نشریهٔ

ریاضیات

سال پنجم / ۶
شمارهٔ پیاپی: ۲۰
تیر ۱۳۸۴
قیمت: ۹۰۰ تومان

- از فرما تا وایلز
- حساب خمهای بیضوی
- دربارهٔ معادلهٔ $\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m-1}$
- مسأله‌های پیشنهادی به چهل و پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز

طرح مشترک با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش و پرورش

هدف از تهیه و انتشار کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز کمک به توسعه و درک بهتر مفاهیم کتاب‌های درسی و ایجاد مهارت برای پاسخگویی به پرسش‌ها، مسائل و آزمون‌های گوناگون است. کتاب‌های کار و راهنمای مطالعهٔ دانش‌آموز بر اساس برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه و پیش‌دانشگاهی تهیه شده است. در این کتاب‌ها ابتدا بعضی از مفاهیم کتاب‌های درسی با ذکر مصادیق تشریح شده است و بعد از توسعهٔ آن مفاهیم، مصادیق آن در قالب تمرین‌های طبقه‌بندی شده برای یادگیری عمیق آمده است. این کتاب‌ها جانشینی برای کتاب‌های درسی نیست، بلکه باید همراه با مطالعهٔ کتاب‌های درسی مورد استفادهٔ دانش‌آموزان قرار گیرد.

بسیاری از کتاب‌های این مجموعه، در سومین جشنوارهٔ کتاب‌های آموزشی رشد مورد تقدیر قرار گرفته یا برگزیده شده‌اند.

انتشارات فاطمی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

به‌نام خدا

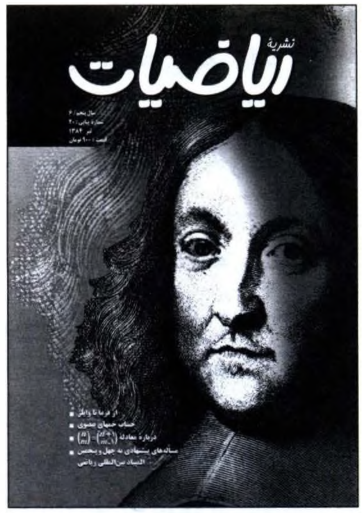
نشریهٔ ریاضیات

سال پنجم/ ۶، شمارهٔ پیاپی: ۲۰، تیر ۱۳۸۴

فهرست:

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان



روی جلد: پیر دو فرما

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش
مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، ایرج ضرغام
سردبیر: ارشک حمیدی
هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، بهروز طوری، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه بندی: مریم مهری
رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: زلال
نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ۱۴۱۴۵
تلفن: ۸۹۷۱۵۸۴ـ۸۹۷۱۵۸۳
پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

عصر اطلاعات

یحیی تابش

ما نمایندگان مردم جهان، که از ۱۰ تا ۱۲ دسامبر ۲۰۰۳ برای برگزاری دور اول اجلاس جهانی جامعهٔ اطلاعاتی در ژنو گرد آمده‌ایم، تمایل و تعهد مشترک خود را برای بنا کردن جامعهٔ اطلاعاتی مردم‌محور، همه‌شمول، و توسعه‌مدار اعلام می‌کنیم. جامعه‌ای که در آن همگان بتوانند در تولید و خلق اطلاعات و دانش سهیم شوند، به آن دسترسی داشته باشند، آن را به‌کار گیرند و به اشتراک گذارند تا افراد، اجتماعات و مردم قادر شوند بر پایهٔ هدفها و اصول منشور ملل متحد و احترام کامل و پاس‌داشت بیانیهٔ جهانی حقوق بشر، در ارتقای توسعهٔ پایدار و بهبود کیفیت زندگی خویش سهیم شوند و به‌طور کامل استعدادهای خود را محقق سازند.

بند آغازین؛ اعلامیهٔ اجلاس جهانی جامعهٔ اطلاعاتی

آقای کوفی عنان، دبیر کل سازمان ملل متحد، در استقبال از آنچه به «عصر اطلاعات» موسوم شده است و با توجه به اینکه کلیهٔ شئون اقتصادی و فرهنگی در حال تحول و دگرگونی است، برای جلب توجه جهانیان به این مهم، ابتکار و ایدهٔ راه‌اندازی «اجلاس جهانی جامعهٔ اطلاعاتی» را مطرح ساخت. تدارکات اولیه که شروع شد، دو مرحله برای اجلاس در نظر گرفته شد. مرحلهٔ اول از ۱۰ تا ۱۲ دسامبر ۲۰۰۳ در ژنو برگزار شد و برنامه‌ریزی برای برگزاری مرحلهٔ دوم، در نوامبر سال ۲۰۰۵ در تونس، شروع شده است. در مرحلهٔ اول اجلاس در ژنو، بیش از ۱۰۰۰۰ نفر از روشنفکران و متفکران از سراسر دنیا حضور داشتند و با حساسیت به بررسی و تحلیل و راهگشایی نسبت به مسائلی پرداختند که فناوری ارتباطات و اطلاعات پیش روی جهانیان گشوده است. این عده که شامل حدود ۵۰ تن از سران کشورها، دهها تن از مدیران ارشد صنایع نوین ارتباطات و اطلاعات، و صدها نفر از وزرا و مدیران ارشد دولتی، نمایندگان نهادهای غیر دولتی، مقامات سازمان ملل و نهادهای وابسته، و خبرنگاران و کارشناسان و متفکران جهانی بودند، در سخنرانیهای عمومی، میزگردها، کارگاهها، و گروههای کاری به بیان دیدگاههای خود و بحث و بررسیهای لازم پرداختند.

آقای کوفی عنان، در بیانات خود در جلسهٔ افتتاحیه، با توجه به دوران گذار تاریخی تأکید کرد که نباید خود را دستخوش اتفاقات قرار دهیم، بلکه باید خودمان آینده‌مان را بسازیم و به‌سوی جامعهٔ اطلاعاتی گام برداریم، جامعه‌ای که با قدرت فوق‌العاده و شگفت‌انگیز فناوری ارتباطات و اطلاعات تحول و دگرگونی اساسی در جنبه‌های مختلف زندگی، اعم از تجارت تا پزشکی، آموزش تا حفاظت محیط زیست، و غیره را فراهم کرده است و به‌عنوان ابزاری اساسی می‌تواند اهداف آزادی و دموکراسی را رشد و توسعه دهد و دانش را نیز گسترش داده و تفاهم متقابل را تقویت کند.

آقای عنان نگرانی عمیق خود را از شکاف دیجیتالی و چالشهای آن ابراز داشت، نگرانیهایی که شامل تسلط فرهنگی زبان انگلیسی و مهجور شدن فرهنگهای قومی است؛ حال آنکه عصر اطلاعات فرصتی است که باید تنوع و تکثر فرهنگی هر چه بیشتر گسترش یابد. شکاف دیجیتالی، که به‌معنای «دسترسی و عدم دسترسی به کامپیوتر و اینترنت، و سیستمهای کاربردی و اطلاعاتی» پنداشته می‌شود، چالشهای جدیدی در برابر دنیای شمال و جنوب گشوده است و همه در تلاش‌اند که این «شکاف» به «درهٔ دیجیتالی» تبدیل نشود. آقای دبیرکل نگرانی عمیق خود را از شکاف دیجیتالی در حوزه‌ها و جنبه‌های مختلف ابراز داشت و خواستار آن شد که اجلاس به مقولهٔ شکاف دیجیتالی توجه ویژه‌ای مبذول دارد و همهٔ کشورها را به توسعهٔ فناوری اطلاعات و ارتباطات و وارد شدن به جامعهٔ اطلاعاتی دعوت کرد.

اکنون، در آستانهٔ مرحلهٔ دوم اجلاس، ما نیز با این پرسش مواجهایم که در سطح ملی تا چه‌اندازه برای ورود به عصر اطلاعات از لحاظ توسعهٔ زیرساختها، آموزش و فرهنگ‌سازی و ایجاد سیستمهای کاربردی کوشیده‌ایم؟ بدون تردید، در این رابطه کوششهای ارزنده‌ای صورت گرفته است، هر چند در گامهای بعدی لزوم نگاهی به گذشته و ارزیابی آنچه که انجام شده است ضروری است، ولی باید توجه داشت که توسعهٔ زمینه‌های فرهنگی اولویت زیادی دارد و در این رابطه باید نگاه ویژه‌ای به آموزش و پرورش داشته باشیم. در آموزش و پرورش نیز در سالهای اخیر کوششهای وسیعی برای توسعهٔ فناوری اطلاعات و ارتباطات صورت گرفته است، ولی آنچه که ضروری است، تدوین برنامه‌ای جامع و مدلی مرحله‌بندی شده برای دست یافتن به اهدافی مدون و معین است، چون در غیر این صورت فعالیتهای پراکنده به اتلاف منابع و دستاوردها می‌انجامد. با توجه به گستردگی آموزش و پرورش، هرگونه راهگشایی در این زمینه باید با توجه به ابعاد گوناگون آن صورت گیرد و از اقدامهای شتابزده پرهیز شود.

در توسعه و کاربرد فناوری اطلاعات و ارتباطات ضروری است که به «پدیدهٔ شبکه» و توانائیهایی که دسترسی به شبکه و اینترنت برای ما فراهم می‌کند به نحوی واقع گرایانه توجه داشته باشیم و توسعهٔ هرگونه سیستم آموزشی جدید را بر این اساس قرار دهیم و درواقع در عصر اطلاعات و جامعهٔ اطلاعاتی ضروری است که در اهداف آموزش و پرورش تجدیدنظر کنیم. تربیت شهروندی و ایجاد شوق زیستن در دانش‌آموزان، تقویت خرد و مهارتهای لازم در آنان برای دنیای آینده اهدافی است که با تأثیر از فناوری اطلاعات و ارتباطات می‌توانند موجب نوگرایی در آموزش و پرورش امتحان‌زدهٔ ما باشند، که در آن جای تحلیل و کار خلاقانه خالی است و بیشتر به آموزشهای حافظه‌ای اتکا دارد. فناوری اطلاعات و ارتباطات بستر مناسبی است که پس از آشنایی با مقدمات اولیهٔ آن دانش‌آموزان به فعالیتهای گروهی و کار بر روی پروژه‌های مطالعاتی و پژوهشی بر بستر شبکهٔ اینترنت در سطح ملی و بین‌المللی بپردازند تا به شکوفایی خلاقیتهای آنان منجر شود. ولی همان‌گونه که ذکر کردیم، این مهم تحت برنامه‌ای جامع، با در نظر گرفتن اولویتها و تدوین مدل آموزشی مناسب، امکانپذیر است، مدل آموزشی مناسبی که باید عمدتاً به آموزشهای فوق برنامه متکی باشد؛ بدین‌گونه ما هم خواهیم توانست بر شکاف دیجیتالی فائق آییم و سرافراز در جهان آینده زندگی کنیم.

از فرما تا وایلز
قضیهٔ آخر فرما از حدس تا اثبات

ایزرائیل کلاینر

۱. مقدمه

وقتی زمان آن فرا برسد که مورخان ریاضیات دربارهٔ ریاضیات قرن بیستم نظر بدهند، مطمئنم که آن را عصری طلایی ارزیابی خواهند کرد، هم به‌دلیل پیدایش ایده‌های تازهٔ بی‌نظیر و هم به‌سبب حل شدن مسأله‌های قدیمی (البته این دو به هم بی‌ربط نیستند). در مورد دوم، قضیهٔ آخر فرما نه قدیمی‌ترینشان است و نه آخرین مورد. اخیراً (سپتامبر ۱۹۹۸) اعلام شده که توماس هِیلز مسألهٔ داخل جعبه گذاشتن کره‌های کپلر را که در سال ۱۶۱۱ مطرح کرده بود، حل کرده است. البته فرض ریمان، حدس گلدباخ و مسأله‌های معروف دیگری هنوز هم حل‌نشده مانده‌اند.

در اینجا نقل‌قولهایی از دو شخصیت اصلی داستان قضیهٔ آخر فرما آورده‌ایم.

> تجزیهٔ مکعبی به مجموع دو مکعب یا یک توان چهارم به مجموع دو توان چهارم یا به‌طور کلی، هر توان با نمای بزرگتر از دو به مجموع دو توان با همان نما ممکن نیست. برای این مطلب اثباتی واقعاً شگفت‌انگیز یافته‌ام که در این حاشیه نمی‌گنجد.

> یک روز صبح، اواخر ماه مه، نادا با بچه‌ها بیرون رفته بود و من پشت میزکارم نشسته بودم که دربارهٔ خانوادهٔ باقی‌مانده از معادلات بیضوی فکر کنم. در همان حال مقاله‌ای از بَری میزر را همین‌طوری نگاه می‌کردم که جمله‌ای از آن توجه‌ام را حسابی جلب کرد. در آن جمله به ساختاری از قرن نوزدهم اشاره شده بود که با دیدنش ناگهان دریافتم که باید بتوان آن را طوری به‌کار برد تا روش کولیواگین ـ فِلَک در مورد خانوادهٔ آخریِ معادلات بیضوی موردنظر مؤثر واقع شود. بعدازظهر شد و فراموش کردم که برای صرف ناهار پایین بروم تا اینکه حدود ساعت سه یا چهار کاملاً مطمئن شدم که با استفاده از آنچه یافته‌ام می‌توان آخرین مسأله‌ای را هم که مانده بود حل کرد. تقریباً عصر شده بود که نتیجهٔ موردنظر به‌دست آمد و آن‌موقع به طبقهٔ پایین رفتم؛ نادا خیلی تعجب کرده بود که این‌قدر دیر کرده‌ام. به او گفتم: قضیهٔ آخر فرما را حل کرده‌ام.

در هر دو این اظهارات، به‌ترتیب فرما و وایلز ـ البته با فاصلهٔ زمانی تقریباً ۳۶۰ سال ـ مدعی شده‌اند که قضیهٔ آخر فرما را ثابت کرده‌اند. همان‌طور که می‌دانید وایلز اثباتش را منتشر کرد، گرچه در اثبات اولیه‌اش اشکالی عمده وجود داشت که ۱۸ ماه طول کشید تا برطرف شود. انگار عجله کردم و آخر ماجرا را زودتر از موعدش گفتم.

هدف از این مقاله، روایت اجمالی آنچه که در طول سه قرن و نیم میان این دو گفته به‌وقوع پیوسته و به‌ویژه تشریح شمه‌ای از این ماجرا و ایده‌های مربوطه به اثبات وایلز است.

شکل ۱ پیر دو فرما

۲. دو قرن نخست

ابتدا با فرما شروع می‌کنیم. ادعای مشهورش این بود که معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$، وقتی $n > 2$، جواب صحیح (غیرصفر) ندارد. در قرن نوزدهم بالاخره این ادعا به‌عنوان قضیهٔ آخر فرما شناخته شد. (فرما ادعاهای بسیاری را در نظریهٔ اعداد مطرح کرد بی‌آنکه آنها را ثابت کند؛ بجز یکی، همهٔ آنها را بعدها اویلر، لاگرانژ و دیگران ثابت کردند. این استثناء_آخرین «نتیجهٔ» ثابت‌نشده_از قرار معلوم انگیزهٔ نامگذاری «قضیهٔ آخر فرما» بوده است.) فرما این ادعا را در دههٔ ۱۶۳۰ در حاشیهٔ نسخه‌ای از کتاب حساب دیوفانتوس (۲۵۰م)، کنار مسألهٔ ۸ دفتر دوم آن، به این مضمون که مربع کامل داده شده‌ای را به‌صورت مجموع دو مربع کامل بنویسید، مطرح کرد. ولی «اثبات واقعاً شگفت‌انگیزِ» فرما، همان‌طور که می‌دانید هیچ‌وقت به‌دست نیامد.

فرما برای حالتی که $n = 4$، یعنی ساده‌ترین نمایی که می‌توان مسأله را به‌ازای آن حل کرد، اثباتی منتشر کرد. این کار را با معرفی روش نزول نامتناهی انجام داد که اهمیت آن در اثبات بسیاری از حکمهای نظریهٔ اعدادی بر همگان معلوم شده است. ایدهٔ اثبات این است که فرض می‌کنیم عددهایی طبیعی مانند a، b و c وجود داشته باشند که جواب معادلهٔ $x^4 + y^4 = z^4$ باشند و ثابت می‌کنیم که در این صورت عددهایی طبیعی مانند u، v و w وجود دارند که آنها هم جواب این معادله‌اند و $c > w$. اگر این فرایند را پشت سر هم تکرار کنیم به تناقض می‌رسیم، چون با این کار دنباله‌ای نزولی و نامتناهی از عددهای طبیعی به‌دست می‌آید.

از اینکه قضیهٔ آخر فرما به‌ازای $n = 4$ درست است نتیجه می‌شود که به‌ازای $n = 4k$، که در آن k عددی

طبیعی و دلخواه است، هم درست است؛ زیرا، اگر به‌ازای عددهایی صحیح مانند x، y و z، $x^{۴k} + y^{۴k} = z^{۴k}$، آن‌وقت به‌ازای عددهای صحیح x^k، y^k و z^k، $(x^k)^۴ + (y^k)^۴ = (z^k)^۴$. با استدلالی از این دست ثابت می‌شود که اگر قضیهٔ آخر فرما به‌ازای $n = p$ درست باشد، آن‌وقت به‌ازای $n = pk$ هم درست است. چون هر عدد صحیح یا مضربی از ۴ است و یا مضربی از عددی اول و فرد، از اثبات فرما برای حالتی که $n = ۴$ نتیجه می‌شود که فقط کافی است قضیهٔ آخر فرما به‌ازای عددهای اول و فرد ثابت شود.

اثبات قضیهٔ آخر فرما را در حالتی که $n = ۳$ اویلر در حدود سال ۱۷۶۰، یعنی بیش از ۱۰۰ سال بعد از اثبات فرما برای حالتی که $n = ۴$، ارائه کرد. با وجود این، استدلال اویلر اشکال مهمی داشت که در آن زمان هیچ‌کس متوجه‌اش نشد.

در اواخر قرن هجدهم، فرهنگستان پاریس جایزه‌ای برای اثبات قضیهٔ آخر فرما تعیین کرد. در سال ۱۸۱۶ اولبرس، دوست اخترشناس گاوس، به او توصیه کرد که در رقابت برای کسب این جایزه شرکت کند. در آن زمان، پانزده سال از انتشار کتاب تحقیقات حسابی گاوس که جایگاه او را به‌عنوان یکی از برجسته‌ترین ریاضیدانان عصر خودش تثبیت کرده بود، می‌گذشت. گاوس به توصیهٔ دوستش این‌طور پاسخ داد:

> برای اینکه راجع به جایزهٔ پاریس به من خبر دادید از شما بسیار سپاسگزارم. ولی اعتراف می‌کنم که قضیهٔ فرما به‌عنوان حکمی منفرد چندان باب طبعم نیست؛ زیرا من هم می‌توانم به‌راحتی تعداد زیادی از حکمهای از این دست را مطرح کنم که کسی نه بتواند آنها را ثابت کند و نه بتواند تکلیفشان را مشخص کند.

به‌نظر می‌رسد که گاوس قضیهٔ آخر فرما را مسأله‌ای پربار نمی‌دانست. (البته اثباتهای این قضیه در حالتهایی که $n = ۳$ و ۵ در میان یادداشتهای منتشرنشده‌اش پیدا شده است.) در اینجا سؤالی جالب پیش می‌آید: مسألهٔ خوب ریاضی چگونه مسأله‌ای است؟ به‌طور قطع هر ریاضیدانی شخصاً مسأله‌ای را انتخاب می‌کند تا روی آن کار کند، چرا که مسألهٔ موردنظر توجه‌اش را جلب کرده است؛ اما چطور می‌شود که ریاضیدانان به حل مسأله‌های مورد علاقهٔ همکارانشان می‌پردازند؟

در مورد دو ملاک اصلی زیر که باعث می‌شوند مسأله‌ای خوب به‌حساب آید جای هیچ تردیدی نیست:

(i) حل شدن مسألهٔ موردنظر نتیجه‌های مهمی در پی داشته باشد. مثالی از چنین مسأله‌ای بی‌تردید فرض ریمان است.

(ii) ضمن تلاشهایی که برای حل کردن مسأله صورت می‌گیرد ایده‌های تازه‌ای مطرح شود. این امر، همان‌طور که معلوم شد، مسلماً در مورد قضیهٔ آخر فرما محقق گردید. به‌طور قطع هرکس می‌تواند این موضوع را بفهمد، فقط کافی است که به گذشته نگاهی بیندازد. با این برداشت، همان‌طور که خواهیم دید، به‌نظر می‌رسد که گاوس در مورد این مسأله اشتباه قضاوت کرده است.

گامهای بلند بعدی را در اثبات قضیهٔ آخر فرما لژاندر و دیریشله برداشتند که در حدود سال ۱۸۲۵ مستقل از هم قضیه را در حالتی که $n = 5$ ثابت کردند. در سال ۱۸۳۹ لامه آن را در حالتی که $n = 7$ ثابت کرد. درضمن، در سال ۱۸۳۲ دیریشله ثابت کرد که وقتی $n = 14$ قضیهٔ آخر فرما درست است، اما نتوانست آن را در حالتی که $n = 7$ ثابت کند. از نتیجهٔ آخری همان‌طور که اشاره کردیم نتیجهٔ قبلی به‌دست می‌آید.

شکل ۲ سوفی ژرمن

۳. سوفی ژرمن

نخستین پیشرفت عمده در اثبات قضیهٔ آخر فرما را در سال ۱۸۲۳ سوفی ژرمن، ریاضیدان فرانسوی، به‌دست آورد. او نتیجهٔ ارزشمند زیر را با استفاده از روشهای کمابیش مقدماتی ثابت کرد: اگر p و $2p + 1$ هر دو عددهایی اول باشند، آن‌وقت معادلهٔ $x^p + y^p = z^p$ جوابی ندارد که به‌ازای آن xyz بر p بخش‌پذیر نباشد. اساساً به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه رسم شده است که اثباتهای قضیهٔ آخر فرما را به‌ازای مقدارهای مختلف p به دو حالت تقسیم می‌کنند که این دو حالت معروف‌اند به حالت ۱، که در آن هیچ‌کدام از عددهای x، y و z بر p بخش‌پذیر نیست، و حالت ۲، که در آن دست‌کم یکی از عددهای x، y و z بر p بخش‌پذیر است. (مثلاً از حکم ژرمن به‌دست می‌آید که حالت ۱ قضیهٔ آخر فرما به‌ازای عددهای اول ۵ و ۱۱ درست است.) حالت ۲ معمولاً خیلی دشوارتر از حالت ۱ محسوب می‌شود.

لژاندر قضیهٔ ژرمن را این‌طور تعمیم داد: حالت ۱ قضیهٔ آخر فرما به‌ازای نمای اول p برقرار است، به‌شرطی که یکی از عددهای $4p + 1$، $8p + 1$، $10p + 1$، $14p + 1$ یا $16p + 1$ هم اول باشد. به این ترتیب، ژرمن و لژاندر می‌توانستند نخستین حالت قضیهٔ آخر فرما را به‌ازای همهٔ عددهای اول مانند p که $p < 100$ ثابت کنند. در سال ۱۹۷۷ تِریانیان ثابت کرد که حالت نخست به‌ازای همهٔ نماهای زوج به‌شکل $2p$ درست است.

مسأله‌ای جالب که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا تعداد «عددهای اول سوفی ژرمن»، یعنی عددهای اولی مانند p که $2p + 1$ هم اول باشد، نامتناهی است یا نه. این مسأله درست به‌اندازهٔ مسألهٔ مشهور «عددهای اول دوقلو» دشوار است.

۴. لامه

به مدت بیش از ۲۰۰ سال قضیهٔ آخر فرما فقط در مورد چهار نمای ۳، ۴، ۵ و ۷ ثابت شده بود! در اول مارس ۱۸۴۷، در گردهمایی فرهنگستان علوم پاریس، اتفاق فوق‌العاده‌ای به‌وقوع پیوست. لامه اعلام کرد که قضیهٔ آخر فرما را به‌ازای همهٔ نماها ثابت کرده است و طرح کلی اثباتش را به‌اختصار ارائه کرد. پیش از تشریح نکات اصلی این اثبات به مسألهٔ ساده‌تر زیر می‌پردازیم که راه‌حلش ارکان اساسی اثبات لامه را دربر دارد:

همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه، یعنی همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = z^2$$

را که در آن x، y و z نسبت به هم اول‌اند، پیدا کنید.

با اینکه راه‌حلهایی مقدماتی برای این مسأله وجود دارد، اما روش زیر برای اهدافمان آموزنده است. طرف چپ معادلهٔ $x^2 + y^2 = z^2$ را تجزیه می‌کنیم تا به‌دست آید $(x + yi)(x - yi) = z^2$. معادلهٔ موردنظر اکنون معادله‌ای در حوزهٔ «عددهای صحیح مختلط» به‌شکل $G = \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$، معروف به عددهای صحیح گاوسی، است. معلوم شده است که نظریهٔ اعداد در G درست مانند نظریهٔ اعداد در $\mathbb{Z}$ است. به‌ویژه «قضیهٔ اساسی حساب» در G برقرار است؛ یعنی هر عنصر غیرصفر و وارون‌ناپذیر G حاصل‌ضربی یکتا از عاملهای اول است. بنابراین نتیجه می‌شود که اگر حاصل‌ضربی از عنصرهای نسبت به هم اول در G مربع کامل باشد، آن‌وقت هر کدام از این عنصرها هم مربع کامل است. همین نتیجه در مورد هر نمای دیگری هم که به‌جای نمای ۲ باشد درست است.

چون عددهای x، y و z در $\mathbb{Z}$ نسبت به هم اول‌اند، می‌توان ثابت کرد که عددهای $x + yi$ و $x - yi$ هم در G نسبت به هم اول‌اند. از آنجایی که حاصل‌ضرب این عددها مربعی کامل است، هرکدام از آنها هم باید مربعی کامل باشد. به‌ویژه، $x + yi = (a + bi)^2$، که در آن $a, b \in \mathbb{Z}$. بنابراین $x + yi = (a^2 - b^2) + 2abi$ و با مقایسهٔ بخشهای حقیقی و موهومی دو طرف تساوی به‌دست می‌آوریم $x = a^2 - b^2$ و $y = 2ab$. اکنون چون $x^2 + y^2 = z^2$، پس $z = a^2 + b^2$. بنابراین جوابهای معادلهٔ $x^2 + y^2 = z^2$ عبارت‌اند از $x = a^2 - b^2$، $y = 2ab$ و $z = a^2 + b^2$، که در اینجا $a, b \in \mathbb{Z}$. برعکس، می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر انتخاب از عددهای صحیح a و b، اینها جوابهای معادله‌اند. اگر عددهای x، y و z نسبت به هم اول باشند، آن‌وقت عددهای a و b هم باید نسبت به هم اول باشند و یکی از آنها باید فرد باشد و دیگری زوج. همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه از این دستور به‌دست می‌آیند.

دو ایدهٔ مهم در این راه‌حل به‌طور ضمنی آمده‌اند:

(الف) نشاندن مسأله‌ای دربارهٔ عددهای صحیح در حوزه‌ای از «عددهای صحیح مختلط». مفهوم نشاندن مسأله‌ای که در حوزه‌ای صورتبندی شده است در حوزه‌ای بزرگتر، یکی از فنون ریاضی مهم و متداول است. اظهار نظر آدامار که کوتاهترین مسیر میان دو حقیقت در حوزهٔ عددهای حقیقی از حوزهٔ عددهای مختلط می‌گذرد واقعاً در این مورد روشن‌کننده است.

(ب) تبدیل کردن مسأله‌ای جمعی به مسأله‌ای ضربی؛ در این مورد تبدیل معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ به معادلهٔ $(x + yi)(x - yi) = z^۲$. این هم شگردی ارزشمند است که زیاد هم غیرعادی نیست. به‌طور کلی، حل کردن مسأله‌های ضربی در نظریهٔ اعداد، به‌ویژه با وجود قضیهٔ اساسی حساب، بسیار آسانتر از مسأله‌ای جمعی است.

اکنون به بیان طرح کلی اثبات لامه می‌پردازیم.

فرض کنید معادلهٔ $x^p + y^p = z^p$ جوابهایی صحیح داشته باشد (توجه کنید که p عددی اول است). طرف چپ این تساوی را تجزیه می‌کنیم تا به‌دست آوریم

$$(x + y)(x + yw)(x + yw^۲)\cdots(x + yw^{p-۱}) = z^p \qquad (**)$$

که در اینجا w ریشهٔ pام اولیه‌ای از واحد است (یعنی w ریشه‌ای از معادلهٔ $x^p = ۱$ است که $w \neq ۱$). اکنون معادلهٔ موردنظر معادله‌ای در حوزهٔ $D_p = \{a_۰ + a_۱ w + \cdots + a_{p-۱} w^{p-۱} : a_i \in \mathbb{Z}\}$، حوزهٔ به‌اصطلاح عددهای صحیح دایره‌بُری، است. لامه ادعا کرد که اگر عاملهای طرف چپ رابطهٔ $(**)$ در D_p دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند، آن‌وقت چون حاصل‌ضربشان توان pام است هرکدام از آنها هم باید توان pام باشد. از این مطلب، با استفاده از روش نزول نامتناهی فرما، با یافتن عددهایی صحیح مانند u، v و w که $u^p + v^p = w^p$ و $w < z$ می‌توان به تناقض رسید. اگر عاملهای یاد شده نسبت به هم اول نباشند، آن‌وقت با تقسیم بر عنصر مناسبی مانند a عاملهای نسبت به هم اول $\frac{x+y}{a}$، $\frac{x+yw}{a}$، $\frac{x+yw^۲}{a}$، ... و $\frac{x+yw^{p-۱}}{a}$ به‌دست می‌آیند و اثبات مانند حالت قبل است.

بعد از سخنرانی لامه، لیوویل، که از حضّار بود، پشت تریبون رفت و آنچه را که به نظرش می‌آمد اشکالی در اثبات لامه باشد ذکر کرد، یعنی سخن آخرش مبنی بر اینکه اگر حاصل‌ضربی از عاملهای نسبت به هم اول، توان pام باشد، هرکدام از این عاملها هم باید توان pام باشد. لیوویل اظهار داشت که این نتیجه مسلماً در مورد عددهای صحیح درست است، اما هنوز ثابت نشده است که در مورد عددهای صحیح دایره‌بری هم درست است. لامه پذیرفت که بررسی بیشتری لازم است، اما خاطرجمع بود که راهکار درستی را برای اثبات برگزیده است.

آنچه که اثبات موردنظر لازم داشت قضیهٔ اساسی حساب در D_p بود. این مطلب موضوع بخش بعدی است.

۵. کومر

حدود دو ماه بعد از سخنرانی لامه در فرهنگستان علوم، لیوویل نامه‌ای از کومر دریافت کرد که محتوای آن دلایل تردید لیوویل را دربارهٔ اثبات لامه تأیید می‌کرد:

> با تشویق دوستم م. لوژون دیریشله به خودم اجازه دادم که چند نسخه از رساله‌ای را که سه سال قبل نوشتم برایتان بفرستم. . . در این مقالات که از شما استدعا می‌کنم به‌عنوان نشانه‌ای از احترام زیادی که برایتان قائلم آنها را بپذیرید، پیشرفتهایی در مورد موضوعاتی در نظریهٔ عددهای مختلط، متشکل از ریشه‌های واحد، یعنی ریشه‌های معادلهٔ $r^n = ۱$، که به‌تازگی موضوع بحثهایی در فرهنگستان مشهورتان به مناسبت تلاش آقای لامه برای اثبات قضیهٔ آخر فرما بوده است، خواهید یافت.
>
> دربارهٔ حکم مقدماتی مذکور راجع به این عددهای مختلط، مبنی بر اینکه عددهای مختلط مرکب را فقط به یک طریق می‌توان به عاملهای اول تجزیه کرد که بابت آن در این اثبات انصافاً خیلی متأسف شدید، و در برخی جاهای دیگر هم درست نیست، می‌توانم به شما اطمینان دهم که در مورد عددهای مختلط به‌شکل $a_۰ + a_۱ r + a_۲ r^۲ + \cdots + a_{n-۱} r^{n-۱}$ به‌طور کلی برقرار نیست، اما می‌توان با معرفی انواع جدیدی از عددهای مختلط که من آنها را عددهای مختلط ایده‌آل نامیده‌ام، این مشکل را برطرف کرد.
>
> خیلی وقت پیش کاربردهای این نظریه را در اثبات قضیهٔ فرما بررسی کردم و موفق شدم غیرممکن بودن وجود جواب برای معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ (به‌ازای همهٔ عددهای طبیعی مانند n که $n < ۱۰۰$) را نتیجه بگیرم.

کومر در اینجا سه مطلب اساسی را بیان می‌کند:

الف) به‌طور کلی، در D_p یکتایی تجزیه برقرار نیست. او ثابت کرد که این ویژگی دست‌کم به‌ازای $p = ۲۳$ برقرار نیست. در سال ۱۹۷۱ یوشیدا ثابت کرد که به‌ازای همهٔ pهایی که $p \geq ۲۳$ یکتایی تجزیه در D_p برقرار نیست.

ب) با معرفی «عددهای ایده‌آل» می‌توان مشکل یکتایی تجزیه در D_p را «برطرف کرد».

ج) با استفاده از یکتایی تجزیه در حوزه‌های دایره‌بُری توسیع‌یافتهٔ شامل عددهای ایده‌آل می‌توان قضیهٔ آخر فرما را به‌ازای همهٔ عددهای اول مانند p که $p < ۱۰۰$ ثابت کرد. کومر حتی چیزی بیشتر از این را هم ثابت کرد. به بیان دقیقتر، ثابت کرد که قضیهٔ آخر فرما به‌ازای همهٔ عددهای اول «منتظم» درست است؛ عددی اول در صورتی منتظم است که عدد رده‌ای D_p را نشمارد، یا به‌طور معادل در صورتی که صورتهای عددهای برنولی $B_۲$، $B_۴$، . . .، $B_{p-۳}$ را نشمارد. او سپس ثابت کرد که همهٔ عددهای اول کوچکتر از ۱۰۰ بجز سه‌تایشان منتظم‌اند؛ عددهای اول نامنتظم جداگانه بررسی شدند. درضمن، در سال ۱۹۱۵ ثابت شد که تعداد عددهای اول نامنتظم نامتناهی است؛ معلوم نشده است که تعداد عددهای اول منتظم نامتناهی است یا نه.

مثالهای زیر از تجزیهٔ غیریکتا به عاملهای اول در حوزه‌های مختلف و اصلاح آن با افزودن عنصرهای «ایده‌آل»، برخی از ایده‌های کومر را در شرایطی مقدماتیتر روشن می‌کند.

۱. فرض کنید D مجموعهٔ عددهای صحیح زوج باشد، یعنی $D = ۲\mathbb{Z}$. در اینجا $۱۰۰ = ۲ \times ۵۰ = ۱۰ \times ۱۰$ که در آن ۲، ۱۰، ۵۰ در D اول‌اند (نمی‌توان آنها را در D تجزیه کرد).

۲. فرض کنید D مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ایهایی روی عددهای حقیقی باشد که (مثلاً) درجه‌شان از ۱ بزرگتر است. در اینجا $x^۶ = x^۲ \times x^۲ \times x^۲ = x^۳ \times x^۳$ و $x^۲$ و $x^۳$ در D اول‌اند.

۳. فرض کنید $D = \{a + b\sqrt{۵}i \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$. در اینجا $۶ = ۲ \times ۳ = (۱ + \sqrt{۵}i)(۱ - \sqrt{۵}i)$ و می‌توان به‌راحتی ثابت کرد که ۲، ۳ و $۱ \pm \sqrt{۵}i$ در D اول‌اند. این مثال را ددکیند در دههٔ ۱۸۷۰ پیدا کرده است.

در دو مثال نخست، D حوزه‌ای صحیح نیست اما ساختار ضربی‌اش به‌خوبی غیریکتا بودن تجزیه را روشن می‌کند.

ولی برای برقراری یکتایی تجزیه:

در (۱) «عدد ایده‌آل» ۵ را اضافه می‌کنیم.

در (۲) «چندجمله‌ای ایده‌آل» x را اضافه می‌کنیم.

در (۳) «عددهای ایده‌آل» $\sqrt{۲}$، $\frac{۱ + \sqrt{۵}i}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{۱ - \sqrt{۵}i}{\sqrt{۲}}$ را اضافه می‌کنیم. در این صورت

$$۶ = ۲\times = \sqrt{۲} \times \sqrt{۲} \times \left(\frac{۱ + \sqrt{۵}i}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{۱ - \sqrt{۵}i}{\sqrt{۲}}\right)$$

و

$$۶ = (۱ + \sqrt{۵}i)(۱ - \sqrt{۵}i) = \sqrt{۲} \times \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}i}{\sqrt{۲}}\right) \times \sqrt{۲} \times \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}i}{\sqrt{۲}}\right)$$

بنابراین یکتایی تجزیهٔ عنصر ۶ دوباره برقرار شده است.

درکارهای کومر شاهد پیدایش مبحثی جدید، یعنی نظریهٔ جبری اعداد که پیش از آن در آثار قدیمی‌تری ازگاوس، آیزنشتاین و ژاکوبی در مورد قوانین تقابل از درجات بالاتر مورد توجه قرارگرفته بود، هستیم. از این گذشته، کار کومر در مورد عددهای ایده‌آل را ددکیند با معرفی ایده‌آلها، «یکی از سرنوشت‌سازترین پیشرفتهای جبر جدید»، بسیارگسترش داد. ددکیند، همراه با کرونکر، نظریهٔ جبری اعداد را به کمال رساند. بنابراین قضیهٔ آخر فرما محرکی شد تا مفهومها و نتیجه‌های ارزشمند ریاضی مطرح شوند. به‌طور کلیتر، نظریهٔ «مقدماتی» اعداد الهام‌بخش ساختن نظریه‌های عمیقی بوده است که عالم ریاضیات را بسیار فراتر از مسأله‌هایی که باعث پیدایششان شدند، روشنی بخشیده‌اند.

۶. دهه‌های نخستین قرن بیستم

نتایج فنی بسیاری دربارهٔ قضیهٔ آخر فرما، بین سالهای ۱۸۵۰ تا ۱۹۵۰، به‌دست آمدند، اما چندان پیشرفت عمده‌ای حاصل نشد. نمونه‌های بسیار جزئی از نتایجی از این دست را در اینجا آورده‌ایم:

۱. حالت ۱ قضیهٔ آخر فرما به‌ازای تعدادی نامتناهی از نماهای دوبه‌دو نسبت به هم اول برقرار است (مایِله، ۱۸۹۷).

۲. اگر p عددی اول باشد که $2^{p-1} \not\equiv 1$ (به‌پیمانهٔ p^2)، آن‌وقت حالت ۱ قضیهٔ آخر فرما به‌ازای p برقرار است (ویفریچ، ۱۹۰۹).

۳. اگر به‌اصطلاح «عامل دوم» عدد رده‌ای D_p بر p بخش‌پذیر نباشد و اگر هیچ‌کدام از عددهای برنولی B_{2np} $\left(n = 1, 2, \ldots, \frac{p-3}{2}\right)$ بر p^3 بخش‌پذیر نباشند، آن‌وقت حالت ۲ قضیهٔ آخر فرما به‌ازای p برقرار است (وندیور، ۱۹۲۹).

۴. اگر $p = 1$ (به‌پیمانهٔ ۴) و p به‌ازای همهٔ عددهای فرد مانند s که $2 \le 2s \le p-3$ عدد برنولی B_{2s} را نشمارد، آن‌وقت قضیهٔ آخر فرما به‌ازای p برقرار است (وندیور، ۱۹۲۹).

با استفاده از چندتا از حکمهای بالا و نتایج دیگر، وندیور در اواخر دههٔ ۱۹۲۰ توانست ثابت کند که قضیهٔ آخر فرما به‌ازای همهٔ عددهای اول مانند p که $p < 157$ درست است (به‌یاد بیاورید که حدود ۷۰ سال قبل از آن کومر همین نتیجه را در حالتی که $p < 100$ به‌دست آورده بود). وندیور در سال ۱۹۵۴ با استفاده از ماشین‌حساب اسواک، این نتیجه را تا حالتی که $p < 2521$ تعمیم داد.

در آستانهٔ قرن بیستم از هیلبرت سؤال شد که چرا هیچ‌وقت برای اثبات قضیهٔ آخر فرما اقدام نکرده است. پاسخش این بود:

> پیش از آغاز این کار باید سه سال برای مطالعهٔ فشرده وقت صرف کنم و من وقت اضافی ندارم که برای شکستی احتمالی تلف کنم.

این پاسخ را با اظهارات گاوس در جواب این پرسش که چرا برای دریافت جایزهٔ پاریس که بابت ارائهٔ اثباتی از قضیهٔ آخر فرما تعیین شده بود رقابت نکرد، مقایسه کنید: گاوس ادعا کرد که این مسأله چندان باب طبعش نبوده است، در حالی که هیلبرت اظهار کرد که این مسأله بیش از حد دشوار است.

در سال ۱۹۰۸ پاول وُلفسکهِل ریاضیدان جایزه‌ای به ارزش ۱۰۰۰۰۰ مارک (با معیارهای امروزی معادل ۱۰۰۰۰۰۰ دلار) برای اثبات قضیهٔ آخر فرما به‌ارث گذاشت. این جایزه دست آخر به‌عنوان جایزهٔ وُلفسکهل شناخته شد. شرطش این بود که چنانچه این جایزه تا تاریخ ۱۳ سپتامبر سال ۲۰۰۷ به‌کسی اعطا نشده باشد بعد از آن هیچ ادعایی دیگر پذیرفته نیست. با نگاهی به گذشته، بی‌تردید به‌نظر می‌رسد که ولفسکهل برداشت درستی از میزان دشواری این مسأله داشته است که ۱۰۰ سال دیگر به ریاضیدانان مهلت داده است تا اثباتی برایش پیدا کنند.

۷. پیشرفتهای نوین

در اینجا تعدادی از نتیجه‌ها را دربارهٔ قضیهٔ آخر فرما به‌اختصار فهرست کرده‌ایم که سوای آنهایی که یکراست به اثبات وایلز منجر می‌شوند، همگی در نیمهٔ دوم قرن بیستم به‌دست آمدند.

(الف) عصر رایانه

در سال ۱۹۷۳ واگستاف ثابت کرد که قضیهٔ آخر فرما به‌ازای همهٔ نماهایی مانند p که $p < ۱۲۵۰۰۰$ درست است و بیست سال بعد از آن با هلر، کراندال، اِرنوال و مِتسانکیلا این نتیجه را تا حالتی که $p < ۴۰۰۰۰۰۰$ بهتر کردند. این اثباتها فقط براساس توان محاسباتی بالای رایانه‌ها به‌دست نیامده‌اند، بلکه آمیزه‌ای از ریاضیات نظری پیچیده و کاربردهای پیچیدهٔ محاسبات بودند. به بیان دقیقتر، روشهایی برای تعیین عددهای اول نامنتظم تا کرانهای بالای نشان داده شده گسترش یافتند و پس از آن ثابت شد که قضیهٔ آخر فرما به‌ازای این عددهای اول درست است (به‌یاد بیاورید که کومر قضیهٔ آخر فرما را به‌ازای همهٔ عددهای اول منتظم ثابت کرده بود).

(ب) حدس مُردل

در سال ۱۹۲۲ مُردل حدس زد که فقط تعدادی متناهی نقطه با مختصات گویا روی هر خم جبری از گونهٔ بزرگتر از یک وجود دارد. گِرد فالتینگز این حدس را در سال ۱۹۸۳ با استفاده از روشهای بسیار کارآمد هندسهٔ جبری که تماماً در نیمهٔ دوم قرن بیستم بسط یافته بودند، ثابت کرد. این کار شاهکار بزرگی بود و برای فالتینگز مدال فیلدز، مشابه ریاضی جایزهٔ نوبل، را به ارمغان آورد. گونهٔ خم $x^n + y^n = z^n$، وقتی $n = ۲$ برابر با ۰ و اگر $n > ۲$، بزرگتر از ۱ است و ازاین رو نتیجه‌ای فوری از حدس مُردل، که دیگر قضیه شده است، این است که به‌ازای هر n که $n > ۲$ قضیهٔ آخر فرما حداکثر تعدادی متناهی جواب دارد.

(ج) میائوکا

براساس ایده‌های فالتینگز و ایجاد ارتباطهایی میان نظریهٔ اعداد و هندسهٔ دیفرانسیل، یوئیشی میائوکا، ریاضیدان ژاپنی، در سال ۱۹۸۸ اعلام کرد که قضیهٔ آخر فرما را ثابت کرده است. دان تساگیر که در آن زمان در مؤسسهٔ ماکس پلانک که میائوکا طرحی کلی از اثباتش را در آنجا ارائه می‌کرد، جزء حضّار بود اظهار داشت که «اثبات میائوکا بسیار هیجان‌انگیز است و بعضیها اعتقاد دارند که احتمالش بسیار زیاد است که درست از آب درآید. صحتش هنوز قطعی نیست اما اینجا همه‌چیز عالی به‌نظر می‌رسد». دو ماه بعد از آن فالتینگز اشکالی در اثبات پیدا کرد. با وجود این بسیاری از مفهومها در اثبات ادعایی میائوکا اهمیتشان را از دست ندادند.

۸. چندتا از ایده‌های اصلی که به اثبات قضیهٔ آخر فرما توسط وایلز منجر شدند

اکنون در آستانهٔ ورود به سرزمین موعود هستیم. کلید توفیق در این امر که کمتر از ده سال بعد از آن به اثبات قضیهٔ آخر فرما منجر می‌شود در سال ۱۹۸۵ به‌دست آمد، یعنی وقتی که گرهارد فِرای قضیهٔ آخر فرما را به خمهای

بیضوی مرتبط ساخت؛ این «شگفت‌انگیزترین و خلاقانه‌ترین ارتباط ممکن» بود. به بیان دقیقتر، اگر به‌ازای عددهای صحیح غیرصفری مانند a، b و c معادلهٔ $a^p + b^p = c^p$ برقرار باشد، خم بیضوی وابسته‌اش که اکنون به خم فرای معروف است، عبارت است از $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$.

شکل ۳ اندرو وایلز در کودکی

نظریهٔ اعداد و هندسه، به‌ویژه معادلات دیوفانتی و هندسه، تقریباً دو هزار سال با هم رابطه داشته‌اند. درحقیقت، نشان داده شده است که روشهای دیوفانتوس (در حدود سال ۲۵۰م) برای حل معادلات دیوفانتی را می‌شد به‌صورت هندسی هم بررسی کرد؛ اینها دست آخر به‌عنوان «روش مماس و قاطع» شناخته شدند.

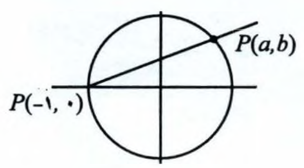
خم بیضوی خمی مسطح است که با معادله‌ای به‌شکل $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ مشخص می‌شود که در آن a، b و c عددهایی صحیح یا گویا هستند و چندجمله‌ای درجهٔ سه در طرف راست معادله ریشه‌هایی متمایز دارد. (ضریبهای موردنظر را می‌توان عددهایی حقیقی یا مختلط و درحقیقت عنصرهای هر هیأتی هم اختیار کرد، اما این کار برای مطالعه‌مان در اینجا سودی ندارد.) بنابر نتیجه‌ای معروف از زیگل این معادله تعدادی متناهی جواب صحیح دارد، گرچه ممکن است تعداد جوابهای گویایش نامتناهی باشد.

خمهای بیضوی را دیوفانتوس و فرما (عملاً) بررسی کرده و اویلر و ژاکوبی هم تحقیقات عمیقی در موردشان انجام داده بودند. نام «خمهای بیضوی» نشان‌دهندهٔ ارتباط این خمها با تابعهای بیضوی است که در قرن نوزدهم عمیقاً بررسی شدند. (کاربردهای «عملی» خمهای بیضوی در تجزیهٔ عددهای صحیح بزرگ به عاملهای اول در همین چند دههٔ اخیر پیدا شده‌اند.) در دههٔ ۱۹۸۰ بود که ارتباط مهم خمهای بیضوی با قضیهٔ آخر فرما معلوم شد.

پیش از اینکه این ارتباط را دنبال کنیم، می‌خواهیم مثالی مقدماتی از کاربرد هندسه، یعنی روش قاطعها، در حل معادله‌ای دیوفانتی، یعنی یافتن همهٔ جوابهای صحیح معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$، بیاوریم (این راه‌حل را با راه‌حل جبری این معادله در بخش ۴ مقایسه کنید).

هر دو طرف معادله را بر $z^۲$ تقسیم می‌کنیم تا به‌دست آید $\left(\frac{x}{z}\right)^۲ + \left(\frac{y}{z}\right)^۲ = ۱$. حل کردن معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ در $\mathbb{Z}$ معادل حل کردن معادلهٔ $u^۲ + v^۲ = ۱$ در $\mathbb{Q}$ است. به‌لحاظ هندسی، این کار معادل یافتن همهٔ نقاط با مختصات گویا روی دایرهٔ واحد است؛ این نقاط را نقاط گویا می‌نامند.

فرض کنید که نقطهٔ گویای ثابتی روی دایرهٔ واحد، مثلاً نقطهٔ $P(-۱,۰)$، داده شده باشد (شکل ۴ را ببینید). اگر $Q(a,b)$ نقطهٔ گویای دلخواه دیگری روی این دایره باشد، شیب خط راستی که از P و Q می‌گذرد عددی گویاست. (شیب این خط $\frac{b}{a+۱}$ است.) برعکس، هر خط راستی که از نقطهٔ $(-۱,۰)$ بگذرد و شیبش عددی گویا مانند t باشد، این دایره را در نقطهٔ گویای دیگری مانند (a,b) قطع می‌کند. ازاین‌رو یافتن همهٔ نقاط گویا روی دایرهٔ واحد، معادل یافتن نقاط برخورد همهٔ خطهای راستی مانند PQ $\left(P = (-۱,۰)\right)$ با دایره است که شیبهایشان عددهایی گویا مانند tاند.



شکل ۴

بنابراین دستگاه معادلات $u^۲ + v^۲ = ۱$ و $v = t(u+۱)$ را برحسب مجهولهای u و v حل می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$u = \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲}, \qquad v = \frac{۲t}{۱ + t^۲}$$

اکنون اگر فرض کنیم $t = \frac{m}{n}$، جوابهای صحیح معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ را پیدا می‌کنیم: $x = n^۲ - m^۲$، $y = ۲nm$ و $z = n^۲ + m^۲$.

همین روش را می‌توان برای یافتن همهٔ نقاط گویا روی هر خم درجهٔ دو و (دست‌کم در حرف) روی هر خم درجهٔ سه به‌کار برد، به‌شرطی که بتوانیم در مورد خمهای درجهٔ دو یک نقطهٔ گویا و در مورد خمهای درجهٔ سه دو نقطهٔ گویا روی خم موردنظر پیدا کنیم. مسألهٔ اول مقدماتی است در حالی که دومی بخشی از نظریه‌ای پُرمایه است.

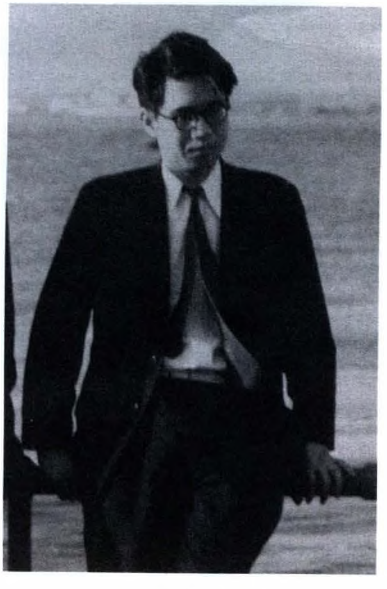
به ایدهٔ کلیدی فِرای بازمی‌گردیم، یعنی مربوط کردن خم بیضوی $y^۲ = x(x - a^p)(x + b^p)$ به معادلهٔ $a^p + b^p = c^p$. فِرای حدس زد که اگر واقعاً عددهایی صحیح مانند a، b و c وجود داشته باشند که $a^p + b^p = c^p$،

آن‌وقت خم بیضوی حاصل، یعنی $y^{2} = x(x - a^{p})(x + b^{p})$، «بدرفتار» است: این نتیجه، مثال نقضی برای به‌اصطلاح حدس شیمورا ـ تانیاماست. حدس فرای را سِر دوباره صورتبندی کرد که حکم حاصل به‌عنوان حدس اپسیلون شناخته می‌شود. می‌توان قاطعانه گفت که بنابر حدس اپسیلون، اگر حدس شیمورا ـ تانیاما درست باشد، آن‌وقت قضیهٔ آخر فرما هم درست است.

به این ترتیب طرح کلی اثبات احتمالی قضیهٔ آخر فرما معلوم شد:

الف) ثابت کردن حدس اپسیلون، یعنی اثبات استلزام حدس شیمورا ـ تانیاما $\Leftarrow$ قضیهٔ آخر فرما

ب) ثابت کردن حدس شیمورا ـ تانیاما



شکل ۵ یوتاکا تانیاما

حدس شیمورا ـ تانیاما را در سال ۱۹۵۵ تانیاما صورتبندی کرد و پس از آن (در دههٔ ۱۹۶۰) شیمورا (و ویل)، دوست و همکارش، آن را اصلاح کرد. بنابر این حدس، هر خم بیضوی پیمانه‌ای است. تعریف مفهوم پیمانه‌ای بودن در اینجا به‌لحاظ فنی دشوار است «اما اساساً پیمانه‌ای بودن یعنی اینکه برای تعداد جوابهای خم معادلهٔ درجهٔ سوم موردنظر در هر دستگاه اعداد متناهی دستوری وجود دارد». اما حدس شیمورا ـ تانیاما «نشانهٔ ارتباطی عمیق میان جبر و آنالیز است». اظهارنظرهای زیر از بَری میزر تصور بسیار مناسبی از گستردگی و ژرفای این حدس به‌دست می‌دهند:

> [این حدس] نقشی اساسی و بسیار مؤثر در بیشتر اندیشه‌ها و خواسته‌هایمان در حساب بر عهده دارد. . . . اگرچه تردیدی نیست که این حدسی «دربارهٔ حساب» است، اما می‌توان آن را به‌صورتهای

مختلف بیان کرد، به‌طوری که در یکی از شکلهایش تصور می‌شود که کاملاً «دربارهٔ» تبدیلات انتگرالی در نظریهٔ تابعهای با یک متغیر مختلط است و در شکلی دیگر به‌نظر می‌رسد که «دربارهٔ» هندسه باشد. واقعاً حدسی شگفت‌انگیز بود... اما به اینکه باید ابتدا به آن می‌پرداختیم توجه نشد، زیرا بسیار جلوتر از زمان خودش بود. اول که مطرح شد کسی به سراغش نرفت، زیرا بسیار گیج‌کننده بود. در یک طرف عالم بیضوی قرار داشت و در طرف دیگر عالم پیمانه‌ای. هر دو این شاخه‌های ریاضیات به‌طور عمیق ولی جداگانه مطالعه شده بودند.... پس از آن است که حدس شیمورا_تانیاما پیش می‌آید، این حدس برجسته که میان این دو عالم کاملاً متفاوت پلی وجود دارد. ریاضیدانان شیفتهٔ ایجاد چنین پلهایی‌اند.

البته مثالهای بی‌شماری در ریاضیات از ایجاد چنین پلهایی وجود دارد که در این میان مشهورترین و مهمترین آنها پلی است که میان جبر و هندسه ایجاد شد و هندسهٔ تحلیلی نام گرفت. در این مقاله پلهایی میان نظریهٔ اعداد و جبر، و نظریهٔ اعداد و هندسه ایجاد کردیم.

حدس شیمورا_تانیاما نه‌تنها بسیار شگفت‌انگیز بود بلکه خیلی هم ارزشمند بود، به این معنی که اگر درستی آن ثابت می‌شد، نتیجه‌های بی‌شمار و بسیار چشمگیری داشت. تا جایی که مثال نقضی برای این حدس می‌توانست نتایج ویرانگری، بسیار شدیدتر از مثال نقضی برای قضیهٔ آخر فرما، داشته باشد! (به‌یاد بیاورید که بنابر حدس اپسیلون، از هر مثال نقضی برای قضیهٔ آخر فرما مثال نقضی برای حدس شیمورا_تانیاما به‌دست می‌آید.)

اکنون وقت آن است که کن ریبت از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی به داستانمان وارد شود. در سال ۱۹۸۶ او حدس اپسیلون را ثابت کرد. به‌طور قطع این رویدادی عظیم بود. به گفتهٔ خود ریبت:

> عنصری سرنوشت‌ساز بود که متوجه‌اش نمی‌شدم در حالی که درست جلو چشمم بود.... کاملاً مجذوبش شدم.... کمابیش به‌طور غیررسمی به چند نفری (در سال ۱۹۸۶ درگردهمایی بین‌المللی ریاضیدانان در برکلی) گفتم که من ثابت کرده‌ام که از حدس شیمورا_تانیاما قضیهٔ آخر فرما نتیجه می‌شود. این خبر به‌سرعت همه‌جا پیچید و طولی نکشید که عدهٔ زیادی از آن مطلع شدند؛ آنها عجله داشتند که از من بپرسند آیا واقعاً درست است که شما ثابت کرده‌اید معادلهٔ بیضوی فرای پیمانه‌ای نیست؟

۹. اندرو وایلز

قضیهٔ آخر فرما، در بیشتر تاریخچهٔ ۳۵۰ ساله‌اش، جزء جریان غالب ریاضیات نبوده، یعنی هیچ ارتباط مستقیمی با بخشهای مهم ریاضیات نداشته است. اثبات حدس اپسیلون توسط ریبت، این وضعیت را به کلی دگرگون کرد. وایلز نوشته است که «آنچه که ریبت انجام داد ارتباط دادن قضیهٔ آخر فرما با مسأله‌ای در ریاضیات (حدس شیمورا_تانیاما) بود که هیچ‌وقت از یادها نمی‌رود». به‌محض آگاهی یافتن از اثبات ریبت، وایلز به وجد آمد:

یک روز عصر، اواخر تابستان سال ۱۹۸۶، بود که در منزل یکی از دوستانم چای می‌خوردم. در حین صحبتمان دوستم همین‌طوری به من گفت که کن ریبت ارتباط میان حدس شیمورا_تانیاما و قضیهٔ آخر فرما را ثابت کرده است. هیجان‌زده شدم؛ در آن لحظه دانستم که مسیر زندگیم تغییر می‌کند؛ زیرا این خبر به این معنی بود که برای اثبات قضیهٔ آخر فرما همهٔ آنچه که باید انجام می‌دادم اثبات حدس شیمورا_تانیاما بود. به این ترتیب رؤیای کودکیم اکنون به مرحلهٔ مناسبی رسیده بود که می‌شد روی آن کار کرد. فقط می‌دانستم که هیچ‌وقت نمی‌توانم بگذارم که این فرصت از دست برود. درست همان‌موقع فهمیدم که باید به خانه بازگردم و روی حدس شیمورا_تانیاما کار کنم.

او هفت سالِ بعد را تماماً روی این مسأله کار کرد، البته در خلوت، که این ویژگیهای کارش در ریاضیات تقریباً بی‌سابقه بوده است، هرچند که شاید در چنین شرایطی قابل درک باشد. سیمون کوچن، همکارش در پرینستون، که بعدها به ریاست دانشکده رسید، در این مورد چنین گفته است:

اگر او [وایلز] می‌گفت که روی قضیهٔ آخر فرما کار می‌کند ممکن بود به عقلش شک کنند. اگر هم شروع کنید به کسانی که متخصص‌اند کارتان را توضیح دهید، آن‌وقت مجبور می‌شوید که با آنها کار کنید. او دوست داشت که این کار را به‌تنهایی انجام دهد.

در اینجا شمه‌ای از آنچه را که در هفت سالِ بعد اتفاق افتاد از زبان خود وایلز آورده‌ایم:

در چند سال نخست کلی پیشرفت کردم. برنامه‌ای منسجم را پیش بردم.... اساساً خودم را فقط وقف این کار و خانواده‌ام کردم. گمان نمی‌کنم هیچ‌وقت از کار کردن روی این مسأله دست کشیده باشم. در تمام آن مدت در ذهنم بود. وقتی که واقعاً دست از همه‌چیز شستید تا راه‌حل چیزی را پیدا کنید، دیگر نمی‌توانید بگذارید فرصت از دست برود.

فقط در سال هفتم بود که توانست به نیکولاس کاتس، همکارش در پرینستون، اعتماد کند «کسی که پذیرفت به‌عنوان نوعی مشاور در کنار دکتر وایلز باشد.» سرانجام در آخر این دورهٔ هفت‌ساله فریاد زد، یافتم!:

در ماه مه سال ۱۹۹۳ دیگر خاطرجمع بودم که کل قضیهٔ آخر فرما توی مشتم است. با وجود این می‌خواستم اثبات را باز هم بازبینی کنم، اما قرار بود که همایشی در آخر ماه ژوئن در دانشگاه کمبریج برگزار شود و من فکر کردم که آنجا مکانی فوق‌العاده برای اعلام اثبات است، چرا که آنجا شهر سابقم و جایی بود که دانشجوی دورهٔ تحصیلات تکمیلی شده بودم.

این همایش را که موضوعش نظریهٔ اعداد بود، جان کوتس، استاد راهنمای پایان‌نامهٔ دکترای وایلز، ترتیب داده بود. در این همایش چند تن از متخصصات طراز اول جهان در این موضوع دور هم گرد آمده بودند. وایلز از کوتس

شکل ۶ اندرو وایلز و کن ریبت

درخواست کرد که طوری برنامه‌ریزی کند تا او بتواند سه سخنرانی وابسته به هم، و در هر یک از سه روز همایش یکی از آنها را ارائه کند. عنوان سخنرانیهای طرح‌شده‌اش «خمهای بیضوی، صورتهای پیمانه‌ای و نمایشهای گالوایی» بود، بی‌آنکه به قضیهٔ آخر فرما هیچ اشاره‌ای شود. فقط در طول سخنرانی سوم بر متخصصانی که جزء حضار بودند معلوم شد که اثبات قضیهٔ آخر فرما نتیجهٔ احتمالی این سخنرانیهاست. ریبت این رویداد تاریخی را این‌طور تعریف می‌کند:

> من نسبتاً زود رسیدم و در ردیف جلو با بَری میزر نشستیم. فقط برای ثبت این رویداد با خودم دوربین برده بودم. فضای خیلی سنگینی حاکم بود و همه بسیار هیجان‌زده بودند. به‌طور قطع همگی این احساس را داشتیم که داریم وارد لحظه‌ای تاریخی می‌شویم... در طول این چند روز اضطرابمان به‌تدریج افزایش یافته بود. لحظهٔ شگفت‌انگیز وقتی بود که داشتیم به اثبات قضیهٔ آخر فرما نزدیک می‌شدیم.

و بَری میزر، همکارش در هاروارد، چنین می‌گوید:

> هیچ‌وقت چنین سخنرانی باشکوهی ندیده بودم، آکنده از چنین ایده‌های شگفت‌انگیزی، با چنین اضطراب فوق‌العاده‌ای و چه برجستگی‌ای در بسط مطالب. برای آن فقط یک پایان می‌توانستیم تصور کنیم.

درواقع، وایلز سخنرانی سومش را با بیان این جمله به پایان رساند: «و با این نتیجه، قضیهٔ آخر فرما ثابت می‌شود؛ فکر می‌کنم تا همین‌جا بس است». به بیان دقیقتر، آنچه که وایلز ثابت کرد حدس شیمورا ـ تانیاما در مورد رده‌ای مهم از خمهای بیضوی معروف به خمهای بیضوی نیمه‌پایدار بود. (به‌طور کلی خمی بیضوی در صورتی نیمه‌پایدار

است که هر وقت عددی اول مانند p مبین معادلهٔ درجهٔ سوم تعریف‌کنندهٔ خم موردنظر را بشمارد، درست دو تا از ریشه‌های آن به‌پیمانهٔ p همنهشت باشند.) یعنی او ثابت کرد که هر خم بیضوی نیمه‌پایدار پیمانه‌ای است. (وقتی وایلز اثباتش را ارائه کرد، حدس شیمورا_تانیاما، در حالت کلی، هنوز ثابت نشده بود و به‌تازگی (در ماه ژوئن سال ۱۹۹۹) ثابت شده است.) ریبت پیشتر شکلی قوی از حدس اپسیلون را ثابت کرده بود، به این مضمون که اگر هر خم بیضوی نیمه‌پایدار پیمانه‌ای باشد، آن‌وقت قضیهٔ آخر فرما درست است.

کار وایلز بسیار عمیق و به‌لحاظ فنی بسیار پیچیده است. شخصی می‌گفت که «درک اثبات کامل‌شده، حتی برای متخصصان، پرزحمت است.» دو اظهارنظر زیر درک مناسبی از میزان ژرفای آن به‌دست می‌دهند:

> در پایان آن روز بر همهٔ متخصصان سراسر جهان معلوم شد که تقریباً همهٔ ایده‌های ناب و مهمی که در بیش از سه قرن و نیم گذشته از زمان فرما در نظریهٔ اعداد شکل گرفته بودند اجزای سازندهٔ این اثبات‌اند (ر. مورتی).

ازاین‌رو، به تعبیری اثبات وایلز نتیجهٔ باشکوه تلاش دسته‌جمعی دهها تن از ریاضیدانان در طول چند قرن است!

> این کار بی‌اندازه عمیق است، شامل آخرین ایده‌های تقریباً بیست تا از شاخه‌های مختلف ریاضیات است، ازجمله نظریه‌های طرحهای گروهی، همانستگی بلوری، نمایشهای گالوایی، نظریهٔ دگردیسی، حلقه‌های گورنشتاین، دستگاههای اویلری (هندسی) و بسیاری از نظریه‌های دیگر (گرانویل).

سؤال به این سادگی و راه‌حلش این قدر پیچیده! مسأله، مسأله‌ای از نظریهٔ اعداد است، سؤالی دربارهٔ عددهای طبیعی؛ اما اثباتش متعلق به کدام بخش از ریاضیات است؟ بعید است کسی بتواند پاسخی قانع‌کننده بدهد، زیرا در این اثبات بسیاری از بخشهای مهم ریاضیات یکجا جمع شده‌اند، و این مشخصهٔ ریاضیات جدید است.

با همهٔ اینها سخنرانیهای وایلز در ماه ژوئن سال ۱۹۹۳ در دانشگاه کمبریج پایان این سفر پرماجرای ۳۵۰ساله نبود. در اینجا شمه‌ای از آنچه را که بعداً اتفاق افتاد آورده‌ایم.

خبر اثبات قضیهٔ آخر فرما توسط وایلز جهان ریاضی را تکان داد. ارسال پیامهای الکترونیکی یک لحظه متوقف نمی‌شد. این خبر در رسانه‌ها هم سروصدای بسیار زیادی به‌پا کرد که چنین رویدادی، وقتی لحاظ کنیم که به خبری ریاضی مربوط می‌شود، واقعاً بی‌سابقه بوده است. خبر اثبات وایلز موضوع صفحات اول نیویورک تایمز شد. این خبر، مطلب مهم نیوزویک و تایم بود و آن‌شب در اخبار شبانگاهی اِن‌بی‌سی هم پخش شد. مجلهٔ پیپِل نام وایلز را در زمرهٔ «۲۵ شخصیت مهم آن سال» آورد.

پس از آنکه سروصداها خوابید، کار بازبینی اثبات آغاز شد. وایلز مقاله‌ای ۲۰۰ صفحه‌ای را که درواقع اثبات قضیهٔ آخر فرما بود به اینونسیونس متمتیکا ارائه کرد. شش ریاضیدان مأمور شدند تا صحت و سُقم آن را بررسی کنند که چنین چیزی تا آن زمان سابقه نداشت (معمولاً این کار را ۱ داور تا ۳ داور انجام می‌دهند)، اما باز شرایط این‌طور ایجاب می‌کرد. اشکالات زیادی پیدا شد؛ بیشترشان به‌آسانی و بلافاصله برطرف شدند. با وجود این یک اشکال که

کاتس آن را پیدا کرد برطرف نشد. اما این موضوع را به جامعهٔ ریاضی بروز ندادند که با این کار، اثبات بیشتر در معرض خطر قرار گرفت! بعد از چند ماه وقتی هیچ اثباتی یا خبری از اثباتی قریب‌الوقوع به‌دست نیامد، شایعه‌پردازی آغاز شد. اثبات وایلز هم به‌همان سرنوشت اثبات فرما دچار شد؟ یا به سرنوشت اثبات لامه یا به سرنوشت اثبات میائوکا؟

وایلز در چهار دسامبر سال ۱۹۹۳، یعنی پنج ماه بعد از آنکه آن‌طور شگفت‌آور در کمبریج اعلام کرد که قضیهٔ آخر فرما را ثابت کرده است، این توضیح را روی تابلو اعلانات یکی از سایتهای ریاضی به نمایش گذاشت:

> با توجه به تصوراتی که در مورد وضع کارم روی حدس شیمورا-تانیاما و قضیهٔ آخر فرما ایجاد شده است، لازم می‌دانم شرح مختصری از وضعیت موجود بیان کنم. هنگام بازبینی اثبات، تعدادی اشکال نمایان شد که بیشترشان برطرف شده‌اند، اما در یک مورد خاص اشکال را هنوز مرتفع نکرده‌ام. . . . اطمینان دارم که می‌توانم در آیندهٔ نزدیک با استفاده از ایده‌هایی که در سخنرانیهایم در کمبریج شرح دادم این کار را تمام کنم.

در ژانویهٔ سال ۱۹۹۴ وایلز، به توصیهٔ پیتر سرنک، همکارش در پرینستون، خواستار کمک ریچارد تیلور، ریاضیدان کمبریجی، دانشجوی دکترای سابقش، شد. چند ماهی که گذشت و چند ماه آینده، همان‌طور که می‌توان حدس زد، به تأیید سیمون سینگ بیش از هر وقت دیگر به وایلز سخت گذشته است:

> چهارده ماه آخر (از ژوئیهٔ سال ۱۹۹۳ تا آگوست سال ۱۹۹۴) غم‌انگیزترین و تحقیرآمیزترین دورهٔ حرفهٔ ریاضی وایلز بوده است. . . . دلخوشی، اشتیاق و آرزویی که در طول سالها محاسبات پنهانی با خود داشت جایشان را به ناراحتی و ناامیدی دادند. . . . بعد از هشت سال تلاش بی‌وقفه و با وجود اینکه یک عمر این مسأله همهٔ ذهنش را به خود مشغول کرده بود، آماده بود که شکست را بپذیرد. او به تیلور گفت که چیزی از ادامه دادن به تلاشهایش برای درست کردن اشکال اثبات به‌دست نمی‌آید. . . . تیلور . . . پیشنهاد کرد که یک ماه دیگر هم استقامت به خرج دهند.

در نوزدهم سپتامبر سال ۱۹۹۴، آنها (وایلز و تیلور) گیر اساسی اثبات را پیدا کردند. وایلز جرقهٔ ذهنی‌ای را که کار اثبات را یکسره کرد این‌طور به خاطر می‌آورد:

> این ایده بی‌اندازه زیبا بود؛ بسیار ساده و زیرکانه بود. همان‌شب به خانه بازگشتم و تا صبح راجع به آن فکر کردم. صبح روز بعد باز آن را از اول تا آخر بررسی کردم و بعد به طبقهٔ پایین رفتم و به همسرم گفتم که «آنچه را که می‌خواستم به‌دست آوردم. فکر می‌کنم آن را پیدا کرده‌ام». اما این اتفاق آنقدر غیرمنتظره بود که او خیال کرد دربارهٔ اسباب‌بازی بچه‌ها یا چیزی از این دست صحبت می‌کنم و گفت «چه چیزی را پیدا کردی؟» گفتم «اثباتم را درست کردم. آنچه را که می‌خواستم به‌دست آوردم.»

۱۰. تجلیلها

کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۹۴، در ماه آگوست در زوریخ برگزار شد. چنانچه وایلز پیش از آغاز این همایش اشکال اثباتش را برطرف کرده بود، بی‌تردید در آنجا به او مدال فیلدز اعطا می‌شد. در همایش بعدی در برلین در سال ۱۹۹۸، او دیگر واجد شرایط دریافت مدال فیلدز نبود؛ زیرا در آن زمان سنش از ۴۰ سال گذشته بود. با وجود این، به او «لوح نقرهٔ جامعهٔ بین‌المللی ریاضی»، لوحی برای قدردانی ویژه، اعطا شد. در بیست‌وهفتم ژوئن سال ۱۹۹۷ جایزهٔ وُلفسکهل را دریافت کرد، ده سال پیش از پایان مهلت مقرر آن، که مبلغش در آن‌وقت ۵۰۰۰۰ دلار بود (به‌یاد بیاورید که ارزش آن در سال ۱۹۰۷ معادل ۱۰۰۰۰۰۰ دلار بود).

چند تن از برجسته‌ترین متخصصان این رشته کار وایلز را این‌گونه ارزیابی کرده‌اند:

> وایلز برای تکمیل اثباتش باید بسیاری از ایده‌های جدید در ریاضیات را پیش می‌کشید و یا باز هم گسترش می‌داد. به‌ویژه، او باید به حدس شیمورا ـ تانیاما می‌پرداخت که حل آن تحول قرن بیستمی مهمی هم در هندسهٔ جبری بود و هم در آنالیز مختلط. وایلز برای این کار ارتباطی میان این دو رشتهٔ مهم ریاضیات ایجاد کرد. از این به بعد تحولات در هر یک از این دو زمینه قطعاً الهام‌بخش نتایج جدیدی در دیگری است. از این گذشته اکنون که این پل ایجاد شده است، ارتباطهای دیگری هم میان شاخه‌های ریاضی دور از هم ممکن است پدید آیند (سینگ و ریبت).

> از نظر ریاضی، اثبات نهایی، معادل شکافتن اتم یا یافتن ساختار DNA است. اثبات قضیهٔ آخر فرما موفقیت عقلانی بزرگی است و نباید این حقیقت را نادیده گرفت که این اثبات به یک‌باره نظریهٔ اعداد را به کلی متحول ساخت. برای من جذابیت و زیبایی کار اندرو در این است که با به انجام رسیدن آن جهش عظیمی در نظریهٔ اعداد به‌وقوع پیوست (کوتس).

> قضیهٔ آخر فرما شایستهٔ جایگاهی ویژه در تاریخ تمدن است. این قضیه در عین سادگی، غیرحرفه‌ایها و حرفه‌ایها را درست به یک اندازه وسوسه کرده است و با پُرباری فوق‌العاده‌ای به پیشرفت بسیاری از عرصه‌های ریاضیات، نظیر هندسهٔ جبری و در این اواخر نظریهٔ خمهای بیضوی و نظریهٔ نمایشها، منجر شده است. واقعاً بجاست گفته شود که این اثبات عمارتی را که از عالیترین تفکرات ریاضیات جدید ساخته شده است به اوج کمال می‌رساند (ر. مورتی).

این اظهارنظر قطعاً بر ادعای گاوس مبنی بر اینکه قضیهٔ آخر فرما مسأله‌ای جالب نبوده است که او روی آن کار کند، خط بطلان می‌کشد! در میان ریاضیدانان، حتی برجسته‌ترینشان هم ممکن است در مورد مسأله‌ای اشتباه نظر دهد.

آخرین کلام از خود وایلز است:

> این سعادتِ بسیار نادر نصیبم شد که بتوانم رؤیای دوران کودکیم را در بزرگسالی دنبال کنم. می‌دانم که این سعادت بی‌نظیری است، اما اگر بتوانید در بزرگسالی به چیزی بپردازید که بیشتر برایتان اهمیت

دارد، آن‌وقت آن کار ارزشمندتر از هر چیزی است که می‌شود تصور کرد. با حل شدن این مسأله در وجودم به‌طور قطع فقدانش را حس می‌کنم، اما در عین حال فوق‌العاده هم احساس آزادی می‌کنم. آنقدر این مسأله ذهنم را به خود مشغول کرده بود که هشت سال تمام مدام راجع به آن فکر می‌کردم، از صبح وقتی که از خواب بیدار می‌شدم تا شب وقتی که به خواب می‌رفتم. مدت زمان مدیدی بود که فقط راجع به یک چیز فکر می‌کردم. این سفر پرماجرای استثنایی اکنون پایان یافته و بنابراین خیالم راحت شده است.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Israel Kleiner, From Fermat to Wiles: Fermat's Last Theorem Becomes a Theorem, *Elemente der Mathematik*, Vol. 55, Iss. 1, 2000, pp. 19-37.

حساب خمهای بیضوی

یوری سولوویو

ریاضیات عصر جدید چیزهای زیادی از چندین نوشتهٔ مهم عهد قدیم به ارث برده است. یکی از اینها کتاب حساب نوشتهٔ دیوفانتوس اسکندرانی است. این کتاب در قرن سوم پس از میلاد مسیح نوشته شده، بیش از هزار سال مفقود بوده و گمان می‌کردند که از بین رفته است. کسی از آن خبری نداشت تا سال ۱۴۶۴، که رگیومونتانوس (۱۴۷۶_۱۴۳۶)، دانشمند آلمانی، شش جلد از سیزده جلد کتاب حساب را پیدا کرد. نخستین ترجمهٔ لاتین این کتاب در سال ۱۵۷۵ چاپ شده است. ویراستی که کلود_گاسپار باشه در سال ۱۶۲۱ از این کتاب منتشر کرد کتاب مرجع بسیاری از ریاضیدانان، ازجمله پیر دو فرما (۱۶۶۵_۱۶۰۱) و رنه دکارت (۱۶۵۰_۱۵۹۶)، بوده است.

با اینکه این کتاب هزار سال به‌دست فراموشی سپرده شده بوده، به هیچ‌وجه کتاب منسوخ‌شده‌ای به‌حساب نمی‌آید. درحقیقت، بهترین اثر در جبر تا پیش از قرن شانزدهم میلادی بوده است. مثلاً دیوفانتوس، درست برعکس جبردانهای اروپایی در آن زمان، با عددهای منفی و گویا بسیار کار کرده، از حروف برای نمادگذاری معادله‌ها استفاده کرده است و از همه مهمتر، درکارهایش به جوابهای صحیح و گویا برای معادله‌های خطی، درجهٔ دوم و درجهٔ سوم و دستگاههای معادله‌های با ضریبهای صحیح از دو متغیر یا تعداد بیشتری متغیر برمی‌خوریم. از این پس بود که یافتن جوابهای چنین معادله‌هایی (که امروزه آنها را دیوفانتی می‌نامند) موضوع تحقیقاتی مهمی در ریاضیات شد.

اکنون آماده‌ایم که معادله‌های دیوفانتی متعددی را بررسی کنیم (سعی کرده‌ام زیباترین آنها را انتخاب کنم). برای حل کردن این معادله‌ها نه‌تنها باید کتاب مهم دیوفانتوس را به‌دقت خواند، بلکه باید از آخرین دستاوردهای ریاضیات هم چیزهایی را دانست.

روش قاطعهای دیوفانتوس

این روش را با آوردن حالت خاصی از مسأله‌ای که دیوفانتوس درکتاب حسابش حل کرده توضیح می‌دهیم. معادلهٔ

$$x^۲ - y^۲ = ۱ \qquad (۱)$$

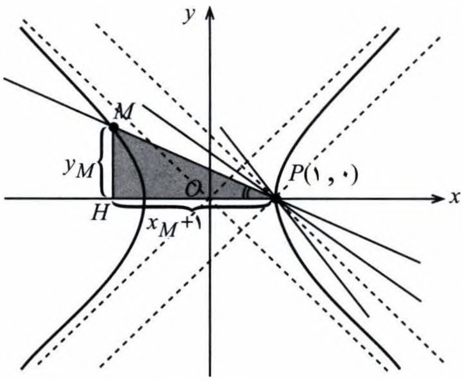
را در نظر بگیرید. فرض کنید باید همهٔ جوابهای گویای این معادله را پیدا کنیم_یعنی، باید همهٔ زوجهای مرتب مانند (x, y) را پیدا کنیم که x و y گویا هستند و در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند.

می‌توانیم معادلهٔ (۱) (یا هر معادلهٔ دیگری برحسب x و y) را خمی در دستگاه مختصات به‌حساب بیاوریم. در مورد معادلهٔ (۱)، خم موردنظر هذلولی است (شکل ۱ را ببینید). در نگاه اول، جواب $(۱, ۰)$، که نظیر نقطهٔ

P، محل برخورد هذلولی با محور x، است به چشم می‌آید. از این نقطه خط قاطعی با شیب k رسم می‌کنیم. معادلهٔ این خط

$$y = k(x - ۱) \tag{۲}$$

است.



شکل ۱

اکنون نقطهٔ دوم برخورد این خط با خم به معادلهٔ (۱) را پیدا می‌کنیم. عبارت سمت راست معادلهٔ (۲) را به‌جای y در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم و معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل را برحسب x حل می‌کنیم. معلوم می‌شود که

$$x = \frac{-k^۲ \pm ۱}{۱ - k^۲}$$

یکی از ریشه‌ها را از قبل می‌شناسیم، این ریشه $x_۱ = ۱$ است (که نظیر نقطهٔ $(۱, ۰)$ است) و از ریشهٔ دوم، یعنی

$$x_۲ = \frac{k^۲ + ۱}{k^۲ - ۱}$$

نقطهٔ برخورد دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$(x_۲, y_۲) = \left(\frac{k^۲ + ۱}{k^۲ - ۱}, \frac{۲k}{k^۲ - ۱}\right) \tag{۳}$$

به‌ازای هر k ($k \neq \pm ۱$)، از این دستور نقطه‌ای روی خم موردنظر و درنتیجه جوابی برای معادلهٔ مفروض به‌دست می‌آید (وقتی که $k = \pm ۱$، قاطع موردنظر، هذلولی را فقط در نقطهٔ P قطع می‌کند (شکل ۱ را ببینید)). برعکس، به‌ازای هر جواب گویا (به‌ازای هر نقطهٔ گویا روی خم موردنظر مانند M)، معادلهٔ قاطع PM به‌شکل معادلهٔ (۲)

است، که در آن k عددی گویاست (زیرا، در این حالت، طول ضلعهای زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویهٔ PMH عددهایی گویا هستند).

بنابراین، وقتی k همهٔ مقدارهای گویای مجاز را اختیار کند ($k \neq \pm ۱$)، همهٔ جوابهای گویای معادلهٔ (۱) از تساوی (۳) به‌دست می‌آیند.

البته دیوفانتوس نه دستگاه مختصاتی در نظر گرفته بوده نه خمی نظیر معادلهٔ مفروض. درحقیقت، استفاده از روش مختصات در هندسه، نخستین‌بار در قرن هفدهم میلادی در کارهای دکارت به چشم می‌خورد. دیوفانتوس به‌طور کاملاً جبری از جایگذاری معادلهٔ (۲) استفاده کرده و تساوی (۳) را به‌دست آورده است (البته، با نمادگذاریی متفاوت). علاوه‌بر این، او دریافته بود که می‌توان روشی را که توضیح دادیم، نه‌تنها برای چندجمله‌ای $x^۲ - y^۲ - ۱$، بلکه برای هر چندجمله‌ای درجهٔ دوم دو متغیره مانند

$$ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f$$

که در آن a، b، . . . و f عددهایی صحیح یا گویا هستند، به‌کار برد، به‌شرطی که دست‌کم یک ریشهٔ گویا برای معادلهٔ موردنظر پیدا کرده باشیم.

این‌طور نیست که هر خمی که با چندجمله‌ایی درجهٔ دوم تعریف شده نقطه‌ای گویا دربر داشته باشد. مثلاً، چنین نقطه‌ای روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳$ یا روی بیضی $x^۲ + ۸۲y^۲ = ۳$ وجود ندارد. با این وجود، روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ نقطه‌هایی گویا مانند $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ وجود دارند. سه‌تایی‌ای از عددهای صحیح مانند (a, b, c) را که از چنین نقطه‌ای به‌دست می‌آید سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامند، زیرا در تساوی $a^۲ + b^۲ = c^۲$ صدق می‌کند و این تساوی در حکم قضیهٔ فیثاغورس دیده می‌شود. می‌توانیم همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی را با استفاده از روش قاطعها (و البته به روشهای دیگر) پیدا کنیم.

مسألهٔ اثبات وجود نقطه‌ای گویا روی خمی درجهٔ دوم بسیار دشوار است. نخستین پیشرفت واقعی را در حل این مسأله براهماگوپتا (۶۶۵ـحدود ۵۹۸) و بهاسکارا (۱۱۸۵ـحدود ۱۱۱۴)، ریاضیدانان ایتالیایی، به‌دست آوردند و جواب کامل پیدا نشد تا سال ۱۷۶۸ که ژوزف‌ـلویی لاگرانژ (۱۸۱۳ـ۱۷۳۶)، ریاضیدان مشهور فرانسوی، جواب را پیدا کرد.

بررسیهای دیوفانتوس فقط محدود به معادله‌های درجهٔ دوم نبوده است. او در مورد معادله‌های درجهٔ سوم هم کارهایی کرده است و همان‌طورکه در بخش بعد خواهیم دید روشی کلی برای بررسی این معادله‌ها ابداع کرده است.

خط مماس بر خمها

در یکی از مسأله‌های کتاب حساب باید جوابی گویا برای معادلهٔ

$$y(۶ - y) = x^۳ - x \qquad (۴)$$

پیدا کنیم. راه‌حل دیوفانتوس کوتاه و ماهرانه است. او از جایگذاری $x = ۲y - ۱$ استفاده کرده است. در این صورت به‌دست می‌آید

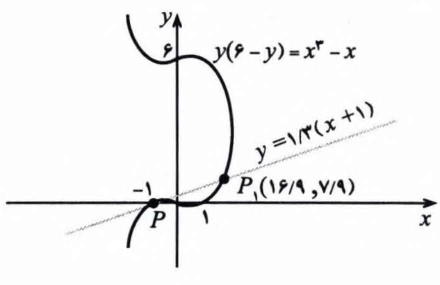
$$۶y - ۶y^۲ = ۸y^۳ - ۱۲y^۲ + ۴y$$

اگر اولین ۶، ۴ می‌بود، جمله‌های درجهٔ اول به خوبی و خوشی حذف می‌شدند. اما این ۴ از ۲ در جایگذاری $x = ۲y - ۱$ به‌دست آمده است. بنابراین، ۲ را با ۳ عوض می‌کنیم ـ یعنی، فرض کنید $x = ۳y - ۱$. در این صورت جمله‌های درجهٔ اول حذف می‌شوند و به‌دست می‌آید

$$y^۲(۹y - ۷) = ۰ \qquad (۵)$$

بنابراین $y = \frac{۷}{۹}$ و $x = \frac{۱۶}{۹}$. به این ترتیب جواب گویای $(\frac{۱۶}{۹}, \frac{۷}{۹})$ را برای معادلهٔ درجهٔ سوم (۴) به‌دست آورده‌ایم.

در نگاه نخست، چیز خاصی در این راه‌حل به چشم نمی‌آید. خیلی راحت حدس زدیم که باید از جایگذاری $x = ۳y - ۱$ استفاده کنیم و این کار در پیدا کردن جواب کمکمان کرد. چه ایدهٔ عمیقی در پس این موضوع نهفته است؟ برای پاسخ دادن به این سؤال بار دیگر به صفحهٔ مختصات توجه کنید و معادلهٔ (۴) را رسم کنید (شکل ۲ را ببینید). (بعداً در این مقاله روش رسم این نمودارها را توضیح می‌دهیم.) خط خاکستری در شکل ۲ خط $x - ۳y + ۱ = ۰$ است. این خط، خط مماس بر خم موردنظر در نقطهٔ $P(-۱, ۰)$ است (درحقیقت، معادلهٔ (۵)، علاوه‌بر ریشهٔ $y = \frac{۷}{۹}$، دو «ریشهٔ برابر» هم دارد: $y^۲ = ۰$).



شکل ۲

می‌توانیم همین روند را ادامه دهیم و از نقطهٔ گویای $(\frac{۱۶}{۹}, \frac{۷}{۹})$ مماس دیگری بر خم (۴) رسم کنیم. تأیید خواهید کرد که این خط خم موردنظر را در نقطهٔ گویای سومی قطع می‌کند و همین‌طور تا آخر. اما دیوفانتوس بیش از این پیش نرفت و بیش از ۱۵۰۰ سال گذشت تا ریاضیدانان توانستند از ایده‌های دیوفانتوس در کلی‌ترین حالتشان استفاده کنند.

خمهای درجهٔ سوم

روش هندسی‌ای را که تا اینجا استفاده کردیم پی می‌گیریم و به‌جای یافتن جوابهای معادله‌های درجهٔ سوم، مسألهٔ هم‌ارز زیر را در نظر می‌گیریم: کدام نقطه‌های گویا روی خم مسطحی که با معادلهٔ درجهٔ سوم

$$f(x,y) = ax^۳ + bx^۲y + \cdots + hx + iy + j = ۰$$

که در آن ضریبها عددهایی صحیح‌اند، مشخص شده است قرار دارند؟

می‌توانیم همهٔ خمهای از این دست را به دو ردهٔ عمده تقسیم کنیم. ردهٔ اول از همهٔ خمهایی تشکیل شده که تیزه دارند (از خواننده می‌خواهیم که تحقیق کند که مبدأ برای خم $y^۲ = x^۳$ چنین نقطه‌ای است) یا خودشان را قطع می‌کنند، همین‌طور همهٔ خمهایی که می‌توان آنها را به‌شکل

$$f(x,y) = f_۱(x,y)f_۲(x,y)$$

تجزیه کرد، که در اینجا $f_۱(x,y)$ و $f_۲(x,y)$ چندجمله‌ایهایی‌اند که درجه‌شان از درجهٔ $f(x,y)$ کوچکتر است. چنین خمهایی را تباهیده می‌نامند. ردهٔ دوم از همهٔ خمهای ناتباهیده تشکیل شده که از چندجمله‌ایی درجهٔ سوم که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند تشکیل می‌شود. چنین خمهایی را بیضوی[۱] می‌نامند. این رده، که کلی‌ترین رده است، موضوع مورد علاقهٔ ماست. همهٔ خمهای بیضوی که بررسی می‌کنیم به شکل استاندارد

$$y^۲ = x^۳ + ax^۲ + bx + c \qquad (۶)$$

هستند، که در اینجا ضریبهای a، b و c عددهایی صحیح و چندجمله‌ای

$$P(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$$

ریشهٔ چندگانه ندارد.

این فرض که معادلهٔ همهٔ خمهای موردنظر ما را می‌توان به این شکل استاندارد نوشت چیزی از کلی بودن استدلالمان کم نمی‌کند، زیرا می‌توان هر خم ناتباهیده مانند

$$f(x,y) = ۰$$

را با استفاده از تبدیلهای مناسبی به‌شکل معادلهٔ (۶) نوشت. اگر ضریبهای $f(x,y)$ عددهایی صحیح باشند، می‌توان مسألهٔ یافتن همهٔ نقطه‌های گویا روی خم $f(x,y) = ۰$ را تبدیل به مسألهٔ مشابهی در مورد خمی که به‌شکل معادلهٔ (۶) نوشته شده و در آن a، b و c عددهایی صحیح‌اند تبدیل کرد.

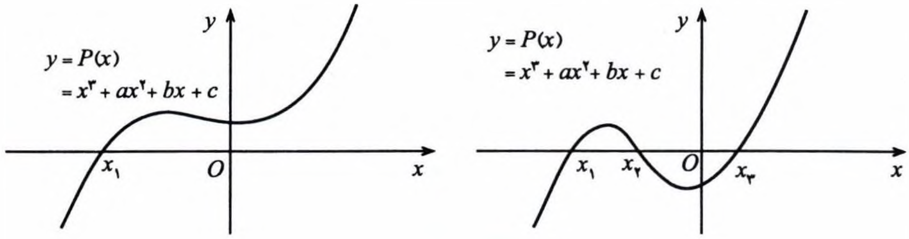
۱. توجه کنید که این خمها خودشان بیضی نیستند. رابطهٔ میان بیضیها و این خمها، که در نامشان هم مستتر است، موضوع جالبی برای مقاله‌ای دیگر است.

نمودار خمهای بیضوی

ابتدا ببینیم شکل خم (۶) چگونه است. ساده‌ترین راه برای رسم این خم را در زیر توضیح داده‌ایم. نمودار تابع

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$$

را در نظر بگیرید و قرینهٔ آن را نسبت به محور x پیدا کنید. برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که هر چندجمله‌ای درجهٔ سوم (که ریشهٔ چندگانه ندارد) یا یک ریشهٔ حقیقی دارد یا سه ریشهٔ حقیقی. بنابراین نمودار $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ شبیه به آنهایی است که در شکلهای ۳ (الف) و ۳ (ب) نشان داده شده‌اند.



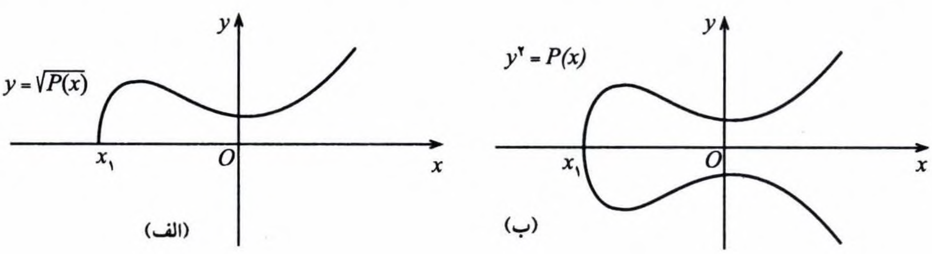
(الف) (ب)

شکل ۳

اکنون به‌راحتی می‌توانیم نمودار تابع

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$$

را رسم کنیم (شکل ۴ (الف) را ببینید) و سپس نمودار خم بیضوی $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ را رسم کنیم (شکل ۴ (ب) را ببینید). در شکل ۴ حالت متناظر با شکل ۳ (الف) نشان داده شده است. پیشنهاد می‌کنیم که خواننده خم متناظر با شکل ۳ (ب) را رسم کند. این خم از دو قسمت تشکیل شده است (شکل ۷ را ببینید).



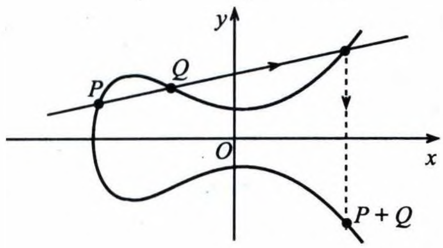
(الف) (ب)

شکل ۴

توجه کنید که نمودار تابعهای $y = \sqrt{P(x)}$ و $y = -\sqrt{P(x)}$ در نقطه‌های $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ بدون اینکه هیچ زاویه‌ای به‌وجود بیاید به هم وصل می‌شوند، زیرا مماس بر نمودار $y = \sqrt{P(x)}$ در این نقطه‌ها عمودی است.

جمع کردن نقطه‌ها روی خمهای بیضوی

هنگام استفاده از روش قاطعها در مورد خمی بیضوی مانند C نتیجه‌ای غیرمنتظره به‌دست می‌آید. به‌نظر می‌رسد که می‌توانیم نقطه‌های C را «جمع» کنیم. یعنی، می‌توانیم براساس نمایش نموداری خم C، عملی را روی نقطه‌های C تعریف کنیم، که آن را «جمع کردن» می‌نامیم (شکل ۵ را ببینید). دو نقطه روی C مانند P و Q انتخاب کنید و خطی رسم کنید که از این دو نقطه بگذرد. این خط خم C را در نقطهٔ سومی قطع می‌کند. قرینهٔ این نقطه را نسبت به محور x پیدا کنید. نقطهٔ به‌دست آمده را مجموع نقطه‌های P و Q می‌نامند. در شکل ۵ این نقطه را با $P + Q$ نشان داده‌ایم. (البته، این‌طور نیست که هر خطی که از دو نقطهٔ C می‌گذرد C را در نقطهٔ سومی قطع کند ـ مثلاً، خطی عمودی.)



شکل ۵

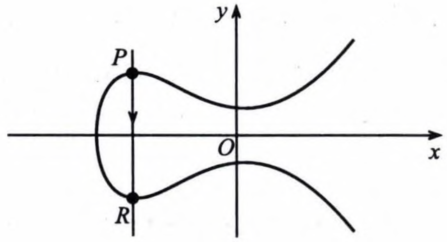
اکنون ویژگیهای این عمل جدید را بررسی می‌کنیم و آن را با عمل جمع کردن عددها مقایسه می‌کنیم. این عمل آخری تعویض‌پذیر است ـ یعنی، $a + b = b + a$ ـ همین‌طور شرکت‌پذیر است ـ یعنی، $(a + b) + c = a + (b + c)$. علاوه‌بر اینها، این عمل عضو همانی ـ عددی مانند O که به‌ازای هر a، $a + O = a$ ـ دارد. سرانجام، به‌ازای هر عدد مانند a، عددی وارون ـ عددی مانند $-a$ که $a + (-a) = O$ ـ وجود دارد.

در مورد خمهای بیضوی چه پیش می‌آید؟ پیش از هر چیز، جمع کردن نقطه‌ها تعویض‌پذیر است. درحقیقت، برای یافتن $P + Q$، از همان خطی استفاده می‌کنیم که برای $P + Q$. بنابراین، $Q + P = P + Q$.

جمع کردن نقطه‌های خمهای بیضوی شرکت‌پذیر هم هست، اما اثبات این مطلب آسان نیست. به کمک ترسیم می‌توانیم تعبیری هندسی برای این مطلب بیابیم.

اکنون به‌سراغ سؤال وجود عضو همانی می‌رویم: نقطه‌ای مانند E از خم موردنظر که به‌ازای هر نقطهٔ دیگر خم مانند P، $P + E = P$. چگونه می‌توان چنین نقطه‌ای را پیدا کرد؟ به شکل ۶ نگاه کنید. روی خم موردنظر نقطه‌ای مانند P انتخاب کنید. می‌خواهیم چیزی پیدا کنیم که اگر خطی از P و «چیزی» رسم کنیم، نقطهٔ برخورد

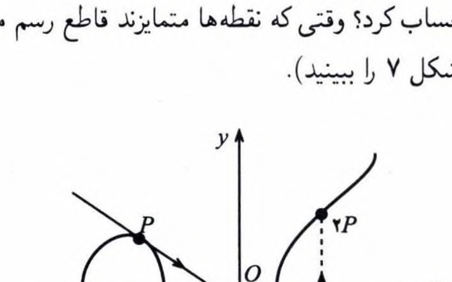
این خط با خم را پیدا کنیم و قرینهٔ آن را نسبت به محور x بیابیم، به نقطهٔ P برگردیم. فرض کنید R قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به محور x باشد. معلوم است که خطی که از P و «چیزی» می‌گذرد باید از P و R بگذرد، یعنی باید خطی عمودی باشد. بنابراین، اگر نقطه‌ای مانند E وجود داشته باشد که $P + E = P$، این نقطه روی صفحه نیست، زیرا همزمان باید هم روی خم باشد هم روی این خط عمودی.



شکل ۶

چون نقطه‌ای مانند E روی صفحه وجود ندارد (و چون بسیار به آن احتیاج داریم)، آن را به صفحه اضافه می‌کنیم و آن را را نقطهٔ در بینهایت می‌نامیم. این نقطه باید چه ویژگیهایی داشته باشد؟ هر خط عمودی از دو سو به بینهایت می‌رود: بالا و پایین. لازم است که همهٔ این بینهایت‌ها نظیر یک نقطه باشند، که همان نقطهٔ E است. به‌عبارت دیگر، E را نقطه‌ای که همهٔ خطهای عمودی در آنجا به هم می‌رسند می‌گیریم. نقطهٔ E، عضو همانی جمع کردن نقطه‌ها، به این ترتیب مشخص می‌شود. بنابر تعریف E، هر خط عمودی که از P می‌گذرد از E هم می‌گذرد. بنابراین R، دومین نقطه‌ای که این خط خم بیضوی موردنظر را قطع می‌کند، در تساوی $P + R = E$ صدق می‌کند؛ درنتیجه، وارون P است. از طرف دیگر، R قرینهٔ P نسبت به محور x است. بنابراین، هر نقطه از خم مانند P، وارونی مانند $-P$ دارد که همان نقطهٔ R است. بنابراین جمع کردن نقطه‌های روی خمهای بیضوی همهٔ ویژگیهای جمع کردن عددها را دارد.

چگونه می‌توان $P + P$ را حساب کرد؟ وقتی که نقطه‌ها متمایزند قاطع رسم می‌کنیم و اکنون که یکی‌اند معلوم است که باید مماس رسم کنیم (شکل ۷ را ببینید).



شکل ۷

در مورد $3P$ چطور؟ خیلی ساده است: $2P$ را با P جمع می‌کنیم. به‌همین ترتیب، $4P = 3P + P$، $5P = 4P + P$ و همین‌طور تا آخر.

به دنبال نقطه‌های گویا

اکنون که عمل جمع نقطه‌ها را در اختیار داریم، به دنبال نقطه‌های گویا می‌گردیم. فرض کنید $P = (x_1, y_1)$ و $Q = (x_2, y_2)$ دو نقطهٔ گویا روی خم بیضوی $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشند، که در آن a، b و c عددهایی صحیح‌اند و فرض کنید خطی که از P و Q می‌گذرد خم را در نقطهٔ سومی مانند $R(x_3, y_3)$ قطع کند. در این صورت R هم نقطه‌ای گویاست.

به‌سادگی می‌توان این حکم را ثابت کرد. درحقیقت، اگر معادلهٔ خط موردنظر

$$y = kx + d \tag{7}$$

باشد، آن‌وقت k و d باید گویا باشند، زیرا می‌توانیم آنها را برحسب مختصات نقطه‌های P و Q، یعنی (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، بنویسیم:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
$$d = y_1 - kx_1 = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$$

اگر y را از معادلهٔ (۷) در معادلهٔ خم بیضوی موردنظر قرار دهیم به معادلهٔ درجهٔ سومی برحسب x می‌رسیم که ضریبهایش عددهایی گویا هستند:

$$(kx + d)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

که می‌توان آن را به‌شکل

$$x^3 + (a - k^2)x^2 + (b - 2kd)x + c - d^2 = 0$$

نوشت. از رابطهٔ میان ریشه‌ها و ضریبهای معادله‌های چندجمله‌ای نتیجه می‌شود

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2 - a$$

چون x_1 و x_2 هر دو عددهایی گویا هستند، x_3 هم عددی گویاست، همین‌طور y_3، زیرا $y_3 = kx_3 + d$.

با استفاده از این استدلال به‌سادگی می‌توانیم دستوری برای مختصات نقطهٔ $P + Q$ پیدا کنیم. بنابر تعریف، $P + Q$ قرینهٔ نقطهٔ R نسبت به محور x است. بنابراین مختصات نقطهٔ $P + Q$، که آن را با (u, v) نشان می‌دهیم، از دستورهای

$$u = k^2 - a - x_1 - x_2$$

و

$$v = -ku - d = -(k(u - x_1) + y_1)$$

به‌دست می‌آیند. اگر k و d را از عبارتهایی که قبلاً به‌دست آورده‌ایم جایگذاری کنیم معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} u &= \frac{(y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} - (a - x_1 - x_2) \\ v &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - u) - y_1 \end{aligned} \tag{8}$$

معلوم است که وقتی $x_1 = x_2$، این دستورها بی‌معنی‌اند. در این حالت باید معادلهٔ قاطع (۷) را با معادلهٔ خطی مماس جایگزین کنیم و استدلال را تکرار کنیم. درنهایت، به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} u &= -2x_1 + a - \left(\frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1}\right)^2 \\ v &= y_1 + \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1}(u - x_1) \end{aligned} \tag{9}$$

بنابراین، اگر روی خمی بیضوی دست‌کم یک نقطهٔ گویا مانند P بشناسیم، می‌توانیم از دستور بالا برای محاسبهٔ $2P$، $3P$، ... استفاده کنیم. مثلاً، فرض کنید معادلهٔ خم $y^2 = x^3 - 2$ باشد و $P = (3, 5)$. در این صورت نقطهٔ گویای جدید

$$2P = \left(\frac{129}{100}, -\frac{383}{1000}\right)$$

را پیدا می‌کنیم. اکنون می‌توانیم $3p$، $4P$، ... را حساب کنیم. توجه کنید که عددهایی که به آنها برمی‌خوریم بسیار سریع نمو می‌کنند. اگر u_n مختص اول نقطهٔ nP باشد،

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \\ u_2 &= \frac{129}{100} \\ u_3 &= \frac{164323}{29241} \\ u_4 &= \frac{2340922881}{58675600} \\ u_5 &= \frac{3073326105747363}{160280942564521} \end{aligned}$$

نمو بقیهٔ مختصها حتی بیشتر است. مثلاً، صورت u_{11} عددی ۷۱ رقمی است.

در حال حاضر، هیچ راهی کلی برای پیدا کردن همهٔ جوابهای گویای معادلهٔ $y^۲ = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ نمی‌شناسیم. در مثالی که بررسی کردیم، اولین جواب معادلهٔ $y^۲ = x^۳ - ۲$ را حدس زدیم. در حالت کلی، هیچ روش کلی‌ای برای یافتن اولین جواب وجود ندارد. یافتن روشی کارآمد برای پیدا کردن جواب گویای اولیه برای معادله‌ای بیضوی یکی از مهمترین مسأله‌های نظریهٔ اعداد است. البته، اگر یک جواب را بشناسیم، می‌توانیم جوابهای دیگری را با استفاده از دستورهای (۸) و (۹) پیدا کنیم.

مرتبهٔ نقطه‌ها روی خمهای بیضوی

دنبالهٔ نقطه‌های nP، یعنی «مضربهای» نقطهٔ P، را در نظر بگیرید. باید بین دو حالت کاملاً متفاوت تمایز قائل شویم. در حالت اول، ممکن است در گام nام به همانی برسیم. به‌عبارت دیگر، ممکن است عددی مانند n وجود داشته باشد که $nP = E$. اگر به‌ازای هر m که $m < n$، $mP \neq E$، می‌گوییم که مرتبهٔ نقطهٔ P برابر با n است. مثلاً مرتبهٔ نقطهٔ $P = (۰, ۲)$ روی خم $y^۲ = x^۳ + ۴$ برابر با ۳، مرتبهٔ نقطهٔ $P = (۲, ۳)$ روی خم $y^۲ = x^۳ + ۱$ برابر با ۶ و مرتبهٔ نقطهٔ $P = (۳, ۸)$ روی خم $y^۲ = x^۳ - ۴۳x + ۱۶۶$ برابر با ۷ است. اکنون این سؤال پیش می‌آید که چند نقطه با مرتبهٔ متناهی وجود دارند و مرتبه‌هایشان چه عددهایی ممکن است باشند؟

در سال ۱۹۷۶، ب. میزر، ریاضیدان امریکایی، نتیجه‌ای فوق‌العاده در این حوزه به‌دست آورد. او ثابت کرد که اگر P نقطه‌ای گویا با مرتبهٔ n باشد، آن‌وقت $n \leq ۱۰$ یا $n = ۱۲$؛ از طرف دیگر، روی هر خم بیضوی حداکثر ۱۶ نقطهٔ گویا با مرتبهٔ متناهی وجود دارد.

حالت دومی که باید بررسی کنیم این است که نقطه‌های

$$P, ۲P, ۳P, ۴P, \ldots$$

همگی متمایز باشند. در سال ۱۹۰۱، هانری پوانکاره، ریاضیدان مشهور فرانسوی (۱۸۵۴ـ۱۹۱۲)، حدس زد که روی هر خم بیضوی تعدادی متناهی نقطهٔ گویا مانند $P_۱$، … و P_r وجود دارند که هر نقطهٔ گویا روی این خم مانند P را می‌توان به‌شکل مجموعی از این نقطه‌ها نوشت ـ یعنی، می‌توانیم آن را به‌شکل

$$P = n_۱P_۱ + \cdots + n_rP_r + Q$$

بنویسیم، که در آن $n_۱$، … و n_r عددهایی صحیح‌اند که به‌طور یکتا با P مشخص می‌شوند و Q نقطه‌ای با مرتبهٔ متناهی است. همچنین، نمی‌توان یکی از نقطه‌های $P_۱$، … و P_n را به‌صورت ترکیبی از بقیه نوشت. عدد r را رتبهٔ خم موردنظر می‌نامند.

در سال ۱۹۲۲، ل. مُردل، ریاضیدان جوان انگلیسی، حدس پوانکاره را ثابت کرد، اما در اثباتش روشی ساختنی برای محاسبهٔ رتبه وجود ندارد. در حال حاضر، حتی نمی‌دانیم که آیا خمهای بیضوی با رتبهٔ بزرگ دلخواه وجود دارند یا خیر. با این همه، ثابت شده که می‌توان رتبهٔ خم را برحسب ضریبهای a، b و c در معادلهٔ

$y^۲ = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ تخمین زد و بنابراین هر خم با رتبهٔ بزرگ باید ضریبهای بزرگ هم داشته باشد. مثلاً، در یکی از خمهایی که رتبه‌اش از ۸ بزرگتر یا با آن برابر است،

$$a = -۳^۲ \times ۱۴۸۷ \times ۱۸۷۳$$
$$b = ۲^۵ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۱۵۱ \times ۱۴۵۵۱ \times ۳۳۳۵۳$$
$$c = ۲^۸ \times ۳^۴ \times ۵^۲ \times ۷ \times ۱۵۱^۲ \times ۱۹۳ \times ۲۷۳ \times ۱۵۶۳۰۷$$

خمهای با درجهٔ دلخواه

تا اینجا بررسی خودمان را به خمهای (و درنتیجه به معادله‌های دیوفانتی) با درجهٔ ۲ و ۳ محدود کرده‌ایم. در مورد خمهایی که درجهٔ آنها از ۴ بزرگتر یا با آن برابر است چه اتفاقی می‌افتد؟ در این حالتها، طبیعی است که توجه‌مان را به ردهٔ خمهای ناتباهیدهٔ درجهٔ nام معطوف کنیم (یکی از این خمها $x^n + y^n = ۱$ است). وقتی که $n > ۳$، اوضاع به‌طرز چشمگیری عوض می‌شود. در سال ۱۹۳۱ مُردل حدس زد که تعداد نقطه‌های گویا روی چنین خمهایی متناهی است. به مدت بیش از نیم قرن حدس مُردل در سراسر دنیا در مرکز تحقیقات ریاضی قرار داشت. ای. ر. شافارویچ، ی. ای. منین، س. ی. آراکلوف، ا. ن. پارشین و ی. گ. زارهین، ریاضیدانان روسی، سهمی در حل این مسأله داشته‌اند. اما افتخار حل نهایی این مسأله در سال ۱۹۸۳ به گرد فالتینگز، ریاضیدان آلمانی، رسید. درکنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در سال ۱۹۸۶، در برکلی، کالیفرنیا، به او برای این دستاوردش مدال فیلدز، عالی‌ترین جایزهٔ ریاضی، دادند.

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

Yuri Solovyov, Thoroughly modern Diophantus, the arithmetic of elliptic curves, *Quantum*, September/October, 1999, pp. 10-15.

دربارهٔ معادلهٔ $\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m-1}$

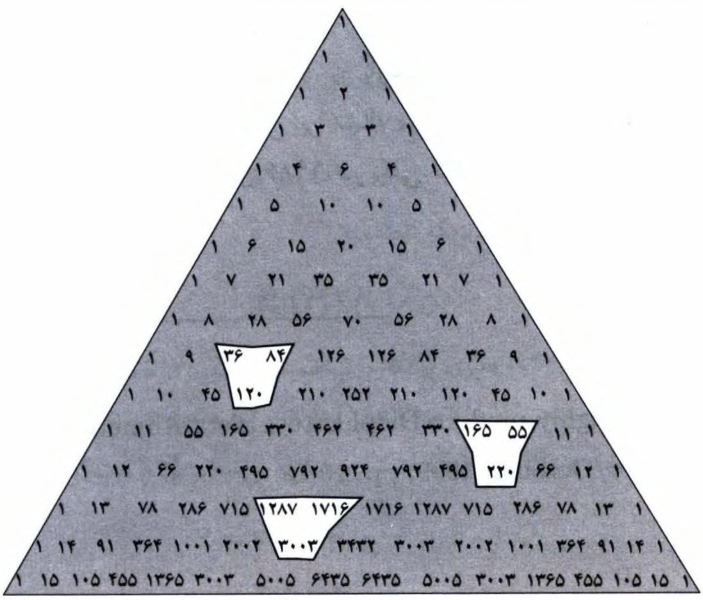
ا. ای. شیرشُف

به معادلهٔ داده شده در عنوان مقاله هنگامی برخوردم که سرگرم بررسی چهاردهمین ردیف مثلث پاسکال بودم:

$$1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1$$

همان‌گونه که می‌دانید، مثلث پاسکال آرایشی مثلثی از اعداد است که از ضریبهای y^mها، $0 \le m \le n$، یعنی $\binom{m}{n}$ها، در بسط چندجمله‌ای $(1+y)^n$، به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3, \dots$، تشکیل شده است. اگر ردیفها و جای عددها در هر ردیف را از صفر شماره‌گذاری کنیم، عدد $\binom{n}{m}$، mامین مکان در ردیف nام را اشغال می‌کند.

پانزده ردیف اول مثلث پاسکال در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱

برای درک مطالب این مقاله، فقط لازم است بدانید که

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1}$$

که در اینجا $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ و $0! = 1$. از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} \tag{2}$$

با استفاده از این رابطه و بدون در نظر گرفتن تساوی (۱) می‌توان مثلث پاسکال را تشکیل داد. در چهاردهمین ردیف، رابطهٔ بدیهی $1001 + 2002 = 3003$ وجود دارد، یعنی

$$\binom{14}{4} + \binom{14}{5} = \binom{14}{6}$$

با استفاده از تساوی (۲) می‌توان این رابطه را به‌شکل

$$\binom{15}{5} = \binom{14}{6} \tag{3}$$

نوشت.

از برابری (۳) معلوم می‌شود که زوج $(14, 6)$ جوابی برای معادلهٔ ذکر شده در عنوان مقاله است.

چه زوجهایی از اعداد در معادلهٔ موردنظر صدق می‌کنند؟ برای اینکه جواب را به زیباترین شکل بدهیم، در معادلهٔ موردنظر m را با y و n را با $x - 1$ جایگزین می‌کنیم. در این صورت قضیهٔ زیر درست است.

قضیه. همهٔ جوابهای معادلهٔ

$$\binom{x}{y-1} = \binom{x-1}{y} \tag{4}$$

به‌شکل

$$x_k = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}, \qquad y_k = \gamma_{2k-1}\gamma_{2k} \tag{5}$$

هستند، که $k = 1, 2, 3, \ldots$ و γ_n، nامین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، . . .، است.

اثبات. ۱. با استفاده از دستور (۱) می‌توان معادلهٔ (۴) را به‌شکل

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{(x-1)!}{y!(x-y-1)!}$$

نوشت. پس از کمی ساده کردن نتیجه می‌شود

$$(x - y + 1)(x - y) = xy \tag{6}$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x و y را با w نمایش می‌دهیم. در این صورت $x = uw$ و $y = vw$ که در آنها

u و v نسبت به هم اول‌اند. با جایگزینی این عبارتها در معادلهٔ (۶) و حذف w به‌دست می‌آید

$$(u-v)[(u-v)w+1]=uvw \tag{۷}$$

چون u و v نسبت به هم اول‌اند، $u-v$ و uv نیز نسبت به هم اول‌اند، و درنتیجه w و $(u-v)w+1$ هم نسبت به هم اول‌اند. به این ترتیب تساویهای زیر درست‌اند:

$$(u-v)w+1=vu$$

$$u-v=w$$

این دستگاه با دستگاه

$$v^2+vw-w^2=1$$

$$v+w=u \tag{۸}$$

هم‌ارز است. بنابراین حل معادلهٔ اصلی (۴) به حل معادلهٔ

$$v^2+vw-w^2=1 \tag{۹}$$

در مجموعهٔ عددهای طبیعی منجر می‌شود.

۲. باید سه نکتهٔ ساده را برای جوابهای این معادله متذکر شویم. فرض کنید (v,w) جواب معادلهٔ (۹) باشد. در این صورت

الف) v و w نسبت به هم اول‌اند.
ب) اگر $v=w$، آن‌وقت $v=w=1$.
ج) $v\le w\le 2v$.
د) زوجهای $(v+w, v+2w)$ و $(2v-w, w-v)$ جوابهای معادلهٔ ۹ هستند.

به‌یاد داشته باشید که v و w عددهایی طبیعی‌اند.

مورد (ج) از برابری

$$w=\frac{v+\sqrt{5v^2-4}}{2}$$

که از حل معادلهٔ (۹) برحسب w به‌دست می‌آید، نتیجه می‌شود. حکم (د) از جایگزینی مستقیم زوجهای ذکر شده در معادلهٔ (۹) ثابت می‌شود.

با تبدیل

$$(v,w)\to(v+w, v+2w)$$

و با استفاده از جواب بدیهی $(1, 1)$، می‌توانیم دنباله‌ای از جوابها را پیدا کنیم: $(2, 3)$، $(13, 21)$، $(34, 55)$، .... در این جوابها

$$v_k = \gamma_{2k-1}, \qquad w_k = \gamma_{2k} \tag{11}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که هیچ جواب دیگری برای معادلهٔ (۹) وجود ندارد. فرض کنید $(\overline{v}, \overline{w})$ جواب معادلهٔ (۹) باشد. ثابت می‌کنیم که این زوج نیز یکی از زوجهای (۱۱) است.

اگر $\overline{v} \neq \overline{w}$، با استفاده از انتقال

$$(\overline{v}, \overline{w}) \to (2\overline{v} - \overline{w}, \overline{w} - \overline{v}) \tag{12}$$

زوج $(\overline{v}_1, \overline{w}_1)$ را به‌دست می‌آوریم که درایه‌هایش کوچکترند. اگر $\overline{v}_1 \neq \overline{w}_1$، با استفادهٔ مجدد از تبدیل (۱۲) به $(\overline{v}_2, \overline{w}_2)$ می‌رسیم.

اگر $\overline{v}_2 \neq \overline{w}_2$، دوباره از تبدیل (۱۲) استفاده می‌کنیم و همین‌طور تا آخر.

هر دفعه زوجهایی به‌دست می‌آید که درایه‌های کوچک و کوچکتر دارند که عددهایی طبیعی‌اند. بنابراین، پس از انجام تعدادی متناهی از این تبدیلها به زوج $(\overline{v}_l, \overline{w}_l)$ می‌رسیم که درایه‌هایش برابرند (مطابق با قوانین ما، این فرایند با رسیدن به چنین زوجی باید پایان یابد). اما در این حالت، همان‌گونه که از قبل می‌دانیم، $\overline{v}_l = \overline{w}_l = 1$. توجه کنید که تبدیلهای (۱۰) و (۱۲) وارون هم‌اند: اگر $\overline{v} = 2v - w$ و $\overline{w} = w - v$، آنگاه $v = \overline{v} + \overline{w}$ و $w = \overline{v} + 2\overline{w}$. بنابراین، با استفاده از (۱۰)، زوج $(\overline{v}, \overline{w})$ از زوج $(1, 1)$ در l مرحله به‌دست می‌آید، یعنی $(\overline{v}, \overline{w}) = (\overline{v}_l, \overline{w}_l)$.

بنابراین جوابهای معادلهٔ (۹) به‌شکل زوج $(\gamma_{2k-1}, \gamma_{2k})$ هستند.

۳. سرانجام، رابطهٔ $u_k = v_k + w_k = \gamma_{2k+1}$ را در نظر بگیرید که در این مورد

$$x_k = u_k v_k = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}$$
$$y_k = v_k w_k = \gamma_{2k-1}\gamma_{2k}$$

قضیه ثابت شده است.

• ترجمهٔ مهدی ملک‌زاده

A. I. Shirshov, On the Equation $\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m-1}$, Kvant Selecta, Algebra and Analysis I, S. Tabachnikov (Ed.), pp. 83-86, AMS, 1999.

از باب تفریح

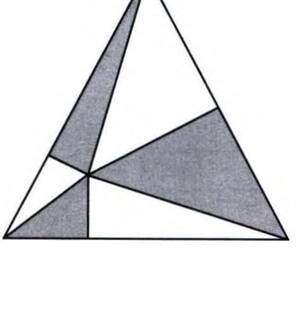
۱. دوازده نفر در اتاقی گرد آمده‌اند. برخی از این افراد همیشه راست می‌گویند و بقیه همواره دروغ می‌گویند. یکی از آنها می‌گوید، «هیچ‌یک از ما راستگو نیست»، دیگری می‌گوید، «حداکثر یک نفر از ما راستگوست»، شخص دیگری می‌گوید، «حداکثر دو نفر از ما راستگو هستند»، و همین‌طور ادامه می‌دهند تا نفر دوازدهم که می‌گوید «حداکثر یازده نفر از ما راستگو هستند». چند نفر راستگو در این اتاق وجود دارد؟

۲. روی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی تعدادی عدد نوشته‌ایم، به‌طوری که اختلاف مجموع عددهای نوشته‌شده در هر دو خانه‌ای که ضلعی مشترک دارند برابر با ۱ است. می‌دانیم که مجموع عددهای نوشته‌شده در یکی از خانه‌ها برابر با ۳ و مجموع عددهای نوشته‌شده در خانه‌ای دیگر برابر با ۱۷ است. مجموع عددهای نوشته‌شده روی قطرها چقدر است؟

۳. در چهارضلعی $ABCD$ مجموع زاویه‌های ABD و BDC برابر با 180° است و ضلعهای AD و BC برابرند. ثابت کنید زاویه‌های A و C برابرند.

۴. آیا می‌توان مکعبی را با سه مثلث کاغذی (بدون همپوشانی) پوشاند؟

۵. مانند شکل زیر، نقطه‌ای درون مثلثی متساوی‌الاضلاع را به رأسها وصل کرده‌ایم و عمودهایی را هم بر ضلعها رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع مساحتهای مثلثهای سایه‌دار با مجموع مساحتهای مثلثهای سفید برابر است.



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۴)

مسأله‌های پیشنهادی به چهل‌وپنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

جولای ۲۰۰۴، آتن، یونان

هر سال، هر یک از کشورهای شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی می‌تواند حداکثر شش مسأله برای کشور میزبان المپیاد بفرستد. کمیته‌ای از طرف کشور میزبان موظف می‌شود تا از میان این مسأله‌ها حدود سی مسأله را انتخاب کند تا هیأت داوران، که از سرپرستان اول تیمها تشکیل می‌شود، مسأله‌های المپیاد را از میان این مسأله‌ها انتخاب کند. مطابق قوانین، این مسأله‌ها تا جولای سال بعد منتشر نمی‌شوند تا اگر کشوری خواست، از آنها برای مسابقه‌های ملی یا دوره‌های آموزش تیمش استفاده کند. در زیر، مسأله‌های پیشنهادی به المپیاد چهل‌وپنجم را آورده‌ایم، البته مسأله‌هایی را که برای المپیاد انتخاب شده‌اند حذف کرده‌ایم (می‌توانید این مسأله‌ها و راه‌حل آنها را در نشریهٔ ریاضیات، سال پنجم، شمارهٔ اول، شهریور ۱۳۸۳، ببینید).

ترکیبیات

۱. دانشگاهی ۱۰۰۰۱ دانشجو دارد. برخی دانشجویان به هم می‌پیوندند تا باشگاههایی را تشکیل دهند (ممکن است دانشجویی عضو چند باشگاه باشد). برخی باشگاهها به هم می‌پیوندند تا انجمنهایی را تشکیل دهند (ممکن است باشگاهی عضو چند انجمن باشد). کلاً k انجمن وجود دارد. فرض کنید شرطهای زیر برقرارند:

الف) هر دو دانشجو در دقیقاً یک باشگاه عضوند.

ب) هر دانشجو و هر انجمن را که در نظر بگیریم، دانشجو در دقیقاً یکی از باشگاههای انجمن عضو است.

ج) تعداد عضوهای هر باشگاه عددی فرد است. علاوه‌بر این، هر باشگاهی که $2m+1$ عضو دارد، عضو m انجمن است.

همهٔ مقدارهای ممکن k را پیدا کنید.

۲. فرض کنید n و k عددهایی طبیعی باشند. n دایره در صفحه مفروض‌اند. هر دوتا از این دایره‌ها یکدیگر را در دو نقطهٔ متمایز قطع کرده‌اند و نقطه‌های تقاطع این دایره‌ها متمایزند. هر نقطهٔ تقاطع را باید با یکی از n رنگ متمایزی که در اختیار داریم طوری رنگ کنیم که از هر رنگ دست‌کم یک‌بار استفاده شده باشد و روی هر دایره دقیقاً k رنگ متمایز ظاهر شده باشد. همهٔ مقدارهای n، $n \geq 2$، و k را طوری پیدا کنید که این نحوهٔ رنگ کردن ممکن باشد.

۳. می‌توانیم روی گرافی متناهی کارهای زیر را انجام دهیم: دوری دلخواه به طول ۴ (اگر وجود داشت) انتخاب می‌کنیم، یالی دلخواه از آن را انتخاب می‌کنیم و آن را از گراف حذف می‌کنیم. n عددی ثابت است و $n \geq 4$. کمترین تعداد یالهای گرافی را پیدا کنید که می‌توان آن را با استفاده از تکرار پی‌درپی این کارها از گرافی کامل و n رأسی به‌دست آورد.

۴. ماتریسی $n \times n$ در نظر بگیرید که درایه‌هایش عددهایی حقیقی‌اند و قدرمطلقشان از ۱ بیشتر نیست و مجموع همهٔ درایه‌ها برابر با صفر است. فرض کنید n عددی طبیعی و زوج باشد. کوچکترین عدد مانند C را پیدا کنید که هر چنین ماتریسی سطر یا ستونی داشته باشد که قدرمطلق مجموع درایه‌های آن از C بزرگتر نباشد.

۵. فرض کنید N عددی طبیعی باشد. دو بازیکن به‌نامهای A و B، یکی در میان، عددهایی از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, N\}$ را روی تخته‌سیاه می‌نویسند. A بازی را شروع می‌کند و در اولین حرکتش ۱ را می‌نویسد. بعد از این، اگر بازیکنی در حرکتی n را بنویسد، نفر بعدی می‌تواند $n+1$ یا $2n$ را بنویسد (به‌شرطی که عددی که می‌نویسد از N بزرگتر نباشد). بازیکنی که N را بنویسد می‌برد. می‌گوییم N از نوع A یا نوع B است، به‌شرطی که A یا B استراتژی برد داشته باشد.

الف) اگر $N = 2004$، N از نوع A است یا از نوع B؟

ب) کوچکترین عدد طبیعی مانند N را پیدا کنید که $N > 2004$ و نوعش با نوع ۲۰۰۴ فرق داشته باشد.

۶. در ماتریسی $n \times n$ مانند A، فرض کنید X_i مجموعهٔ درایه‌های سطر iام و Y_j مجموعهٔ درایه‌های ستون jام باشد، $1 \leq i, j \leq n$. می‌گوییم A طلایی است، هرگاه X_1، ...، X_n، Y_1، ... و Y_n مجموعه‌هایی جدا از هم باشند. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که ماتریس طلایی 2004×2004ای وجود داشته باشد که درایه‌هایش در مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشند.

۷. در گراف متناهی G، فرض کنید $f(G)$ تعداد مثلثها و $g(G)$ تعداد چهاروجهیهایی باشد که با یالهای G تشکیل شده‌اند. کوچکترین عدد ثابت مانند c را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر گراف مانند G،

$$g(G)^3 \leq c f(G)^4$$

جبر

۱. دربارهٔ دنبالهٔ نامتناهی a_0، a_1، a_2 و ... می‌دانیم

$$a_n = |\, a_{n+1} - a_{n+2} \,|, \qquad n \geq 0$$

و a_0 و a_1 عددهایی مثبت و متمایزند. آیا ممکن است این دنباله کراندار باشد؟

۲. آیا تابعی مانند $s : \mathbb{Q} \to \{-۱, ۱\}$ وجود دارد که اگر x و y عددهایی گویا و متمایز باشند که $xy = ۱$ یا $x + y \in \{۰, ۱\}$، آن‌وقت $s(x)s(y) = -۱$؟

۳. فرض کنید a، b و c عددهایی مثبت باشند و $ab + bc + ca = ۱$. ثابت کنید

$$\sqrt[۳]{\frac{۱}{a} + ۶b} + \sqrt[۳]{\frac{۱}{b} + ۶c} + \sqrt[۳]{\frac{۱}{c} + ۶a} \leq \frac{۱}{abc}$$

۴. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\left(x^۲ + y^۲ + ۲f(xy)\right) = \left(f(x+y)\right)^۲$$

۵. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n عددهایی حقیقی و مثبت باشند، $n > ۱$. فرض کنید g_n میانگین هندسی این عددها باشد و

$$A_k = \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k}{k}, \qquad k = ۱, ۲, \ldots, n$$

فرض کنید G_n میانگین هندسی $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n باشد. ثابت کنید

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} + \frac{g_n}{G_n} \leq n + ۱$$

تساوی در چه حالتهایی پیش می‌آید؟

نظریهٔ اعداد

۱. فرض کنید $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد طبیعی n باشد. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند a وجود دارد که معادلهٔ $\tau(an) = n$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد.

۲. تابع $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ این‌طور تعریف شده است:

$$\psi(n) = \sum_{k=۱}^{n}(k, n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

که در آن (k, n) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک k و n است.

الف) ثابت کنید که اگر m و n عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول باشند، $\psi(mn) = \psi(m)\psi(n)$.

ب) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند a، معادلهٔ $\psi(x) = ax$ جواب دارد.

ج) همهٔ عددهای طبیعی مانند a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ $\psi(x) = ax$ جواب یکتا داشته باشد.

۳. دربارهٔ تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ می‌دانیم که به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و n، $(m^{۲}+n)^{۲}$ بر $f^{۲}(m)+f(n)$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n)=n$.

۴. فرض کنید k عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد و $m=۴k^{۲}-۵$. ثابت کنید عددهایی طبیعی مانند a و b وجود دارند، به‌طوری که همهٔ عضوهای دنبالهٔ (x_n) که به‌شکل

$$x_{۰}=a,\qquad x_{۱}=b,\qquad x_{n+۲}=x_{n+۱}+x_n,\qquad n=۰,۱,۲,\ldots$$

تعریف شده است، نسبت به m اول‌اند.

۵. n عددی طبیعی است و $n>۱$. فرض کنید P_n حاصل‌ضرب همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از n مانند x باشد که $x^{۲}-۱$ بر n بخش‌پذیر است. باقیماندهٔ تقسیم P_n بر n را پیدا کنید.

۶. فرض کنید p عددی اول و فرد و n عددی طبیعی باشد. در صفحهٔ مختصات، هشت نقطهٔ متمایز که مختصاتشان عددهایی صحیح‌اند روی دایره‌ای به قطر p^n قرار دارند. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که رأسهایش سه‌تا از نقطه‌های مفروض‌اند و مربع طول ضلعهایش عددهایی صحیح‌اند که بر $p^{n+۱}$ بخش‌پذیرند.

هندسه

۱. دایرهٔ Γ و خط l یکدیگر را قطع نکرده‌اند. فرض کنید AB قطری از Γ باشد که بر l عمود است و B از A به l نزدیکتر است. نقطه‌ای دلخواه و متمایز از A و B مانند C روی Γ انتخاب می‌کنیم. خط AC، l را در نقطهٔ D قطع کرده است. خط DE بر Γ در نقطهٔ E مماس است و B و E در یک طرف AC قرار دارند. فرض کنید BE خط l را در نقطهٔ F قطع کند و AF دایرهٔ Γ را در نقطهٔ G، متمایز از A، قطع کرده باشد. ثابت کنید قرینهٔ G نسبت به AB روی خط CF قرار دارد.

۲. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث حادهٔ ABC باشد، که در آن $\angle C>\angle B$. خط AO ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کرده است. مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و ACD به‌ترتیب نقطه‌های E و Fاند. ضلعهای BA و CA را از سمت A امتداد دهید و روی امتداد آنها نقطه‌های G و H را طوری انتخاب کنید که $AG=AC$ و $AH=AB$. ثابت کنید چهارضلعی $EFGH$ وقتی و فقط وقتی مستطیل است که $\angle ACB-\angle ABC=۶۰^{\circ}$.

۳. فرض کنید $A_{۱}A_{۲}\ldots A_n$، nضلعی‌ای منتظم باشد. نقطه‌های $B_{۱}$، ... و $B_{n-۱}$ این‌طور تعریف شده‌اند:

- اگر $i=۱$ یا $i=n-۱$، B_i وسط ضلع $A_iA_{i+۱}$ است.
- اگر $i\neq ۱$، $i\neq n-۱$ و S محل برخورد $A_{۱}A_{i+۱}$ و A_nA_i باشد، B_i محل برخورد نیمساز زاویهٔ $A_iSA_{i+۱}$ با $A_iA_{i+۱}$ است.

ثابت کنید

$$\angle A_۱B_۱A_n + \angle A_۱B_۲A_n + \cdots + \angle A_۱B_{n-۱}A_n = ۱۸۰^\circ$$

۴. فرض کنید $\mathcal{P}$ چندضلعی‌ای محدب باشد. ثابت کنید چندضلعی‌ای محدب وجود دارد که در $\mathcal{P}$ قرار دارد و دست‌کم ۷۵درصد مساحت $\mathcal{P}$ را پوشانده است.

۵. در مثلث ABC، فرض کنید X نقطه‌ای متغیر روی خط BC باشد، به‌طوری که C بین B و X قرار دارد و دایره‌های محاطی مثلثهای ABX و ACX یکدیگر را در دو نقطهٔ متمایز P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید خط PQ از نقطه‌ای می‌گذرد که به‌جای نقطهٔ X بستگی ندارد.

۶. چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. خطهای AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند، به‌طوری که C بین B و E قرار دارد. قطرهای AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ F قطع کرده‌اند. فرض کنید M وسط ضلع CD و N نقطه‌ای متمایز از M روی دایرهٔ محیطی مثلث ABM باشد که $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$. ثابت کنید نقطه‌های E، F و N روی یک خط راست قرار دارند.

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول آذرماه ۱۳۸۴ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۶۱. آیا مجموعه‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی وجود دارد که مجموع هر تعداد متناهی از عضوهایش توانی کامل نباشد؟

۱۶۲. a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید عددی حقیقی مانند x وجود دارد که هر یک از عددهای $x+a_1$، $x+a_2$، ... و $x+a_n$ گنگ است.

۱۶۳. k عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ است. ثابت کنید عددی اول مانند p و دنباله‌ای صعودی اکید از عددهای طبیعی مانند $(a_n)_{n\geq 1}$ وجود دارند، به‌طوری که هر یک از جمله‌های دنبالهٔ $(p+ka_n)_{n\geq 1}$ عددی اول است.

۱۶۴. a، b و c عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}+\sqrt{2(b^2+c^2)}+\sqrt{2(c^2+a^2)}$$
$$\geq \sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}$$

۱۶۵. همهٔ چندجمله‌ایها مانند

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0)$$

را طوری پیدا کنید که

- $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ جایگشتی از $(0,1,\ldots,n)$ باشد.
- همهٔ ریشه‌های $P(x)$ گویا باشند.

۱۶۶. $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n $(n \geq ۳)$ عددهایی حقیقی‌اند که مجموعشان برابر با ۱ است. ثابت کنید جایگشتی از این عددها مانند $b_۱$، $b_۲$، ... و b_n وجود دارد که

$$b_۱ b_۲ + b_۲ b_۳ + \cdots + b_n b_۱ \leq \frac{۱}{n}$$

۱۶۷. بیست و دو نقطه را روی بازهٔ $[۰, ۱]$ علامت گذاشته‌ایم. می‌توانیم هر دو تا از این نقطه‌ها را که بخواهیم حذف کنیم و وسط پاره‌خطی را که آنها را به هم وصل می‌کند علامت بگذاریم. ثابت کنید می‌توان این کار را بیست‌بار طوری تکرار کرد که فاصلهٔ دو نقطه‌ای که باقی می‌مانند از ۰٫۰۰۱ بیشتر نباشد.

۱۶۸. در هر یک از خانه‌های جدولی $m \times n$ یکی از عددهای ۱ یا ۱− نوشته شده است. می‌دانیم که در ابتدا فقط یک ۱− در جدول نوشته شده و بقیهٔ عددها ۱اند. در هر حرکت می‌توانیم خانه‌ای که در آن ۱− نوشته شده است انتخاب کنیم، به‌جای ۱− در آن ۰ بنویسیم و عددهای خانه‌های مجاورش را در ۱− ضرب کنیم (دو خانه مجاورند، هرگاه ضلعی مشترک داشته باشند). همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که، صرفنظر از اینکه در ابتدا در کدام خانه ۱− نوشته شده، بتوان با چندبار انجام این حرکت جدولی به‌دست آورد که در همهٔ خانه‌هایش صفر نوشته شده است.

۱۶۹. $P_۱ P_۲ \ldots P_n$ چندضلعی‌ای محدب است، به‌طوری که به‌ازای هر دو رأسش مانند P_i و P_j، رأسی مانند P_k وجود دارد که $\angle P_i P_k P_j = ۶۰^\circ$. ثابت کنید این چندضلعی مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

۱۷۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AB قاعده و CD ارتفاع است. نقطهٔ P روی CD قرار دارد. فرض کنید E نقطهٔ برخورد خط AP با ضلع BC و F نقطهٔ برخورد خط BP با ضلع AC باشد. فرض کنید که دایرهٔ محاطی مثلث ABP با دایرهٔ محاطی چهارضلعی $PECF$ برابر باشد. ثابت کنید دایره‌های محاطی مثلثهای ADP و BCP هم برابرند.

راه‌حلها

۱۱۶. آیا می‌توان ۱۳۸۳ عدد طبیعی متمایز را طوری روی دایره‌ای قرار داد که هر دو تا از آنها را که انتخاب کنیم، نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر عددی اول باشد؟

راه‌حل. خیر، نمی‌توان. فرض کنید بتوان عددهایی با ویژگی موردنظر پیدا کرد و این عددها $a_۰$، $a_۱$، ... و $a_{۱۳۸۲}$ باشند و $a_{۱۳۸۳} = a_۰$. در این صورت هر یک از عددهای $\frac{a_{k-۱}}{a_k}$، $۱ \leq k \leq ۱۳۸۳$، یا عددی اول است یا وارون عددی اول. فرض کنید حالت اول mبار پیش بیاید؛ درنتیجه حالت دوم $۱۳۸۳ - m$بار پیش می‌آید. حاصل‌ضرب همهٔ این نسبتها برابر است با $\frac{a_۰}{a_{۱۳۸۳}}$ که برابر است با ۱. یعنی حاصل‌ضرب m عدد اول برابر شده است با حاصل‌ضرب $۱۳۸۳ - m$ عدد اول. این هم فقط وقتی ممکن است که این

عددهای اول برابر باشند (بنابر یکتایی تجزیهٔ عددهای طبیعی به حاصل‌ضرب عددهای اول)؛ به‌ویژه باید $m - ۱۳۸۳ = m$، که ممکن نیست.

۱۱۷. همهٔ عددهای طبیعی مانند m و n را طوری پیدا کنید که $m^۳ + n$ و $n^۳ + m$ بر $m^۲ + n^۲$ بخش‌پذیر باشند.

راه‌حل. فرض کنید عددهایی طبیعی مانند m و n ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم m و n نسبت به هم اول‌اند. فرض کنید چنین نباشد و m و n هر دو بر عدد اول p بخش‌پذیر باشند. فرض کنید نمای توان p در تجزیهٔ m و تجزیهٔ n به‌ترتیب برابر با a و b باشد. می‌توانیم فرض کنیم $a \geq b$. در این صورت نمای بزرگترین توانی از p که $m^۳ + n$ را می‌شمارد برابر است با b. اما $m^۲ + n^۲$ بر $p^{۲b}$ بخش‌پذیر است و درنتیجه ممکن نیست $m^۳ + n$ بر $m^۲ + n^۲$ بخش‌پذیر باشد. این تناقض نشان می‌دهد که m و n نسبت به هم اول‌اند.

اکنون توجه کنید که چون

$$m(m^۲ + n^۲) - (m^۳ + n) = n(mn - ۱)$$

پس $n(mn - ۱)$ بر $m^۲ + n^۲$ بخش‌پذیر است. چون $m^۲ + n^۲$ و n نسبت به هم اول‌اند، پس باید $mn - ۱$ بر $m^۲ + n^۲$ بخش‌پذیر باشد؛ اما اگر $mn > ۱$، چنین چیزی ممکن نیست، زیرا

$$m^۲ + n^۲ \geq ۲mn > mn - ۱$$

پس $mn = ۱$. یعنی $(m, n) = (۱, ۱)$. معلوم است که این مقدارهای m و n ویژگیهای موردنظر را دارند.

۱۱۸. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر ۱۵ عدد طبیعی مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۱۵}$،

$$(a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_{۱۵}^n)a_۱a_۲\cdots a_{۱۵}$$

بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم که کوچکترین عدد طبیعی مانند n که ویژگی موردنظر را دارد ۴ است.

فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۱۵}$ عددهایی طبیعی باشند و

$$A = T(n, a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۵}) = (a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_{۱۵}^n)a_۱a_۲\cdots a_{۱۵}$$

ابتدا فرض کنید $n = ۴$. توجه کنید که به‌ازای هر i، $۱ \leq i \leq ۱۵$، یا $a_i \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۳) یا، بنابر قضیهٔ کوچک فرما،

$$a_i^۴ = a_i^۲ \times a_i^۲ \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۳})$$

اگر به‌ازای iای (به‌پیمانهٔ ۳) $a_i \equiv ۰$، آن‌وقت (به‌پیمانهٔ ۳) $A \equiv ۰$. اگر به‌ازای هر i، (به‌پیمانهٔ ۳) $a_i \not\equiv ۰$، آن‌وقت

$$a_۱^۴ + a_۲^۴ + \cdots + a_{۱۵}^۴ \equiv ۱۵ \equiv ۰ \quad (\text{به‌پیمانهٔ ۳})$$

پس باز هم (به‌پیمانهٔ ۳) $A \equiv ۰$.

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که (به‌پیمانهٔ ۵) $A \equiv ۰$. بنابراین (به‌پیمانهٔ ۱۵) $A \equiv ۰$.

برای اینکه قانع شوید وقتی که $n = ۱$، $n = ۲$ و $n = ۳$ می‌توان عددهایی پیدا کرد که ویژگی موردنظر را نداشته باشند، توجه کنید که

$$A(۱,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱) \equiv ۲۲ \times ۱۲۸ \not\equiv ۰ \quad (\text{به‌پیمانهٔ ۱۵})$$

$$A(۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱) \equiv ۲۲ \times ۱۲۸ \not\equiv ۰ \quad (\text{به‌پیمانهٔ ۵})$$

$$A(۳,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱,۲,۱) \equiv ۱ \times ۲^۷ \not\equiv ۰ \quad (\text{به‌پیمانهٔ ۳})$$

۱۱۹. k و n عددهایی طبیعی‌اند و $n > ۲$. ثابت کنید معادلهٔ $x^n - y^n = ۲^k$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد.

راه‌حل. فرض کنید حکم درست نباشد و $n_۰$ کوچکترین عدد طبیعی‌ای باشد که به‌ازای آن عددی طبیعی مانند k وجود دارد که معادلهٔ $x^{n_۰} - y^{n_۰} = ۲^k$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب دارد. اگر $n_۰$ عددی زوج باشد، می‌توان نوشت $n_۰ = ۲n_۱$. بنابراین

$$x^{n_۰} - y^{n_۰} = (x^{n_۱} - y^{n_۱})(x^{n_۱} + y^{n_۱})$$

پس $x^{n_۱} - y^{n_۱}$ توانی از ۲ است، که چون $n_۱ < n_۰$، به تناقض رسیده‌ایم. فرض کنید $n_۰$ عددی فرد باشد و

$$A = \{p \in \mathbb{N} :\ x^{n_۰} - y^{n_۰} = ۲^p \text{ عددهایی طبیعی مانند } x \text{ و } y \text{ وجود دارند که}\}$$

فرض کنید $p_۰$ کوچکترین عضو A باشد. اگر $x^{n_۰} - y^{n_۰} = ۲^{p_۰}$، معلوم است که زوجیت x و y یکسان است. چون

$$(x-y)(x^{n_۰-۱} + x^{n_۰-۲}y + \cdots + y^{n_۰-۱}) = ۲^{p_۰}$$

پس x و y عددهایی زوج‌اند. فرض کنید $x = ۲x_۰$ و $y = ۲y_۰$. در این صورت

$$x_۰^{n_۰} - y_۰^{n_۰} = ۲^{p_۰ - n_۰}$$

اگر $p_۰ > n_۰$، به تناقض رسیده‌ایم، بنابراین $p_۰ = n_۰$؛ اما به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که معادلهٔ $x_۰^{n_۰} - y_۰^{n_۰} = ۱$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد (توجه کنید که $n_۰ > ۲$).

۱۲۰. a، b، c، x، y و z عددهایی حقیقی و مثبت‌اند و

$$a+x=b+y=c+z=1$$

ثابت کنید

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3$$

راه‌حل. توجه کنید که

$$\begin{aligned}abc+xyz&=abc+(1-a)(1-b)(1-c)\\&=1-a-b-c+ab+bc+ca\\&=(1-b)(1-c)+ab+ca-a\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\begin{aligned}abc+xyz&=(1-c)(1-a)+ab+bc-b\\&=(1-a)(1-b)+bc+ca-c\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}&(abc+xyz)\Big(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\Big)\\&=(abc+xyz)\Big(\frac{1}{a(1-b)}+\frac{1}{b(1-c)}+\frac{1}{c(1-a)}\Big)\\&=\frac{1-c}{a}+\frac{c}{1-b}+\frac{1-a}{b}+\frac{a}{1-c}+\frac{1-b}{c}+\frac{b}{1-a}-3\\&\geq 6\sqrt[6]{\frac{1-c}{a}\times\frac{c}{1-b}\times\frac{1-a}{b}\times\frac{a}{1-c}\times\frac{1-b}{c}\times\frac{b}{1-a}}-3=3\end{aligned}$$

۱۲۱. همهٔ چندجمله‌ایها مانند $P(x)$ را طوری پیدا کنید که اگر $u+v$ عددی گویا باشد، $P(u)+P(v)$ هم عددی گویا باشد.

راه‌حل. فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ ویژگی موردنظر را داشته باشد. توجه کنید که اگر q عددی گویا باشد، مقدارهای چندجمله‌ای $P(q-x)+P(q+x)$ عددهایی گویا هستند. اما هر چندجمله‌ای غیرثابت مقدارهای گنگ هم دارد. بنابراین $P(q-x)+P(q+x)$ چندجمله‌ایی ثابت است، و به‌ویژه مقدار آن به‌ازای ۰ و ۱ برابر است، یعنی

$$P(q-1)+P(q+1)=2P(q)$$

پس اگر n عددی طبیعی باشد،

$$P(n) - P(n-۱) = P(n+۱) - P(n)$$

فرض کنید $Q(x) = P(x) - ax - b$، که در آن

$$a = P(۱) - P(\circ), \qquad b = P(\circ)$$

در این صورت $Q(\circ) = Q(۱) = \circ$ و

$$Q(n) - Q(n-۱) = Q(n+۱) - Q(n)$$

یعنی مقدار $Q(x)$ به‌ازای عددهای طبیعی برابر با صفر است. چون $Q(x)$ چندجمله‌ای است، پس $Q(x)$ چندجمله‌ای ثابت صفر است، و درنتیجه $P(x)$ چندجمله‌ای خطی $ax+b$ است. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که چندجمله‌ایهای خطی ویژگی موردنظر را دارند.

۱۲۲. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ را طوری پیدا کنید که $f(-۱) = f(۱)$ و به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند m و n،

$$f(m) + f(n) = f(m + ۲mn) + f(n - ۲mn)$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. توجه کنید که اگر n عددی صحیح باشد،

$$f(۱) + f(n) = f(۱ + ۲n) + f(-n) \qquad (۱)$$

و

$$f(n) + f(-۱) = f(-n) + f(-۱ + ۲n)$$

درنتیجه، چون $f(۱) = f(-۱)$،

$$f(۱ + ۲n) = f(-۱ + ۲n)$$

بنابراین مقدار f به‌ازای عددهای فرد یکسان است. بنابراین از تساوی (۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $f(n) = f(-n)$. بنابراین کافی است مقدار f را به‌ازای عددهای صحیح نامنفی پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم $x = -(۲k + ۱)$ و $y = n$، آن‌وقت x و $x + ۲xy$ عددهایی فردند و از معادلهٔ تابعی داده شده در صورت مسأله به‌دست می‌آید

$$f(n) = f(y) = f(y - ۲xy) = f\big(n(۴k + ۳)\big)$$

اگر فرض کنیم $x = n$ و $y = -(۲k + ۱)$، به‌دست می‌آید

$$f(n) = f(x) = f(x + ۲xy) = f\big(n(-۴k - ۱)\big) = f\big(n(۴k + ۱)\big)$$

درنتیجه، اگر m عددی فرد باشد، $f(n) = f(nm)$.

فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n = ۲^e m$، که در آن e عددی صحیح و نامنفی و m عددی طبیعی است. در این صورت $f(n) = f(۲^e)$. بنابراین f با مقدارهای $f(۰)$، $f(۱)$، $f(۲)$، $f(۴)$، $f(۸)$ و ... (که می‌توان آنها را اختیاری انتخاب کرد) مشخص شود. بقیهٔ مقدارهای f را می‌توان از تساوی $f(n) = f(۲^e)$ مشخص کرد. اکنون ثابت می‌کنیم که چنین تابعهایی ویژگیهای موردنظر را دارند. معلوم است که $f(-۱) = f(۱)$. اگر $m = ۰$ یا $n = ۰$ معلوم است که معادلهٔ تابعی موردنظر برقرار است. اگر $m = ۲^e m_۱$ و $n = ۲^d n_۱$، که در آنها $m_۱$ و $n_۱$ عددهایی فردند، آن‌وقت

$$f(m) + f(n) = f(۲^e) + f(۲^d) = f\big(m(۱ + ۲n)\big) + f\big(n(۱ - ۲m)\big)$$

۱۲۳. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۸۱ را در خانه‌های جدولی ۹ × ۹ طوری قرار داد که مجموع عددهای نوشته شده در هر جدول ۳ × ۳ روی جدول اصلی یکسان باشد.

راه‌حل. بله، می‌توان. ابتدا جدولی ۹ × ۹ در نظر بگیرید که سطرهای اول، دوم و سومش

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
۲	۱	۰	۸	۷	۶	۵	۴	۳
۵	۴	۳	۲	۱	۰	۸	۷	۶

هستند و این الگو دو بار دیگر در آن تکرار شده است.

در این صورت مجموع عددهای هر جدول ۳ × ۳ روی این جدول ۳۶ است. این جدول را A بنامید. فرض کنید جدول B از دوران A به‌اندازهٔ ۹۰° به‌دست آمده است. اکنون می‌توان هر خانه را با زوجی مانند (a, b) برچسب‌گذاری کرد، به‌طوری که a شماره‌اش در جدول A و b شماره‌اش در جدول B است. می‌توان تحقیق کرد که برچسب هیچ دو خانه‌ای برابر نیست، بنابراین اگر در خانهٔ با برچسب (a, b) عدد $۹a + b + ۱$ را بنویسیم، در هر خانهٔ جدول یکی از عددهای ۱، ۲، ... و ۸۱ را نوشته‌ایم که متمایز از بقیه است. می‌توان تحقیق کرد که مجموع عددهای نوشته شده در هر جدول ۳ × ۳ برابر است با $۳۶۹ = ۹ + ۳۶ \times ۹ + ۳۶$.

۱۲۴. n عددی طبیعی است و $n \geq ۲$. T_n تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است که میانگین عضوهای هر یک از آنها عددی طبیعی است. ثابت کنید $T_n - n$ عددی زوج است.

راه‌حل. توجه کنید که میانگین عضوهای هر یک از مجموعه‌های $\{۱\}$، $\{۲\}$، ... و $\{n\}$ عددی طبیعی

است. علاوه بر این، اگر میانگین عضوهای مجموعهٔ S برابر با عدد طبیعی m باشد و m عضو S نباشد، میانگین عضوهای مجموعهٔ $S \cup \{m\}$ هم m است و اگر T مجموعه‌ای باشد که بیش از یک عضو دارد و میانگین عضوهایش برابر با عدد طبیعی m باشد و m عضو T باشد، میانگین عضوهای مجموعهٔ $T - \{m\}$ هم m است. بنابراین زیرمجموعه‌های بجز $\{۱\}$، $\{۲\}$، ... و $\{n\}$ را می‌توان دوتا دوتا گروهبندی کرد و درنتیجه $T_n - n$ عددی زوج است.

۱۲۵. n عددی طبیعی و زوج است. عددهای ۱، ۲، ... و $n^۲$ را در خانه‌های جدولی $n \times n$ طوری بنویسید که سطر kام از چپ به راست،

$$(k-۱)n+۱, \quad (k-۱)n+۲, \ldots, \quad (k-۱)n+n$$

باشد. خانه‌های جدول را طوری رنگ کنید که در هر سطر و در هر ستون نیمی از خانه‌ها قرمز و نیمی دیگر سیاه باشند. ثابت کنید که رنگ‌آمیزی را هر طور انجام داده باشیم، مجموع عددهای روی خانه‌های قرمز با مجموع عددهای روی خانه‌های سیاه برابر است.

راه‌حل. فرض کنید R و B به‌ترتیب مجموعهٔ خانه‌های قرمز و سیاه در جدول باشند و اگر $s \in R \cup B$، فرض کنید $f(s)n + g(s) + ۱$ عدد نوشته شده در خانهٔ S باشد، که در اینجا $۰ \leq f(s), g(s) \leq n - ۱$. معلوم است که مقدار $f(s)$ فقط به سطری که s در آن قرار دارد بستگی دارد و مقدار $g(s)$ هم فقط به ستونی که s روی آن قرار دارد بستگی دارد. چون در هر سطر دقیقاً $\frac{n}{۲}$ عضو از R و $\frac{n}{۲}$ عضو از B وجود دارد،

$$\sum_{s\in R} f(s) = \sum_{s\in B} f(s)$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\sum_{s\in R} g(s) = \sum_{s\in B} g(s)$$

بنابراین

$$\sum_{s\in R} \left(f(s)n + g(s) + ۱\right) = \sum_{s\in B} \left(f(s)n + g(s) + ۱\right)$$

همان چیزی که می‌خواهیم.

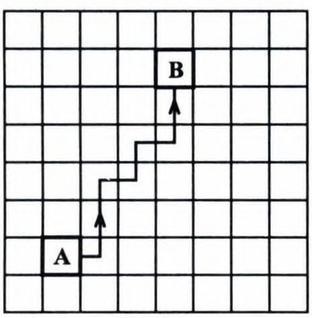
راه‌حلها

از باب تفریح

۱. اگر k نفر راستگو در اتاق باشند، k جملهٔ اول غلط‌اند (و درنتیجه دروغگوها آنها را گفته‌اند) و $k - ۱۲$ جملهٔ آخر درست است (یعنی راستگوها آنها را گفته‌اند). بنابراین $k - ۱۲ = k$، یعنی $k = ۶$. پس ۶ راستگو در اتاق وجود دارد.

۲. فرض کنید A خانه‌ای باشد که مجموع عددهای نوشته‌شده روی آن ۳ است و B خانه‌ای باشد که مجموع عددهای نوشته شده روی آن ۱۷ است. می‌توانیم صفحه را طوری دوران دهیم که خانهٔ A پایین خانهٔ B و سمت چپ آن قرار بگیرد. از A به B می‌رویم، به‌طوری‌که در هر حرکت یک خانه به بالا یا به راست می‌رویم. چون در هر گام عدد نوشته‌شده در خانه‌ای که به آن رفته‌ایم یکی تغییر می‌کند و تعداد گامهای به‌سمت بالا و به‌سمت راست هر دو از ۷ بیشتر نیست، مجموع عددهای نوشته‌شده در خانهٔ A حداکثر ۷ + ۷ یا ۱۴ واحد زیاد می‌شود. این عدد برابر با اختلاف مجموع عددهای نوشته‌شده در خانه‌های A و B است؛ بنابراین خانه‌های A و B به‌ترتیب درگوشه‌های پایین سمت چپ و بالا سمت راست قرار دارند. پس هر طورکه از A به B برویم، در هرگام یک واحد به مجموع عددهای نوشته‌شده در خانهٔ A اضافه می‌شود. به این ترتیب، در گام nام، در خانه‌ای هستیم که مجموع عددهای نوشته‌شده در آن برابر با $n + ۳$ است. درنتیجه، مجموع عددهای نوشته‌شده در خانه‌ها به‌طور یکتا مشخص می‌شود. به این ترتیب، مجموع موردنظر برابر است با

$$(۳ + ۵ + \cdots + ۱۷) + (۸ \times ۱۰) = ۱۶۰$$

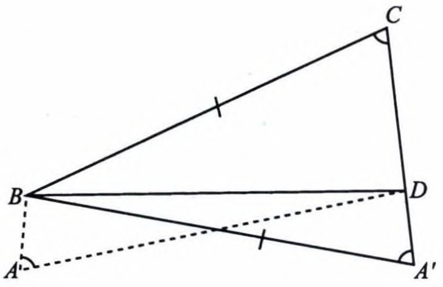


B

۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

A

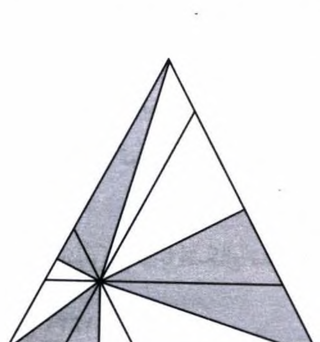
۳. چهارضلعی را از روی قطر BD آن ببرید، مثلث ABD را طوری پشت‌ورو کنید که جای رأسهای B و D عوض شود. در این صورت به مثلث $A'BC$ می‌رسیم، زیرا $\angle BDC + \angle BDA' = ۱۸۰^\circ$. این مثلث متساوی‌الساقین است ($A'B = AD = BC$). بنابراین $\angle C = \angle A' = \angle A$.



۴. خیر، نمی‌توان. ابتدا توجه کنید که هیچ رأسی از مکعب را نمی‌توان با نقطه‌ای درونی از یکی از مثلثها پوشاند. بنابراین هر رأس مکعب باید با یکی از ضلعهای مثلثها پوشانده شود. توجه کنید که اگر نقطه‌ای درونی از ضلع یکی از مثلثها یکی از رأسهای مکعب را بپوشاند، مجموع زاویه‌های مجاور که مثلث پوشانده برابر با ۱۸۰° است. از طرف دیگر، مجموع زاویه‌های مجاور به هر رأس مکعب ۲۷۰° است. بنابراین در هر رأس، دست‌کم ۹۰° را باید زاویه‌های مثلثها بپوشانند. بنابراین زاویه‌های مثلثها دست‌کم $۹۰^\circ \times ۸$ را می‌پوشانند و دست‌کم باید $\frac{۸ \times ۹۰^\circ}{۱۸۰^\circ}$ مثلث یا ۴ مثلث داشته باشیم.

گستردهٔ Tـ شکل معکب را در نظر بگیرید، که از دو مستطیل تشکیل شده است. هر یک از این مستطیلها را می‌توان با دو مثلث پوشاند. بنابراین می‌توان مکعب را با چهار مثلث پوشاند.

۵. اگر از نقطهٔ موردنظر خطهایی موازی با ضلعهای مثلث رسم کنیم، می‌توانیم مثلثهایی دوبه‌دو همنهشت و با رنگهای متفاوت به‌دست آوریم.



از نشریات گذشته...

در نظر داریم از این به بعد در برخی از شماره‌های نشریه، مقالاتی از نشریات ریاضی که قبلاً منتشر می‌شدند، درج کنیم؛ چرا که بسیاری از این مجلات و مقالات با وجود سطح بسیار عالی آنها، در اختیار همگان نبوده و یا به‌دست فراموشی سپرده شده‌اند. برای این بخش از این شماره و شمارهٔ بعد نشریه، مقاله‌ای از استاد پرویز شهریاری، که بی‌شک از تأثیرگذارترین افراد بر ریاضی ایران بوده‌اند و هستند، تحت عنوان «دربارهٔ اصول هندسی» که چهل و دو سال پیش از این در نخستین شمارهٔ مجلهٔ ریاضی «یکان» [2] چاپ شده است، در نظر گرفته شده است.

دربارهٔ اصول هندسی[1]

پرویز شهریاری

هندسه در میان سایر علوم ریاضیات مقدماتی (جبر و حساب) وضع خاصی دارد. این خصوصیت در اینجاست که قضایا و خواص اشکال که در هندسه مورد مطالعه قرار می‌گیرد تنها از راه یک سلسله قضایا اثبات نمی‌شود، بلکه در بسیاری موارد از راه تأمل و مشاهدهٔ مستقیم به‌دست می‌آید. مثلاً تساوی زوایای مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین و یا تساوی دو مثلث که دارای اضلاع برابر باشند و بسیاری دیگر از خواص اشکال مستقیماً از راه مشاهده به‌دست می‌آید.

روشن بودن مطالب هندسی کمک می‌کند تا بسیاری از هندسه را قبل از آنکه دقیقاً اثبات شود کشف کنیم. مشاهدهٔ مستقیم اشکال هندسی در یونان قدیم (بیش از دو هزار سال قبل) یکی از وسائل اساسی برای شناخت این و یا آن خاصیت هندسی اشکال بود. ولی این وسیله تنها برای به‌دست آوردن خواص کاملاً سادهٔ اشکال می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، مثلاً مصری‌ها که هندسه را تنها به‌عنوان جنبه‌های عملی سادهٔ آن مورد استفاده قرار می‌دادند ولی توسعهٔ مطالب ساده و بغرنج شدن مسائل عملی الزاماً به بررسی خواص پیچیده‌تر اشکال هندسی منجر می‌شود که دیگر با مشاهدهٔ اشکال ساده به‌دست نمی‌آید و درنتیجه لزوم فرمهای بغرنجتر و دقیقتر قضاوت احساس می‌شود.

از طرف دیگر مشاهدهٔ سادهٔ اشکال (وقتی که سروکار ما با اشکال نسبتاً بغرنجتر باشد) اغلب گول‌زننده است و

۱. برگرفته از مجلهٔ ریاضی یکان، شمارهٔ نخست، بهمن ۱۳۴۲.

۲. مجلهٔ ریاضی یکان از نخستین نشریات ریاضی کشور بود که تأثیر زیادی بر آموزش ریاضی و همگانی نمودن ریاضیات داشت. این نشریه که چاپ آن از سال ۱۳۴۲ آغاز گردید، حاوی مطالب جدید ریاضی، مسائل و معماهای ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی، جدول و سرگرمیهای ریاضی و به‌طور خلاصه مکمل بسیار خوبی برای کتاب‌های ریاضی دبیرستانی بود. این نشریه به سردبیری آقای عبدالحسین مصحفی، که حق بسیار زیادی بر گردن صنعت نشر ریاضی دارند و با همکاری بسیاری از بزرگان ریاضی کشور از جمله پروفسور هشترودی، حسین آرزم، احمد بیرشک، پرویز شهریاری و ... چاپ می‌شد.

ما را مستقیماً به نتایج نادرست می‌کشاند.

نمونه‌های زیادی می‌توان ذکر کرد که با یک دید عمومی روی شکل ما را دربارهٔ روابط متقابل عناصر شکل به اشتباه بیندازد و به نتیجهٔ غلطی بکشاند. بر همین مبناست که معماهای زیادی در هندسه طرح شده و ما از ذکر آنها در اینجا می‌گذریم.

یونانیان قدیم هندسه را از مصر گرفتند. آنها مطالب مجزا و پراکنده‌ای که برای مصری‌ها روشن بود جمع و مرتب کردند و به آنها فرم قضاوت و استدلال دادند و تنها از این راه بود که توانستند خواص جدیدی برای اشکال هندسی کشف کنند. در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد، اقلیدس هندسه‌دان یونانی در کتاب مشهور خود به‌نام «**مقدمات**» برای نخستین‌بار طرحی اساسی برای هندسه ریخت. او کوشش کرد اصطلاحات واضح را با دقت شرح دهد و مفاهیم را که معرف ساده‌ترین اشکال هندسی هستند: نقطه، خط، سطح و روابط متقابل بین آنها، یعنی آنچه را که تا آن زمان خودبه‌خود معلوم شمرده می‌شد، تحت نظم درآورد. اقلیدس بر پایهٔ این تعاریف توانست هندسه‌ای چنان کامل و منطقی بسازد که تا امروز هم قدرت نسبی خود را حفظ کرده است.

اقلیدس قبل از هرچیز به تعریف دقیق مفاهیم اساسی هندسه پرداخت. در زیر تعاریف او دربارهٔ نقطه، خط (و بخصوص خط مستقیم)، سطح (و بخصوص صفحه) و اجسام هندسی آورده می‌شود:

۱. نقطه چیزی است که دارای جزئی نباشد.

۲. خط عبارت از امتدادی است بدون قطر.

۳. نقطه حد خط است.

۴. خط مستقیم عبارت از خطی است که وضع استقرار آن نسبت به تمام نقاطش یکنواخت باشد.

۵. سطح عبارت است از چیزی که فقط طول و عرض داشته باشد.

۶. خط حد سطح است.

۷. صفحه عبارت است از سطحی که وضع آن نسبت به تمام خطوط مستقیمی که روی آن واقع‌اند یکنواخت باشد.

۸. جسم عبارت است از چیزی که دارای طول، عرض و ارتفاع باشد.

۹. سطح حد جسم است.

همهٔ این تعریفها این را می‌رساند که مفاهیم «نقطه»، «خط» و غیره تنها بیان یک نمایش ظاهری نیستند، بلکه در عین حال مفاهیمی را بیان می‌کنند که با تکیه بر آنها می‌توان نتایج منطقی بعدی را بیان کرد. اگرچه این تعاریف از نقطه‌نظر علوم امروزی کافی نیست ولی با مفاهیم علمی آن زمان کاملاً تطبیق می‌کند و اولین قدم در راه تشکیل

و تنظیم مفاهیم هندسی به‌شمار می‌رود. این تعاریف را بایستی نقطهٔ شروع همهٔ کارهای بعدی در هندسه دانست که به‌خودی‌خود راه تکامل بعدی را معین کردند.

اقلیدس همهٔ حقایق هندسی را به سه دسته تقسیم می‌کند: اصول موضوعه، اصول متعارفی و قضایا. دو حالت اول[3] به حقایق ساده‌ای اطلاق می‌شد که هیچگونه شکی در صحت آنها وجود نداشت و مستقیماً از مشاهده نتیجه می‌شد. بنابر این اصول می‌توانستند به‌عنوان اولین احکام هندسی به‌شمار روند و برای نتیجه‌گیری منطقی سایر حقایق هندسی مورد استفاده قرار گیرند.

نوع سوم حقایق یعنی قضایا به احکامی اطلاق می‌شد که احتیاج به اثبات داشتند یعنی می‌بایستی با کمک احکام دو نوع اول و از راه قضاوتهای منطقی و به‌هم‌پیوسته آنها را نتیجه گرفت.

اصول موضوعه و متعارفی اقلیدس را ذکر می‌کنیم:

اصول موضوعه

۱. از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر می‌توان یک خط مستقیم عبور داد.

۲. خط راست محدود را می‌توان تا به هر اندازه که بخواهیم ادامه دهیم.

۳. با هر مرکز می‌توان دایره‌ای با شعاع دلخواه رسم نمود.

۴. تمام زوایای قائمه با هم برابرند.

۵. اگر دو خط راست به‌وسیلهٔ یک خط سوم قطع شوند در همان طرفی از خط سوم که زوایای داخلی به مجموع کوچکتر از دو قائمه تشکیل می‌دهد یکدیگر را قطع می‌کنند.

اصول متعارفی

۱. دو مقدار مساوی با مقدار سوم با هم مساوی‌اند.

۲. اگر به دو مقدار مساوی مقادیر مساوی بیافزاییم، حاصل‌جمعها با هم مساوی‌اند.

۳. اگر از دو مقدار مساوی مقادیر مساوی کم کنیم، باقیمانده‌ها با هم مساوی‌اند.

۴. دو چیز قابل‌انطباق با هم برابرند.

۵. کل از جزء بزرگتر است.

---

۳. اقلیدس اختلاف بین اصول متعارفی و موضوعه را بیان نکرده است ولی معمولاً در اصول متعارفی آن احکامی را بیان می‌کند که مربوط به این و یا آن ساختمان هندسی باشد.

اصول موضوعه و متعارفی اقلیدس در جریان قرنهای متوالی به‌عنوان پایه‌ای برای ساختمان هندسه مورد استفاده قرار می‌گرفت.

اخلاف نزدیک اقلیدس توجه خود را به اصل موضوع پنجم اقلیدس معطوف داشتند. دلیل این مطلب این بود که اصل پنجم نسبت به دیگران بغرنجتر بود و به‌اندازهٔ کافی واضح به‌نظر نمی‌رسید. عدم وضوح اصل اقلیدس، این تمایل را به‌وجود آورد که به هر نحوی هست صحت این اصل را ثابت کنند یعنی آن را از بقیهٔ اصول (که در حقانیت آنها تردیدی نیست) نتیجه بگیرند. کوشش برای اثبات اصل پنجم اقلیدس در جریان بیش از دو هزار سال ادامه داشت ولی به نتیجه نرسید و به‌طوری که بعدها روشن شد نمی‌توانست هم به نتیجهٔ مثبت برسد. تنها نتیجه‌ای که از این کوشش‌ها به‌دست آمد این بود که اصول دیگر معادل با اصل اقلیدس پیدا شد ولی آنها هم دارای همان عدم وضوح اصل اقلیدس بودند و از بقیهٔ اصلهای هندسی هم به‌دست نمی‌آمدند.

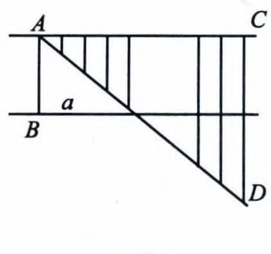
به‌سادگی ثابت می‌شود که اصل اقلیدس معادل با این حکم است: از یک نقطهٔ واقع در خارج یک خط تنها یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد (یعنی خطی که خط اول را قطع نکند). درحقیقت اگر این حکم را به‌عنوان اصل بپذیریم می‌توان اصل اقلیدس را به‌سادگی و به‌عنوان یک قضیه ثابت کرد. بعدها این منحصربفرد بودن خط موازی به‌عنوان اصل جانشین اصل اقلیدس شد (آن‌طور که درکتابهای درسی امروزی هم معمول است).

حکم دیگری که معادل با اصل اقلیدس است قضیهٔ مربوط به مجموع زوایای یک مثلث است.

کوشش هندسه‌دانها در جریان قرون متمادی این بود که یا خود اصل اقلیدس را ثابت کنند و یا احکام معادل آن را. به‌عنوان نمونه در اینجا بعضی از این نمونه استدلالها را ذکر می‌کنیم:

استدلال پروکلوس[۴] (قرن پنجم میلادی)

روی یک صفحهٔ مفروض خط a و در خارج آن نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم (شکل زیر). از نقطهٔ A عمود AB را بر خط a فرود می‌آوریم و از A عمود AC را بر AB اخراج می‌کنیم.



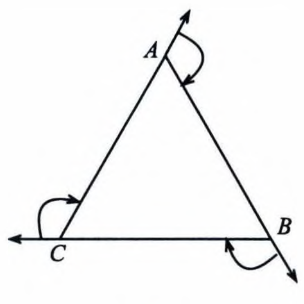
شکل ۱

۴. پروکلوس Proclus (۴۱۰ـ۴۸۵ میلادی) فیلسوف ایده‌آلیست یونانی وابسته به مکتب نو افلاطونیان و صاحب تألیفات زیادی در فلسفه و ریاضیات است و بعضی از آنها تا به امروز هم باقی مانده است.

خطوط a و AC موازی‌اند، زیرا در غیر این صورت از نقطهٔ تلاقی آنها توانسته‌ایم دو خط بر AB عمود رسم کنیم. حالا فرض کنید که از نقطهٔ A خط دیگری مثل AD را رسم کنیم. پروکلوس ثابت می‌کند که این خط حتماً خط a را قطع می‌کند، اکنون استدلال او را ذکر می‌کنیم:

عمودی بر AC اخراج کرده امتداد می‌دهیم تا خط AD را قطع کند، هرچه از نقطهٔ A دورتر شویم طول این عمود بزرگتر می‌شود و اگر به‌اندازهٔ کافی از A دور شویم، این فاصله از فاصلهٔ بین دو خط a و AC بزرگتر خواهد شد، بنابراین نقطه‌ای از خط AD در طرف دیگر خط a قرار خواهد گرفت و این به‌معنای آن است که خط AD از یک‌طرف خط a به‌طرف دیگر آن عبور می‌کند و این هم ممکن نیست مگر اینکه AD خط a را قطع کرده باشد. پروکلوس در استدلال خود به این مطلب تکیه می‌کند که فاصلهٔ نقاط یکی از دو خط موازی از دیگری نمی‌تواند زیاد شود و این خود اصلی است معادل با اصل اقلیدس.

حالا نمونه‌ای از کوشش برای اثبات قضیهٔ مربوط به مجموع زوایای مثلث را که بدون استفاده از اصل اقلیدس انجام گرفته ذکر می‌کنیم. این استدلال مربوط به قرن نوزدهم و منتسب به تیبو (thibaut) پروفسور دانشگاه گتینگن است.



شکل ۲

مثلث ABC را در نظر بگیرید (شکل ۲)؛ ضلع CA را از طرف A و ضلع AB را از طرف C امتداد می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که مجموع زوایای خارجی این مثلث برابر ۴ قائمه است: خط CA را دور نقطهٔ A و به‌اندازهٔ زاویهٔ خارجی A دوران می‌دهیم. پس از این دوران CA بر AB منطبق خواهد شد. اکنون خط AB را دور نقطهٔ B و به‌اندازهٔ زاویهٔ خارجی B دوران می‌دهیم، در این صورت AB بر BC قرار خواهد گرفت. حالا BC را به‌اندازهٔ زاویهٔ خارجی C دور نقطهٔ C دوران می‌دهیم تا بر CA قرار گیرد. می‌بینیم که بعد از این سه دوران خط CA بر امتداد اولیهٔ خود قرار می‌گیرد، بنابراین خط CA ضمن دوران خود یک زاویهٔ کامل یعنی ۴ قائمه را طی کرده است. از طرف دیگر سه دوران این خط در سه رأس مثلث و به‌اندازهٔ سه زاویهٔ خارجی مثلث انجام گرفته است. درنتیجه مجموع این زوایای خارجی برابر با ۴ قائمه است. اما واضح است که مجموع زوایای داخلی و خارجی مثلث برابر با ۶ قائمه است و بنابراین مجموع زوایای داخلی آن مساوی ۲ قائمه خواهد بود.

تیبو در این استدلال سه دوران به مراکز مختلف در نظر می‌گیرد و تصور خود را بر این قرار می‌دهد که این دوران معادل است با یک دوران کامل حول یک نقطه و در آن صورت یک زاویهٔ کامل ایجاد می‌کند. بنابراین دیده می‌شود که این حکم خود شامل فرضی است که مطالعهٔ تفصیلی آن ثابت می‌کند که معادل با اصل اقلیدس است.

ما از سایر کوششهایی که در زمینهٔ اثبات اصل اقلیدس به‌عمل آمده است صرفنظر می‌کنیم.

با وجود اینکه برای اثبات دقیق اصل اقلیدس با عدم موفقیتهای فراوان مواجه شده بودند، هندسه‌دانان دست از کوشش برای اثبات آن برنداشتند. دلیل این مطلب آن بود که علمای هندسه اعتقاد کامل داشتند که بدون روشن کردن موقعیت این اصل نمی‌توان ساختمان هندسه را انجام داد.

در نیمهٔ اول قرن نوزدهم ریاضیدان نابغهٔ روسی «**نیکلای ایوانویچ لباچوسکی**» استاد دانشگاه قازان با شجاعت تمام مطرح کرد که: اصل اقلیدس نتیجهٔ منطقی سایر اصول هندسی نیست و بنابراین نمی‌تواند ثابت شود. او همچنین توضیح داد که برای ساختمان هندسه وجود چنین اصلی ضرورت ندارد.

لباچوسکی برای اثبات نظر خود، هندسهٔ جدیدی ساخت و در آن اصل اقلیدس را تغییر داد و قبول کرد که از هر نقطهٔ واقع در خارج یک خط، بینهایت خط عبور می‌کند که آن را قطع نخواهد کرد.

قضایای این هندسه به‌طور اساسی با قضایای هندسهٔ اقلیدس متفاوت است. مثلاً در این هندسه مجموع زوایای هر مثلث از ۲ قائمه کمتر است و از آنجا حالت جدیدی برای تساوی مثلث‌ها نتیجه می‌شود: «اگر سه زاویه از یک مثلث با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشد دو مثلث برابرند» و بنابراین در چنین هندسه‌ای مثلثهای مشابه نامساوی وجود نخواهد داشت.

لباچوسکی اولین مقالهٔ خود را در زمینهٔ هندسهٔ جدیدش در سال ۱۸۲۶ منتشر کرد. افکار لباچوسکی فوق‌العاده غیرمنتظره بود ولی با وجود قضایا و نتیجه‌گیریهای غیرعادی و عجیبی که داشت به‌همان اندازهٔ هندسهٔ اقلیدسی محکم و دارای اعتبار بود. بعدها این هندسه را **هندسهٔ غیراقلیدسی** نام نهادند.

همراه با پیشنهاد این هندسهٔ جدید مسأله‌ای مطرح شد: کدام هندسه است که در جهان مادی صدق می‌کند و قوانین کدام هندسه می‌تواند برای کشف قوانین علوم دقیقه: فیزیک، نجوم و غیره به‌کار رود. لباچوسکی راه تحقق این مسأله را آزمایش از راه مشاهدات نجومی پیشنهاد کرد.

اما حل این مسأله به آن سادگیها هم که تصور می‌کردند ممکن نبود، مطلب این است که درک فضایی دنیای مادی را منعکس می‌کند.

هندسهٔ اقلیدسی بر پایهٔ مشاهدهٔ جهان مادی رشد کرده بود و بنابراین لااقل در مورد پدیده‌های ساده‌تر، روابط موجود در آن را با دقت زیادی منعکس می‌کرد. به این ترتیب تجربیات لباچوسکی جواب کاملی به سؤالات مطرح‌شده نمی‌داد. این تجربیات نه دلیل روشنی بر رد آنچه که در هندسهٔ اقلیدسی وجود داشت به‌دست می‌داد و نه تطبیق قضایای این هندسه را با روابط جهان مادی مورد تأیید قرار می‌داد.

کشف هندسهٔ غیراقلیدسی درک هندسه‌دانها را به‌کلی دگرگون کرد.

همین حقیقت که هندسهٔ غیراقلیدسی کامل و بدون تناقض است اعتماد چند صدساله را نسبت به کلمات «واضح است» و «به‌نظر می‌رسد» از بین برد، کلماتی که تکیه‌کلام هندسه‌دانهای قدیم بود. تحلیل اصل اقلیدس که قرنها طول کشیده بود استحکام نتایج هندسهٔ مقدماتی را (که هندسهٔ اقلیدسی بر پایهٔ آنها بود) به‌کلی متزلزل ساخت. این تحلیل روشن کرد که بین آن حقایق هندسی که گمان می‌رفت ارتباطی با یکدیگر ندارند چه ارتباط عمیقی وجود دارد و درنتیجه روابط فضایی در جهان مادی به‌نحو جدیدی نمایان شد.

به این ترتیب دستگاه اصول و تعاریف اقلیدس به‌عنوان پایه‌ای برای ساختمان هندسه غیرکافی بود. در دنیای افکار و ایده‌های جدید دیگر این تعاریف و اصول مطلقاً ناقص بودند و نمی‌توانستند پیشرفتهای علوم دقیقه را تأمین نمایند.

مثلاً این تعاریف که «خط عبارت است از یک امتداد بدون عرض» دیگر هندسه‌دانان را راضی نمی‌کرد، زیرا مفاهیم امتداد و عرض آن وضوح و روشنی ابتدایی را که در زمان اقلیدس داشتند، از دست دادند. برای هندسه‌دانهای زمان ما بسیاری از تعاریف اقلیدس بدون تحلیل دقیق آنها و بررسی تمام جوانب مورد لزوم (که به‌وسیلهٔ پیشینیان مسکوت گذاشته شده بود) دارای ارزش و اعتباری نیست. مثلاً نمی‌توان فهمید که چرا مثلاً تعریف ۴ نمی‌تواند برای دایره قبول باشد و یا تعریف ۷ برای سطح استوانهٔ دوار و مخروط.

به این ترتیب لزوم دقت کامل در تعاریف و اصول هندسی احساس می‌شد و این کار در اواخر قرن نوزدهم انجام گرفت به این معنی که همهٔ مسائل مربوط به اصول هندسی مورد بررسی دقیق قرارگرفت. این کوششها منجر به ساختمان جدیدی برای اصول هندسی شد، اصولی که با دقت فوق‌العادهٔ ریاضیات معاصر تطبیق می‌کند.

ادامه دارد...

نشریهٔ کوچک ریاضیات

مسابقه

سؤال مسابقهٔ این دوره

a، b و c سه عدد حقیقی دوبه‌دو متفاوت‌اند. تابع $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

در مورد تعداد ریشه‌های حقیقی تابع $f(x)$ چه می‌توان گفت؟
پاسخ این مسأله را به نشانی: اصفهان، خیابان سعادت‌آباد، روبه‌روی مقبرهٔ بانو امین، خانهٔ ریاضیات اصفهان و یا به صندوق پستی ۳۵۶ـ۸۱۶۴۵ ارسال نمایید. به راه‌حلهای برتر به قید قرعه جوایزی ارزنده تعلق می‌گیرد.

حل مسألهٔ مسابقهٔ دورهٔ قبل

طبق صورت مسأله می‌دانیم $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ که x_1، x_2، ... و x_n اعدادی نامنفی‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{x-1}x_n \leq \frac{1}{4}$.

n می‌تواند زوج یا فرد باشد، ابتدا اثبات در حالت فرد بودن n یعنی $n = 2m + 1$ ارائه می‌شود، حالت زوج بودن n هم به‌طرز مشابه قابل بیان است که بر عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

بنابراین با فرض $n = 2m + 1$ داریم: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2m+1} = 1$. حال با توجه به نامنفی بودن

تقاضای اشتراک
نشریهٔ ریاضیات

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{2m}x_{2m+1} \\ &\le x_1(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}) + x_3(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}) \\ &\quad + \cdots + x_{2m+1}(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}) \\ &= (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m+1})(x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m}) \quad (1) \end{aligned}$$

اگر $x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m+1}$ را برابر S بنامیم، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 + \cdots + x_{2m} &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2m} + x_{2m+1}) \\ &\quad - (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m+1}) = 1 - S \qquad (2) \end{aligned}$$

حال با ترکیب دو رابطهٔ ۱ و ۲ به‌دست می‌آید

$$x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n \le (x_1 + \cdots + x_{2m+1})(x_2 + \cdots + x_{2m}) = S(1-S) \qquad (3)$$

بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی، $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$. درنتیجه

$$S(1-S) \le \left(\frac{S+1-S}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad (4)$$

و درنهایت با به‌کار بردن همزمان رابطه‌های ۳ و ۴ به‌دست می‌آید

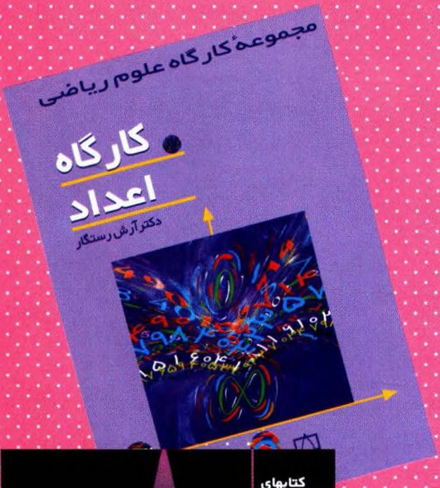
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \le S(1-S) = \frac{1}{4}$$

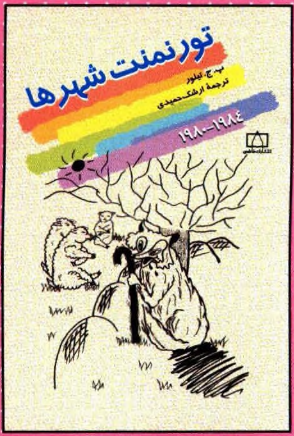
هزینهٔ اشتراک برای شش شمارهٔ سال ششم، شهریور ۱۳۸۴ تا شهریور ۱۳۸۵، ۵۰۰۰ تومان است که باید به حساب جاری ۴۶۹۰/۳ بانک ملت، شعبهٔ خدمات درمانی (کد ۶۳۵۴/۵) به‌نام (مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی) واریز شود و اصل فیش بانکی به‌ضمیمهٔ تقاضای اشتراک به نشانی «مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، تهران، صندوق پستی ۴۴۹-۱۴۱۴۵» ارسال گردد.

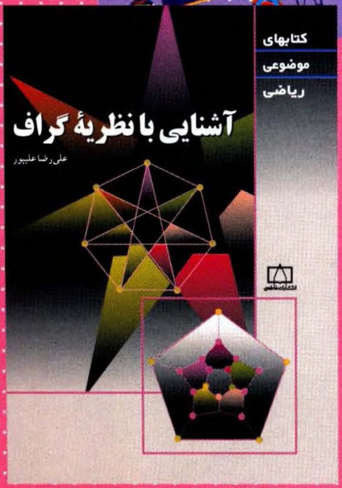
نام متقاضی اشتراک: ....

نشانی پستی: ....

تلفن: ....

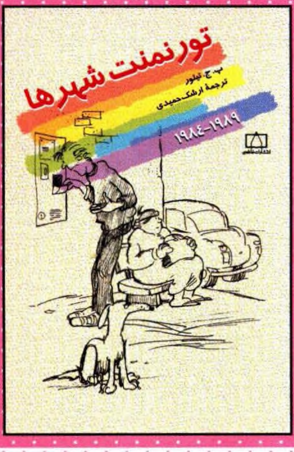




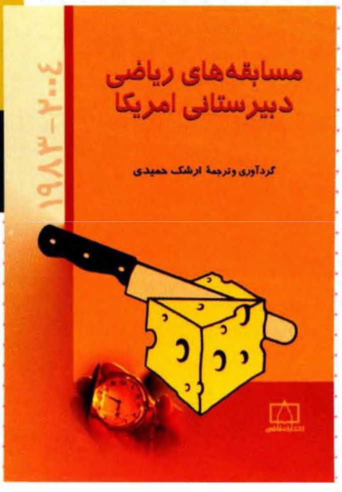


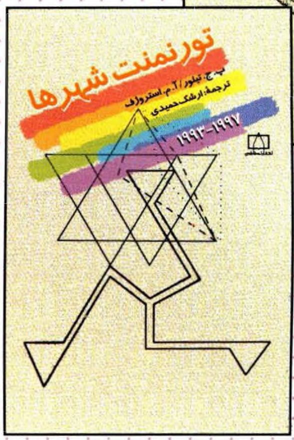
انتشارات فاطمی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی منتشر کرده است:



منتشر می کند:





انتشارات فاطمی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی منتشر می‌کند:

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر: دکتر یحیی تابش / دکتر امیدعلی کرمزاده

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل ساعت‌ها تلاش فکری است. بدیهی است که اگر این تلاش‌ها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار **کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است.

این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (**کتاب‌های زرد**) شامل کتاب‌هایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (**کتاب‌های نارنجی**) شامل کتاب‌های میانه و مجموعهٔ مسائل و کتاب‌های کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است.

دستهٔ سوم (**کتاب‌های قرمز**) شامل کتاب‌های پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات، زیبا شناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوری‌های ذهنی تلاش می‌کنند. مطالعهٔ کتاب‌های این مجموعه به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

منتشر کرده است: