نشریهٔ ریاضیات

سال ششم/۱
شمارهٔ پیاپی: ۲۱
شهریور ۱۳۸۴
قیمت: ۹۰۰ تومان

- برخی گرایشها در ریاضیات معاصر و مدال فیلدز
- دو قضیهٔ مفید در مورد مساحتها
- اسکناستان را بزرگتر کنید!!!
- ده کوئیکی از کلامکین
- تورنمنت شهرها

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال ششم/ ۱، شمارهٔ پیاپی: ۲۱، شهریور ۱۳۸۴

فهرست:

روی جلد: مدال فیلدز

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: یحیی تابش، فروزان خردپژوه، علی رجالی، ایرج ضرغام

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، بهروز طوری، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: زلال

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۸۹۷۱۵۸۳ـ۸۸۹۷۱۵۸۴

پست الکترونیک: math@schoolnet.sharif.ac.ir

خانهٔ ریاضیات اصفهان

با همکاری خانهٔ ریاضیات اصفهان

هشتمین همایش شبکهٔ مدرسه

۲۲ تا ۲۵ شهریور ۱۳۸۴

یحیی تابش

«شبکهٔ مدرسه» به‌عنوان نهادی غیردولتی، با حمایت دانشگاه صنعتی شریف، توانسته است به توسعهٔ فناوری اطلاعات و ارتباطات در آموزش و پرورش کمک کند و دستاوردهای ارزشمندی را به‌عنوان مدل و نمونه در اختیار آموزش و پرورش قرار دهد. ازجمله فعالیتهای این نهاد برگزاری همایشهای سالانه است که مخاطبان آن به‌طور عمده دانش‌آموزان دبیرستانی هستند. این همایش در سال جاری از ۲۲ تا ۲۵ شهریورماه در شهر نیشابور با حمایت مدیریت ICT در وزارت آموزش و پرورش، سازمان آموزش و پرورش خراسان رضوی و مدیریت آموزش و پرورش نیشابور و البته بنیاد دانش و هنر، به‌عنوان حامی اصلی شبکهٔ مدرسه، برگزار شد. دو نکته دربارهٔ این همایش اهمیت ویژه‌ای دارد که در اینجا به این دو نکته توجه می‌کنیم:

۱. آموزش و پرورش در کشور ما پس از رسیدن به مرز ۲۰ میلیون دانش‌آموز، سال تحصیلی جدید را با حدود ۱۵ میلیون دانش‌آموز آغاز می‌کند که به شرایط تعادل نزدیک است. ازاین‌رو، توجه به توسعهٔ کیفی آموزش و پرورش امر مهمی است که نباید از نظر دور بماند. اگر بخواهیم به راهکارهایی برای توسعهٔ کیفی آموزش و پرورش بیاندیشیم، باید به نقاط ضعف آن توجه کنیم و مدلی برای فائق آمدن به این نقاط ضعف پیشنهاد کنیم. آموزش و پرورش در کشور ما به‌شدت قالبی و امتحان‌زده است، همه‌چیز در قالب کتابهای درسی شکل می‌گیرد و امتحانات، حال آنکه با رویکردهای جدید، امور رسمی آموزش تنها نیمی از وظایف مدارس محسوب می‌شود و نیم دیگر را باید از فعالیتهای فوق برنامه سامان داد که محمل شکوفایی استعدادها و بروز خلاقیتهاست.

فناوری اطلاعات و ارتباطات بدون تردید ابزار مناسبی برای توسعهٔ فعالیتهای فوق برنامه و انجام پروژه‌های علمی، آموزشی، فرهنگی، هنری، اجتماعی و غیره بر بستر امکانات شبکهٔ اینترنت و کامپیوتر است؛ باید دانش‌آموزان را به انجام پروژه به‌صورت تیمی وگروهی تشویق کنیم که عدم توانایی انجام کارگروهی نیز از دیگر ضعفهایی است که به آن نپرداخته‌ایم. بر این اساس باید همایش شبکهٔ مدرسه را بسیار موفق ارزیابی کرد، حدود ۶۰ مقالهٔ علمی ازکارهای دانش‌آموزان شهرهای مختلف تحت پوشش شبکهٔ مدرسه، که به‌صورت گروهی و بر بستر توانمندیهای فناوری اطلاعات و ارتباطات انجام شده بود ارائه شد. کارهای بچه‌ها سطح کیفی مطلوبی داشت که بی‌شک جای امیدواری فراوان دارد. به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان راه خود را یافته و آن را گشوده‌اند، نباید از تشویق و حمایت آنان غفلت کنیم.

۲. نیشابور همیشه یادآور خیام است. خیام بدون تردید از چهره‌های اصیل علمی جهان بشری است که با نگارش کتاب جبر و مقابله و ابداع روشهای حل معادلات درجهٔ سوم و بررسی هندسهٔ اقلیدسی و ارائهٔ نخستین اندیشه‌های هندسهٔ غیراقلیدسی جایگاه ویژه‌ای در تاریخ ریاضیات دارد. گردهمایی بیش از ۵۰۰ دانش‌آموز در شهر خیام و زیارت مزار او به‌گونه‌ای توجه به گذشته‌ها و ریشه‌هاست که در گشودن راههای آینده بسیار مؤثر است.

فضای فرهنگی نیشابور هنوز هم روح خیام را در کالبد خود دارد، ادیبان می‌گویند «صبح نیشابور» راز غریب شورآفرینی دارد، دانش‌آموزان ما با صبح نیشابور آغاز کرده‌اند و پرشور مسیر ترقی را می‌پیمایند.

برخی گرایشها در ریاضیات معاصر و مدال فیلدز

میخائیل موناستیرسکی

مدال فیلدز معتبرترین و ارزشمندترین جایزه در عالم ریاضیات است که هر چهار سال یک‌بار در گردهمایی بین‌المللی ریاضیدانان به برجسته‌ترین دستاوردهای ریاضی اعطا می‌شود. در هر گردهمایی دست‌کم دو و حداکثر چهار ریاضیدان زیر چهل سال به افتخار دریافت این جایزه نائل می‌شوند. به هر کدام از آنان یک مدال فیلدز به همراه ۱۵۰۰۰ دلار کانادا تعلق می‌گیرد. این مقاله، متن سخنرانی مؤلف در همایش «یادگار جان چارلز فیلدز» در تورنتو کاناداست (ژوئن، ۲۰۰۰).

مقدمه

در حال حاضر مدال فیلدز بی‌شک معروفترین و تأثیرگذارترین جایزه در ریاضیات است. بعضی وقتها از آنجایی که برای ریاضیات جایزهٔ نوبل در نظرگرفته نشده است آن را با جایزهٔ نوبل مقایسه می‌کنند. به‌ویژه ناشران و روزنامه‌نگاران به این مقایسه علاقه‌مندند. به نظرم چنین مقایسه‌ای درست نیست. سنت اعطای مدال فیلدز براساس اصول مختلفی بنیاد نهاده شده است. برخلاف جایزهٔ نوبل که در اکثر موارد به دانشمندان میانسال به‌سبب رسیدن به اوج کمال حرفه‌ایشان اعطا می‌شود، مدال فیلدز به دانشمندان جوان زیر ۴۰ سال تعلق می‌گیرد. این جایزه برای قدردانی نه‌تنها بابت نتایجی که تا آن موقع به‌دست آمده است بلکه بابت برانگیختن تحقیقات بیشتر هم در نظر گرفته می‌شود. از این گذشته، این جایزه فقط هر چهار سال یک‌بار در گردهمایی بین‌المللی ریاضیدانان اعطا می‌شود.

نخستین مدال فیلدز در سال ۱۹۳۶ در اُسلو و دومین مدال ۱۴ سال بعد، یعنی در سال ۱۹۵۰، در کمبریج ماساچوست اعطا شده است. با این حساب، ریاضیدانانی که در حدود سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۱۰ متولد شده بودند خودبه‌خود از فهرست نامزدهای دریافت مدال خارج شدند؛ از جملهٔ اینها مثلاً می‌توان ریاضیدانان طراز اولی نظیر آندرِی کولموگوروف، هانری کارتان، آندره ویل، ژان لُری، لِف پونتریاگین، شینگ‌شن چرن و هاسلر ویتنی را نام برد. در هر صورت، چنانچه به دستاوردهای نام‌آوران فیلدز از دیدگاه تأثیرشان بر پیشرفت ریاضیات در قرن بیستم نگاهی بیندازیم شاهد جلوه‌ای باعظمت خواهیم بود.

جان چارلز فیلدز، بنیانگذار این جایزه، دو اصل اساسی را برای اعطای جایزه در نظر گرفت:

الف) حل کردن مسأله‌ای دشوار.

ب) ابداع نظریه‌ای جدید که دامنهٔ کاربردهای ریاضیات را گسترش دهد.

هر دو این اصول در پیشرفت ریاضیات اهمیت دارند. کاملاً روشن است که اینها مستقل از هم نیستند. چه

بسیار که حل کردن مسأله‌ای دشوار منجر به ابداع نظریهٔ ریاضی جدیدی شود و برعکس، ابداع نظریه‌ای جدید ممکن است به حل کردن مسأله‌ای قدیمی بینجامد.

کاملاً غیرممکن است که بتوان طی یک سخنرانی یک‌ساعته دستاوردهای نام‌آوران فیلدز را، حتی به‌شکلی خلاصه، بیان کرد. در این سخنرانی می‌خواهم با سیری در عالم ریاضیات معاصر چشم‌اندازی متنوع از بعضی جلوه‌های هیجان‌انگیز در این‌باره ترسیم کنم. سعی می‌کنم که سیمای شاخص ریاضیات قرن بیستم را توضیح دهم، اینکه چه‌نوع ریاضیاتی در چه دوره‌ای بااهمیت محسوب می‌شده است و اینکه دستاوردهای دریافت‌کنندگان مدال فیلدز از این منظر چطور به‌نظر می‌رسند.

به‌طور کلی، جوایز هم مانند قدردانیهای بین‌المللی نزد تک‌تک دانش‌پژوهان اهمیت بسزایی دارند. هرچند که فرانتس نویمان به زیبایی گفته است که «کشف حقیقتی جدید بزرگترین لذت است؛ با قدردانی به‌زحمت بتوان چیزی به آن افزود»، اما این ایدهٔ خردمندانه فقط تا حدودی درست است. به‌عقیدهٔ نیلس بور حتی عکس این نتیجه‌گیری درست است. قدردانی، به‌ویژه برای محققان جوان، بسیار بااهمیت است. برگزیدن ریاضیدانان جوان، به ادامه یافتن پیشرفت ریاضیات کمک می‌کند. کمیته‌های فیلدز از ریاضیدانان طراز اول نسل گذشته تشکیل می‌شوند که این امر باعث می‌شود که ارزیابیشان در مورد خلاقیت ریاضیدانان جوان بسیار جالب شود.

همان‌طور که پیش از این اشاره کردم، نخستین مدال در سال ۱۹۳۶ اعطا شد و بعدی در سال ۱۹۵۰، و با این حساب، بجز یک مورد استثنا، همهٔ مدالها در نیمهٔ دوم قرن بیستم اعطا شده‌اند. جنگ جهانی دوم به‌طور کلی بر پیشرفت جامعهٔ بشری و علم و به‌ویژه ریاضیات بسیار تأثیر گذاشت. پیشرفت ریاضیات نمونه‌ای تمام و کامل از نظریه‌ای کلیتر دربارهٔ طبیعت پیوسته اما «مشتق‌ناپذیر» پیشرفت علم است. اگر نمودار پیشرفت ریاضیات را در نظر بگیریم، به‌روشنی تغییرات علاقه‌های ریاضیدانان را در دوره‌های زمانی شامل جنگهای جهانی مشاهده می‌کنیم. طبیعی است که علم پیوسته گسترش یابد؛ این حقیقتی است که بر دو پایهٔ عاملهای درونی و توالی نسلها استوار است. از این گذشته، کمی محافظه‌کاری جزء ویژگیهای علم است که به‌طور کلی آن را پدیده‌ای جدی می‌دانم. همان‌طور که نیچه گفته است، در جهان ایده‌های بزرگ آرام‌آرام پدیدار می‌شوند. پذیرش ایده‌های جدید با موانع بزرگی مواجه می‌شود و آزمایشهایی طولانی را می‌طلبد. ماکس پلانک به مزاح چنین گفته «هیچ حقیقت علمی جدیدی با متقاعد کردن مخالفان آن و اینکه آنها حقیقت را دریابند تفوق نمی‌یابد، بلکه پیروزیش کمابیش به این دلیل است که مخالفانش عاقبت از دنیا می‌روند و نسلی جدید با آن بزرگ می‌شوند.» علاوه‌بر این، اینکه هر کدام از دو جنگ جهانیِ مصیبت‌بار نسلی کامل از دانشمندان را از بین برد، فرایندی به‌ظاهر واقعی برای پذیرفتن دیدگاههای جدید در ریاضیات را سرعت بخشید.

چنانچه به جوایز سالهای ۱۹۳۶ و ۱۹۵۰ از این دیدگاه نگاهی بیندازیم درمی‌یابیم که علایق جدید نظیر افزایش ناگهانی علاقهٔ ریاضیدانان به توپولوژی جبری و هندسه در نخستین سالهای بعد از جنگ جهانی دوم، در نخستین جایزهٔ بعد از جنگ هنوز بازتاب نیافته‌اند. جایزهٔ سال ۱۹۵۰ به لوران شوارتس (برای نظریهٔ توزیعها) و به آتله سلبرگ

به‌سبب دستاوردهای فوق‌العاده‌اش در نظریهٔ اعداد، یعنی توزیع صفرهای تابع زتای ریمان و اثباتی «مقدماتی» از مجانبی‌بودن توزیع عددهای اول، اعطا شد. اما در سال ۱۹۵۴ این جایزه به کانیهیکو کودایرا و ژان پیر سِر بابت دستاوردهای بعد از جنگ آنها اعطا گردید. هرمان وایل که در سال ۱۹۵۴ ریاست کمیتهٔ فیلدز را بر عهده داشت دربارهٔ مقاله‌های کودایرا و سِر سخنرانی کرد. عجیب اینکه وایل در تمایز قائل شدن میان زمینه‌های تحقیقاتی این دو ریاضیدان دچار مشکل شده بود. او دراین‌باره گفت «افراد غیرمتخصص ممکن است گمان کنند که کمیته‌مان در اعطای مدال فیلدز به دو ریاضیدانی که موضوع تحقیقاتشان تا این حد نزدیک به‌هم‌اند اشتباه کرده است. این وظیفهٔ کمیته است که نشان دهد که با وجود اینکه در بعضی جاها روشها شبیه هم‌اند، آنها مسأله‌هایی کاملاً متفاوت و بی‌اندازه دشوار را حل کرده‌اند.»

در اعطای مدالهای بعدی شاهد تعادلی آشکار میان دو اصل مهمی هستیم که بنیانگذار این جایزه آنها را مبنا قرار داده بود. مثلاً، در سال ۱۹۵۸ به‌سبب اثباتِ تخمینی دقیق که قضیهٔ توئه‌ـزیگل دربارهٔ تقریب زدن عددهایی جبری با عددهای گویا را بهبود می‌بخشید، این افتخار نصیب کلاوس روت شد. صورت قضیهٔ روت چنین است: اگر α عدد جبری دلخواهی باشد و گویا نباشد، آن‌وقت اگر $2 < \nu$، نامعادلهٔ

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^{\nu}}$$

فقط تعدادی متناهی جواب گویا مانند $\frac{p}{q}$ دارد.

دومین برندهٔ مدال آن سال رِنه توم بود که در توپولوژی روشی بسیار مؤثر موسوم به نظریهٔ کُبُردیسم ابداع کرد.

در سال ۱۹۶۲ برندگان مدال لارس هُرماندر و جان میلنُر بودند. هُرماندر نظریهٔ عام معادلات دیفرانسیل جزئی خطی، ازجمله عملگرهای زیربیضوی، را گسترش داد. کار نام‌آور دیگر کاملاً حیرت‌انگیز بود و تأثیری چشمگیر در پیشرفتهای بعدی توپولوژی داشت. یافتن ابداعی تا آن زمان که با ساختارهای دیفرانسیلی متفاوتی روی کرهٔ هفت‌بعدی که میلنر به زیبایی ایجاد کرده قابل قیاس باشد، واقعاً بسیار دشوار است. بعدها این نتیجه سنگ‌بنایِ شاخه‌ای جدید از توپولوژی، یعنی توپولوژی دیفرانسیل، شد. اثبات اولیهٔ میلنر روشی کارآمد برای ایجاد چنین ساختارهایی را دربر نداشت، اما بعدها بریسکورن نشان داد که این ساختارهای دیفرانسیلی را می‌توان به‌شکلی بسیار واضح و زیبا توصیف کرد.

در سال ۱۹۶۶ چهار مدال داده شد. یکی از کسانی که به این افتخار رسید پال کوهن بود که ثابت کرد اگر اصول موضوع تسرملوـفِرَنکل سازگار باشند، آن‌وقت با اضافه‌کردن نقیض اصل انتخاب یا حتی نقیض فرض پیوستار این نظریه باز هم سازگار می‌ماند. این اولین و آخرین باری بود که این جایزه به یکی از متخصصان منطق ریاضی اعطا شد. اَلکساندر گروتندیک یکی از خلاقترین و شگفت‌آورترین ریاضیدانان عصر ما هندسهٔ جبری را به‌کلی متحول ساخت. مفهوم طرحها که او آن را مطرح کرد هندسهٔ جبری را به سطح جدیدی از تجرید، که فراتر از دسترس ریاضیدانانی با معلومات سنتی قرار داشت، ارتقا داد. نظریهٔ بافه‌ها، دنباله‌های طیفی و دیگر نوآوریها

در اواخر دهۀ ۱۹۴۰ و اوایل دهۀ ۱۹۵۰ همگی در زمرۀ این فن پیچیده قرار می‌گیرند. اما اگر ریاضیدانانی توانستند برای مدتی خودشان را با این امید دلداری دهند که همۀ این ساختارهای پیچیده «مهملات انتزاعی»اند (در جبر، اصطلاح «مهملات انتزاعی» معنی روشنی دارد، بدون هیچ‌گونه معنی ضمنی توهین‌آمیزی)، مقاله‌های بعدی گروتندیک و دیگران ثابت کرد مسأله‌های کلاسیک هندسۀ جبری و نظریۀ اعداد را که در برابر تلاشهای چندین نسل از بااستعدادترین ریاضیدانان دوام آورده و حل نشده بودند، می‌توان برحسب مفهومهای ساخته و پرداختۀ گروتندیک نظیر Kـ تابعگون، موتیف‌ها، همانستگی lای و دیگر مفهومهای به‌همین اندازه پیچیده حل کرد.

دو ریاضیدان استثنایی دیگر هم درگردهمایی آن سال حضور داشتند. آداب و رسوم اجتماعات علمی، کمابیش با آداب و رسوم اجتماع نویسندگان، ستارگان سینما و مانکنهای مُد تفاوت دارد. تعریف کردن از دانشمندی نام‌آور در حضور خودش عملی چندان مقبول نیست. بنابراین واقعاً قصد ندارم به دستاوردهای ریاضیدانانی که در اینجا از آنها نام برده می‌شود به‌طور مفصل اشاره کنم، اما استثنایی قایل می‌شوم و چند کلمه‌ای دربارۀ نتایج استیون اِسمیل و مایکل اتیا می‌گویم، زیرا کارهایشان سطح این جایزه و تحقق اصول آن را به‌خوبی مشخص می‌کنند.

نتایج اسمیل به‌ویژه به رشته‌ام نزدیک است، چون زندگی حرفه‌ایم در ریاضیات را به‌عنوان دانشجوی دمیتری آنوسوف، ریاضیدان سرشناس روسی، آغازکردم و نخستین توصیه‌اش به من مطالعۀ مقاله‌های اسمیل در سیستمهای دینامیکی بود.

استیون اسمیل عمدتاً به‌سبب دو دستاوردش به افتخار دریافت مدال نایل شد. نخستین آنها حل کردن حدس پوانکاره در ابعاد بالاتر بود. حدس پوانکاره در زمرۀ دشوارترین مسأله‌های توپولوژی است. این حدس را می‌توان با اصطلاحات امروزی این‌طور بیان کرد:

حدس پوانکاره. هر خمینۀ همبند سادۀ هموار و بسته مانند M^n با گروههای مانستگی کرۀ S^n، همسانریخت با S^n است.

پوانکاره حدسش را در حالت سه‌بعدی بیان کرد. او اعتقاد داشت که حتی حکمی قویتر درست است، یعنی M^n با S^n وابرریخت است. اما از وجود کره‌های شگفت‌انگیز میلنر نتیجه می‌شود که این حدس به این شکل درست نیست. اسمیل قضیه‌ای کلیتر را دربارۀ hـ کُبُردیسم ثابت کرد که از آن نتیجه می‌شود که حدس پوانکاره درمورد همۀ بُعدهایی مانند n که $n \geq 5$ درست است. در بُعدهای ۵ و ۶ حدسی قویتر درست است: M^n با S^n وابرریخت است.

در نظر اول اینکه اثبات حدس پوانکاره در مورد فضاهای با بُعد بالاتر دست‌یافتنی‌تر از اثبات آن در مورد خمینه‌های سه‌بعدی و چهاربعدی باشد معماگونه به‌نظر می‌رسد. دلیلش این است که نگاشتی از رویه به خمینه با بعد کمتر از پنج را نمی‌توان با نشاندن تقریب زد. وضعیت در اینجا شبیه وضعیت رده‌بندی خمینه‌هاست. این نتیجۀ کلاسیک بی‌شک با نخستین اصل اعطای مدال فیلدز مطابقت دارد.

دومین دستاورد اسمیل به نظریۀ سیستمهای دینامیکی مربوط می‌شود. خاستگاه این عرصه از ریاضیات

مکانیک کلاسیک و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی است. در آغاز قرن بیستم هانری پوانکاره، جورج دیوید برکاف، ژاک آدامار و ایوار اُتو بندیکسون آن را گسترش دادند. در اواسط دههٔ ۱۹۳۰ اِبرهارد هوپف، گوستاو هِدلاند، مارستن مورس، الکساندر آندرونوف و لف پونتریاگین و چند نفر دیگر در این عرصه به نتایج چشمگیری دست یافتند. اما تقریباً همهٔ این نتایج دربارهٔ حالتهای دوبعدی بودند. اسمیل در اصل حالتی چندبعدی را گسترش داد. او ثابت کرد که سیستمهای دینامیکی به‌اصطلاح از نظر ساختاری پایدار در بعدهای بالاتر اساساً ویژگیهای متفاوتی دارند. برخلاف سیستمهای دوبعدی که آندرونوف و پونتریاگین آنها را بررسی کردند، در حالتی چندبعدی سیستمهای از نظر ساختاری پایدار ممکن است تعدادی نامتناهی نقطهٔ تکین، دورهای حدی و غیر داشته باشند. نخستین چیزی که ساخت، نعل اسب معروفش بود که با خودریختیهای گسستهٔ چنبره تولید می‌شود. او همچنین فرضی بسیار جالب را دربارهٔ پایداری ساختاری شارشهای ژئوذریک روی خمینه‌های فشرده با انحنای منفی مطرح کرد که بعدها آنوسوف آن را ثابت کرد. این نتایج به پیدایش نظریهٔ سیستمهای دینامیکی چندبعدی منجر شدند، عرصه‌ای جدید از ریاضیات که هنوز هم به‌طور جدی رو به گسترش است. این نتایج اسمیل نمونه‌ای عالی از تحقق دومین اصل فیلدزند.

از مایکل اتیا، دیگر نام‌آور گردهمایی آن سال، به‌سبب کارش در توپولوژی جبری، به‌ویژه بابت اثبات قضیهٔ شاخص که به قضیهٔ اتیاـسینگر معروف است، قدردانی شد. این قضیه از چند نظر فوق‌العاده است. پیش از همه اینکه این قضیه رشته‌ای طولانی از قضیه‌های معروف از قضیهٔ اویلر دربارهٔ چندوجهیها گرفته تا قضیهٔ ریمان‌ـرُخ و قضیهٔ پوانکاره‌ـهوپف دربارهٔ تکینگیهای میدانهای برداری را تعمیم داد.

اثبات اولیهٔ اتیا و سینگر بسیار پیچیده بود و در آن از طیفی گسترده از مفاهیم ریاضی که در سالهای قبل از آن در توپولوژی جبری، هندسه و معادلات دیفرانسیل جزئی شکل گرفته بودند استفاده شده بود. بعدها شکلهایی از این اثبات که به‌طور اساسی ساده شده بودند به‌دست آمدند و به‌ویژه به‌طور چشمگیری در سالهای اخیر ارتباط میان این نظریه و مسأله‌های مهم نظریهٔ کوانتومی میدان، مانند مسألهٔ بی‌قاعدگیهای کوانتومی، روشن شده است.

کارهای اتیا و سینگر، گروتندیک، هیرتسبروخ و بسیاری از ریاضیدانان دیگر عرصه‌ای جدید از ریاضیات را پایه‌ریزی کرد که در آن ایده‌های توپولوژی جبری و هندسه و آنالیز مختلط آن‌قدر در هم تنیده شده‌اند که اکنون دیگر تقسیم‌بندی سنتی کاملاً غیرممکن است. اتیا به‌تعبیری زیبا گفته است که «توپولوژی‌دانان عملگرهای ساده را روی خمینه‌های پیچیده مطالعه می‌کردند و آنالیزدانان عملگرهای پیچیده را روی فضاهای ساده.» زمان آن فرا رسیده است که عملگرهای پیچیده روی فضاهای پیچیده مطالعه شوند.

این کارها نه‌تنها ریاضیات را به سطحی بالا از تجرید ارتقا دادند، بلکه سودمندی این روشها را در حل کردن مسأله‌های کلاسیک حل نشدهٔ قدیمی هم به اثبات رساندند. یکی از بهترین مثالهای از این دست، حل کردن مسألهٔ معروف وجود جبرهای تقسیمی توسط جان فرانک آدامز است. از زمان کیلی این جبرهای تقسیمی شناخته شده بودند: عددهای حقیقی، عددهای مختلط، چهارگانها و عددهای کیلی. همین‌طور که بُعد افزایش می‌یابد ویژگیهایی

را از دست می‌دهیم؛ مثلاً چهارگانها تعویض‌ناپذیرند. طبیعتاً این پرسش پیش می‌آید: آیا جبرهای تقسیمی دیگری هم وجود دارند؟ پاسخ منفی این پرسش تا دههٔ ۱۹۶۰ به‌دست نیامد و در این زمان ثابت شد که این پرسش خیلی به این مسألهٔ توپولوژی مربوط است: همهٔ کره‌هایی را پیدا کنید که تعداد میدانهای برداری پیوستهٔ مستقل روی آنها برابر با بُعدشان باشد. فقط سه کره از این دست وجود دارند: $S^{۱}$، $S^{۳}$ و $S^{۷}$.

امیدوارم که آنچه گفته شد دست‌کم سرنخی به‌دست داده باشد که چگونه دو اصل فیلدز درکارهای اتیا به هم پیوند می‌خورند. ریاضیات موضوعی یکپارچه است و این چیزی نیست که با مطالعهٔ تحقیقات روز به‌روشنی معلوم باشد. با این همه، این حقیقت وقتی آشکار می‌شود که با دستاوردهای ریاضیدانان بزرگ آشنا شوید. این درک تنها نتیجهٔ جانبی حاصل از تجزیه و تحلیل کارهای برندگان مدال فیلدز است. گرچه همهٔ افتخارات نصیب آفرینندگان بزرگترین دستاوردهایی شدند که در سالهای درست پیش از هر همایش و بعضی وقتها در بخشهایی از ریاضیات که کاملاً از یکدیگر جدا بودند به‌دست آمدند، اما ارتباطهای حقیقتاً شگفت‌انگیز میان آنها با گذشت زمان آشکار شدند.

اگر اصول اساسی جان فیلدز را به یاد داشته باشیم و کارهای برندگان مدال فیلدز را خیلی سریع مرور کنیم متوجه چند مورد جالب می‌شویم:

۱. اختصاص علایق ریاضیدانان به عرصه‌های باثبات.

۲. پشت در پشت بودن ریاضیات.

۳. تغییرات پی‌درپی مد ریاضی.

سعی می‌کنیم اینها را با گزیده‌هایی از کارهای برندگان مدال فیلدز توضیح دهم.

۱. اختصاص علایق

بی‌شک، اگر ریاضیات نیمهٔ دوم قرن بیستم را به دو بخش تقسیم کنیم، سی سال نخست آن بیشتر به بررسی مسأله‌های جبری و آنالیز مختلط اختصاص داشته است. در این دوره مفهومها و روشهای جدیدی پیدا شدند و این موضوع به‌روشنی از فهرست نام برندگان مدال فیلدز در این سالها پیداست. تحولی آشکار در این جهت‌گیری، یعنی بازگشت به مباحث کلاسیکتر، البته در سطحی جدید، را می‌توان در ریاضیات اواخر دههٔ ۱۹۷۰ به بعد مشاهد کرد. این موضوع با کمی تأخیر در دستاوردهای برندگان مدال فیلدز دوگردهمایی آخر این دوره نمود یافته است.

توجه به همگرایی جدید میان ریاضیات و فیزیک اهمیت بسزایی دارد. ارتباطهای سنتی میان ریاضیات و فیزیک شناخته شده‌اند. اگر پیشرفت همگام ریاضیات و فیزیک بنیادی را در نظر بگیریم، از اینکه متحول‌کننده‌ترین نظریه‌های فیزیک قرن بیستم بر پایهٔ ریاضیاتی قرار دارند که مخصوصاً به این منظور گسترش یافته‌اند، حیرت‌زده می‌شویم. برای روشن شدن این موضوع فقط کافی است یادآور شویم که نسبیت خاص و نسبیت عام اینشتین بر پایهٔ هندسهٔ دیفرانسیل کلاسیک فضاهای ریمان، مکانیک کوانتومی و فضاهای هیلبرت و نظریهٔ عملگرهای خطی،

معادلهٔ شرودینگر و نظریهٔ طیفی و چند چیز دیگر قرار دارد. این ارتباط یک وقتی در دههٔ ۱۹۳۰، هنگام حل کردن چند مسألهٔ ملموستر در فیزیک، موقعی که فیزیکدانان گمان می‌کردند که می‌توانند اکثر مسأله‌هایشان را بدون استفاده از ریاضیات معاصر مجرد و پیشرفته حل کنند، قطع شد. مشخصهٔ پیشرفت ریاضیات محض در فاصلهٔ زمانی میان دو جنگ جهانی و به‌ویژه در دورهٔ بعد از جنگ جهانی دوم هم ارتباط ضعیف آن با علوم کاربردی و به‌ویژه فیزیک است. این مطلب به‌ویژه در مورد بخشهایی از ریاضیات که بسیاری از برندگان مدال فیلدز روی آنها کار می‌کردند درست است. تصور اینکه مفهومهای بافه، همانستگی اِتال، Jـ تابعگون و مانند اینها یک وقتی در فیزیک به‌کار گرفته شوند، دشوار بود. اما تصور اینکه فیزیک ممکن است به کار توپولوژی جبری و هندسه بیاید از این هم دشوارتر بود.

این دیدگاه بسیار رایج بود. ژان دیودونه، ریاضیدان فرانسوی و یکی از بنیانگذاران بورباکی، خودش به صراحت دربارهٔ این موضوع در سال ۱۹۶۲ اظهار کرده «مایلم بر این نکته تأکید کنم که چطور تاریخ چند سال اخیر با شعارهای واهی منفی‌بافان جور درمی‌آید که مرتباً به ما دربارهٔ پیامدهای وحشتناک این موضوع هشدار می‌دهند که جهت‌گیری ریاضیات در سمت و سویی قرار گرفته است که رابطهٔ آن با کاربردهایش در علوم دیگر دارد قطع می‌شود. قصد ندارم بگویم که این‌طور نیست که ارتباط نزدیک با دیگر رشته‌ها، نظیر فیزیک نظری، برای همهٔ رشته‌های درگیر در این قضیه سودمند باشد؛ اما کاملاً روشن است که از همهٔ پیشرفتهای چشمگیری که دربارهٔ آنها سخن گفته‌ام، و نه فقط یک مورد خاص، به‌استثنای احتمالاً نظریهٔ توزیع، هیچ‌کدامشان کاربردی در فیزیک نداشتند.» (به نقل از سخنرانی‌ای که در سال ۱۹۶۲ در دانشگاه ویسکانسین ایراد شد و در آن دیودونه دستاوردهای ریاضیات محض را در دههٔ قبل از آن مرور کرده بود. او در این سخنرانی بر توپولوژی جبری، هندسهٔ جبری، آنالیز مختلط و نظریهٔ جبری اعداد تأکید داشت.) اما همان‌طور که اغلب در مورد نظراتی که خیلی کلی بیان می‌شوند پیش می‌آید، ده سال بعد از آن اوضاع دستخوش تحولاتی گسترده شد.

در آغاز دههٔ ۱۹۷۰، هم در ریاضیات و هم در فیزیک نتایجی به‌دست آمدند که این دیدگاه را به کلی دگرگون کردند. در میان ریاضیدانانی که بی‌درنگ فرصتها و چالشهای تازه را که در فیزیک جدید نهفته بود دریافتند چند تن از نام‌آوران فیلدز قرار داشتند. در این مورد کافی است از سرگئی نوویکوف، شینگ تانگ تائو، آلن کُن، سایمن دانلدسُن و ادوارد ویتن نام ببریم. ویتن نخستین فیزیکدانی بود که به او مدال فیلدز اعطا شد. از میان دستاوردهای نام‌آوران فیلدز، که ایده‌های فیزیکی الهام‌بخش آنها بوده‌اند، پیش از همه به کارهای سایمن دانلدسُن اشاره می‌کنم. بعد از کارهای میلنر دربارهٔ ساختارهای دیفرانسیلی روی $S^{۷}$، مقالهٔ دانلدسُن که در سال ۱۹۸۳ انتشار یافت تأثیر چشمگیر مشابهی داشت. دانلدسُن وجود ساختارهای دیفرانسیلی متفاوت را روی خمینه‌های چهاربعدی همبند ساده ثابت کرد. (متأسفانه روش او در مورد $S^{۴}$ کارایی نداشت و این مورد هنوز هم حل‌نشده مانده است.) بلافاصله بعد از کارهای دونالدسون، رابرت گومپف و کلیفورد تاوبز در مقاله‌هایی این نتیجهٔ فوق‌العاده را ثابت کردند که تعدادی نامتناهی ساختار دیفرانسیلی متفاوت روی $R^{۴}$ وجود دارد. اینکه فضای «شناخته‌شده»

R^4 چنین ساختارهای عمیقی را در خود نهفته دارد کاملاً شگفت‌آور است. این موضوع نتایج بسیار عمیقی برای گرانش کوانتومی دارد که در آن انتگرالگیری روی همهٔ متریکها و بنابراین روی ساختارهای دیفرانسیلی متفاوت لازم است. اهمیت این موضوع کمتر از اثبات نتیجهٔ موردنظر، که براساس کشفیات گذشته در نظریهٔ میدانها، عمدتاً در نظریهٔ پیمانه‌ای برهم‌کنشهای قوی و ضعیف، به‌دست آمده است نیست. چنین برهم‌کنشهایی در عالم ذرات بنیادی با معادلات غیرخطی مرتبهٔ بالایی با ویژگیهای توپولوژیکی عمیق، معروف به معادلات یانگ‌ـمیلز، تعریف می‌شوند. این معادلات را دو فیزیکدان به نامهای چن نینگ یانگ و رابرت میلز در سال ۱۹۵۴ کشف کردند، ولی سالیان زیادی آنها را غیرفیزیکی می‌دانستند و فیزیکدانان به‌ندرت به آنها توجه می‌کردند. وضع به‌همین منوال بود تا اینکه تازه‌ترین پیشرفت نظریهٔ ذرات بنیادی، یعنی پیدایش نظریهٔ برهم‌کنشهای ضعیف و قوی براساس معادلات یانگ‌ـمیلز، فیزیکدانان را به این نتیجه رساند که ساختار این معادلات را عمیقتر مطالعه کنند.

در اوایل دههٔ ۱۹۷۰ وحدت فیزیک‌ـریاضی فاصلهٔ موجود در انتقال اطلاعات میان آنها را کم کرد تا نتیجه نهایی این دستاورد چشمگیر ریاضی به‌دست آید. اینها و نتایج تازه‌تر دیگر به ارتباطی جدید و عمیقتر میان ریاضیات و فیزیک منجر شدند. اهمیت این وحدت برای ریاضیات معاصر حیاتی است و بر مبنای یک رشته دستاوردهای طراز اول استوار است. در این مورد کافی است به نتایج ولادیمیر درینفلد، ماکسیم کونتسویچ و بسیاری دیگر اشاره کنیم.

۲. پشت در پشت‌بودن ریاضیات

بهترین دلیل بر پیوستگی و سودمندی پیشرفت ریاضیات حل‌شدن مسأله‌های کلاسیک پرمحتوایی است که از نسلهای پیشین ریاضیدانان به‌جا مانده است. در این مورد هم کارهای برندگان مدال فیلدز است که این نظر را به‌خوبی تأیید می‌کند.

نخستین برندهٔ مدال فیلدز در این دوره جسی داگلاس بود که مسألهٔ کلاسیک پلاتوی دوبعدی را حل کرد. لازم به ذکر است که این مسأله را همزمان تیبور رادو هم حل کرد، اما راه‌حل داگلاس عمیقتر به‌شمار می‌رفت و می‌شد آن را در ابعاد بالاتر هم به‌کار برد.

ازجمله ریاضیدانان این فضای فکری می‌توان نظریهٔ اعداددانان سرشناسی مانند آتله سلبرگ، کلاوس روت و آلن بیکر را نام برد. در آخرین مرحله، این سنت را در کارهای گرگوری مارگولیس و پیر دِلین مشاهده می‌کنیم.

مهمترین دستاورد مارگولیس اثبات حدس سلبرگ بود که رده‌هایی از زیرگروههای گسستهٔ گروه حرکتهای فضاهای متقارن از مرتبهٔ بالاتر با حجم متناهی، حسابی است. در حالی که این حدس را نسبتاً به‌راحتی می‌توان بیان کرد، برای اثباتش تسلط استادانه‌ای بر روش نظریهٔ گروههای جبری، استفاده از قضیهٔ ارگودیک ضربی، نظریهٔ نگاشتهای شبه همدیس و چیزهای زیاد دیگری لازم است. در سالهای اخیر مارگولیس ویژگیهای گروههای گسسته را در عرصه‌های متفاوت و بعضاً دور از انتظار بررسی کرده است. او به‌تازگی با تلفیق ایده‌های نظریهٔ گروههای گسسته و نظریهٔ ارگودیک مسأله‌ای قدیمی از هندسهٔ اعداد را حل کرده است: حدس اوپنهایم دربارهٔ نمایش اعداد

با صورتهای درجهٔ دوم نامعین.

پیر دِلین این جایزه را به‌سبب اثبات حدسهایی از آندره ویل دربارهٔ تابعهای زتا روی هیأتهای متناهی دریافت کرد. نتایج او اثبات حدس کلاسیک راماموجان را هم دربر دارند.

حدس راماموجان. صورت سهموی

$$۲\pi^{-۱۲}\Delta(z) = x\prod_{n=۱}^{\infty}(۱-x^n)^{۲۴} = \sum_{n=۱}^{\infty}\tau_n x^n$$

را که در آن $x=\exp(۲\pi iz)$ در نظر بگیرید. در این صورت به‌ازای هر عدد اول مانند p، $|\tau_p| \le ۲p^{\frac{۱۱}{۲}}$.

اثبات دِلین یکی از بی‌نظیرترین و چشمگیرترین مثالهای یکپارچگی و پیوستگی ریاضیات است. این اثبات از نظر زیبایی و پیچیدگی فوق‌العاده است اما مستلزم استفاده از انبوهی از فنونی است که طی سالهای پیش از آن در هندسهٔ جبری انباشته شده بودند.

آخرین مثالی که فقط به‌طورگذرا برای تبیین این نظر به آن اشاره می‌کنم، اثبات «فرض مهتاب» توسط ریچارد بورچردز است. در این مورد حکمی دربارهٔ روابط میان ضرایب صورتهای پیمانه‌ای خاص، بُعدهای نمایشهای گروه هیولا و برخی جبرهای کاتس-مودی با بُعد نامتناهی با به‌کارگیری روشهایی از بخشهای مختلف ریاضیات ثابت می‌شود. پیشرفتهای اخیر در نظریهٔ ریسمان الهام‌بخش این اثبات بوده است.

۳. تغییرات پی‌درپی ریاضیات

منظورم از این عنوان تغییرات پی‌درپی مد ریاضی است. پیش از این دربارهٔ حاکم بودن سه قاعدهٔ ریاضی بر فهرست برندگان فیلدز سخن گفتم. برخی تمایلات به این امر، حتی ورای پیشینهٔ واقعی، در دوگردهمایی آخر نمایان شد. برندگان مدال ریاضیدانانی بودند که در زمینه‌های کلاسیکتری کار می‌کردند. در این مورد به ژان بورگن و تیم گاورز در زمینه‌های فضاهای باناخ، آنالیز همساز و ترکیبیات؛ پیر-لوئی لیونس در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی؛ ژان کریستف یوکوز و کرتیس مک‌مالن، در زمینه‌های سیستمهای دینامیکی و دینامیک تمام‌ریخت؛ و افیم زِلمانوفِ جبردان که مسألهٔ کلاسیک برنساید را حل کرد اشاره می‌کنم. بورگن و گاورز چند مسألهٔ کلاسیک در نظریهٔ فضاهای باناخ را که در ساختارهای بسیار عمیق پیدا شده بودند حل کردند. یوکوز و مک‌مالن به نتایج مهمی در مبحث معروف به دینامیک تمام‌ریخت دست یافتند. در اینجا مطالعهٔ دنباله‌های نگاشتهایی از مجموعه‌های مختلط سر از نظریهٔ سیستمهای دینامیکی درآورد. مسأله‌ای نوعی در دینامیک تمام‌ریخت، توصیف مجموعه‌های حدی نقاط نگاشت $z \to R(z)$ است که در آن $R(z)$ تابعی گویا و z متعلق به $\mathbb{C}$ یا $\overline{\mathbb{C}}$ است. حتی در بررسی دنباله‌های تکرارهای نگاشت به‌ظاهر ساده‌ای مانند $f_c(z) = z^۲ + c$ بسیاری از نتایج کاملاً غیربدیهی پوشیده می‌مانند. این نظریه نقطهٔ تلاقی بسیاری از نظریه‌های زیبای ریاضی مانند سیستمهای دینامیک، گروههای کلاینی، فضاهای

فریک ـ تایشمولر و بسیاری دیگر، ازجمله گرافیک رایانه‌ای، است.

اگر این نظریه را از نظر تاریخی هم بررسی کنیم بسیار فوق‌العاده و آموزنده است. این نظریه در اواخر قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم درکارهای ریاضیدانان سرشناسی مانند پیر فاتو، پال مُنتل وگاستون ژولیا ابداع شد و بعد به مدت بیش از چهل سال کاملاً به‌دست فراموشی سپرده شد و در دوران معاصر بود که دوباره باب شد. اکنون علاوه‌بر اینکه به نظریه‌ای بسیار جالب تبدیل شده است، دامنهٔ کاربردهایش در فیزیک هم بسیارگسترده است. در این‌باره فقط از قانون جهانشمولی معروف فایگن‌باؤم نام می‌برم که کاربردهای مهمی در نظریهٔ تلاطم دارد.

یکپارچگی ریاضیات با این مثالهای به‌ظاهر ساده و در عین حال فوق‌العاده پیچیده به بهترین وجه نشان داده می‌شود.

در پایان این مرور بسیار اجمالی تعدادی از دستاوردهای ریاضیات معاصر آمده‌اند، اعلام می‌کنم نتایجی که مدالهای فیلدز را برای ریاضیدانان به‌ارمغان آوردند اساساً پیشرفت ریاضیات را در عصر ما مشخص می‌کنند و نام‌آورانشان نمایندگان شایسته‌ای برای جامعهٔ ریاضی‌اند. پاسخ اینکه آیا مدال فیلدز را می‌توان با جایزهٔ نوبل مقایسه کرد یا نه، هرچه که باشد، باید گفت که عقیدهٔ فیلدز دربارهٔ اعطای آن به ریاضیدانان جوان با موفقیت کامل مواجه شده است.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Michael Monastyrsky, Some Trends in Moderns Mathematics and the Fields Medal, *CMS NOTES*, March and April 2001, Vol. 33, No. 2, pp. 3-5 and No. 3, pp 11-13.

دو قضیهٔ مفید در مورد مساحتها

احسان کریمی[1]

«مدتی روی یک مسأله کار می‌کنیم و در اطراف آن به حفاری می‌پردازیم، ولی پیشرفت نمایانی وجود ندارد و ناگهان اندیشه‌ای درخشان پدید می‌آید و ما پرتویی بر تاریکی می‌بینیم.»

جورج پولیا ـ خلاقیت ریاضی

مسأله‌های زیر را در نظر بگیرید.

- پای ارتفاعهای مثلثی را به هم وصل می‌کنیم. نسبت مساحت مثلثی که به‌دست می‌آید به مساحت مثلث اصلی چقدر است؟
- پای نیمسازهای درونی مثلثی را به هم وصل می‌کنیم. نسبت مساحت مثلثی که به‌دست می‌آید به مساحت مثلث اصلی چقدر است؟
- نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی را به هم وصل می‌کنیم. نسبت مساحت مثلثی که به‌دست می‌آید به مساحت مثلث اصلی چقدر است؟
- از یکی از رأسهای مثلث ارتفاع، از رأسی دیگر نیمساز و از رأس سوم میانه را رسم کرده‌ایم. نسبت مساحت مثلثی که به این ترتیب پدید می‌آید (اگر این خطها همرس نباشند) به مساحت مثلث اصلی چقدر است؟

برای حل کردن مسألهٔ اول می‌توانیم از ویژگیهای ارتفاعهای مثلث استفاده کنیم یا برای حل کردن مسألهٔ دوم می‌توانیم از این قضیه که «نیمساز درونی هر زاویهٔ مثلث ضلع مقابل را به نسبت ضلعهای زاویه تقسیم می‌کند» و چند نتیجهٔ دیگر استفاده کنیم.

بهترین راه پیشرفت، همیشه این نیست که سرمان را به زیر اندازیم و مستقیم به جلو برویم؛ شاید بهتر باشد که سرمان را بالا نگه داریم و پیش از اینکه به مانعی برخورد کنیم، آن را دور بزنیم. در ریاضیات نیز وضع به‌همین منوال است، تمرکز شدید بر مسأله‌ای خاص ممکن است باعث شود برخی مطالب اصلی را نادیده بگیریم. در چنین شرایطی، دیدگاهی تازه ممکن است خیلی چیزها را تغییر دهد. گاهی کلید پیشرفت این است که عقبتر بایستیم و سعی کنیم ویژگیهای کلی را که برای حل کردن مسأله سودمندند بیابیم.

مثلاً، در مسأله‌های اول، دوم و سوم با نقطه‌هایی روی ضلعهای مثلث مواجه‌ایم و اگر بتوانیم مسألهٔ زیر را حل کنیم، راه‌حل آنها را هم به‌دست آورده‌ایم.

۱. دبیر دبیرستانهای هفتگل، خوزستان.

مسأله. نقطه‌های P، Q و R روی ضلعهای مثلث ABC قرار دارند و

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda,\qquad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}=\mu,\qquad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=\nu$$

نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث ABC چقدر است؟

توجه کنید که ممکن است λ، μ و ν منفی باشند؛ مثلاً، وقتی که P بر امتداد AB باشد، λ منفی است. همچنین، ممکن است λ، μ و ν صفر باشند؛ مثلاً، وقتی که P بر A منطبق باشد، λ برابر با صفر است. البته، فرض می‌کنیم $\lambda\mu\nu \neq ۰$.

قضیهٔ زیر، پاسخ مسألهٔ قبل را مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۱. فرض کنید نقطه‌های P، Q و R به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC قرار داشته باشند و

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda,\qquad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}=\mu,\qquad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=\nu$$

در این صورت

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=\frac{\lambda\mu\nu+۱}{(\lambda+۱)(\mu+۱)(\nu+۱)}$$

اثبات. راههای متعددی برای اثبات این قضیه وجود دارد، اما اثباتی که در اینجا می‌آوریم احتمالاً کوتاهترین آنهاست.

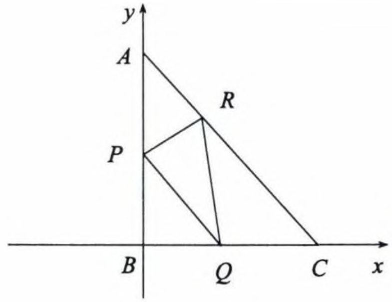
ابتدا با تصویر موازی، مثلث اصلی را به مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی تصویر می‌کنیم که طول ساقهایش برابر با ۱ باشد. این تبدیل نسبت مساحتها و نسبت پاره‌خطهایی را که روی یک خط قرار دارند حفظ می‌کند ([۴] را ببینید). بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم مختصات نقطه‌های A، B و C به‌ترتیب $(۰,۱)$، $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ است.

توجه کنید که $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}$ و اگر (x_P,y_P)، (x_Q,y_Q) و (x_R,y_R) به‌ترتیب مختصات نقطه‌های P، Q و R باشند،

$$S_{PQR}=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_P & y_P & ۱\\ x_Q & y_Q & ۱\\ x_R & y_R & ۱\end{vmatrix}\qquad (*)$$

از طرف دیگر، $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$، پس

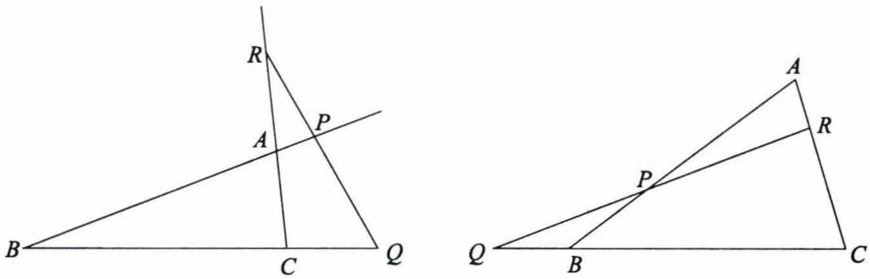
$$\frac{y_P-۱}{۰-y_P}=\lambda$$



شکل ۱

و درنتیجه $y_P = \frac{1}{\lambda+1}$. یعنی مختصات نقطهٔ P، $(0, \frac{1}{\lambda+1})$ است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود مختصات نقطه‌های Q و R به‌ترتیب $(\frac{\mu}{\mu+1}, 0)$ و $(\frac{1}{\nu+1}, \frac{\nu}{\nu+1})$ است. اگر مختصات نقطه‌ها را در دترمینان سمت راست تساوی $(*)$ قرار دهیم و این دترمینان را حساب کنیم، معلوم می‌شود که حکم قضیه درست است. ■

البته، توجه کنید که ممکن است P، Q و R روی یک خط راست قرار داشته باشند، که در این صورت مثلثی نخواهیم داشت.



(ب) (الف)

شکل ۲

حالتهایی که ممکن است پیش بیایند در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که در مورد شکل ۲ (الف)، μ منفی است و در مورد شکل ۲ (ب)، λ، μ و ν هر سه منفی‌اند. پس در هر صورت $\lambda\mu\nu$ عددی منفی است. پس وقتی که مثلث PQR تشکیل نشود، $\lambda\mu\nu = -1$، و برعکس. بنابراین، شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌های P، Q و R روی یک خط راست قرار داشته باشند این است که

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \times \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \times \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1$$

این نتیجه را قضیهٔ منلائوس می‌نامند.

قضیهٔ ۲. فرض کنید نقطه‌های P، Q و R به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC قرار داشته باشند و

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \lambda, \qquad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \mu, \qquad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = \nu$$

درضمن $\lambda\mu\nu \neq ۰$. فرض کنید $A_۱B_۱C_۱$ مثلثی باشد که از برخورد پاره‌خطهای AP، BQ و CR پدیده آمده است. در این صورت

$$\frac{S_{A_۱B_۱C_۱}}{S_{ABC}} = \frac{(\lambda\mu\nu - ۱)^۲}{(۱ + \lambda + \lambda\mu)(۱ + \mu + \mu\nu)(۱ + \nu + \nu\lambda)}$$

اثبات. مانند آنچه در اثبات قضیهٔ ۱ گفتیم، می‌توانیم فرض کنیم مختصات نقطه‌های P، Q و R به‌ترتیب $\left(۰, \frac{۱}{\lambda + ۱}\right)$، (۰)، $\left(\frac{\mu}{\mu + ۱}, ۰\right)$ و $\left(\frac{۱}{۱ + \nu}, \frac{\nu}{۱ + \nu}\right)$ است. بنابراین معادلهٔ خطهای $A_۱C_۱$، $A_۱B_۱$ و $B_۱C_۱$ به‌ترتیب $x + (۱ - \lambda)y - ۱ = ۰$، $(۱ + \mu)x + \mu y - \mu = ۰$ و $\nu x - y = ۰$ است. از طرف دیگر، مساحت مثلثی که از برخورد خطهای $A_ix + B_iy + C_i = ۰$ به‌وجود می‌آید، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\,\frac{\begin{vmatrix} A_۱ & B_۱ & C_۱ \\ A_۲ & B_۲ & C_۲ \\ A_۳ & B_۳ & C_۳ \end{vmatrix}^۲}{\begin{vmatrix} A_۱ & B_۱ \\ A_۲ & B_۲ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_۲ & B_۲ \\ A_۳ & B_۳ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_۳ & B_۳ \\ A_۱ & B_۱ \end{vmatrix}}$$

اگر از این فرمول استفاده کنیم، معلوم می‌شود که حکم قضیه درست است. ■

توجه کنید که ممکن است پاره‌خطهای AP، BQ و CR همرس باشند. مانند قبل معلوم می‌شود که شرط لازم و کافی برای اینکه پاره‌خطهای AB، BQ و CR همرس باشند این است که

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \times \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \times \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = ۱$$

این نتیجه را قضیهٔ سوا می‌نامند.

اکنون آماده‌ایم که مسأله‌هایی را که در ابتدا مطرح کردیم حل کنیم.

مسألهٔ ۱. پای نیمسازهای درونی مثلث را به هم وصل می‌کنیم. نسبت مساحت این مثلث به مساحت مثلث اصلی را پیدا کنید.

راه‌حل. فرض کنید مثلث اصلی ABC باشد، P، Q و R به‌ترتیب پای نیمسازهای نظیر زاویه‌های C، A و B باشند، $AB = c$، $BC = a$ و $AC = b$. در این صورت، بنابر ویژگی نیمسازها،

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = \frac{a}{c}$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱،

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{۲abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

■

توجه کنید که، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$a + b \geq ۲\sqrt{ab}, \qquad b + c \geq ۲\sqrt{bc}, \qquad c + a \geq \sqrt{ca}$$

درنتیجه، اگر این سه نابرابری را در هم ضرب کنیم،

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq ۸abc$$

به این ترتیب مسألهٔ زیر را حل کرده‌ایم (می‌توانید راه‌حل دیگر این مسأله را در [۲، مسألهٔ ۲۶۵] ببینید.)

مسألهٔ ۲ . (المپیاد ریاضی آلمان، ۱۹۸۱) ثابت کنید مساحت مثلثی که رأسهایش پای نیمسازهای مثلثی مفروض‌اند، حداکثر یک‌چهارم مساحت مثلث اصلی است.

مسألهٔ ۳ . فرض کنید D، E و F به‌ترتیب محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با ضلعهای AC، AB و BC باشند. ثابت کنید $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{۲R}$، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

راه‌حل. فرض کنید $AB = c$، $BC = a$ و $AC = b$. توجه کنید که با نمادگذاری شکل ۳،

$$x + y = c, \qquad y + z = a, \qquad z + x = b$$

درنتیجه

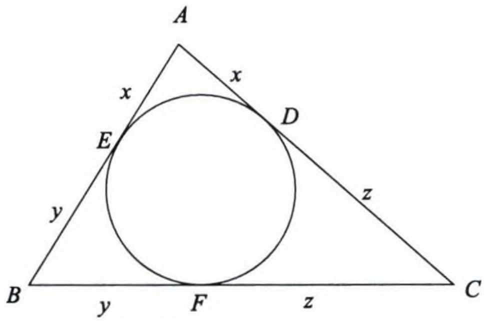
$$x + y + z = \frac{a+b+c}{۲} = p$$

که در آن p نصف محیط مثلث ABC است. به این ترتیب

$$CD = CF = p - c$$

$$BE = BF = p - b$$

$$AE = AD = p - a$$



شکل ۳

و

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{p-a}{p-b}, \quad \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FC}} = \frac{p-b}{p-c}, \quad \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DA}} = \frac{p-c}{p-a}$$

درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱،

$$\frac{S_{EDF}}{S_{ABC}} = \frac{۲(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

از طرف دیگر، $r = \frac{S_{ABC}}{p}$، $R = \frac{abc}{۴S_{ABC}}$ و بنابر دستور هرون،

$$S_{ABC}^{۲} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

درنتیجه

$$\frac{S_{EDF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{۲R}$$

■

می‌توان ثابت کرد که $R \geq ۲r$؛ درنتیجه، مساحت مثلثی که رأسهایش نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلعهای آن هستند از یک‌چهارم مساحت مثلث بیشتر نیست.

مسألهٔ ۴. در مثلث حادهٔ ABC، AQ، BR و CP ارتفاع‌اند. ثابت کنید

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = ۲\cos A \cos B \cos C$$

راه‌حل. توجه کنید که

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{AC\cos A}{BC\cos B}, \quad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{AB\cos B}{AC\cos C}, \quad \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = \frac{BC\cos C}{AB\cos A}$$

اکنون به‌راحتی می‌توان حکم مسأله را از قضیهٔ ۱ نتیجه گرفت. ■

می‌توان ثابت کرد که

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{۱}{۸}$$

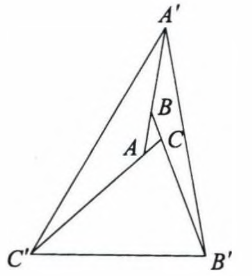
و درنتیجه، در هر مثلث حاده، مساحت مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعها هستند، از یک‌چهارم مساحت مثلث اصلی بیشتر نیست.

مسألهٔ ۵ . (المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹). ضلعهای مثلث ABC را مطابق شکل زیر طوری امتداد داده‌ایم که

$$AA' = ۳AB, \quad BB' = ۵BC, \quad CC' = ۸AB$$

ثابت کنید

$$S_{A'B'C'} = ۶۴ S_{ABC}$$



شکل ۴

راه‌حل. توجه کنید که $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AB}} = ۳$، درنتیجه

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{BA'}} = \frac{۳}{۲}$$

پس $\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'B}} = -\frac{۳}{۲}$. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

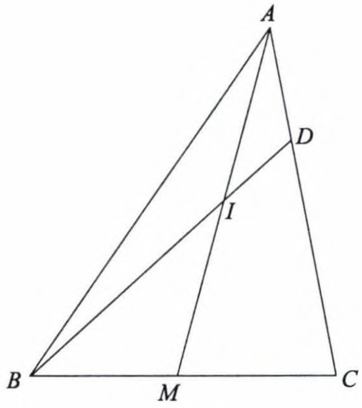
$$\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'C}} = -\frac{۵}{۴}, \quad \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'A}} = -\frac{۸}{۷}$$

به این ترتیب، بنابر قضیهٔ ۱،

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\left(-\frac{۳}{۲}\right)\left(-\frac{۵}{۴}\right)\left(-\frac{۸}{۷}\right) + ۱}{\left(۱ - \frac{۳}{۲}\right)\left(۱ - \frac{۵}{۴}\right)\left(۱ - \frac{۸}{۷}\right)} = ۶۴$$

که همان حکم مسأله است. ■

مسألهٔ ۶. (المپیاد ریاضی ایران، دورهٔ پنجم) در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم می‌کنیم و وسط آن را I می‌نامیم. پاره‌خط BI را امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید $S_{ABC} = ۱۲S_{AID}$.



شکل ۵

راه‌حل. توجه کنید که در قضیهٔ ۱، وقتی که مثلاً P به‌سمت B میل می‌کند،

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \to \infty$$

پس

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\lambda\mu\nu + ۱}{(۱+\lambda)(۱+\mu)(۱+\nu)} = \frac{\mu\nu}{(۱+\mu)(۱+\nu)}$$

اکنون توجه کنید که اگر از نقطهٔ M خطی موازی BD رسم کنیم، AC به سه قسمت برابر تقسیم می‌شود و درنتیجه $\overrightarrow{AC} = ۳\overrightarrow{AD}$. پس

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{۳}{۲}$$

به‌همین ترتیب، اگر از M خطی موازی CD رسم کنیم، معلوم می‌شود که

$$\mu = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{BI}} = -\frac{۴}{۳}$$

به این ترتیب،

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AID}} = \frac{(-\frac{۳}{۲})(-\frac{۴}{۳})}{(۱-\frac{۳}{۲})(۱-\frac{۴}{۳})} = ۱۲$$

■

مسألهٔ ۷ . در مثلث حادهٔ ABC، CC_0 نیمساز، AA_0 میانه و BB_0 ارتفاع است. چه رابطه‌ای بین طول ضلعهای مثلث برقرار باشد تا این پاره‌خطها همرس باشند.

راه‌حل. فرض کنید $AB = c$، $BC = a$ و $CA = b$. در این صورت

$$\frac{\overrightarrow{BA_0}}{\overrightarrow{A_0C}} = 1, \qquad \frac{\overrightarrow{BC_0}}{\overrightarrow{B_0A}} = \frac{a\cos C}{c\cos A}, \qquad \frac{\overrightarrow{AC_0}}{\overrightarrow{C_0B}} = \frac{b}{a}$$

فرض کنید که از برخورد پاره‌خطهای موردنظر مثلث $A_1B_1C_1$ پدید می‌آید. در این صورت، اگر از قضیهٔ ۲ و قضیهٔ کسینوسها استفاده کنیم، معلوم می‌شود که

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\left(b(a^2+b^2-c^2) - a(b^2+c^2-a^2)\right)^2}{(a^2b+b^3-bc^2+2ab^2)(3b^2+c^2-a^2)(a+2b)}$$

درنتیجه، وقتی و فقط وقتی پاره‌خطهای موردنظر همرس‌اند که $S_{A_1B_1C_1} = 0$، یعنی وقتی و فقط وقتی که

$$b(a^2+b^2-c^2) = a(b^2+c^2-a^2)$$ ■

مسألهٔ ۸ . در مثلث ABC، AA_1 و BB_1 میانه‌اند و CC_1 ارتفاع است. فرض کنید $A_2B_2C_2$ مثلثی باشد که از برخورد این پاره‌خطها پدید آمده است. مساحت مثلث $A_2B_2C_2$ را برحسب مساحت مثلث ABC بیابید. همچنین، ثابت کنید اگر در مثلثی از دو رأس میانه‌ها و از رأس سوم ارتفاع را رسم کنیم و این پاره‌خطها همرس باشند، مثلث موردنظر متساوی‌الساقین است.

راه‌حل. توجه کنید که

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{AC\cos A}{BC\cos B}, \qquad \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = 1, \qquad \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1$$

اما، بنابر قضیهٔ سینوسها، $BC = 2R\sin A$ و $AC = 2R\sin B$، پس

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\cot A}{\cot B}$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۲،

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{(\cot B - \cot A)^2}{3(2\cot B + \cot A)(\cot B + 2\cot A)} S_{ABC}$$

درضمن، وقتی و فقط وقتی $S_{A_2B_2C_2} = 0$ که $\cot A = \cot B$، یعنی وقتی و فقط وقتی که $a = b$. ■

تمرین

۱. در مثلث ABC نقطه‌های M، N و P به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC و CA قرار دارند. درضمن، $M_۱$، $N_۱$ و $P_۱$ به‌ترتیب قرینهٔ M، N و P نسبت به وسط AB، BC و CDاند.

الف) ثابت کنید $S_{MNP} = S_{M_۱N_۱P_۱}$.

ب) ثابت کنید مساحت مثلثی که از برخورد AN، BP و MC پدید می‌آید، با مساحت مثلثی که از برخورد $AN_۱$، $BP_۱$ و $CM_۱$ پدید می‌آید برابر است.

۲. نقطه‌های M، N و P به‌ترتیب طوری روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC انتخاب شده‌اند که

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \frac{۱}{۴}$$

مساحت مثلثی که به پاره‌خطهای AN، BP و CM محدود شده است چقدر است؟ نسبت مساحتهای مثلثهای MNP و ABC چقدر است؟

۳. در مثلث ABC نیمسازهای AD، BE و CF رسم شده‌اند. عمودمنصف AD، AC را در نقطهٔ P قطع کرده است. عمودمنصف BE، AB را در نقطهٔ Q قطع کرده است. عمودمنصف CF، CB را در نقطهٔ R قطع کرده است. ثابت کنید $S_{DEF} = S_{PQR}$.

۴. در مثلث ABC، $AB = c$، $BC = a$ و $CA = b$. درضمن، A'، B' و C' تصویرهای محل برخورد میانه‌های مثلث بر ضلعهای مثلث‌اند. ثابت کنید

$$S_{A'B'C'} = \frac{۴(a^۲ + b^۲ + c^۲)}{۹a^۲b^۲c^۲} S^۳_{ABC}$$

۵. قطرهایی از دایرهٔ محیطی مثلث ABC که از رأسهایش می‌گذرند، ضلعها را در نقطه‌های M، N و P قطع کرده‌اند. مقدار $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$ چقدر است؟

۶. در مثلثی نیمسازهای درونی دوتا از رأسها با ارتفاع نظیر رأس سوم همرس‌اند. طول ضلعهای این مثلث چه رابطه‌ای دارند؟

۷. در مثلث ABC ارتفاعهای نظیر رأسهای A و B و میانهٔ نظیر رأس C مثلث MNP را ساخته‌اند. نسبت مساحتهای مثلثهای MNP و ABC را بیابید.

۸. در مثلث ABC از پای ارتفاع AH عمودهای HM و HN را به‌ترتیب بر ضلعهای AC و AB رسم کرده‌ایم. نسبت مساحتهای مثلثهای MNH و ABC را بیابید.

۹. از مرکز یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث عمودهایی را بر ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. نسبت مساحت مثلثی که رأسهایش پای این عمودها هستند به مساحت مثلث اصلی چقدر است؟

منابع

۱. سید عبادا... محمودیان، المپیادهای ریاضی در ایران، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۴.

۲. ی. ن. سرگی‌یف، المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فردوس، ۱۳۶۸.

۳. دمیتری فومین، المپیادهای ریاضی لنینگراد، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات اینشتین، ۱۳۷۴.

۴. ای. م. یاگلوم، تبدیلات هندسی، جلد سوم، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۵. کنستانتین شاخنو، گزیده‌ای از مسأله‌های دشوار ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات انزلی، ۱۳۶۷.

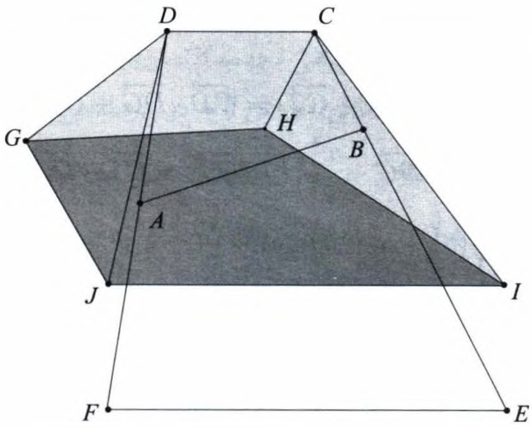
6. P. S. Modenov, *Problems in Geometry*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

خاصیت بیشینهٔ چهارضلعیهای محاطی

آنتریاس واروارکیس

در این مقاله، اثباتی ساده از این حکم معروف که در میان تمام چهارضلعیهای با طول ضلعهای مفروض، چهارضلعی محاطی بیشترین مساحت را دارد ارائه می‌کنیم.

در میان تمام چهارضلعیها مانند $ABCD$ که در آنها $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$ و $DA = d$، بزرگترین مساحت از آن چهارضلعی‌ای است که محاطی است. در تمامی اثباتهای شناخته‌شده برای این حکم از فرمول براهماگوپتا استفاده شده است. در این مقاله اثبات هندسی ساده‌ای برای این حکم آورده‌ایم.



فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی‌ای محاطی و $GHCD$ چهارضلعی‌ای دلخواه باشد که طول ضلعهایش با طول ضلعهای $ABCD$ برابر است: $GH = a$، $HC = b$، $CD = c$ و $DG = d$. چهارضلعی $EFAB$ را متشابه با $ABCD$ و چهارضلعی $IJGH$ را متشابه با $GHCD$ رسم کنید (ترتیب رأسها همین است). توجه کنید که

۱. چون $ABCD$ محاطی است و خطهای DEF و CBE مستقیم‌اند، پس EF با DC موازی است.

۲. چون

$$\begin{aligned}\angle CDJ + \angle DJI &= (\angle CDG - \angle JDG) + (\angle GJI - \angle GJD)\\ &= (\angle CDG - \angle JDG) + (\angle CHG - \angle GJD)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \angle CDG + \angle CHG - (\angle JDG + \angle GJD) \\
&= \angle CDG + \angle CHG - (۱۸۰^\circ - \angle DGJ) \\
&= \angle CDG + \angle CHG + (\angle DGH + \angle HGJ) - ۱۸۰^\circ \\
&= \angle CDG + \angle CHG + \angle DGH + \angle HCD - ۱۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ
\end{aligned}
$$

پس JI با DC موازی است. چون نسبتهای تشابه چهارضلعیهای موردنظر در هر دو مورد $\frac{a}{c}$ است، مساحتهای $ABEF$ و $GHIJ$ به‌ترتیب $\frac{a^۲}{c^۲}$ برابر مساحتهای $ABCD$ و $GHCD$ است. کافی است ثابت کنیم که

$$S_{DCEF} \geq S_{DCHIJGD}$$

درحقیقت، چون $GD \times GH = HC \times HI$ و $\angle DGJ = \angle CHI$، پس $S_{DGJ} = S_{CHI}$ و

$$S_{DCHIJGD} = S_{DCHG} + S_{GHIJ} = S_{DCIJ}$$

توجه کنید که

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DJ} &= \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{GJ} \\
&= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DG} + \frac{c^۲}{a^۲}(\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HG} \\
&= \frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ - CG^۲) - \frac{۱}{۲}(c^۲ + d^۲ - CG^۲) \\
&= \frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ - c^۲ - d^۲)
\end{aligned}
$$

پس مقدار $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DJ}$ مستقل از جای J است. یعنی اینکه خط JF بر DC عمود است؛ به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که این نتیجه در مورد IE هم درست است. توجه کنید که $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GJ}$ و تصویر $\overrightarrow{DJ}$ بر $\overrightarrow{CD}$ ثابت است (این نتیجه برای $\overrightarrow{CI}$ هم درست است). درنتیجه ذوزنقهٔ $DCEF$ در میان تمام ذوزنقه‌های رسم‌شده مانند $DCIJ$ بزرگترین ارتفاع را دارد. چون قاعدهٔ همهٔ این ذوزنقه‌ها یکی است، پس $DCEF$ بزرگترین مساحت را دارد. این نتیجه اثبات این قضیه را که در میان تمام چهارضلعیهای با طول اضلاع مفروض، چهارضلعی محاطی بیشترین مساحت را دارد کامل می‌کند.

• ترجمهٔ مهدی ملک‌زاده

Antreas Varvarkis, A Maximal Property of Cyclic Quadrilatrals, *Forum Geometricorum*, Vol. 5, 2005, pp. 63-64.

اثباتی مقدماتی برای نابرابری برابرمحیطی

نیکولاوس درگیادس

در این مقاله، اثباتی مقدماتی برای نابرابری برابرمحیطی برای چندضلعیها آورده‌ایم که درواقع ساده‌شدهٔ اثباتی است که ت. بونسن پیدا کرده است.

در این مقاله اثباتی مقدماتی برای نابرابری معروف $\mathcal{L}^۲ \geq ۴\pi\mathcal{A}$، که در آن $\mathcal{L}$ و $\mathcal{A}$ به‌ترتیب محیط و مساحت چندضلعی‌اند، آورده‌ایم.

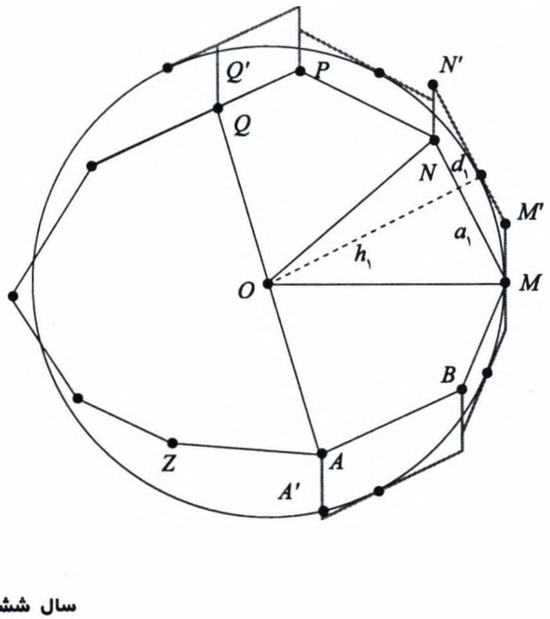
قضیه. در هر چهارضلعی با محیط $\mathcal{L}$ و مساحت $\mathcal{A}$، $\mathcal{L}^۲ \geq ۴\pi\mathcal{A}$.

اثبات. کافی است نابرابری موردنظر را برای چندضلعی محدب $ABM \ldots Z$ ثابت کنیم. از رأس A چندضلعی، پاره‌خط AQ را طوری رسم می‌کنیم که چندضلعی مفروض را به دو چندضلعی طوری تقسیم کند که

۱. $AB + BM + \cdots + PQ = \frac{\mathcal{L}}{۲}$ و

۲. اگر $\mathcal{A}_۱$ مساحت چندضلعی $ABM \ldots PQA$ باشد، آن‌وقت $\mathcal{A}_۱ \geq \frac{\mathcal{A}}{۲}$.

فرض کنید نقطهٔ O وسط پاره‌خط AQ باشد و M رأسی از چندضلعی $ABM \ldots PQA$ باشد که از O



دورترین است، و $OM = \mathcal{R}$. دایرهٔ $(O, \mathcal{R})$ را رسم کنید و از نقاط A و Q عمودهایی بر OM رسمی کنید تا دایره را به‌ترتیب در A' و Q' قطع کنند. به‌دلیل تقارن، مساحت $AA'MQ'QA$ نصف مساحت این دایره است؛ یعنی، اگر این مساحت را با $\mathcal{S}$ نشان دهیم، $\mathcal{S} = \frac{۱}{۲}\pi\mathcal{R}^۲$. بیرون چندضلعی $ABM\ldots PQ$ متوازی‌الاضلاعهایی رسم کنید که بر دایره مماس باشند و قاعده‌های آنها مانند MN باشند، $MN = a_i$، و دیگر ضلعها موازی AA' باشند. اگر h_i طول ارتفاع مثلث OMN و d_i طول ارتفاع متوازی‌الاضلاع $MM'N'N$ باشد، آنگاه $h_i + d_i = \mathcal{R}$. دقت کنید که $\mathcal{A}_۱$ مجموع مساحتهای مثلثهای OAB، ...، OMN، ... و OPQ است، یعنی

$$\mathcal{A}_۱ = \frac{۱}{۲}\sum_i a_i h_i$$

اگر مجموع مساحتهای متوازی‌الاضلاعها را $\mathcal{A}_۲$ بنامیم،

$$\mathcal{A}_۲ = \sum_i a_i d_i = \sum_i a_i(\mathcal{R} - h_i) = \mathcal{R}\cdot\frac{\mathcal{L}}{۲} - ۲\mathcal{A}_۱$$

چون $\mathcal{S} \geq \mathcal{A}_۱ + \mathcal{A}_۲$، پس $\mathcal{R}\times\frac{\mathcal{L}}{۲} \geq \pi\mathcal{R}^۲$ و $\pi\mathcal{R}^۲ - \mathcal{L}\mathcal{R} + ۲\mathcal{A}_۱ \leq ۰$. بنابراین

$$\pi\Big(\mathcal{R} - \frac{\mathcal{L}}{۲\pi}\Big)^۲ - \Big(\frac{\mathcal{L}^۲}{۴\pi} - ۲\mathcal{A}_۱\Big) \leq ۰$$

درنتیجه، $\mathcal{L}^۲ \geq ۴\pi\times۲\mathcal{A}_۱ \geq ۴\pi\mathcal{A}$. ■

نابرابری بالا را می‌توان به کمک حدگیری به خمهای بسته تعمیم داد. چون در مورد دایره این نابرابری به برابری تبدیل می‌شود، می‌توانیم نتیجه بگیریم که در میان همهٔ خمهای بسته با محیط ثابت، دایره بیشترین مساحت را دارد.

• ترجمهٔ مهدی ملک‌زاده

Nikolaos Dergiades, An Elementary Proof of the Isoperimetric Inequality, *Forum Geometricorum*, Vol. 2, 2002, pp. 129-130.

اسکناستان را بزرگتر کنید!!!

ایوان یاشچنکو

آیا می‌خواهید ارزش اسکناستان را افزایش دهید؟ برای این کار فقط به یک اسکناس ده تومانی نیاز دارید. تحصیلات، شغل و غیره مهم نیستند. می‌توانید در اوقات فراغتتان و یا هر وقت دیگر کار کنید و اسکناستان را بزرگتر کنید!

یافتن راهی برای کسب پول و ثروت بیشتر مسأله‌ای بسیار قدیمی است (شاید به قدمت خود پول). این مسأله آنقدر قدیمی است که حتی از منشأ صورتی از آن که در اینجا به آن می‌پردازیم اطلاعی در دست نیست.

این مسأله را اولین‌بار وقتی شنیدم که دانش‌آموز کلاس دهم در دبیرستان شمارهٔ ۹۱ مسکو بودم.

به این مسأله، همین اواخر، در یک مقالهٔ پژوهشی ریاضی با عنوان «مسألهٔ دستمال سفرهٔ مارگولیس» اشاره شده است. جیم پِراپ (از دانشکدهٔ ریاضی ام.آی.تی) چنین گفته است:

شایع است که همهٔ دانشجویان دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی در روسیه بلدند که این مسأله را چطور حل کنند، اما همین که به ایلات متحده می‌آیند (درواقع به‌نظر می‌رسد که بسیاری از آنان چنین می‌کنند) فراموش می‌کنند که این کار چطور صورت می‌گرفت.

صورت مسأله را می‌آوریم. اسکناسی ده تومانی بردارید و سعی کنید آن را به طریقی تا کنید. هدف به‌دست آوردن شیئی مسطح (احتمالاً در بعضی جاها چندلایه) است که محیطش از محیط اسکناس اولیه بزرگتر است. توجه کنید که نمی‌توانید اسکناس را پاره کنید (بنابراین بعد از اینکه آن را با اُتو صاف کردید می‌توانید اسکناس را خرج کنید).

البته این صورتبندی دقیقی از مسأله نیست زیرا در اینجا روشن نیست که منظور از «تاکردن» چیست. اگر بخت با شما یار باشد و راه‌حلی به ذهنتان برسد که به‌وضوح در مورد هر تعریف منطقی از تاکردن برقرار باشد آن‌وقت کار تمام است. ولی اگر روش تاکردنتان زیادی پیچیده شود آن‌وقت ممکن است تصور شود که اسکناس را به‌طریقی (اندکی، نه به‌اندازه‌ای که پاره شود) کشیده‌اید.

اما اگر (بعد از چندبار تلاش بی‌حاصل) بخواهید ثابت کنید که چنین تاکردنی وجود ندارد آن‌وقت تعریف دقیقی از تاکردن لازم دارید.

نخستین ایده‌ای که به ذهن می‌رسد این است:

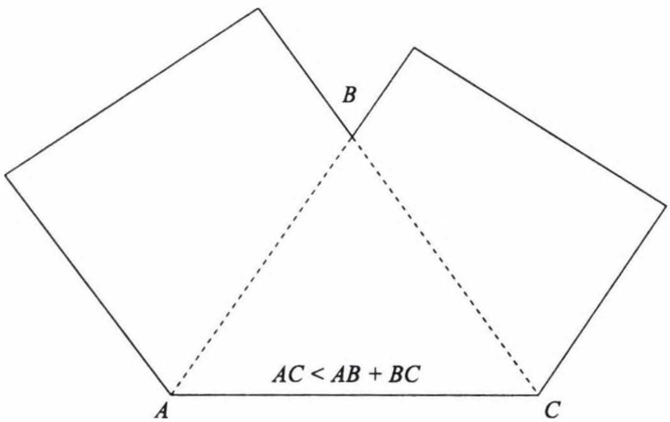
خطی در نظر بگیرید که مستطیلِ اسکناس را قطع کند و اسکناس را در امتداد آن تا کنید (بنابراین پاره‌خط حاصل، بخشی از محیط می‌شود، اما بخشهایی از محیط اولیه اکنون از دست می‌روند).

این کار تنها عمل مجاز است و می‌توان آن را تکرار کرد. به‌طور قطع، این عمل یک‌جور تاکردن مجاز است، اما

شکل ۱ (الف)

متأسفانه با این روش محیط شکل افزایش نمی‌یابد.

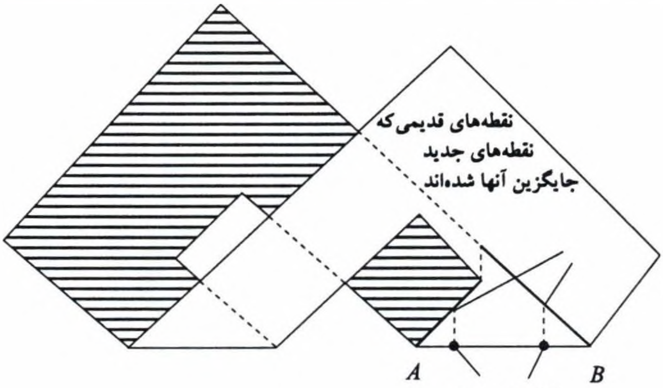
در مورد شکل ۱ (الف) درستی این ادعا نتیجه‌ای واضح از نابرابری مثلثی است.



شکل ۱ (ب)

اکنون فرض کنید X چندضلعی‌ای دلخواه باشد (توجه کنید که لازم نیست این چندضلعی محدب باشد، حتی ممکن است سوراخهایی هم داشته باشد) و آن را در امتداد خطی (راست) تا کنید و چندضلعی‌ای مانند Y به‌دست بیاورید. می‌خواهیم ثابت کنیم که محیط Y از محیط X بیشتر نیست.

در اینجا طرح اثبات را آورده‌ایم. فرض می‌کنیم که X در امتداد خطی افقی تا شده باشد. همهٔ نقاط جدید



شکل ۲

محیط متعلق به این خط‌اند و باید ثابت کنیم که طول کل پاره‌خطهای اضافه‌شده (ممکن است چند تا از چنین پاره‌خطهایی وجود داشته باشد) از طول بخشِ از دست رفته بیشتر نیست.

از میان پاره‌خطهای موردنظر یکی را در نظر بگیرید (مثلاً پاره‌خط AB در شکل بالا). به‌ازای هر نقطهٔ «جدید» روی این پاره‌خط نقطه‌ای «قدیمی» پیدا می‌کنیم که نقطهٔ جدید جایگزین آن شده است. برای این کار، خطی عمود بر AB را در نظر بگیرید و نقطه‌ای از مرز X را انتخاب کنید که به AB از همه نزدیکتر باشد (این نقطه ممکن است در هر یک از دو طرف خط AB قرار داشته باشد). این نقطه در محیط Y قرار ندارد؛ زیرا بعد از تاکردن با بخش دیگر X پوشانده می‌شود. بنابراین به‌ازای هر نقطهٔ جدید نقطهٔ متناظری پیدا کرده‌ایم که ناپدید شده است. البته برای محاسبهٔ محیط، باید شیب پاره‌خطهای از دست رفته را هم به‌حساب بیاوریم، اما در هر حال محیط فقط افزایش می‌یابد.

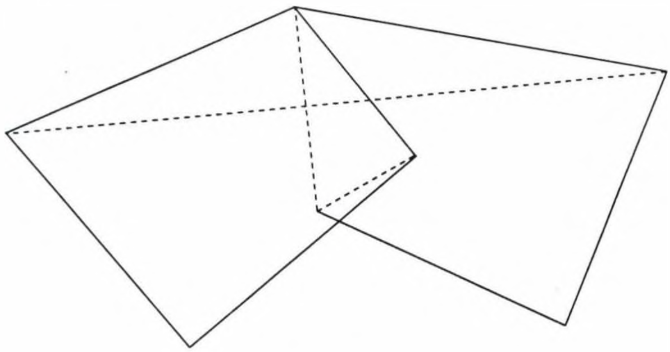
در اینجا حالتی را که در آن دو نقطهٔ مرزی X نسبت به خط AB قرینهٔ هم‌اند و بنابراین بعد از تاکردن روی هم می‌افتند نادیده گرفته‌ایم. در این حالت هم محیط از دست رفته همان است که گفتیم. زیرا به‌جای دو پاره‌خط در محیط اکنون فقط یکی را در نظر می‌گیریم.

این استدلال را می‌توان در مورد همهٔ پاره‌خطهای جدید به‌کار برد. چون بخشهای از دست رفته با هم اشتراک ندارند، می‌بینیم که محیط Y از محیط X بیشتر نمی‌شود.

این استدلال را می‌توان در مورد هر خم که خیلی عجیب و غریب نیست نیز به‌کار برد. اما در حالتی که در نظر گرفته‌ایم وضعیت حتی ساده‌تر است، زیرا اسکناس تاشده باز هم چندضلعی است.

با وجود این، تصورمان از تاکردن بیش از اندازه محدودکننده است؛ زیرا تاکردنهایی طبیعی وجود دارند که نمی‌توان آنها را به تاکردنهای مکرر در امتداد خطهای راست نشان داد.

در اینجا مثالی ساده از یک‌جور تاکردن را آورده‌ایم که با تعریف بالا زیاد مطابقت ندارد، اما با این وجود روشن است که این تاکردن مجاز است:

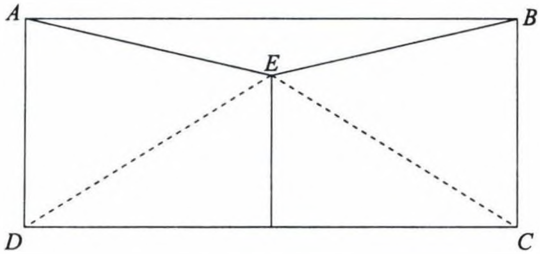


شکل ۳

با این‌جور تاکردن محیط افزایش نمی‌یابد، اما به‌طور قطع دیگر معلوم می‌شود که تعریفمان از تاکردن بیش از حد محدودکننده بوده است.

اکنون آماده‌ایم تا یک‌جور تاکردن (یا چیزی شبیه تاکردن) را نشان دهیم که با آن محیط افزیش می‌یابد؛ تنها اشکال این است که روشن نیست که آیا این‌جور تاکردن مجاز است یا نه.

این روش تاکردن از این قرار است؛ پنج پاره‌خطی که در شکل ۳ (الف) نشان داده شده‌اند خطوط تا هستند (این خطوط را با خودکار بکشید و به‌اندازهٔ کافی فشار دهید تا تاکردن آسانتر شود).

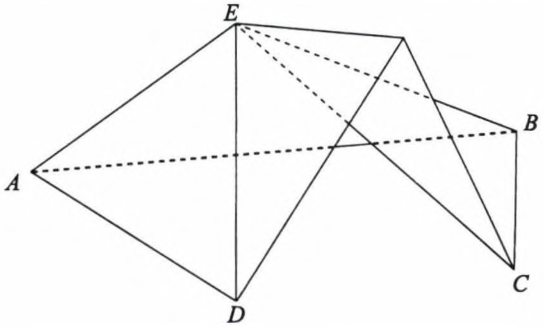


شکل ۳ (الف)

اکنون اسکناس را همان‌طورکه در شکل ۳ (ب) نشان داده شده است تا کنید.

هنوز شیئی مسطح به‌دست نیاورده‌ایم و باید قسمت برجسته را به‌طریقی در صفحه بخوابانیم. ساده‌ترین راه برای این کار را پیش از این در شکل ۳ نشان داده‌ایم.

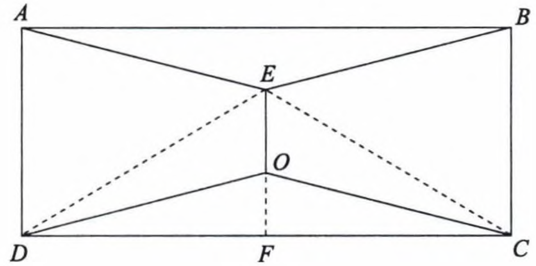
ولی باز هم به هدفمان نرسیدیم (محیط شیء حاصل کوچکتر از قبلی است)، اما توجه کنید که دو پاره‌خط AE و EB را جایگزین AB کرده‌ایم و $AE + EB > AB$، بنابراین این بخش از محیط افزایش یافته است. اگر بتوانیم به‌طریقی فقط به بخش باقی‌مانده بپردازیم و درضمن این افزایش محیط (نسبتاً کوچک) از دست نرود، کار تمام است.



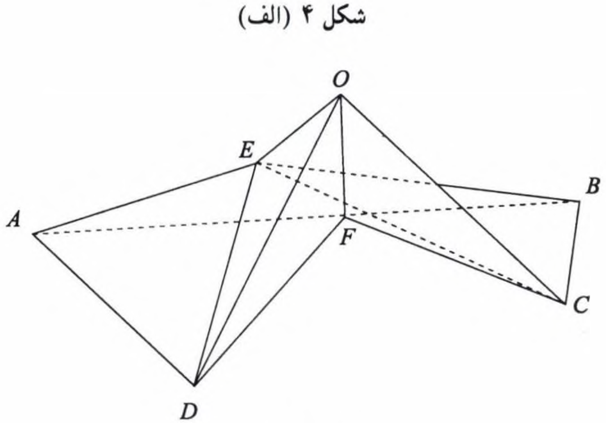
شکل ۳ (ب)

اکنون موقتاً تعریف تاکردن را تغییر می‌دهیم و آن را تا آنجا که ممکن است کلی‌تر تعریف می‌کنیم: هر نگاشت از مستطیل (یعنی اسکناس) به صفحه را که فاصله‌ها را افزایش ندهد تاکردن می‌نامیم. این شرط به‌اندازهٔ کافی ضعیف است که با آن بتوان مثالی از یک‌جور تاکردن به‌دست آورد که محیط افزایش یابد.

به طرحی که رسم کرده بودیم دو خط تایِ جدید اضافه می‌کنیم (شکل ۴ (الف) را ببینید)، بعد بخش برجسته را در امتداد این خطها تا می‌کنیم (شکل ۴ (ب) را ببینید) و تصویر قائم شکل حاصل را روی صفحه در نظر می‌گیریم.



شکل ۴ (الف)

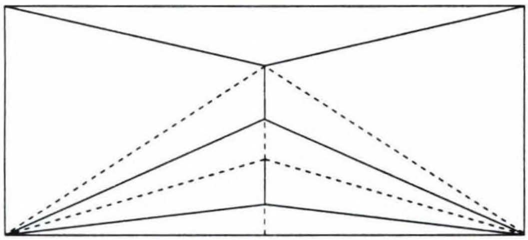


شکل ۴ (ب)

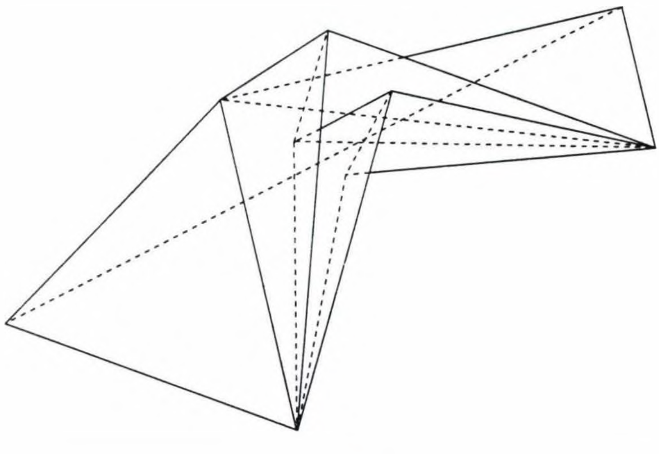
به این ترتیب نگاشتی به‌دست می‌آوریم که فاصله‌ها را افزایش می‌دهد؛ محیط تصویر این نگاشت برابر با $AE + EB + BC + CF + FD + DA$ است (پاره‌خط OF بر صفحه عمود است).

در هر حال کمتر کسی می‌پذیرد که چنین تصویری را تاکردن به‌حساب بیاورد. اکنون چیزی را نشانتان می‌دهیم که به تاکردن شبیه‌تر است اما با این وجود محیط هم افزایش می‌یابد.

بخش برجستهٔ اسکناس را مانند شکل زیر می‌توانیم باز هم تا بزنیم:



شکل ۵ (الف)



شکل ۵ (ب)

و تا وقتی که زیگراکها به‌اندازهٔ کافی کوچک شوند به تاکردن ادامه می‌دهیم؛ سپس سعی می‌کنیم که قسمتهای برجسته را صاف کنیم که در اینجا طبق نابرابری $AE + EB > AB$، محیطی که از دست می‌رود از محیطی که به‌دست می‌آید کوچکتر است. (هرچه ارتفاع بخش برجسته کوچکتر باشد محیط از دست رفته هم کوچکتر می‌شود.)

از اندازه‌ها معلوم می‌شود که محیط افزایش می‌یابد.

با وجود این، نویسنده هنوز نمی‌تواند ثابت کند که در این روش قواعد بازی را زیر پا نمی‌گذارد (یعنی اسکناس را نمی‌کشد).

آیا می‌توانید این ساختار را تجزیه و تحلیل کنید؟ یا ساختار دیگری پیدا کنید که تجزیه و تحلیل آن آسانتر باشد؟ یا وجود کرانی بالا برای محیط اسکناس تاشده را در مورد کلی‌ترین تعریف تاکردن ثابت کنید؟

تقریباً چیزی از دست نمی‌دهید؛ پس اسکناستان را بردارید و آن را بزرگتر، بزرگتر و بزرگتر کنید.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Ivan Yaschenko, Make Your Dollar Bigger Now!!!, Math. *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 20, No. 2, 1998, pp. 38-40.

از باب تفریح

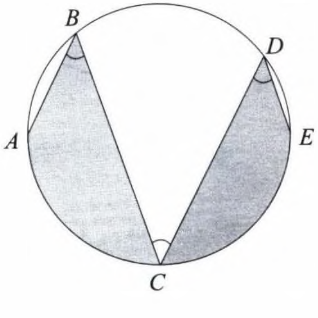
۱. هفت جلد از دایرةالمعارفی به این ترتیب در قفسه چیده شده‌اند: ۱, ۵, ۶, ۲, ۴, ۳, ۷. می‌توانیم سه جلد کنار هم را انتخاب کنیم و بدون اینکه ترتیب آنها را به‌هم بزنیم، در ابتدای کتابها، انتهای کتابها یا بین هر دو جلد دیگر که بخواهیم قرار دهیم. این کتابها را طوری مرتب کنید که ترتیب شمارهٔ جلدهایشان صعودی باشد.

۲. بارون مونهاوزن هر روز برای شکار اردک به کنار دریاچه می‌رود. با آغاز شهریور، او هر روز به آشپزش می‌گوید: «امروز بیش از پریروز اما کمتر از هفتهٔ گذشته اردک می‌آورم.» او چند روز متوالی می‌تواند چنین جمله‌ای را بگوید؟ (به‌یاد داشته باشید که بارون هرگز دروغ نمی‌گوید!)

۳. دو مکعب برابر داریم. پنج رأس هر یک از آنها را با سیاه و بقیهٔ رأسهایشان را با سفید رنگ می‌کنیم. ثابت کنید می‌توان مکعبها را طوری بر هم منطبق کرد که دست‌کم چهار رأس سیاه بر هم منطبق شوند.

۴. مستطیلی ۹×۵ را به ۱۰ مستطیل که طول ضلعهایشان عددهایی طبیعی‌اند تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید دست‌کم دوتا از این مستطیلها با هم همنهشت‌اند.

۵. رأسهای خط شکستهٔ $ABCDE$ مانند شکل روبه‌رو روی دایره‌ای قرار گرفته‌اند و زاویه‌های B، C و D برابر ۴۵°اند. ثابت کنید مجموع مساحتهای ناحیه‌های سایه‌دار برابر است با مساحت بقیهٔ دایره.



(راه‌حل در صفحهٔ ۵۳)

ده کوئیکی از کلامکین

کوئیکی در اصطلاح به مسألهای میگویند که راهحلی کوتاه و جالب دارد. کوئیکیها را ابتدا چارلز تریگ، در مارس ۱۹۵۰، بهعنوان ضمیمهای به بخش مسألههای مجلهٔ ریاضیات (جامعهٔ ریاضی امریکا) افزود. از آن پس، طراحان و مسأله حلکنهای مشهوری چون لیو موزر و ماری کلامکین در رونق بخشیدن به این بخش کوشیدند، و این بخش همچنان یکی از قسمتهای ثابت مجلهٔ ریاضیات است. احتمالاً هیچکس بهاندازهٔ کلامکین کوئیکی نداشته است! در اینجا ده تا از این کوئیکیها را برایتان آوردهایم.

۱. آیا ۷۷۷ عدد طبیعی متمایز وجود دارد که حاصلضرب هر هفت تا از آنها بر مجموعشان بخشپذیر باشد؟

۲. a، b، c و d عددهایی طبیعیاند و $ab=cd$. ثابت کنید

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲$$

مرکب است.

۳. آرایهای $n\times n$ از نقطهها داریم ($n\geq ۳$). ثابت کنید میتوان پارهخطی شکسته رسم کرد که از $۲n-۲$ قطعه تشکیل شده باشد و از همهٔ نقطههای این آرایه رد شده باشد.

۴. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی خطهایی که از وسط هر ضلع بر ضلع مقابلش عمود رسم شدهاند همرساند.

۵. ثابت کنید چندجملهای

$$P(x)=x^{۲n}-۲x^{۲n-۱}+۳x^{۲n-۲}-\cdots-۲nx+۲n+۱$$

ریشهای حقیقی ندارد.

۶. ۵۰۰ عدد حقیقی داریم که هر یک از آنها از یکپنجم مجموع بقیهٔ عددها بزرگتر است. در میان این عددها دستکم چند عدد منفی داریم؟

۷. a، b، c و d عددهایی در بازهٔ $[۰,۱]$اند. بیشترین مقدار عبارت

$$۴(a^۴+b^۴+c^۴+d^۴)-(a^۲bc+b^۲cd+c^۲da+d^۲ab)-(a^۲b+b^۲c+c^۲d+d^۲a)$$

را پیدا کنید.

۸. a، b و c طول ضلعهای مثلث‌اند. ثابت کنید

$$۳\min\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right\}\geq(a+b+c)\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right)$$

۹. a، b و c عددهایی غیرمنفی‌اند و

$$abc-a-b-c=۲$$

کمترین مقدار عبارت

$$a^۲+b^۲+c^۲$$

را پیدا کنید.

۱۰. $a_۱$، ...، a_n، $b_۱$، ... و b_n عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$n\left(\sum_{i=۱}^{n}a_ib_i+\left(\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲\sum_{i=۱}^{n}b_i^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)\geq ۲\sum_{i=۱}^{n}a_i\sum_{i=۱}^{n}b_i$$

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۵)

بیست‌وپنجمین تورنمنت شهرها

دور بهاری، ۲۰۰۵

سؤالهای دو سال اول

سطح معمولی

۱. آنا و بوریس به‌ترتیب از نقطه‌های A و B همزمان به‌سمت هم حرکت می‌کنند. سرعت آنها ثابت است، اما ممکن است برابر نباشد. اگر آنا ۳۰ دقیقه زودتر شروع به حرکت کند، در نقطه‌ای که به B نزدیکتر است و ۳ کیلومتر با آن فاصله دارد به هم می‌رسند. اگر بوریس ۳۰ دقیقه زودتر شروع به حرکت کند، در نقطه‌ای که فاصله‌اش تا A کمتر است به هم می‌رسند. آیا می‌توان این فاصله را به‌طور یکتا تعیین کرد؟

۲. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، یکی از رقمهای ۱، ۲ و ۹ در بسط اعشاری n یا $3n$ وجود دارد.

۳. در سطر اول صفحهٔ شطرنجی هشت وزیر سفید یک‌شکل و در سطر آخر آن هم هشت وزیر سیاه یک‌شکل وجود دارد. وزیرها در هر نوبت می‌توانند تا جایی که سر راهشان وزیر دیگر قرار نداشته باشد، هر تعداد خانه که بخواهند، افقی، عمودی یا قطری، حرکت کنند. وزیرهای سیاه و سفید یکی در میان حرکت می‌کنند. کمترین تعداد حرکتهای لازم برای اینکه وزیرهای سیاه و سفید جایشان عوض شود چقدر است؟

۴. نقطه‌های M و N به‌ترتیب وسط ضلعهای BC و AD از مربع $ABCD$اند. K نقطه‌ای دلخواه روی امتداد قطر AC از سمت نقطهٔ A است. پاره‌خط KM ضلع AB را در نقطهٔ L قطع کرده است. ثابت کنید $\angle KNA = \angle LNA$.

۵. در شهری بزرگ همهٔ خیابانها در امتداد یکی از دو امتداد عمود بر هم‌اند. هر ماشین هنگام تردد در شهر نمی‌تواند دو بار از یک نقطه بگذرد و باید در همان خیابانی که از آن شروع به حرکت کرده به توقفگاه برود. اگر ماشینی ۱۰۰ بارگردش به چپ کرده باشد، چندبارگردش به راست کرده است؟

سطح پیشرفته

۱. روی نمودار چندجمله‌ایی که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند دو نقطه که مختصاتشان عددهایی صحیح‌اند انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید اگر فاصلهٔ میان این دو نقطه عددی صحیح باشد، پاره‌خطی که آنها را به هم

وصل می‌کند موازی محور x است.

۲. ارتفاعهای AD و BE از مثلث ABC در نقطهٔ H به هم رسیده‌اند. نقطه‌های X و Y به‌ترتیب وسط AB و CHاند. ثابت کنید XY بر DE عمود است.

۳. ساعت بارون مونهاوزن درست کار می‌کند، اما روی صفحه‌اش هیچ نشانی وجود ندارد. طول عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار با هم فرق دارد و این عقربه‌ها یکنواخت حرکت می‌کنند. بارون ادعا می‌کند که چون در فاصلهٔ زمانی میان ۰۰ : ۸ و ۵۹ : ۱۹ وضعیت عقربه‌ها نسبت به هم هیچ‌گاه دوباره تکرار نمی‌شود، او می‌تواند با استفاده از ساعتش وقت را هنگام روز اعلام کند. آیا ادعایش درست است؟

۴. برگهٔ شطرنجی مستطیلی ۱۲ × ۱۰ای را چند بار در امتداد خطهایش تا کرده‌ایم تا اینکه مربع ۱ × ۱ قطوری به‌دست آمده است. اگر این مربع را از روی پاره‌خطی که

الف) وسط دو تا از ضلعهای روبه‌رویش را به هم وصل می‌کند،

ب) وسط دو تا از ضلعهای مجاورش را به هم وصل می‌کند،

ببریم چند تکه کاغذ می‌توان به‌دست آورد؟

۵. در جعبهٔ مکعب‌مستطیل‌شکلی تعدادی قوطی معکب‌مستطیل‌شکل قرار داده‌ایم (ممکن است اندازهٔ قوطیها فرق داشته باشد). یکی از ابعاد هر یک از قوطیها را کوچکتر می‌کنیم. آیا همواره می‌توان این قوطیهای دست‌کاری شده را در جعبهٔ مکعب‌مستطیل‌شکل کوچکتری قرار داد، به‌طوری که وجه‌های قوطیها با وجه‌های جعبه موازی باشند؟

۶. جان و جیمز می‌خواهند ۲۵ سکه، به ارزش ۱، ۲، . . . و ۲۵ کوپک، را بین خود تقسیم کنند. در هر حرکت، یکی از آنها سکه‌ای را انتخاب می‌کند و بازیکن دیگر تصمیم می‌گیرد که چه کسی آن را بردارد. جان انتخاب اول را می‌کند و در حرکتهای بعدی، بازیکنی که تا آن زمان پول بیشتری دارد، سکهٔ بعدی را انتخاب می‌کند. در حالتی که پول هر دو یکسان باشد، بازیکنی سکه را انتخاب می‌کند که در حرکت قبل هم این کار را کرده است. پس از اینکه همهٔ سکه‌ها برداشته شدند، بازیکنی که پول بیشتری دارد می‌برد. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

۷. خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را به‌طریق زیر شماره‌گذاری کرده‌ایم. در خانهٔ گوشهٔ بالا سمت چپ عدد ۱ را نوشته‌ایم. در دو خانهٔ روی قطر بعدی، از بالا سمت راست به پایین سمت چپ، عددهای ۲ و ۳ را نوشته‌ایم. در سه خانهٔ روی قطر بعدی عددهای ۴، ۵ و ۶ را نوشته‌ایم، و همین‌طور تا آخر. در قطر یکی مانده به آخر ۶۲ و ۶۳ را نوشته‌ایم و در خانهٔ گوشهٔ پایین سمت راست ۶۴ را نوشته‌ایم. پیتر هشت مهره روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج طوری قرار می‌دهد که در هر ستون و در هر سطر دقیقاً یک مهره بگیرد. او سپس هر مهره را

به خانه‌ای که عدد نوشته‌شده در آن بزرگتر از عددی است که در خانه‌ای که این مهره در ابتدا در آن قرار دارد نوشته شده می‌برد. آیا ممکن است که بازهم در هر ستون و در هر سطر یک مهره قرار داشته باشد؟

سؤالهای دو سال آخر

سطح معمولی

۱. نمودار چهار تابع به‌شکل $y = x^۲ + ax + b$، که در آن a و b عددهایی حقیقی‌اند، در صفحهٔ مختصات رسم شده است. این نمودارها یکدیگر را دقیقاً در چهار نقطه قطع کرده‌اند و در هر یک از این نقطه‌ها دقیقاً دو تا از نمودارها یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید که مجموع بزرگترین و کوچکترین مختص x نقطه‌های برخورد برابر است با مجموع دو مختص x دیگر.

۲. همهٔ عددهای طبیعی را روی نواری و بدون فاصله کنار هم نوشته‌ایم: ...۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱. سپس نوار را به نوارهای کوتاهتری که روی هر یک هفت رقم نوشته شده است بریده‌ایم.

الف) ثابت کنید هر عدد طبیعی هفت‌رقمی دست‌کم روی یکی از نوارهای کوتاه آمده است.

ب) ثابت کنید هر عدد طبیعی هفت‌رقمی روی تعدادی نامتناهی از نوارهای کوتاه آمده است.

۳. نقطه‌های M و N به‌ترتیب وسط ضلعهای BC و AD از مربع $ABCD$اند. K نقطه‌ای دلخواه روی امتداد قطر AC از سمت نقطهٔ A است. پاره‌خط KM ضلع AB را در نقطهٔ L قطع کرده است. ثابت کنید $\angle KNA = \angle LNA$.

۴. در شهری بزرگ همهٔ خیابانها در امتداد یکی از دو امتداد عمود بر هم‌اند. هر ماشین هنگام تردد در شهر نمی‌تواند دو بار از یک نقطه بگذرد و باید در همان خیابانی که از آن شروع به حرکت کرده است به توقفگاه برود. اگر ماشینی ۱۰۰بار گردش به چپ کرده باشد، چند بار گردش به راست کرده است؟

۵. مجموع چند عدد مثبت برابر با ۱۰ است و مجموع مربعهای آنها از ۲۰ بزرگتر است. ثابت کنید مجموع مکعبهای این عددها از ۴۰ بیشتر است.

سطح پیشرفته

۱. روی نمودار چندجمله‌ایی که ضریبهایش عددهایی صحیح‌اند دو نقطه که مختصاتشان عددهایی صحیح‌اند انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید اگر فاصلهٔ میان این دو نقطه عددی صحیح باشد، پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند موازی محور x است.

۲. دایرهٔ ω_1 به مرکز O_1 از نقطهٔ O_2، مرکز دایرهٔ ω_2، می‌گذرد. خطهای مماس بر ω_2 از نقطه‌ای مانند C روی ω_1، ω_2 را برای بار دوم به‌ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. ثابت کنید AB بر O_1O_2 عمود است.

۳. جان و جیمز می‌خواهند ۲۵ سکه، به‌ارزش ۱، ۲، ... و ۲۵ کوپک، را بین خود تقسیم کنند. در هر حرکت، یکی از آنها سکه‌ای را انتخاب می‌کند و بازیکن دیگر تصمیم می‌گیرد که چه کسی آن را بردارد. جان انتخاب اول را می‌کند و در حرکتهای بعدی، بازیکنی که تا آن زمان پول بیشتری دارد سکهٔ بعدی را انتخاب می‌کند. در حالتی که پول هر دو یکسان باشد، بازیکنی سکه را انتخاب می‌کند که در حرکت قبل هم این کار را کرده است. پس از اینکه همهٔ سکه‌ها برداشته شدند، بازیکنی که پول بیشتری دارد می‌برد. کدام بازیکن استراتژی برد دارد؟

۴. به‌ازای هر تابع مانند f تعریف کنید $f^1(x) = f(x)$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geq 2$، $f^n(x) = f\big(f^{n-1}(x)\big)$. آیا چندجمله‌ای درجهٔ دومی مانند $f(x)$ وجود دارد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، معادلهٔ $f^n(x) = 0$ دقیقاً 2^n ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد؟

۵. ثابت کنید اگر کرهٔ محیطی بیست‌وجهی منتظمی بر کرهٔ محیطی دوازده‌وجهی منتظمی منطبق باشد، آن‌وقت کرهٔ محاطی آنها هم بر یکدیگر منطبق است.

۶. رخ تنبل فقط می‌تواند از خانه‌ای به یکی از همسایه‌های عمودی یا افقی‌اش برود. این رخ روی مسیری که از هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 8×8 دقیقاً یک‌بار می‌گذرد حرکت می‌کند. ثابت کنید تعداد چنین مسیرهایی که از یکی از خانه‌های گوشه‌ای شروع می‌شوند از تعداد چنین مسیرهایی که از همسایهٔ قطری یکی از خانه‌های گوشه‌ای شروع می‌شوند بیشتر است.

۷. هر دو نقطه از ۲۰۰ نقطه‌ای که در فضا قرار دارند با پاره‌خطی به هم وصل شده‌اند. هر پاره‌خط با یکی از رنگها رنگ شده است و تعداد رنگها kتاست. پیتر می‌خواهد هر یک از این ۲۰۰ نقطه را با یکی از رنگهایی که برای رنگ‌کردن پاره‌خطها به‌کار رفته است طوری رنگ کند که هیچ پاره‌خطی دو نقطه‌ای را که هر دو به رنگ خود این پاره‌خط‌اند به هم وصل نکند. اگر

الف) $k = 7$،

ب) $k = 10$،

آیا پیتر همواره می‌تواند این کار را بکند؟

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول بهمن‌ماه ۱۳۸۴ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۷۱. M مجموعه‌ای ناتهی از عددهای طبیعی است، به‌طوری که اگر m عضو M باشد، $۴m$ و $\lfloor\sqrt{m}\rfloor$ هم عضو Mاند. ثابت کنید M مجموعهٔ عددهای طبیعی است.

۱۷۲. $(a_n)_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی است، به‌طوری که اگر S مجموعه‌ای ناتهی از عددهای طبیعی باشد، عددی از S مانند s وجود دارد که a_s از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عضوهای S بزرگتر نیست. ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n!$ بر $a_۱a_۲\cdots a_n$ بخش‌پذیر است.

۱۷۳. n عددی طبیعی است، $n \geq ۳$، x عددی حقیقی است و

$$\{x\} = \{x^۲\} = \{x^n\}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد حقیقی t است، یعنی $\{t\} = t - \lfloor t\rfloor$.) ثابت کنید x عددی صحیح است.

۱۷۴. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\left(x^۲ + y + f(y)\right) = ۲y + \left(f(x)\right)^۲$$

۱۷۵. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، $b_۱$، $b_۲$، ... و b_n عددهایی حقیقی در بازهٔ $[۱,۲]$اند و

$$a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲ = b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots + b_n^۲$$

ثابت کنید

$$\frac{a_۱^۳}{b_۱} + \frac{a_۲^۳}{b_۲} + \cdots + \frac{a_n^۳}{b_n} \leq \frac{۱۷}{۱۰}(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲)$$

۱۷۶. n عددی طبیعی است. هر گوشه مجموعه‌ای متناهی مانند C است که از nتاییهایی از عددهای طبیعی تشکیل شده است، به‌طوری که اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، $b_۱$، $b_۲$، ... و b_n عددهایی طبیعی باشد که

$$a_k \geq b_k, \qquad k = ۱, ۲, \ldots, n$$

و $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ عضو C باشد، آن‌وقت $(b_۱, b_۲, \ldots, b_n)$ هم عضو C است. ثابت کنید که از هر گردایهٔ نامتناهی از گوشه‌ها می‌توان دوگوشه انتخاب کرد که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

۱۷۷. S مجموعه‌ای نامتناهی از نقطه‌ها در صفحه است، به‌طوری که اگر A، B و C سه نقطهٔ متمایز از S باشند، فاصلهٔ A تا BC عددی صحیح است. ثابت کنید همهٔ نقطه‌های S روی خطی راست قرار دارند.

۱۷۸. در مثلث ABC، $\angle B = ۲\angle C$. نقطه‌های P و Q روی عمودمنصف پاره‌خط BC قرار دارند و نیمخطهای AP و AQ زاویهٔ A را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی $PQ < AB$ که زاویهٔ B منفرجه باشد.

۱۷۹. $ABCD$ چهارضلعی‌ای محدب است و $\angle ABC = \angle ADC = ۱۳۵^\circ$. ثابت کنید

$$AC^۲ \times BD^۲ = ۲AB \times BC \times CD \times DA$$

۱۸۰. قطرهای AC و BD از چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. چهارضلعی $A'B'C'D'$ از دوران چهارضلعی $ABCD$ حول نقطهٔ O به‌دست آمده است. $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ به‌ترتیب نقطه‌های برخورد $A'B'$ با AB، $B'C'$ با BC، $C'D'$ با CD و $D'A'$ با DA هستند. ثابت کنید چهارضلعی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ وقتی و فقط وقتی محاطی است که AC بر BD عمود باشد.

راه‌حلها

۱۲۶. نقطهٔ مشبکه‌ای در صفحه نقطه‌ای است که مختصاتش هر دو عددهایی صحیح باشند. مرکز ثقل چهار نقطهٔ (x_i, y_i)، $۱ \leq i \leq ۴$، نقطهٔ

$$\left(\frac{x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴}{۴}, \frac{y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴}{۴}\right)$$

است. بزرگترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که n نقطه در صفحه وجود داشته باشند که مرکز ثقل هیچ چهار تایی از آنها نقطه‌ای مشبکه‌ای نباشد.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم بزرگترین مقدار n برابر با ۱۲ است. برای اینکه ثابت کنیم $n \geq ۱۲$، باید ۱۲ نقطهٔ مشبکه‌ای مانند (x_i, y_i)، $۱ \leq i \leq ۱۲$، پیدا کنیم که مرکز ثقل هیچ چهار تایی از آنها نقطه‌ای مشبکه‌ای

نباشد. اگر این نقطه‌ها را طوری انتخاب کنیم که

$$x_i \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴), \quad i = ۱, \dots, ۶$$
$$x_i \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴), \quad i = ۷, \dots, ۱۲$$
$$y_i \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴), \quad i = ۱, ۲, ۳, ۱۰, ۱۱, ۱۲$$
$$y_i \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴), \quad i = ۴, \dots, ۹$$

به آنچه می‌خواهیم می‌رسیم.

اکنون فرض کنید $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۱۳}$ نقطه‌هایی مشبکه‌ای باشند. باید ثابت کنیم که مرکز ثقل چهارتا از این نقطه‌ها نقطه‌ای مشبکه‌ای است. ابتدا توجه کنید که بنابر اصل لانه‌کبوتری پنج تا از این نقطه‌ها وجود دارند که زوجیت مختص x آنها، همین‌طور زوجیت مختص y آنها، یکسان است. درنتیجه، در میان هر پنج تا از این نقطه‌ها دو نقطه وجود دارد که وسط پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند مشبکه‌ای است. اگر این استدلال را تکرار کنیم معلوم می‌شود که در میان ۱۳ نقطهٔ موردنظر می‌توان پنج جفت نقطهٔ متمایز پیدا کرد که وسط پاره‌خطی که نقطه‌های هر جفت را به هم وصل می‌کند مشبکه‌ای است. در میان این پنج نقطهٔ وسط می‌توانیم دو نقطه مانند M و M' پیدا کنیم که وسط پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند، و آن را C می‌نامیم، مشبکه‌ای باشد. اکنون توجه کنید که اگر M و M' وسطهای P_iP_j و P_kP_l باشند، C مرکز ثقل P_i، P_j، P_k و P_l است.

۱۲۷. ثابت کنید می‌توان درون هر nضلعی محدب $n - ۲$ نقطه طوری انتخاب کرد که درون هر مثلثی که رأسهایش سه رأس nضلعی هستند دقیقاً یکی از این نقطه‌ها قرار داشته باشد.

راه‌حل. فرض کنید $A_۰A_۱\dots A_{n-۱}$، nضلعی‌ای محدب باشد. درون مثلث $A_۰A_kA_{n-۱}$ نقطهٔ B_k را خیلی نزدیک به رأس A_k انتخاب کنید $(۱ \le k \le n - ۲)$ (به‌طور دقیقتر، می‌توانید این نقطه را در مثلثی که خط $A_{k-۱}A_{k+۱}$ از مثلث $A_۰A_kA_{n-۱}$ می‌برد انتخاب کنید). هر مثلثی که رأسهایش سه رأس از nضلعی‌اند به‌شکل $A_iA_kA_j$، $۰ \le i < k < j \le n - ۱$، است. نقطهٔ B_k درون این مثلث قرار دارد، زیرا زاویهٔ $A_iA_kA_j$ زاویهٔ $A_{k-۱}A_kA_{k+۱}$ را دربر دارد و قطر $A_{k-۱}A_{k+۱}$ پاره‌خطهای A_iA_k و A_jA_k را قطع می‌کند.

۱۲۸. مثلث ABC مفروض است. نقطه‌های B' و C' به‌ترتیب روی ضلعهای AB و AC قرار دارند و نقطهٔ P روی $B'C'$ قرار دارد. بیشترین مقدار ممکن

$$\frac{\min\{S_{BPB'}, S_{CP'C}\}}{S_{ABC}}$$

چقدر است؟

راه‌حل. باید بیشترین مقدار ممکن

$$\min\left\{\frac{S_{BPB'}}{S_{ABC}}, \frac{S_{CPC'}}{S_{ABC}}\right\}$$

را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$\frac{S_{BB'P}}{S_{BB'C'}} = \frac{B'P}{B'C'}, \qquad \frac{S_{BB'C'}}{S_{ABC'}} = \frac{BB'}{AB}, \qquad \frac{S_{ABC'}}{S_{ABC}} = \frac{AC'}{AC}$$

بنابراین

$$\frac{S_{BB'P}}{S_{ABC}} = \frac{B'P}{B'C'} \times \frac{BB'}{AB} \times \frac{AC'}{AC}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$\frac{S_{CC'P}}{S_{ABC}} = \frac{C'P}{C'B'} \times \frac{CC'}{CA} \times \frac{AB'}{AB}$$

بنابراین حاصل‌ضرب $\frac{S_{BB'P}}{S_{ABC}}$ و $\frac{S_{CC'P}}{S_{ABC}}$ برابر است با

$$\left(\frac{B'P}{B'C'} \times \frac{C'P}{C'B'}\right)\left(\frac{BB'}{BA} \times \frac{AB'}{AB}\right)\left(\frac{AC'}{AC} \times \frac{CC'}{CA}\right)$$

مجموع دو عامل هر یک از پرانتزهای بالا برابر با ۱ است و درنتیجه حاصل‌ضربشان حداکثر $\frac{1}{4}$ است، و این مقدار وقتی و فقط وقتی به‌دست می‌آید که این دو عامل برابر باشند. بنابراین بیشترین مقدار عبارت بالا برابر است با $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ یا $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ و وقتی و فقط وقتی به‌دست می‌آید که B'، C' و P به‌ترتیب وسط AB، AC و $B'C'$ باشند. چون حاصل‌ضرب $\frac{S_{BPB'}}{S_{ABC}}$ و $\frac{S_{CPC'}}{S_{ABC}}$ حداکثر $\left(\frac{1}{8}\right)^2$ است، کوچکترین آنها حداکثر $\frac{1}{8}$ است و این مقدار وقتی و فقط وقتی به‌دست می‌آید که B'، C' و P به‌ترتیب وسط AB، AC و $B'C'$ باشند. بنابراین بیشترین مقدار موردنظر برابر با $\frac{1}{8}$ است.

۱۲۹. شش‌ضلعی محدب $ABCDEF$ مفروض است. فرض کنید نقطه‌های P، Q و R به‌ترتیب نقطه‌های برخورد خطهای AB و EF، EF و CD، و CD و AB باشند. فرض کنید S، T و U به‌ترتیب نقطه‌های برخورد خطهای BC و DE، DE و FA، و FA و BC باشند. ثابت کنید اگر

$$\frac{AB}{PR} = \frac{CD}{RQ} = \frac{EF}{QP}$$

آن‌وقت

$$\frac{BC}{US} = \frac{DE}{ST} = \frac{FA}{TU}$$

راه‌حل. از A خطی موازی PQ و از B خطی موازی RQ رسم کنید و فرض کنید این خطها یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. O را به E و D وصل کنید. توجه کنید که مثلثهای ABO و PQR متشابه‌اند و درنتیجه

$$\frac{AB}{PR}=\frac{BO}{RQ}=\frac{OA}{QP}$$

اما بنابر فرض،

$$\frac{AB}{PR}=\frac{CD}{RQ}=\frac{EF}{QP}$$

درنتیجه $BO=CD$ و $OA=EF$. بنابراین $AOEF$ و $BCDO$ متوازی‌اضلاع‌اند. چون EO و TS موازی‌اند، همین‌طور DO و SO، به‌سادگی معلوم می‌شود که مثلثهای TSU و EOD متشابه‌اند و درنتیجه

$$\frac{OD}{US}=\frac{DE}{ST}=\frac{OE}{TU}$$

اما $OD=BC$ و $OE=FA$، بنابراین

$$\frac{BC}{US}=\frac{DE}{ST}=\frac{FA}{TU}$$

۱۳۰. قطرهای چهارضلعی محاطی $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. نقطه‌های U و V به‌ترتیب وسط AB و CDاند. ثابت کنید خطهایی که از O، U و V می‌گذرند و به‌ترتیب بر AD، BD و AC عمودند همرس‌اند.

راه‌حل از سینا کیهانیان، دبیرستان امام موسی صدر، منطقهٔ ۱، تهران. حکم مسأله را در حالت کلی‌تری ثابت می‌کنیم، یعنی وقتی که نقطه‌های U و V طوری روی AB و CD قرار دارند که

$$\frac{BU}{AB}=\frac{VC}{CD}$$

فرض کنید S و T به‌ترتیب پای عمودهایی باشند که از نقطه‌های U و V بر BD و AC رسم شده‌اند. فرض کنید خطهای US و VT یکدیگر را در نقطهٔ R قطع می‌کنند. کافی است ثابت کنیم OR بر AD عمود است. فرض کنید OR، AD را در نقطهٔ K قطع می‌کند.

توجه کنید که

$$\angle UBS=\angle ABD=\angle ACD=\angle TCV$$

بنابراین مثلثهای UBS و TCV متشابه‌اند و درنتیجه

$$\frac{BU}{VC}=\frac{BS}{CT}=\frac{US}{VT}$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که مثلثهای OCD و OAB متشابه‌اند و درنتیجه

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OC}$$

اما بنابر فرض، $\frac{BU}{VC} = \frac{AB}{CD}$؛ درنتیجه،

$$\frac{BS}{CT} = \frac{OB}{OC}$$

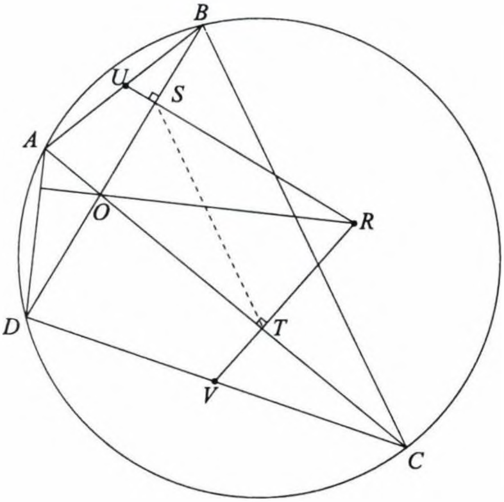
بنابراین ST با BC موازی است.

توجه کنید که چهارضلعی $OSRT$ محاطی است و درنتیجه $\angle ORS = \angle OTS$ و چون ST با BC موازی است،

$$\angle ORS = \angle OTS = \angle OCB = \angle ODA$$

بنابراین

$$\angle OKD = \angle OSR = ۹۰^\circ$$



۱۳۱. آیا عددهایی گویا مانند x، y و z وجود دارند که $x^۲ + y^۲ + z^۲ = x + y + z + ۱$؟

راه‌حل. فرض کنید عددهای گویای x، y و z ویژگی موردنظر را داشته باشند و

$$x = \frac{a+۱}{۲}, \quad y = \frac{b+۱}{۲}, \quad z = \frac{c+۱}{۲}$$

که در آنها a، b و c عددهایی گویا هستند. در این صورت از تساوی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = x + y + z + ۱$ نتیجه می‌شود $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۷$. فرض کنید

$$a = \frac{p}{d}, \quad b = \frac{q}{d}, \quad c = \frac{r}{d}$$

که در آنها p، q، r و d عددهایی صحیح‌اند و $d \neq ۰$. در این صورت $p^۲ + q^۲ + r^۲ = ۷d^۲$. می‌توانیم فرض کنیم که p، q، r و d مقسوم‌علیه مشترکی ندارند. توجه کنید که مربع هر عدد صحیح به‌پیمانهٔ ۸ با یکی از عددهای ۰، ۱ و ۴ همنهشت است. بنابراین $۷d^۲$ به‌پیمانهٔ ۸ با یکی از عددهای ۰، ۷ و ۴ همنهشت است. درضمن، $p^۲ + q^۲ + r^۲$ به‌پیمانهٔ ۸ با یکی از عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ همنهشت است. بنابراین $۷d^۲$ به‌پیمانهٔ ۸ با یکی از عددهای ۰ و ۴ همنهشت است. اکنون با بررسی حالتهای مختلف می‌توان به تناقض رسید (توجه کنید که $p^۲$، $r^۲$، $q^۲$ و $d^۲$ هم نسبت به هم اول‌اند).

۱۳۲. k و n عددهایی طبیعی‌اند، $۲ \geq k$ و $n \geq ۲k$. ثابت کنید $\binom{n}{k}$ بر دست‌کم یکی از عددهای n، $n-۱$، ...، و $n-k+۱$ بخش‌پذیر نیست.

راه‌حل. فرض کنید حکم درست نباشد و $\binom{n}{k}$ بر n، $n-۱$، ...، و $n-k+۱$ بخش‌پذیر باشد. چون

$$n(n-۱)\cdots(n-k+۱) = k!\binom{n}{k}$$

پس هر یک از عددهای

$$\begin{aligned}(n-۱)(n-۲)(n-۳)\cdots(n-k+۱)\\ n(n-۲)(n-۳)\cdots(n-k+۱)\\ \vdots\qquad\qquad\\ n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۲)\end{aligned}$$

بر $k!$ بخش‌پذیر است. اگر هر یک از این عبارتها را از عبارت زیر آن کم کنیم معلوم می‌شود که هر یک از عددهای

$$\begin{aligned}(n-۲)(n-۳)(n-۴)\cdots(n-k+۱)\\ n(n-۳)(n-۴)\cdots(n-k+۱)\\ \vdots\qquad\qquad\\ n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۳)\end{aligned}$$

هم بر $k!$ بخش‌پذیر است. اگر این کار را $k-۱$ بار تکرار کنیم معلوم می‌شود که

$$۲ \times ۳ \times ۴ \times \cdots \times (k-۱)$$

بر $k!$ بخش‌پذیر است، که ممکن نیست، زیرا $\frac{۱}{k}$ عددی طبیعی نیست. به این ترتیب به تناقض رسیده‌ایم و حکم مسأله درست است.

۱۳۳. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که هر عدد طبیعی که نمایش اعشاری آن از $n-۱$ رقم ۱ و یک رقم ۷ تشکیل شده است اول باشد.

راه‌حل. فرض کنید عدد N از $n-۱$ رقم ۱ و یک رقم ۷ تشکیل شده باشد. در این صورت می‌توان نوشت

$$N = A_n + ۶ \times ۱۰^k$$

که در آن A_n عددی است که از n رقم ۱ تشکیل شده است و $۰ \leq k < n$.

اگر $۳ \mid n$، مجموع رقمهای N بر ۳ بخش‌پذیر است؛ یعنی N بر ۳ بخش‌پذیر است و اول نیست. چون وقتی که $t \geq ۰$ و $r > ۰$،

$$A_{۶t+r} = A_{۶t} + ۱۰^{۶t}A_r \equiv A_{۶t} + A_r \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

و

$$A_۱ \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad A_۲ \equiv ۴ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad A_۳ \equiv ۶ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

$$A_۴ \equiv ۵ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad A_۵ \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad A_۶ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

وقتی و فقط وقتی $A_n \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۷) که $۶ \mid n$. توجه کنید که

$$۱۰^۰ \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad ۱۰^۱ \equiv ۳ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad ۱۰^۲ \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

$$۱۰^۳ \equiv ۶ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad ۱۰^۴ \equiv ۴ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad ۱۰^۵ \equiv ۵ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

اگر $۶ \nmid n$، به‌ازای عددی غیرصفر مانند r، $A_n \equiv r$ (به‌پیمانهٔ ۷). علاوه‌بر این، اگر $n > ۶$، می‌توانیم k را طوری انتخاب کنیم که $۰ \leq k \leq ۵$ و

$$۶ \times ۱۰^k \equiv ۷ - r \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

به این ترتیب

$$N = A_n + ۶ \times ۱۰^k \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

و N عددی اول نیست.

اکنون کافی است حالتهایی را بررسی کنیم که $۵ \leq r$. چون

$$A_۵ \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷), \quad ۱۰^۲ \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

پس $A_۵ + ۶ \times ۱۰^۲ \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۷). اگر $n = ۴$، توجه کنید که $۱۷۱۱ = ۲۹ \times ۵۹$. اگر $n = ۲$، توجه کنید که ۱۷ و ۷۱ هر دو اول‌اند. اگر $n = ۱$، معلوم است که n ویژگی موردنظر را دارد. پس فقط دو عدد ویژگی موردنظر را دارند: ۱ و ۲.

۱۳۴. a و b عددهایی طبیعی‌اند و $ab + ۱$ مربع کامل است. ثابت کنید عددی طبیعی مانند c وجود دارد که $ac + ۱$ و $bc + ۱$ هم مربع کامل‌اند.

راه‌حل. فرض کنید $ab + ۱ = k^۲$ و x و y عددهایی صحیح باشند که

$$ac + ۱ = (k + x)^۲ = k^۲ + ۲kx + x^۲ = ab + ۱ + ۲kx + x^۲$$
$$ab + ۱ = (k + y)^۲ = k^۲ + ۲ky + y^۲ = ab + ۱ + ۲ky + y^۲$$

به این ترتیب، اگر $x = a$،

$$c = \frac{۱}{a}(۲kx + x^۲) + b = ۲k + a + b$$

و اگر $y = b$،

$$c = \frac{۱}{b}(۲ky + y^۲) + a = ۲k + b + a$$

بنابراین اگر

$$c = a + b + ۲k = a + b + ۲\sqrt{ab + ۱}$$

آن‌وقت عدد c ویژگی موردنظر را دارد.

۱۳۵. a، b و c عددهایی مثبت‌اند و $a + b + c \geq abc$. ثابت کنید دست‌کم دو تا از نابرابریهای

$$\frac{۲}{a} + \frac{۳}{b} + \frac{۶}{c} \geq ۶, \quad \frac{۲}{b} + \frac{۳}{c} + \frac{۶}{a} \geq ۶, \quad \frac{۲}{c} + \frac{۳}{a} + \frac{۶}{b} \geq ۶$$

درست‌اند.

راه‌حل. فرض کنید که حکم درست نباشد و مثلاً

$$\frac{۲}{a} + \frac{۳}{b} + \frac{۶}{c} < ۶, \quad \frac{۲}{c} + \frac{۳}{a} + \frac{۶}{b} < ۶$$

در این صورت

$$\frac{۵}{a}+\frac{۹}{b}+\frac{۸}{c}<۱۲$$

همچنین، چون $b+c \geq a(bc-۱)$،

$$\frac{۱}{a} \geq \frac{bc-۱}{b+c}$$

درنتیجه

$$\frac{۵(bc-۱)}{b+c}+\frac{۹}{b}+\frac{۸}{c}<۱۲$$

یا

$$۵b^۲c^۲+۱۲bc-۱۲b^۲c-۱۲c^۲b+۹c^۲+۸b^۲<۰$$

بنابراین

$$(۲bc-۲b-۳c)^۲+b^۲(c-۲)^۲<۰$$

که درست نیست. این تناقض نشان می‌دهد که حکم مسأله درست است.

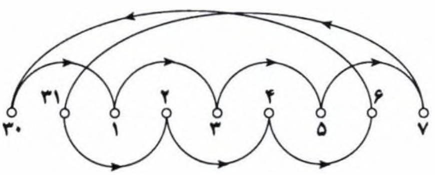
راه‌حلها

از باب تفریح

۱. به این ترتیب عمل کنید: ۱۲۳۴۵۶۷ → ۱۲۴۵۶۳۷ → ۱۶۲۴۵۳۷ → ۱۵۶۲۴۳۷

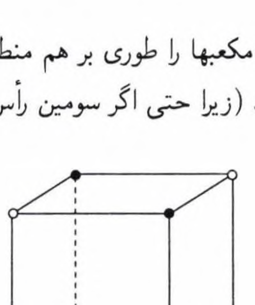
۲. پاسخ: شش روز.

ثابت می‌کنیم که بارون نمی‌تواند هفت روز متوالی جمله‌اش را تکرار کند. به‌ازای هر یک از روزها نقطه‌ای روی خطی راست در نظر بگیرید و روزهایی را که می‌دانیم بارون از روزی دیگر کمتر اردک آورده با فلش به هم وصل کنید (جهت فلش به‌سمت روزی است که بارون اردک بیشتری آورده است). در این صورت به‌شکل زیر می‌رسیم.



چون زنجیرهٔ این فلشها بسته است، پس بارون نمی‌تواند هفت روز متوالی جمله‌اش را تکرار کند. اما او می‌تواند جمله‌اش را شش روز متوالی تکرار کند، به این ترتیب که در ۳۱ مرداد یک اردک، در اول شهریور دو اردک، در دوم شهریور سه اردک، ...، در ششم شهریور هفت اردک و هر روز قبل از ۳۱ مرداد، مثلاً، ۲۰۰۰ اردک بزند!

۳. کافی است ثابت کنیم که می‌توانیم مکعبها را طوری بر هم منطبق کنیم که دو رأس سفید مکعب اول بر دو رأس سفید مکعب دوم منطبق شود (زیرا حتی اگر سومین رأس سفید مکعب اول بر رأسی سیاه از مکعب



دوم واقع شود، چهار رأس سیاه مکعب دوم باید بر چهار رأس سیاه مکعب اول منطبق شوند). می‌توانیم مطابق شکل پایین صفحهٔ قبل هشت رأس مکعب را به دو دستهٔ چهارتایی طوری تقسیم کنیم که فاصلهٔ هر دو رأس در هر چهارتایی برابر با قطر وجه‌های مکعب باشد. بنابراین اگر سه تا از رأسهای مکعب را با سفید رنگ کنیم، فاصلهٔ دست‌کم دو تا از آنها برابر با قطر وجه‌های مکعب است. این دو رأس را بر دو رأس سفید شبیه‌شان در مکعب دوم منطبق می‌کنیم. در این صورت چهار جفت از رأسهای سیاه هم بر یکدیگر منطبق می‌شوند.

۴. مستطیلهای ممکن را برحسب اندازهٔ مساحتشان مرتب کنید:

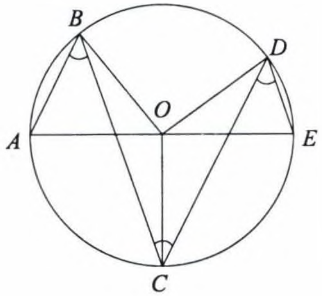
$$۱ \times ۱, ۱ \times ۲, ۱ \times ۳, ۱ \times ۴, ۲ \times ۲, ۱ \times ۵, ۱ \times ۶, ۲ \times ۳, ۱ \times ۷, ۱ \times ۸, ۲ \times ۴, \ldots$$

مجموع مساحتهای ۱۰ مستطیل اول در این فهرست برابر است با ۴۶، که از مساحت مستطیل ۹×۵ بیشتر است. بنابراین مستطیلی با ابعاد بزرگتر نداریم و دست‌کم از دو تا از این ده مستطیل باید دوبار استفاده شده باشد.

۵. فرض کنید نقطهٔ O مرکز دایره باشد و O را به رأسهای خط شکسته وصل کنید. در این صورت زاویه‌های AOC، BOD و EOC قائمه‌اند، زیرا هر یک از آنها زاویه‌هایی مرکزی‌اند که کمان نظیر آنها، کمان نظیر زاویه‌ای محاطی و ۴۵° است. بنابراین نقطهٔ O درون زاویهٔ BCD قرار دارد. توجه کنید که

$$\angle DOC = ۱۸۰^\circ - \angle AOB$$

$$\angle BOC = ۱۸۰^\circ - \angle DOE$$



بنابراین مساحت مثلث ODC، که برابر است با $\frac{۱}{۲}CD^۲ \sin \angle DOC$، با مساحت مثلث AOB برابر است (زیرا $\sin \angle DOC = \sin \angle AOB$) و مساحت مثلثهای OBC و ODE هم برابر است. اکنون اگر مثلثهای ODC و OBC را در ناحیهٔ سایه‌نخورده به‌ترتیب با مثلثهای OAB و ODE جایگزین کنیم، معلوم می‌شود که مساحت ناحیهٔ سایه‌نخورده برابر است با نصف محیط دایره، یعنی برابر است با مجموع مساحتهای ناحیه‌های سایه‌دار.

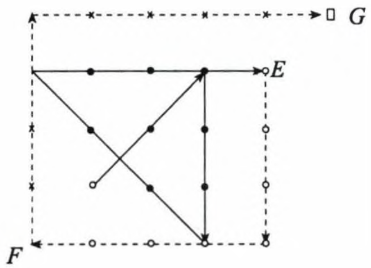
ده کوئیکی از کلامکین

۱. بله، وجود دارد. ۷۷۷ عدد طبیعی متمایز انتخاب کنید و هر یک از آنها را در حاصل‌ضرب مجموعهای هر هفت تا از آنها ضرب کنید.

۲. چون $d = \frac{ab}{c}$، می‌توان نوشت $a = mn$، $b = rs$، $c = mr$ و $d = ns$. بنابراین

$$a^{2} + b^{2} + c^{2} + d^{2} = (m^{2} + s^{2})(n^{2} + r^{2})$$

۳. اگر $n = 3$، از شکل زیر معلوم است که می‌توانیم پاره‌خطی رسم کنیم که از ۴ قطعه تشکیل شده و از همهٔ نقطه‌ها بگذرد و به F ختم شود. اگر $n = 4$، می‌توانیم دو پاره‌خط نقطه‌چین را اضافه کنیم (تا به نقطهٔ G برسیم). اگر $n = 5$، می‌توانیم دو پاره‌خط دیگر اضافه کنیم (تا به نقطهٔ F برسیم). وقتی که n یک واحد زیاد می‌شود، می‌توانیم دو پاره‌خط به‌همین ترتیب اضافه کنیم و کار را ادامه دهیم.



۴. فرض کنید چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد و $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ بردارهایی باشند که ابتدای آنها مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی و انتهای آنها به‌ترتیب رأسهای A، B، C و Dاند. فرض کنید P با تساوی $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}}{2}$ مشخص می‌شود. توجه کنید که برداری که از وسط AB به P رسم می‌شود $\frac{\mathbf{C}+\mathbf{D}}{2}$ است، و این بردار بر CD عمود است، زیرا $|\mathbf{D}| = |\mathbf{C}|$. همین نتیجه در مورد پاره‌خطهای BC، CD و DA هم درست است، همین‌طور در مورد قطرهای AC و BD. بنابراین این شش خط در نقطهٔ P به هم می‌رسند.

۵. معلوم است که $P(x)$ ریشه‌ای منفی ندارد. درضمن، اگر $x \geq 0$،

$$\begin{aligned}(1 + x)P(x) &= x^{2n+1} - x^{2n} + \cdots + x + 2n + 1 \\ &= \frac{x(x^{2n+1} + 1)}{x + 1} + 2n + 1 > 0\end{aligned}$$

پس $P(x)$ ریشه‌ای غیرمنفی هم ندارد.

۶. فرض کنید عددها a_1، a_2، ... و a_{500} باشند و مجموعشان برابر با S باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned} a_1 &> \frac{S-a_1}{5} \\ a_2 &> \frac{S-a_2}{5} \\ &\vdots \\ a_6 &> \frac{S-a_6}{5} \end{aligned}$$

اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم معلوم می‌شود

$$0 > S - a_1 - a_2 - \cdots - a_6$$

بنابراین اگر شش عدد منفی یا تعدادی کمتر عدد منفی در میان عددهای موردنظر وجود داشته باشد، به تناقض می‌رسیم. بنابراین دست‌کم هفت عدد منفی در میان عددهای موردنظر وجود دارد.

۷. عبارت موردنظر را S بنامید. توجه کنید که

$$\begin{aligned} S \leq\ & 4(a^2+b^2+c^2+d^2) - (a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b) \\ & - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2) \end{aligned}$$

چون عبارت سمت راست تساوی بالا برحسب a^2، b^2، c^2 و d^2 خطی است، پس بیشترین مقدار عبارت موردنظر وقتی به‌دست می‌آید که متغیرها ۰ یا ۱ باشند. به‌سادگی معلوم می‌شود که بیشترین مقدار عبارت موردنظر برابر با ۹ است و وقتی به‌دست می‌آید که $a=b=c=1$ و $d=0$.

۸. نابرابریهای

$$\begin{aligned} 3\Big(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\Big) &\geq (a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \\ 3\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big) &\geq (a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \end{aligned}$$

به‌ترتیب با نابرابریهای

$$(b+a-c)(c-a)^2 + (c+b-a)(a-b)^2 + (a+c-b)(b-c)^2 \geq 0$$

$$(b+c-a)(c-a)^2 + (c+a-b)(a-b)^2 + (a+b-c)(b-c)^2 \geq 0$$

معادل‌اند. این نابرابریها هم درست‌اند.

۹. تساوی

$$abc - a - b - c = 2$$

را می‌توان به‌شکل

$$\frac{۱}{۱+a}+\frac{۱}{۱+b}+\frac{۱}{۱+c}=۱$$

نوشت. از نابرابری ین‌سن نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۱+a}+\frac{۱}{۱+b}+\frac{۱}{۱+c}\geq\frac{۳}{۱+A}$$

که در آن $A=\frac{a+b+c}{۳}$. بنابراین $A\geq ۲$. از نابرابری کشی-شوارتز نتیجه می‌شود

$$\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۳}\geq A^۲$$

بنابراین $a^۲+b^۲+c^۲\geq ۱۲$ و تساوی وقتی و فقط وقتی به‌دست می‌آید که $a=b=c=۲$.

۱۰. فرض کنید $\mathbf{a}=(a_۱,\ldots,a_n)$، $\mathbf{b}=(b_۱,\ldots,b_n)$ و $\mathbf{c}$ بردار nتایی دلخواهی باشد. نابرابری موردنظر از نابرابری کلی‌تر

$$|\mathbf{c}|^۲\big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\big)\geq ۲(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \qquad (*)$$

به‌ازای وقتی که $\mathbf{c}=(۱,\ldots,۱)$ به‌دست می‌آید. فرض کنید α، β و γ به‌ترتیب زاویهٔ میان بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشند. نابرابری $(*)$ را می‌توان به‌شکل

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma+|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\geq ۲|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha\cos\beta$$

یا $\cos\gamma+۱\geq ۲\cos\alpha\cos\beta$ نوشت. چون $\alpha+\beta\geq\gamma$ و $۲\pi-(\alpha+\beta)\geq\gamma$، کافی است ثابت کنیم

$$۱+\cos(\alpha+\beta)\geq ۲\cos\alpha\cos\beta$$

یا $۱\geq\cos(\alpha-\beta)$، که درست است.

دربارهٔ اصول هندسی[1]

پرویز شهریاری

به این ترتیب لزوم دقت کامل در تعاریف و اصول هندسی احساس می‌شد و این کار در اواخر قرن نوزدهم انجام گرفت به این معنی که همهٔ مسائل مربوط به اصول هندسی مورد بررسی دقیق قرار گرفت. این کوششها منجر به ساختمان جدیدی برای اصول هندسی شد، اصولی که با دقت فوق‌العادهٔ ریاضیات معاصر تطبیق می‌کند.

در زیر شرح مختصری از وضعیت کنونی این مسأله را ذکر می‌کنیم.

قبل از همه تعریف اشکال اساسی هندسه یعنی نقطه، خط و سطح را مطرح می‌کنیم:

متذکر می‌شویم که تعریف یک مفهوم یعنی بیان آن مفهوم به کمک آنچه که قبلاً قبول شده است. اگر منظور تعریف ساده‌ترین مفاهیم باشد، ناچار این تعریف تنها منجر به تغییر موضوع می‌شود؛ یعنی تعریف موردنظر با کمک مفهوم دیگری تعریف می‌شود که خود احتیاج به تعریف دارد. چنان که اقلیدس مفهوم خط را با کمک مفهوم «امتداد» و یا «حد» تعریف می‌کرد که هیچ‌یک از دو مفهوم اخیر نیز تعریف نشده است.

بنابراین در ابتدای کار ساده‌ترین مفاهیم هندسی را تعریف نمی‌کنند و آنها را به‌عنوان مفاهیم سادهٔ ابتدایی که نمی‌توان مفاهیم ساده‌تری برای تعریف آنها پیدا کرد، قبول می‌کنند.

«نقطه»، «خط» و «سطح» از همین قبیل تعاریف ابتدایی هستند که به‌عنوان مفاهیم تعریف‌نشدهٔ هندسی قبول می‌شوند و به کمک آنها تمام سیستم «اصول» یعنی احکامی که بدون استدلال و با کمک مفاهیم ابتدایی قبول می‌شوند تنظیم می‌گردد. با داشتن این اصول، مفاهیم مجرد و انتزاعی از روابط فضایی جهان مادی در اختیار خواهیم داشت.

ما در اینجا سیستم اصولی را که هیلبرت ریاضیدان آلمانی طرح کرده است می‌آوریم. در این سیستم تمام اصول هندسی به پنج گروه تقسیم می‌شوند:

گروه اول: اصول ارتباطی اصول این گروه از چنین روابطی بین مفاهیم نقطه، خط و سطح صحبت می‌کنند که معمولاً با جملات زیر بیان می‌شوند: «خط از نقطه عبور می‌کند»، «نقطه بر خط یا صفحه واقع است» و غیره. این گروه از اصول زیر تشکیل شده است:

۱. دو نقطه تنها یک خط مستقیم را که از آنها عبور می‌کند معین می‌نمایند.

۲. روی هر خط لااقل دو نقطه قرار گرفته است، حداقل باید سه نقطه وجود داشته باشد تا بر یک خط مستقیم قرار نگرفته باشند.

---

۱. برگرفته از مجلهٔ ریاضی یکان، شمارهٔ اول و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۴۲.

۳. از هر سه نقطهٔ غیرواقع بر خط راست تنها یک صفحه عبور می‌کند. بر هر صفحه لااقل یک نقطه قرارگرفته است.

۴. اگر دو نقطه از خط راستی بر یک صفحه واقع باشند، تمام نقاط این خط بر صفحه واقع خواهند بود.

۵. اگر دو صفحه دارای یک نقطهٔ مشترک باشند، در آن صورت لااقل یک نقطهٔ مشترک دیگر هم خواهند داشت.

۶. لااقل بایستی ۴ نقطه باشند تا روی یک صفحه قرار نگرفته باشند.

در نظر اول چنین استنباط می‌شود که بعضی از این اصول را می‌توان ثابت کرد و یا بعضی از آنها کافی نیستند و یا به‌کلی غیرلازم‌اند. مثلاً اصل ۲ با تصور معمولی ما دربارهٔ خط مستقیم متناقض است، زیرا می‌بینیم که روی هر خط بینهایت نقطه وجود دارد. ولی نباید فراموش کرد که ما وجود نقاط و خطوط مستقیم را به‌عنوان مفاهیم ابتدایی قبول کردیم بدون اینکه یکی به دیگری ارتباط داشته باشد، آنها تنها می‌توانند جدا از هم وجود داشته باشند. بنابراین وقتی که می‌گوییم نقطه روی خط واقع است و یا خط از نقطه عبورکرده است، نقطه و خط را دارای این قابلیت می‌دانیم که می‌توانند روابطی با یکدیگر داشته باشند. روشن است که وقتی نقاط، خطوط و سطوح را مجزا از هم تصور می‌کنیم و وقتی بین آنها روابطی در نظر می‌گیریم، آنها را همچون موضوعهای فیزیکی مشخصی به تصور می‌آوریم. نقاط را به‌صورت نخودهایی تصور می‌کنیم که اندازهٔ معینی دارند، این نخودها را به شکل کره‌هایی در نظر می‌گیریم که به‌اندازهٔ کافی نرم هستند (و مثلاً از آب پر شده‌اند) به‌طوری که می‌توان با کمک سوزنهای باریکی آنها را سوراخ کرده و به اجزاء کوچکی تبدیل کرد. خطوط مستقیم را به‌صورت سوزنهای خیلی باریک و محکم و سطوح را به‌صورت صفحات نازک و محکمی تصور می‌کنیم. ابتدا، این صفحات، سوزنها و نخودها بدون ارتباط با هم و حتی هرکدام در جای جداگانه‌ای تصور می‌شوند. ولی ما با کمک اصول آنها را تحت شرایطی قرار می‌دهیم و به هم مربوط می‌کنیم. گوییم که نقطه بر خط قرارگرفته است وقتی که سوزن نخود را سوراخ کند و یا ولو در قسمتی هم شده از آن عبور نماید. گوییم که نقطه بر صفحه واقع است به‌شرطی که صفحهٔ نازک، نخود را به دو قسمت مساوی تقسیم کند و یا فقط نخود را ببرد و از آن عبور نماید. بالاخره وقتی که می‌گوییم خط بر صفحه قرارگرفته است چنین تصور می‌کنیم که سوزن باریک درکنارهٔ صفحه واقع شده است، یعنی وقتی که سوزن روی تمام امتداد خود درکنارهٔ صفحه قرارگرفته باشد به‌طوری که از هیچ طرفی برآمدگی و یا فرورفتگی نداشته باشد. اصول در مورد این شرایط چه معنایی دارد؟ به‌وسیلهٔ این اصول قبول می‌کنیم که این نخودها، سوزنها و صفحات در فضا چنان مستقر شده‌اند که: هر دو نخود به‌وسیلهٔ دو سر یک سوزن سوراخ شده‌اند (اصل ۱). هر سوزن لااقل دو نخود را سوراخ کرده است (اصل ۲). هر سه نخود به‌وسیلهٔ یک صفحه بریده شده و هر صفحه لااقل یک نخود را بریده است (اصل ۳). اگر دو نخودی که روی یک سوزن هستند به‌وسیلهٔ صفحه‌ای بریده شوند، در آن صورت همهٔ نخودهای دیگری که احتمالاً روی این سوزن قرار دارند به‌وسیلهٔ همین صفحه بریده می‌شود (اصل ۴). اگر دو صفحه با هم یک نخود را بریده باشند، لااقل یک نخود دیگر را نیز خواهند برید (اصل ۵). لااقل باید ۴ نخود داشته باشیم تا به‌وسیلهٔ یک صفحه بریده نشده باشند (اصل ۶). این شرایط باید وضع نخودها، سوزنها و صفحات را معین کنند و

به این ترتیب این انبوه نخودها، سوزنها و صفحات در ساختمان یکدیگر شرکت می‌کنند. درحقیقت از بستهٔ صفحات چهارصفحه جدا می‌کنیم، آنها را چنان می‌بریم که هر یک از آنها به شکل مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌اندازه‌های مساوی درآید. از دستهٔ سوزنها ۶ عدد انتخاب کرده و انتهای آنها را چنان می‌کشیم که طول هر یک برابر با ضلع صفحات مثلثی‌شکل بشود. بالاخره ۴ نخود انتخاب می‌کنیم و شکل زیر را می‌سازیم: از ۴ صفحه‌ای که داریم یک چهارضلعی منتظم می‌سازیم، در حد فاصل هر دو صفحه سوزنی قرار می‌دهیم و در هر رأس چهاروجهی یکی از نخودها را چنان قرار می‌دهیم که به‌وسیلهٔ صفحات بریده شده و سوزنها از وسط آنها عبورکرده باشند. برای چنین مجموعه‌ای از نخودها، سوزنها و صفحات تمام آنچه که قبلاً گفتیم یعنی همهٔ اصول ما صادق هستند.

از این مثال دیده می‌شود که مجموعهٔ نقاط، خطوط و صفحاتی که در اصول گروه اول صدق می‌کنند، می‌توانند وجود داشته باشند. در اینجا ما تنها ۴ نقطه، ۶ خط و ۴ صفحه داشتیم.

گروه دوم: اصول ترتیبی این اصول از موارد واضحی صحبت می‌کنند که ما ضمن بیان استقرار نقاط بر خطوط و یا صفحات بر آنها تکیه می‌کنیم. اساسی‌ترین موارد در این زمینه مفهوم قرارگرفتن یک نقطه روی پاره‌خط و بین دو نقطهٔ دیگر است. مضمون منطقی این مفهوم هم در همین گروه اصول وجود دارد. اصول این دسته عبارت‌اند از:

۱. اگر B بین A و C قرارگرفته باشد در این صورت A، B و C نقاط مختلف یک خط هستند و B بین C و A نیز قرارگرفته است.

۲. اگر دو نقطهٔ A و B بر خطی مفروض باشند، لااقل یک نقطهٔ C وجود دارد به‌طوری که B بین A و C قرار گرفته باشد.

۳. از سه نقطهٔ واقع بر یک خط، تنها یکی بین دو نقطهٔ دیگر قرارگرفته است.

۴. اگر در صفحهٔ مفروضی مثلث ABC و خط α را در نظر بگیریم به‌طوری که α از هیچ رأس مثلث عبور نکرده باشد، در این صورت اگر a پاره‌خط AB را قطع کند، یا پاره‌خط AC و یا پاره‌خط BC را نیز قطع خواهد کرد.

این اصول به وضع نقاط، خطوط و صفحات ما قدرت بیشتری می‌بخشند. مجموعهٔ وجوه، اضلاع و رئوس چهاروجهی که شامل شرایط اصول گروه اول هستند هنوز اصول گروه دوم را دربر ندارند. درحقیقت روی هر سوزن چهاروجهی تنها دو نخود وجود دارد، در حالی که طبق اصول گروه دوم بایستی لااقل سه نقطه روی هر خط مستقیم وجود داشته باشند. علاوه‌بر آن می‌توان با استدلال منطقی ثابت کرد که در این صورت روی هر پاره‌خط بینهایت نقطه وجود دارد و به این ترتیب مجموعهٔ اصول گروه اول و دوم می‌توانند برای بینهایت نقطه، خط و صفحه قانع‌کننده باشند.

گروه سوم: اصول همسازی "Congruens" این اصول مربوط به بیان تساوی پاره‌خطها و زوایا است. این

گروه از اصول زیر تشکیل شده است:

۱. از نقطهٔ دلخواهی واقع بر خط مفروض می‌توان پاره‌خطی مساوی با پاره‌خط داده شده روی خط رسم نمود.

۲. دو خط مساوی با خط سوم با هم مساوی‌اند.

۳. فرض کنید A، B و C نقاطی واقع بر یک خط مستقیم باشند و A_1، B_1 و C_1 هم نقاطی واقع بر خط دیگر به‌طوری که $AB = A_1B_1$ و $BC = B_1C_1$. اگر پاره‌خطهای AB و BC و همچنین A_1B_1 و B_1C_1 نقاط مشترکی نداشته باشند، $AC = A_1C_1$ خواهد بود.

۴. از هر نقطهٔ واقع بر یک خط راست می‌توان تنها یک زاویه در جهت مفروض و مساوی با زاویهٔ مفروض ساخت، هر زاویه با خودش برابر است.

۵. اگر در دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ اضلاع $AB = A_1B_1$، $AC = A_1C_1$ و $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ باشد، در این صورت $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ خواهد بود.

آخرین اصل را مورد توجه قرار دهیم:

درکتابهای درسی این اصل به‌عنوان دومین حالت تساوی مثلثها اثبات می‌شود اما این اثبات تساوی با کمک انطباق انجام می‌گیرد و انطباق هم مستلزم انتقال یک شکل است تا بر دیگری قرارگیرد و تا زمانی که مفهوم حرکت تعریف نشده باشد نمی‌توان از انتقال و انطباق صحبت کرد. به این مبنا مبحث تساوی چنین مثلثهایی را به‌عنوان اصل قبول می‌کنیم. استفاده از این اصل ما را از انتقال و حرکت بی‌نیاز می‌کند.

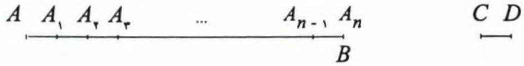
گروه چهارم تنها از یک اصل، اصل توازی، تشکیل شده است. امکان وجود خطوط موازی را می‌توان بدون استفاده از اصول جدید اثبات کرد. بنابراین این اصل تنها مربوط به واحد بودن خط موازی است: از نقطه‌ای واقع در خارج یک خط تنها یک خط می‌توان موازی با آن رسم کرد و نه بیشتر و ما دربارهٔ آن قبلاً صحبت کرده‌ایم.

بالاخره **گروه پنجم (اصول پیوستگی)** از دو اصل تشکیل شده است:

۱. اصل ارشمیدس: اگر دو خط دلخواه AB و CD مفروض باشند می‌توان روی خط AB نقاط A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n را به‌ترتیب چنان در نظر گرفت که

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = CD$$

و نقطهٔ B بین A_{n-1} و A_n واقع باشد (شکل ۳).



شکل ۳

۲. اصل تمامیت خط: نقاط یک خط مستقیم از چنان دستگاه نقاطی تشکیل شده است که می‌توان نقاط جدیدی در نظر گرفت که روی پاره‌خط واقع باشند و اصول مذکور در فوق را هم نقض نکنند.[1]

اصول اول این گروه امکان می‌دهد که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه از یک پاره‌خط را اندازه بگیریم و به‌همین مناسبت این اصل گاهی اصل اندازه‌گیری نامیده می‌شود. حالا به شرح اصل دوم می‌پردازیم:

هر دانش‌آموزی به‌خوبی می‌داند که اگر روی محوری همهٔ نقاطی را که طول منطق (گویا) دارند معلوم کنیم تمام نقاط خط را شامل نخواهند شد، یعنی خط با کمک این نقاط کاملاً پوشیده نمی‌شود. اکنون اگر ریشه‌های اعداد منطق (گویا) و ریشه‌های معادلات جبری با ضرایب صحیح را به این نقاط اضافه کنیم، روی خط نقاط جدیدی خواهیم داشت که عبارت‌اند از نقاط با طولهای گنگ. ولی روی خط هنوز جاهای خالی وجود دارد که باید مربوط به نقاط جدیدی باشد. این نقاط دارای طولهای مساوی π، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۳}$ و $\sqrt{\pi}$ و غیره هستند که هنوز جای آنها روی محور معین نشده است. محور تنها موقعی کاملاً پوشیده خواهد شد که تمام اعداد حقیقی را روی آن جا داده باشیم، در این صورت دیگر نمی‌توان نقطهٔ جدیدی روی پاره‌خط جا داد؛ زیرا دیگر جای خالی روی آن باقی نخواهد ماند: اصل دوم به‌خصوص این خاصیت را دربارهٔ خط هندسی بیان می‌کند، یعنی روی یک خط هندسی جای خالی وجود ندارد که بتوان نقطهٔ جدیدی در آن جا داد.

قبول این اصل به این معنی است که هر عدد حقیقی با نقطه‌ای واقع بر یک خط مطابق است و برعکس هر نقطه واقع بر یک خط نمایندهٔ یک عدد حقیقی معین است.

اینهاست اصولی که امروز هندسهٔ اقلیدسی را بر آن بنا نهاده‌اند.

اکنون اگر به دورهٔ هندسهٔ مقدماتی مراجعه کنیم با تحلیل دقیق مطالب آن خواهیم دید که همهٔ قضایا را می‌توان بر پایهٔ اصول مذکور و قضایای قبلی با دقت و بدون استعانت از شکل اثبات کرد.

این را هم باید به‌خاطر داشت که می‌توان با دقت اثبات کرد که اصول مذکور شرایط لازم و کافی برای ساختن هندسهٔ اقلیدسی هستند.

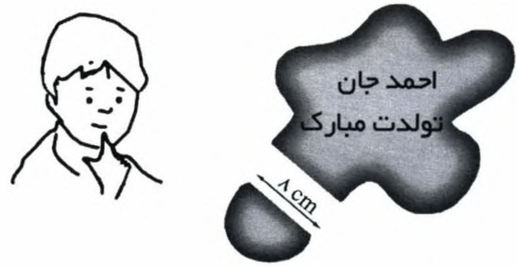
پایان

۱. دو اصل اول ارتباطی، اصول ترتیبی اصل اول همسازی و اصل ارشمیدس.

مسابقه

سؤال مسابقهٔ این دوره

احمد می‌تواند شکل کیک جشن تولدش را خودش طراحی کند، اما ضخامت کیک باید همه‌جا شش سانتی‌متر باشد.



از آنجا که احمد بسیار شکمو است پدرش قانون زیر را برای سلامتی او وضع کرده است. او حق دارد به کمک چاقو، کیک را از هرجا که خواست ببرد و به دو بخش تقسیم کند. اما،

۱. پدرش بخش کوچکتر کیک را به احمد می‌دهد.

۲. برای جلوگیری از خراب شدن شکل کیک، احمد فقط حق دارد کیک را به‌صورت خط راست ببرد.

۳. ضخامت کیک در همهٔ نقاط آن پس از برش نیز باید همان شش سانتی‌متر باشد. (یعنی احمد باید چاقو را کاملاً عمود بر کیک حرکت دهد.)

تقاضای اشتراک

نشریهٔ ریاضیات

۴. طول خط برش کیک باید حداکثر هشت سانتی‌متر باشد.

۵. محیط کل کیک نمی‌تواند از ۱۰۰ سانتی‌متر بیشتر باشد.

به‌نظر شما، اگر احمد بخواهد بیشترین مقدار کیک را بخورد، باید چه شکلی را برای کیکش ارائه دهد؟ چرا؟

راهنمایی: در صورت لزوم، از قضیهٔ برابر محیطی استفاده کنید. این قضیه بیان می‌کند که: «از بین تمامی خمهای مسطح با محیط ثابت، دایره بیشترین مساحت را دارد».

پاسخ این مسأله را به نشانی: اصفهان، خیابان سعادت‌آباد، روبه‌روی مقبرهٔ بانو امین، خانهٔ ریاضیات اصفهان و یا به صندوق پستی ۳۵۶ـ۸۱۶۴۵ ارسال نمایید. به راه‌حلهای برتر به قید قرعه جوایزی ارزنده تعلق می‌گیرد.

حل مسألهٔ مسابقهٔ دورهٔ قبل

تابع $f(x)$ تابعی درجهٔ دو است، پس یک راه‌حل این مسأله، ضرب پرانتزها و تشکیل Δ و تعیین علامت آن است، اما راه‌حل ساده‌تری نیز وجود دارد. می‌دانیم که تابع درجهٔ دو، حداکثر دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

حال به این نکته توجه می‌کنیم که اگر تابع f بین دو نقطهٔ a و b پیوسته باشد و $f(a) \times f(b) < \circ$ آنگاه تابع $f(x)$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی بین a و b دارد. حال اگر بدون کم شدن کلیت مسأله فرض شود $a < b < c$، آنگاه $c - a > \circ$، $c - b > \circ$ و $b - a > \circ$. همچنین

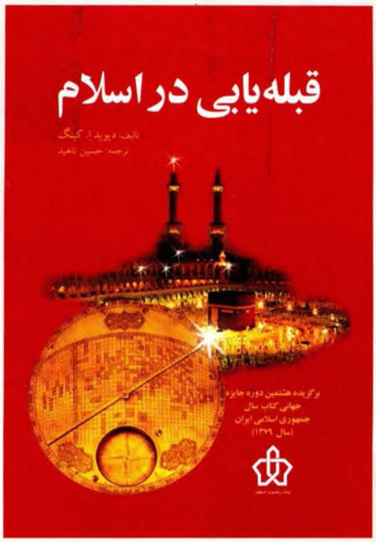
$$f(a) = \circ + (a-b)(a-c) + \circ = (b-a)(c-a) > \circ$$

به‌دلیل مشابه معلوم می‌شود $f(b) < \circ$ و $f(c) > \circ$. یعنی $f(a) \times f(b) < \circ$. پس $f(x)$ ریشه‌ای حقیقی بین a و b دارد. به‌همین ترتیب $f(b) \times f(c) < \circ$. پس $f(x)$ ریشه‌ای حقیقی بین b و c دارد. پس $f(x)$ دو ریشهٔ حقیقی مجزا دارد.

این کتاب برگرفته از فصل دوم کتاب نقشه‌های جهانی برای یافتن سمت و فاصله تا مکه است که با اجازه مؤلف ترجمه شده است.

درباره مؤلف:

پروفسور دیوید اِ. کینگ، استاد زبان و ادبیات خاور نزدیک و تاریخ علم، فارغ‌التحصیل دانشگاه ییل در امریکاست که در حال حاضر استادی کرسی تاریخ علوم دانشگاه ژ. و. گوته در فرانکفورت آلمان را بر عهده دارد. وی به‌طور قطع در زمینه نجوم اسلامی دوران قرون وسطی و افزار نجومی آن دوران از انگشت‌شمار صاحب‌نظران طراز اول است. از وی آثار و تألیفات عالمانه بسیار قابل توجهی (متجاوز از چهل کتاب و مقاله) در زمینه‌های گوناگون تخصصی، از جمله انواع جداول، نقشه‌ها، تقویم‌های نجومی، دریانوردی و نیز افزار مختلف قبله‌یابی، اسطرلاب، شاخص‌های وقت‌یابی و غیره در طول بیش از سه دهه فعالیت پژوهشی به‌چاپ رسیده است. نامبرده هم‌چنین از سال ۱۹۷۲ تاکنون همکاری‌های بسیار پرارزش علمی با مجلات و فصلنامه‌های تخصصی در زمینه کار خویش و از جمله با دایرةالمعارف اسلامی داشته است.



برگزیده هشتمین دوره جایزه جهانی کتاب سال جمهوری اسلامی ایران (سال ۱۳۷۹)

«تورنمنت لومونوسف» مسابقه‌ای معروف و ارزشمند در روسیه است. این مسابقه برای دانش‌آموزان دبیرستانی پایه‌های ۶ تا ۱۱ (که در روسیه در حدود ۱۲ تا ۱۷ سال دارند) طرح‌ریزی شده است.

دانش‌آموزان که به گروههای سنی تقسیم می‌شوند، ۵ ساعت روی مسائل کار می‌کنند. چند تالار برای این دانش‌آموزان درنظرگرفته شده است و هر تالار به یک موضوع اختصاص دارد. ریاضی، فیزیک، شیمی، علوم زمینی، تاریخ، ادبیات، روانشناسی و زبان‌شناسی موضوعات مختلف این مسابقه‌اند.

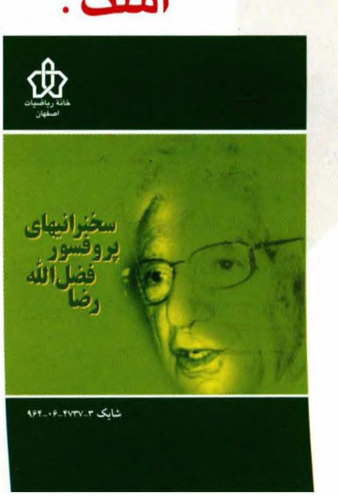
هر دانش‌آموز می‌تواند از یک تالار به تالار دیگر برود و ۵ ساعتِ خود را بین موضوعات مختلف تقسیم کند. یعنی هر کس براساس اولویتها و علاقه‌اش می‌تواند در طول این ۵ ساعت به موضوعات مختلف بپردازد. نمرهٔ هر دانش‌آموز، مجموع نمرات اخذشده‌اش در این ۸ موضوع است.

این مسابقه به نام «میخائیل لومونوسف» دانشمند قرن هجدهم روسیه که همزمان روی مسائل مختلف علمی کار می‌کرد، نام‌گذاری شده است. این مسابقه معمولاً در سپتامبر برگزار می‌شود و بیست و هشتمین دورهٔ آن در ۲۶ سپتامبر سال ۲۰۰۴ برگزار شده است.

خانهٔ ریاضیات اصفهان

خانهٔ ریاضیات اصفهان

منتشر کرده است:



کوشش ما ایرانیان باید بر آن باشد که ایران با نام بلندتر برجای بماند و دستخوش از هم‌گسستگی فرهنگی و اقتصادی و سیاسی عصر پرشتاب انفورماتیک نشود.

هم‌زبانی و هم‌نگاهی ایرانیان پراکنده در جهان را باید زنده و استوار نگهداشت.

استوارترین پیوند ایرانیان زبان و فرهنگ است. هرچه بر هم‌زبانی و مهر و یگانگی ما افزوده شود، ایران ماندگارتر و سرافرازتر خواهد بود.

فضل‌الله رضا
اتاوا ـ کانادا
خرداد ۱۳۸۲ هجری شمسی
برابر با ژوئن ۲۰۰۳ میلادی