1$ و $n = 2$.
- فرض کنید $n_1 = 2$. در این صورت $m = 1$ یا $m = 3$. اگر $m = 1$، آن‌وقت $n = 1$. اگر $m = 3$، آن‌وقت $n = 5$.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $(m, n) = (3, 5)$، آن‌وقت عددهای m و n ویژگیهای موردنظر را دارند.

۱۰۵. دستگاه معادله‌های

$$\lfloor\sqrt{y-1}\rfloor^2 = x - 1$$
$$2\left\lfloor\sqrt{y + 2\sqrt{x}}\right\rfloor = y - 1$$

را در مجموعهٔ عددهای حقیقی حل کنید.

راه‌حل از آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. فرض کنید عددهای حقیقی x و y در دستگاه معادله‌های موردنظر صدق می‌کنند. توجه کنید که از معادله‌های اول و دوم به‌ترتیب نتیجه می‌شود $x - 1$ و $y - 1$ عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. همچنین از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود $y \geq 1$. فرض کنید

$$m^2 \leq y - 1 < (m+1)^2, \qquad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

در این صورت عددی صحیح مانند r وجود دارد که

$$y - 1 = m^2 + r, \qquad 0 \leq r < 2m + 1$$

توجه کنید که از معادلهٔ اول دستگاه موردنظر نتیجه می‌شود $x = m^2 + 1$. به این ترتیب می‌توان معادلهٔ دوم را به‌شکل

$$2\left\lfloor\sqrt{m^2 + r + 1 + 2\sqrt{m^2+1}}\right\rfloor = m^2 + r$$

نوشت.

از طرف دیگر، اگر m مخالف صفر باشد،

$$m < \sqrt{m^2+1} < m+1$$

پس

$$m^2+2m+1+r < m^2+r+1+2\sqrt{m^2+1} < m^2+2m+3+r$$

درنتیجه، چون $r < 2m+1$،

$$(m+1)^2+r < m^2+r+1+2\sqrt{m^2+1} < m^2+4m+4$$

بنابراین

$$m+1 < \sqrt{m^2+r+1+2\sqrt{m^2+1}} < m+2$$

و درنتیجه

$$2\left\lfloor\sqrt{m^2+r+1+2\sqrt{m^2+1}}\right\rfloor = 2m+2$$

به این ترتیب $2m+2 = m^2+r$ یا $(m-1)^2 = 3-r$. پس $(m-1)^2 \le 3$.

- فرض کنید $(m-1)^2 = 0$. در این صورت $m = 1$. پس $r = 3$، که با توجه به شرط $r < 2m+1$، ممکن نیست.

- فرض کنید $(m-1)^2 = 1$. در این صورت $m = 2$ (فرض کرده‌ایم $m \neq 0$). پس $r = 2$، $x = 5$ و $y = 7$.

اگر $m = 0$، آن‌وقت $x = 1$ و $y = 1$، که این مقدارهای x و y در دستگاه معادله‌های موردنظر صدق نمی‌کنند.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر $(x, y) = (5, 7)$، عددهای x و y در دستگاه معادله‌های موردنظر صدق می‌کنند.

۱۰۶. a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت‌اند $(n > 3)$ و $a_1a_2\cdots a_n = 1$. ثابت کنید

$$\frac{1}{1+a_1+a_1a_2}+\frac{1}{1+a_2+a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{1+a_n+a_na_1} > 1$$

راه‌حل. چون $a_1a_2\cdots a_n = 1$، عددهایی مثبت مانند x_1، x_2، ... و x_n وجود دارند که

$$a_1 = \frac{x_2}{x_1},\qquad a_2 = \frac{x_3}{x_2},\ldots,\qquad a_n = \frac{x_1}{x_n}$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{1}{1+a_1+a_1a_2}=\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}>\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{1+a_n+a_na_1}=\frac{x_n}{x_n+x_1+x_2}>\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

۱۰۷. a، b و c عددهایی مثبت‌اند. ثابت کنید

$$3+a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{1+abc}$$

راه‌حل از آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. اگر دو طرف نابرابری موردنظر را در $1+abc$ ضرب کنیم، پس از ساده‌کردن، معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم

$$a^2bc+ab^2c+abc^2+a^2c+ab^2+bc^2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$\geq 2ab+2bc+2ca+2a+2b+2c$$

اکنون توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$a^2bc+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{a^2bc\frac{b}{c}}=2ab$$
$$ab^2c+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{ab^2c\frac{c}{a}}=2bc$$
$$abc^2+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{abc^2\frac{a}{b}}=2ca$$
$$a^2c+\frac{1}{c}\geq 2\sqrt{a^2c\frac{1}{c}}=2a$$
$$ab^2+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{ab^2\frac{1}{a}}=2b$$
$$bc^2+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{bc^2\frac{1}{b}}=2c$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. توجه کنید که

$$(۱+a)+\frac{۱}{b}+\frac{a}{b}=(۱+a)\Big(۱+\frac{۱}{b}\Big)=\frac{(۱+a)(۱+b)}{b}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$(۱+b)+\frac{۱}{c}+\frac{b}{c}=\frac{(۱+b)(۱+c)}{c},\qquad (۱+c)+\frac{۱}{a}+\frac{c}{a}=\frac{(۱+c)(۱+a)}{a}$$

بنابراین نابرابری موردنظر را می‌توان به‌شکل

$$\frac{۱}{a(۱+b)}+\frac{۱}{b(۱+c)}+\frac{۱}{c(۱+a)}\geq\frac{۳}{۱+abc}$$

نوشت. اگر به دو طرف این نابرابری $\frac{۳}{۱+abc}$ را اضافه کنیم معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم

$$\frac{۱}{a(۱+b)}+\frac{۱}{b(۱+c)}+\frac{۱}{c(۱+a)}+\frac{۳}{۱+abc}\geq\frac{۶}{۱+abc}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{۱}{a(۱+b)}+\frac{۱}{۱+abc}&=\frac{۱+a+ab+abc}{a(۱+b)(۱+abc)}\\&=\frac{۱}{۱+abc}\Big(\frac{۱+a}{a(۱+b)}+\frac{b(۱+c)}{۱+b}\Big)\end{aligned}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b(۱+c)}+\frac{۱}{۱+abc}&=\frac{۱}{۱+abc}\Big(\frac{۱+b}{b(۱+c)}+\frac{c(۱+a)}{۱+c}\Big)\\\frac{۱}{c(۱+a)}+\frac{۱}{۱+abc}&=\frac{۱}{۱+abc}\Big(\frac{۱+c}{c(۱+a)}+\frac{a(۱+b)}{۱+a}\Big)\end{aligned}$$

اکنون اگر فرض کنیم

$$x=\frac{۱+a}{a(۱+a)},\qquad y=\frac{۱+b}{b(۱+c)},\qquad z=\frac{۱+c}{c(۱+a)}$$

سمت چپ نابرابری موردنظر را می‌توان به‌شکل

$$\frac{۱}{۱+abc}\Big(x+\frac{۱}{y}+y+\frac{۱}{z}+z+\frac{۱}{x}\Big)$$

نوشت. اکنون اگر از نابرابری میانگین حسابی_میانگین هندسی استفاده کنیم معلوم می‌شود

$$x+\frac{۱}{y}+y+\frac{۱}{z}+z+\frac{۱}{x}\geq ۶$$

پس نابرابری موردنظر درست است.

۱۰۸. a، b و c عددهایی طبیعی‌اند و $b > ۲a$ و $c > ۲b$. ثابت کنید عددی حقیقی مانند λ وجود دارد که

$$\frac{۱}{۳}<\{\lambda a\}\leq\frac{۲}{۳},\qquad \frac{۱}{۳}<\{\lambda b\}\leq\frac{۲}{۳},\qquad \frac{۱}{۳}<\{\lambda c\}\leq\frac{۲}{۳}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد حقیقی t است، یعنی $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$.)

راه‌حل. اینکه $\frac{۱}{۳}<\{\lambda a\}\leq\frac{۲}{۳}$، معادل این است که عددی صحیح مانند k وجود داشته باشد که $k+\frac{۱}{۳}<\{\lambda a\}\leq k+\frac{۲}{۳}$، و این هم معادل این است که λ به اجتماع بازه‌های

$$I_k=\left(\frac{k+\frac{۱}{۳}}{a},\frac{k+\frac{۲}{۳}}{a}\right],\qquad k\in\mathbb{Z}$$

تعلق داشته باشد. به همین ترتیب معلوم می‌شود که λ باید به اجتماع بازه‌های

$$J_m=\left(\frac{m+\frac{۱}{۳}}{b},\frac{m+\frac{۲}{۳}}{b}\right],\qquad m\in\mathbb{Z}$$

و نیز اجتماع بازه‌های

$$K_n=\left(\frac{n+\frac{۱}{۳}}{c},\frac{n+\frac{۲}{۳}}{c}\right],\qquad n\in\mathbb{Z}$$

تعلق داشته باشد. چیزی که باید ثابت کنیم این است که به‌ازای عددهایی صحیح مانند k، m و n اشتراک $I_k\cap J_m\cap K_n$ ناتهی است. برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم که عددهایی صحیح مانند k و m وجود دارند که J_m شامل I_k است؛ یعنی، ثابت می‌کنیم که عددهایی صحیح مانند k و m وجود دارند که

$$\frac{k+\frac{۱}{۳}}{a}\leq\frac{m+\frac{۱}{۳}}{b},\qquad \frac{m+\frac{۲}{۳}}{b}\leq\frac{k+\frac{۲}{۳}}{a}$$

اگر $m\geq ۰$، این نابرابریها با نابرابریهای

$$\frac{۳k+۱}{۳m+۱}\leq\frac{a}{b}\leq\frac{۳k+۲}{۳m+۲}\tag{*}$$

معادل‌اند. توجه کنید که $\frac{a}{b}$ عددی در بازهٔ $(0, \frac{1}{2})$ است؛ بنابراین می‌توانیم عددهایی صحیح و نامنفی مانند k و m پیدا کنیم که در نابرابریهای $(*)$ صدق می‌کنند. برای این منظور $(0, \frac{1}{2})$ را به‌شکل

$$\cdots \cup \left[\frac{1}{25}, \frac{2}{26}\right] \cup \left[\frac{1}{13}, \frac{2}{14}\right] \cup \left[\frac{1}{7}, \frac{2}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right]$$
$$\cup \left[\frac{4}{10}, \frac{5}{11}\right] \cup \left[\frac{10}{22}, \frac{11}{23}\right] \cup \left[\frac{22}{46}, \frac{23}{46}\right] \cup \cdots \qquad (**)$$

بنویسید. دو سر هر یک از این بازه‌ها یکی از کسرهایی است که در $(*)$ آمده‌اند: برای بازه‌هایی که سمت چپ $[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}]$ قرار دارند فرض می‌کنیم $k = 0$ و $m = 2^j$ $(j = 0, 1, \ldots)$؛ برای بازه‌هایی که سمت راست $[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}]$ قرار دارند فرض می‌کنیم $k = 2^j - 1$ و $m = 2^{j+1} - 1$ $(j = 0, 1, \ldots)$.

عدد $\frac{a}{b}$ در یکی از بازه‌هایی است که در $(**)$ آمده‌اند.

اکنون توجه کنید که K_nها به فاصله‌های $\frac{2}{3c}$ پراکنده شده‌اند که (چون $c > 2b$) از طول هر یک از J_mها (که برابر است با $\frac{1}{3b}$) کمتر است. بنابراین هر بازه مانند J_m با بازه‌ای مانند K_n اشتراک دارد. درنتیجه، بنابر آنچه ثابت کردیم، عددهایی صحیح مانند k، m و n وجود دارند که $I_k \cap J_m \cap K_n$ ناتهی است، همان‌چیزی که می‌خواهیم.

۱۰۹. در هر یک از خانه‌های جدولی $m \times n$، که در آن $m \geq 2$ و $n \geq 2$، یکی از عددهای -1 و 1 را نوشته‌ایم، به طوری که از هر یک از این عددها دست‌کم دو بار استفاده کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان دو سطر و دو ستون از این جدول را طوری انتخاب کرد که مجموع چهار عدد نوشته شده در خانه‌های مشترکشان برابر با صفر باشد.

راه‌حل از آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. فرض کنید حکم مسأله درست نباشد. ابتدا فرض کنید هیچ ستونی وجود ندارد که در آن هم ۱ نوشته شده باشد هم -1. در این صورت عددهای نوشته شده در هر ستون یا همگی ۱اند یا همگی -1. چون در جدول هم ۱ نوشته شده است هم -1، پس دو ستون وجود دارند که در یکی از آنها فقط ۱ نوشته شده است و در دیگری فقط -1. اکنون کافی است این دو ستون و نیز دو سطر دلخواه را در نظر بگیرید؛ مجموع عددهای نوشته‌شده در خانه‌های مشترکشان برابر با صفر است.

اکنون فرض کنید ستونی وجود دارد که در یکی از خانه‌هایش ۱ نوشته شده است و در یکی دیگر از خانه‌هایش -1. فرض کنید این ستون، ستون iام باشد. سطرهای متناظر با این دو خانه را در نظر بگیرید. فرض کنید این سطرها، سطرهای sام و tام باشند. خانه‌های مشترک میان این دو سطر و ستونی دلخواه، مثلاً ستون jام، را در نظر بگیرید. اگر در یکی از این خانه‌ها ۱ و در دیگری -1 نوشته شده باشد، دو سطر و دو ستون داریم که مجموع عددهای نوشته‌شده در خانه‌های مشترکشان برابر با صفر است. فرض کنید عددهای نوشته‌شده در این خانه‌ها هر دو ۱ یا هر دو -1 باشند. بنابر تقارن می‌توانیم فرض کنیم در هر دو این خانه‌ها

۱ نوشته شده است. اکنون خانه‌های برخورد ستونی دیگر با سطرهای sام و tام را در نظر بگیرید. مانند آنچه قبلاً گفتیم، می‌توانیم فرض کنیم در هر دو این خانه‌ها یا ۱ نوشته شده است یا ۱ −. اگر در هر دو این خانه‌ها ۱ − نوشته شده باشد، با انتخاب این ستون و ستون jام و نیزسطرهای sام و tام معلوم می‌شود که حکم مسأله درست است. اگر به همین ترتیب استدلال کنیم معلوم می‌شود که می‌توانیم فرض کنیم همهٔ عددهای نوشته‌شده در خانه‌های سطرهای sام و tام، بجز عدد نوشته‌شده در مثلاً خانهٔ (i, t)، ۱ هستند. به همین ترتیب معلوم می‌شود که همهٔ عددهای نوشته‌شده در خانه‌های ستونهای iام و jام، بجز عدد نوشته در خانهٔ (i, t)، ۱ هستند. اکنون به‌ازای هر خانهٔ جدول، خانه‌های مشترک میان سطر و ستون نظیر این خانه و سطر tام و ستون iام را در نظر می‌گیریم، اگر عددی که در این خانه نوشته شده ۱− باشد، حکم مسأله درست است، پس در این خانه ۱ نوشته شده است. یعنی در همهٔ خانه‌های جدول، بجز خانهٔ (i, t)، ۱ نوشته شده است، که با فرض مسأله تناقض دارد. بنابراین حکم مسأله درست است.

۱۱۰. هر یک از خانه‌های جدولی ۵۰ × ۵۰ را با یکی از چهار رنگی که در اختیار داریم رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید خانه‌ای وجود دارد که در بالا، پایین، سمت چپ و سمت راست آن، خانه‌هایی همرنگ با آن وجود دارند (لازم نیست این خانه‌ها مجاور خانهٔ موردنظر باشند).

راه‌حل از آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. توجه کنید که در هر سطر رنگی وجود دارد که حداقل در $\lceil \frac{۵۰}{۴} \rceil$ خانه، یعنی در ۱۳ خانه، ظاهر می‌شود. این رنگ را رنگ اصلی این سطر در نظر می‌گیریم. همچنین، دست‌کم $\lceil \frac{۵۰}{۴} \rceil$ سطر، یعنی ۱۳ سطر، وجود دارند که رنگ اصلی آنها یکسان است؛ این رنگ را رنگ شمارهٔ ۱ می‌نامیم. اکنون جدول ۵۰ × ۱۳ای را در نظر می‌گیریم که رنگ اصلی همهٔ سطرهای آن رنگ شمارهٔ ۱ است. در هر سطر اولین و آخرین خانه‌ای را که به رنگ شمارهٔ ۱ است در نظر نگیرید. در این صورت در هر سطر دست‌کم ۱۱ خانه به رنگ شمارهٔ ۱ وجود دارد. پس در جدول ۵۰ × ۱۳ موردنظر دست‌کم ۱۳ × ۱۱ خانه، یعنی ۱۴۳ خانه، به رنگ شمارهٔ ۱ وجود دارد. بنابراین ستونی وجود دارد که در آن دست‌کم $\lceil \frac{۱۴۳}{۵۰} \rceil$ خانه، یعنی ۳ خانه، به رنگ شمارهٔ ۱ وجود دارد. اکنون در این ستون، خانهٔ میانی از این سه خانه را در نظر بگیرید. معلوم است که در بالا و پایین آن خانه‌ای به رنگ شمارهٔ ۱ وجود دارد. همچنین، در سطری که این خانهٔ میانی قرار دارد، اولین و آخرین خانه‌های به رنگ شمارهٔ ۱ را که در نظر نگرفتیم در سمت چپ و سمت راست این خانهٔ میانی قرار دارند.

۱۱۱. از میان هر سه عضو مجموعه‌ای متناهی از عددهای حقیقی می‌توان دو عدد انتخاب کرد که مجموعشان هم عضوی از این مجموعه باشد. تعداد عضوهای این مجموعه حداکثر چندتاست؟

راه‌حل. ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ موردنظر حداکثر ۷ عضو دارد. فرض کنید که مجموعهٔ موردنظر دست‌کم سه عضو مثبت داشته باشد و b و c دو عضو بزرگتر آن باشند و $b < c$. اگر a عضو مثبت دیگری باشد، یکی

از عددهای $a+b$، $a+c$ و $b+c$ باید عضو مجموعهٔ موردنظر باشد. چون $a+c$ و $b+c$ از c بزرگترند، پس $a+b$ عضو مجموعهٔ موردنظر است، و چون $a+b>b$، پس $a+b=c$ و درنتیجه $a=b-c$. یعنی مجموعهٔ موردنظر حداکثر یک عضو مثبت دیگر بجز b و c دارد. بنابراین مجموعهٔ موردنظر حداکثر سه عضو مثبت دارد. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ موردنظر حداکثر سه عضو منفی دارد. ممکن است صفر هم عضو مجموعهٔ موردنظر باشد. بنابراین این مجموعه حداکثر ۷ عضو دارد.

مجموعهٔ $\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ هفت عضو دارد و ویژگیهای موردنظر را هم دارد.

۱۱۲. در مثلث ABC، $AC=BC$. فرض کنید P نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد که $\angle PAB=\angle PBC$ و M وسط AB باشد. ثابت کنید $\angle APM+\angle BPC=۱۸۰^\circ$.

راه‌حل. AP را از سمت P تا نقطهٔ D طوری امتداد دهید که $CD \parallel AB$. فرض کنید $\angle CAP=x$ و $\angle PAB=y$. در این صورت

$$\angle ABP=x, \qquad \angle PBC=\angle PDC=\angle ADC=y$$

بنابراین چهارضلعی $CPBD$ محاطی است. درنتیجه

$$\angle BPC+\angle CDB=۱۸۰^\circ \qquad (*)$$

و

$$\angle DCB=\angle DPB=\angle BAP+\angle ABP=x+y \qquad (**)$$

بنابر $(*)$ کافی است ثابت کنیم $\angle CDB=\angle APM$.

PM را از سمت M تا نقطهٔ Q طوری امتداد دهید که $PM=MQ$. در این صورت چهارضلعی $APBQ$ متوازی‌اضلاع است. بنابراین

$$\angle BAQ=\angle ABP=x$$

و (بنابر $(**)$)

$$\angle PAB=\angle BAP+\angle BAQ=x+y=\angle DCB$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم مثلثهای APQ و CDB متشابه‌اند، یعنی

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{CD}{CB}$$

که چون $APBQ$ متوازی‌الاضلاع است کافی است ثابت کنیم

$$\frac{AP}{PB}=\frac{CD}{CB}$$

توجه کنید که

$$\angle PAB = y = \angle ADC, \qquad \angle ABP = x = \angle CAP = \angle CAD$$

پس مثلثهای ABP و DAC متشابه‌اند. بنابراین

$$\frac{AP}{BP} = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{BC}$$

همان چیزی که می‌خواهیم.

راه‌حل رسیده: آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران.

۱۱۳. خطهای l_1 و l_2 مماسهای مشترک خارجی دو دایرهٔ C_1 و C_2اند. خط l_1 بر دایره‌های C_1 و C_2 به‌ترتیب در نقطه‌های A و B مماس است و خط l_2 بر دایره‌های C_1 و C_2 به‌ترتیب در نقطه‌های C و D مماس است. M وسط پاره‌خط AB است و P و Q به‌ترتیب نقطه‌های برخورد دوم MC و MD با C_1 و C_2اند. ثابت کنید نقطه‌های A، B، P و Q روی یک دایره قرار دارند.

راه‌حل از آرمین جم، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران و صالح حیدریان، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. ابتدا فرض کنید دو دایره برابر نباشند. چون M وسط AB است، پس روی محور اصلی دایره‌های C_1 و C_2 قرار دارد. بنابراین

$$MP \times MC = MQ \times MD$$

یعنی نقطه‌های P، C، D و Q روی یک دایره قرار دارند. فرض کنید S نقطهٔ برخورد l_1 و l_2 باشد. ثابت می‌کنیم S، P و Q روی یک خط راست قرار دارند. فرض کنید این حکم درست نباشد. فرض کنید SP دایرهٔ C_2 را در نقطهٔ Q' و دایرهٔ C_1 را در نقطهٔ N قطع کند. در این صورت $SN \times SP = SC^2$. بنابراین اگر نسبت تجانس دایره‌های C_1 و C_2 برابر با k باشد،

$$k \times SN \times SP = k \times SC \times SC$$

درنتیجه $SQ' \times SP = SD \times SC$. پس نقطه‌های P، Q'، D و C روی یک دایره قرار دارند. یعنی از نقطه‌های P، Q و Q' دو دایره می‌گذرد که ممکن نیست. بنابراین Q' بر Q منطبق است. یعنی S، P و Q روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین

$$SP \times SQ = SC \times SD = SA \times SB$$

یعنی نقطه‌های A، B، P و Q روی یک دایره قرار دارند.

اگر دو دایره برابر باشند، $ABQP$ ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است و درنتیجه نقطه‌های A، B، P و Q روی یک دایره قرار دارند.

۱۱۴. نقطهٔ O درون شش‌ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ طوری قرارگرفته است که همهٔ ضلعهای این شش‌ضلعی از نقطهٔ O تحت زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شوند و درضمن

$$OA_۱ > OA_۳ > OA_۵, \qquad OA_۲ > OA_۴ > OA_۶$$

ثابت کنید

$$A_۱A_۲ + A_۳A_۴ + A_۵A_۶ < A_۲A_۳ + A_۴A_۵ + A_۶A_۱$$

راه‌حل. زاویهٔ XYZ را به‌اندازهٔ ۶۰° رسم کنید و نقطه‌های $X_۱$، $X_۳$ و $X_۵$ را روی ضلع YX و نقطه‌های $Z_۲$، $Z_۴$ و $Z_۶$ را روی ضلع YZ طوری انتخاب کنید که

$$YX_i = OA_i, \quad i = ۱, ۳, ۵$$
$$YZ_j = OA_j, \quad j = ۲, ۴, ۶$$

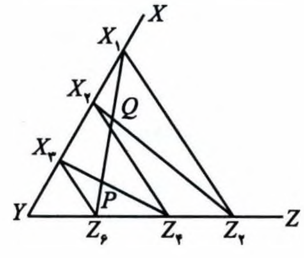
در این صورت نابرابری موردنظر را می‌توان به‌شکل

$$X_۱Z_۲ + X_۳Z_۴ + X_۵Z_۶ < X_۳Z_۲ + X_۵Z_۴ + X_۱Z_۶$$

نوشت. توجه کنید که (شکل زیر را ببینید)

$$X_۱Z_۲ < X_۱Q + QZ_۲$$
$$X_۳Z_۴ < X_۳Q + QP + PZ_۴$$
$$X_۵Z_۶ < X_۵P + PZ_۶$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم نابرابری موردنظر به‌دست می‌آید.



۱۱۵. نقطهٔ D درون مثلث ABC قرار دارد و عددهایی حقیقی مانند a، b، c و d وجود دارند که

$$AB = ab,\ AC = ac,\ AD = ad,\ BC = bc,\ BD = bd,\ CD = cd$$

ثابت کنید $\angle ABD + \angle ACD = ۶۰^\circ$.

راه‌حل از صالح حیدریان، دبیرستان علامهٔ طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران. از انعکاس نسبت به نقطهٔ D و با ضریب $abcd$ استفاده می‌کنیم. در این صورت نقطهٔ A به نقطه‌ای مانند A می‌رود، به‌طوری که

$$DA \times DA' = abcd$$

درنتیجه، چون $AD = ad$، $DA' = bc$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر B و C به نقطه‌های B' و C' بروند، $DB' = ac$ و $DC' = ab$. بنابر ویژگی انعکاس،

$$A'B' = \frac{abcd \times AB}{DA \times DB} = \frac{abcd \times ab}{ad \times bd} = \frac{abc}{d}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$B'C' = A'C' = \frac{abc}{d}$$

یعنی مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

از تشابه مثلثهای ABD و $A'B'D$ نتیجه می‌شود $\angle ABD = \angle DA'B'$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\angle DCA = \angle DA'C'$. بنابراین

$$\angle ABD + \angle DCA = \angle DA'B' + \angle DA'C' = \angle B'A'C' = ۶۰^\circ$$

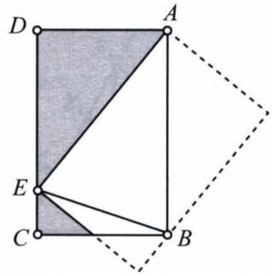
راه‌حلها

از باب تفریح

۱. این دو عدد ۵۶۱ و ۱۶۵اند. معلوم است که عددهای موردنظر باید سه‌رقمی باشند. فرض کنید یکی از آنها abc و دیگری cba باشد. چون $a \times c$ به ۵ ختم می‌شود، یکی از عددهای a و c باید ۵ باشد. فرض کنید $a = ۵$. چون $۲۰۰ > ۵۰۰ \div ۹۲۵۶۵$، پس $c = ۱$. برای پیدا کردن b توجه کنید که ۶، رقم آخر $b + b \times ۵$ یا $۶b$ است. بنابراین یا $b = ۱$ یا $b = ۶$. اگر این دو مقدار را آزمایش کنیم معلوم می‌شود که جوابها همانهایی هستند که گفتیم.

۲. ۳۲ خانه‌ای را که در سطرهای افقی ردیف فرد (یعنی ردیفهای اول، سوم، پنجم و هفتم) قرار دارند در نظر بگیرید. هر دومینویی که افقی قرارگرفته، یا دو تا از این خانه‌ها را پوشانده یا هیچ‌یک از آنها را نپوشانده است و هر دومینویی که عمودی قرارگرفته دقیقاً یکی از این خانه‌ها را پوشانده است. بنابراین، اگر دومینوهای افقی n تا از این خانه‌ها را بپوشانند، n عددی زوج است و تعداد خانه‌های باقی‌مانده از آنها، که برابر با $۳۲ - n$ است، هم عددی زوج است. اما این تعداد برابر با تعداد دومینوهای عمودی است. بنابراین پاسخ سؤال مسأله مثبت است.

۳. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

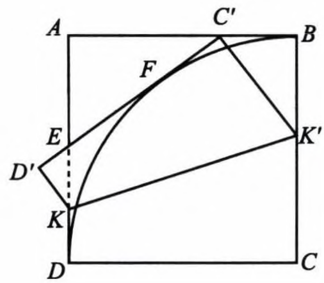


معلوم است که مساحت مثلث ABE برابر با نصف مساحت مستطیل $ABCD$ است. پس مساحت قسمتی که دیده نمی‌شود بزرگتر است.

۴. بله، می‌توانیم. صفحه را با ناحیه‌های درون دایره‌های هم‌مرکزی که شعاعهایشان ۱، ۲، ... است بپوشانید.

اکنون توجه کنید که هر دایره را (هرچقدر هم که بزرگ باشد) می‌توان درون هر زاویه‌ای (هرچقدر هم که کوچک باشد) طوری قرار داد که ضلعهای زاویه بر دایره مماس باشند.

۵. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



ثابت می‌کنیم محیط مثلث AEC' برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای $KD'E$ و $K'C'B$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که $D'C'$ بر دایرهٔ به مرکز نقطهٔ C و شعاع ضلع مربع مماس است. توجه کنید که

$$DA = D'C' = D'E + EF + FC' = D'E + ED + FC'$$
$$= D'E + EK + KD + BC' = D'E + EK + KD' + BC'$$

اکنون اگر به دو طرف این تساوی BC را اضافه کنیم، چون BC برابر با $BK + K'C'$ است، معلوم می‌شود که مجموع محیطهای مثلثهای $KD'E$ و $K'C'B$ برابر است با نصف محیط مربع. از طرف دیگر،

$$DA + AB = DE + EA + AC' + C'B$$
$$= EF + EA + AC' + FC' = EC' + EA + AC'$$

پس محیط مثلث AEC' هم برابر با نصف محیط مربع است. یعنی محیط مثلث AEC' برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای $KD'E$ و $K'C'B$.

تئوری ریاضی موسیقی

پیام سراجی، امیرحسین دامادی

قسمت چهارم

سازگاری

حال ابتدا نوعی سازگاری بین نحوهٔ نامگذاری درجات گام و ساختار درونی گام بیان می‌کنیم و سپس سازگاری بین نسبتهای ارائه‌شده برای کرن ( ) و سری ( ) و ساختارگام را بررسی خواهیم کرد. گام ماژور_Do را در نظر بگیرید:

ماهور_Do	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do

حال اگر بخواهیم (برای مثال) گام فوق را از نت Sol شروع کنیم نامگذاری گام باید به‌صورت زیر باشد:

ماهور_Sol	Sol	La	Si	Do	Re	Mi	Fa ♯	Sol

اگر درجهٔ هفتم گام به‌جای Fa ♯، (♭) Sol بود، فاصلهٔ درجات ششم تا هفتم برابر ۸ کما و فاصلهٔ درجات هفتم تا هشتم برابر ۵ کما می‌شد که این ساختار فواصل گام ماژور (براساس گام فیثاغورث) مطابقت ندارد.

قاعدهٔ کلی که برای حفظ فواصل گام ماهور می‌توان ذکر کرد چنین است:

(i) فواصل پرده و نیم‌پرده بین درجات متوالی گام حفظ شود و در بین اسامی هفت نت، دو نت از یک نام وجود نداشته باشد.

برای نمونه در مثال فوق مشاهده شد که Sol و (♭) Sol با هم ظاهر نمی‌شوند. علت این است که فاصله‌های نیم‌پرده بین نتهای همنام (مثلاً Sol و (♭) Sol) از نوع نیم‌پرده‌های بزرگ (۵ کما) و فاصله‌های نیم‌پرده بین نتهای غیرهمنام (مثلاً Fa ♯ و Sol) از نوع نیم‌پرده‌های کوچک (۴ کما) هستند.

این قاعده برای دستگاههای مختلف ایرانی که شامل کرن و سری هستند نیز صادق است. برای مثال گام بیات اصفهان را بررسی می‌کنیم.

ساختارگام بیات اصفهان Fa و بیات اصفهان Mi برحسب کمای فیثاغورثی به‌صورت زیر است: (براساس نسبتهای گام فیثاغورث و مقادیر پیشنهادی کرن و سری در این مقاله)

بیات اصفهان_Fa	Fa	Sol	La ♭	Si ♭	Do	Re	Mi	Fa
بیات اصفهان_Mi	Mi	Fa ♯	Sol	La	Si	Do	Re ♯	Mi

با توجه به دوگام فوق ملاحظه می‌شود که مقادیر پیشنهادی برای کرن و سری در این مقاله با ساختارگام بیات اصفهان هماهنگی دارد، زیرا اگر مقادیر کرن برابر X کما و سری برابر Y کما بگیریم، فاصلهٔ بین درجات پنجم و ششم درگام اول برابر $۹ - X$ (زیرا فاصلهٔ Do تا Re ۹ کماست) و درگام دوم برابر $Y + ۴$ (زیرا فاصلهٔ Si تا Do ۴ کماست.) خواهد بود. پس باید $۹ - Y = Y + ۴$، و این به آن معنی است که $X + Y = ۵$ کما باید باشد.

وضعیت در سایرگامهای دستگاههای موسیقی ایران مشابه است.

حال الگوریتمی (روشی) ارائه می‌کنیم که نحوهٔ به‌دست آوردن نسبتهای موسیقیایی را نشان می‌دهد:

مرحلهٔ یک: عدد یک را داریم.

مرحلهٔ دو: نسبتهای موجود در مراحل قبل را می‌توانیم در ۲ ضرب و یا تقسیم کنیم.

مرحلهٔ سه: نسبتهای موجود در مراحل قبل را می‌توانیم در $\left(\frac{۳}{۲}\right)$ یا (۲) ضرب یا تقسیم کنیم.

⋮

مرحلهٔ n: نسبتهای موجود در مراحل قبل را می‌توانیم در $\left(\frac{n}{n-۱}\right)$، ...، $\left(\frac{۴}{۳}\right)$، $\left(\frac{۳}{۲}\right)$ و ۲ ضرب یا تقسیم کنیم.

تفاوتی که روش فوق با روش فیثاغورثی دارد این است که در روش فیثاغورثی ضرب و تقسیم فقط در اعداد $\left(\frac{۳}{۲}\right)$ و (۲) انجام می‌شود، ولی در این روش کسرهای $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۶}{۵}$ نیز به‌تدریج وارد عمل می‌شوند. ۵۹

عملکرد این الگوریتم تا چند مرحله به‌صورت زیر است:

مرحلهٔ یک						۱					
مرحلهٔ دو			$\frac{۱}{۲}$			۱			۲		
مرحلهٔ سه	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳	۴
مرحلهٔ چهار	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
مرحلهٔ پنج											
⋮											

با توجه به روش فوق، نسبتهای پدید آمده برای نتها در هر مرحله به‌صورت زیر است:

مرحلهٔ یک : Do

مرحلهٔ دو : Do

مرحلهٔ سه : Sol Fa

مرحلهٔ چهار : Re La ♭

مرحلهٔ پنج : Mi ♭ Mi La Si (درگام زارلین)

La ♭ Mi (درگام فیثاغورث)

همان‌طور که مشاهده شد، تا مرحلهٔ ۵ نسبتهای مربوط به گام Do_major هارمونیک (زارلین) به‌دست می‌آیند. در مرحلهٔ ۶ و ۷ دیگر نسبتهای فیثاغورثی مربوط به این گام به‌دست می‌آیند. ضمناً در مرحله‌های ۶ و فواصل ۷ فواصل ربع‌پرده‌ای (کرن و سری) نیز ظاهر می‌شوند.

مزیت این الگوریتم این است که همزمان نسبتهای فیثاغورثی، نسبتهای گام هارمونیک (زارلین) و همچنین نسبتهای ربع‌پرده‌ای (کرن و سری) نیز ظاهر می‌شوند.

مزیت این الگوریتم این است که همزمان نسبتهای فیثاغورثی، نسبتهای گام هارمونیک (زارلین) و همچنین نسبتهای ربع‌پرده‌ای و ... را به‌دست می‌دهد و درواقع نوعی وحدت در ساختارهای مختلف موسیقی ایجاد می‌کند.

پایان

بررسی رابطهٔ بین محیط و مساحت دو مستطیل

مهران داوری[۱]

قضیه. بین دو مستطیل با محیط مساوی، مساحت مستطیلی بیشتر است که اختلاف اضلاع آن کمتر باشد.

مطابق شکل دو مستطیل $ABCD$ و $A'B'C'D'$ را در نظر می‌گیریم

فرض. $P_{ABCD} = P_{A'B'C'D'}$ و $b' - b > a' - a$.

حکم. $S_{ABCD} > S_{A'B'C'D'}$.

می‌توان در مستطیلهای فوق اندازهٔ طول را به‌صورت حاصل‌جمع عرض با عددی مثبت (مثل m و n) بیان کرد. پس بنا به فرض داریم:

$$P_{ABCD} = P_{A'B'C'D'} \Rightarrow ۲a + n = ۲b + m \Rightarrow ۲a = ۲b + m - m - n$$

$$\Rightarrow a = \frac{۲b + m - n}{۲} \qquad (۱)$$

$$(b + m) - b > (a + n) - a \Rightarrow m > n$$

پس

$$m > n \Rightarrow m^۲ > n^۲ \Rightarrow m^۲ - n^۲ > ۰$$

$$\xrightarrow{+۴b^۲+۴mb} ۴b^۲ + ۴mb + m^۲ - n^۲ > ۴b^۲ + ۴mb \Rightarrow$$

$$(۲b + m + n)(۲b + m - n) > ۴b(b + m)$$

$$\xrightarrow{\div ۴} \frac{(۲b + m + n)}{۴}(۲b + m - n) > b(b + m) \Rightarrow$$

$$\frac{(۲b + m + n)}{۲}\frac{(۲b + m - n)}{۲} > b(b + m) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(۱)} a(a + n) > b(b + m) \Rightarrow S_{ABCD} > S_{A'B'C'D'}$$

---

۱. دانش‌آموز سال سوم دبیرستان منطقهٔ دولت‌آباد اصفهان

روشی دیگر برای اثبات

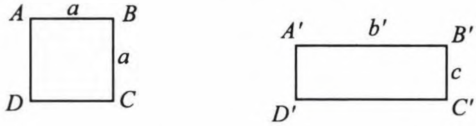
برهان خلف. فرض کنیم نقیض حکم درست باشد، آنگاه دو حالت رخ می‌دهد:

$$\text{۱)}\ S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} \Rightarrow\ a(a+n) = b(b+m)$$
$$\xrightarrow{(۱)} \left(\frac{۲b+m-n}{۲}\right)\left(\frac{۲b+m+n}{۲}\right) = b(b+m) \Rightarrow$$
$$\frac{۴b^۲+۴mb+m^۲-n^۲}{۴} = b^۲+mb \xrightarrow{\times ۴} ۴b^۲+۴mb+m^۲-n^۲ = ۴b^۲+۴mb \Rightarrow$$
$$m^۲ = n^۲ \Rightarrow\ |m| = |n| \Rightarrow\ m = n$$

$$\text{۲)}\ S_{ABCD} < S_{A'B'C'D'} \Rightarrow\ a(a+n) < b(b+m)$$
$$\xrightarrow{(۱)} \left(\frac{۲b+m-n}{۲}\right)\left(\frac{۲b+m+n}{۲}\right) < b(b+m) \Rightarrow$$
$$\frac{۴b^۲+۴mb+m^۲-n^۲}{۴} < b^۲+mb \xrightarrow{\times ۴} ۴b^۲+۴mb+m^۲-n^۲ < ۴b^۲+۴mb \Rightarrow$$
$$m^۲ < n^۲ \Rightarrow\ |m| < |n| \Rightarrow\ m < n$$

در این دو حالت به‌دست می‌آید $(m = n)$ و $(m > n)$ که با این نتیجهٔ به‌دست آمده از فرض $(m > n)$ تناقض دارد. پس $S_{ABCD} > S_{A'B'C'D'}$.

حالت خاص این قضیه هنگامی است که یکی از این اشکال مربع باشد، یعنی اگر محیط یک مربع و یک مستطیل با هم برابر باشد، آنگاه همواره مساحت مربع بیش از مساحت مستطیل است.



اکنون با توجه به قضیه و نتیجهٔ فوق ثابت می‌کنیم که اگر محیط یک مستطیل با طول اضلاع b و c $(b > c)$ با محیط مربعی با اندازهٔ ضلع a برابر باشد، آنگاه $a^۲ > bc$ می‌باشد.

از آنجایی که محیط این دو شکل برابرند، پس $۲a = b + c$. پس طبق فرضهای انجام‌شده داریم:

$$b - c > ۰ \Rightarrow\ (b-c)^۲ > ۰ \Rightarrow\ b^۲ - ۲bc + c^۲ > ۰ \xrightarrow{+۴bc} b^۲ + ۲bc + c^۲ > ۴bc \Rightarrow$$
$$(b+c)^۲ > ۴bc \xrightarrow{\div ۴} \frac{(b+c)^۲}{۴} > bc \xrightarrow{(۱)} \left(\frac{b+c}{۲}\right)^۲ > bc \Rightarrow\ a^۲ > bc$$

مسابقه

سؤال مسابقهٔ این دوره

برای اعداد حقیقی و نامنفی X_1، X_2، $\ldots$، X_{n-1} و X_n می‌دانیم $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n = 1$. ثابت کنید

$$X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n \leq \frac{1}{4}$$

برندگان مسابقهٔ دورهٔ قبل، آقایان علیرضا نوربخش و حسن کفاش‌امیری می‌باشند که جوایز ایشان به آدرس پستی آنها ارسال خواهد شد. شما می‌توانید پاسخ این مسأله را به نشانی: اصفهان، خیابان سعادت‌آباد، روبه‌روی مقبرهٔ بانو امین، خانهٔ ریاضیات اصفهان و یا به صندوق پستی ۳۵۶ـ۸۱۶۴۵ ارسال نمایید. به راه‌حلهای برتر به قید قرعه جوایزی ارزنده تعلق می‌گیرد.

حل مسألهٔ مسابقهٔ دورهٔ قبل

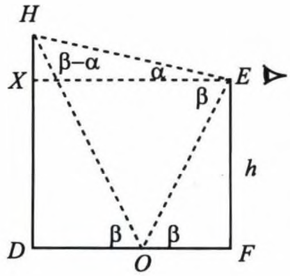
این مسأله راه‌حلهای فراوانی دارد که در اینجا به دلایل آموزشی به ذکر یک نمونه که از رابطهٔ سینوسها استفاده می‌کند، می‌پردازیم.

همان‌طور که می‌دانیم رابطهٔ سینوسها در مثلث دلخواه ABC به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{BC}{\sin(\hat{A})} = \frac{CA}{\sin(\hat{B})} = \frac{AB}{\sin(\hat{C})}$$

تقاضای اشتراک

نشریهٔ ریاضیات



در شکل روبه‌رو ناظر در نقطهٔ E و لانهٔ پرنده در H است. هدف پیدا کردن ارتفاع HD (همان x) برحسب EF (h)، α و β است. برای این منظور دقت کنید که چون خط‌چین نشان داده شده با سطح زمین (DF) موازی است، پس $\widehat{EOF}=\beta$ و طبق اصل بازتابش $\widehat{HOD}=\beta$. پس دو مثلث $EOHF$ و HDO متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{HD}{HF}=\frac{HO}{EO} \qquad (۱)$$

از طرفی طبق رابطهٔ سینوسها در مثلث HEO داریم:

$$\frac{HO}{\sin(\widehat{HEO})}=\frac{EO}{\sin(\widehat{EHO})} \qquad (۲)$$

از روی شکل واضح است که $\widehat{HEO}=\alpha+\beta$ و چون $\widehat{HOE}=۱۸۰^\circ-۲\beta$، پس

$$\widehat{EHO}=۱۸۰^\circ-\big((۱۸۰^\circ-۲\beta)+(\alpha+\beta)\big)=\beta-\alpha$$

پس از رابطهٔ (۲) داریم $\frac{HO}{EO}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$، و با به‌کار بردن همزمان روابط (۱) و (۲) داریم

$$\frac{x}{h}=\frac{HD}{EF}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

یعنی

$$x=HD=h\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

منتشر کرده است:

انتشارات فاطمی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر: دکتر یحیی تابش / دکتر امیدعلی کرمزاده

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل ساعت‌ها تلاش فکری است. بدیهی است که اگر این تلاش‌ها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به انتشار کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است.

این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتاب‌های زرد) شامل کتاب‌هایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتاب‌های نارنجی) شامل کتاب‌های میانه و مجموعهٔ مسائل و کتاب‌های کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است.

دستهٔ سوم (کتاب‌های قرمز) شامل کتاب‌های پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات، زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوری‌های ذهنی تلاش می‌کنند. مطالعهٔ کتاب‌های این مجموعه به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

منتشر می‌کند: