نشریهٔ ریاضیات

سال ششم/ ۳
شمارهٔ پیاپی: ۲۳
دی و بهمن ۱۳۸۴
قیمت: ۹۰۰ تومان

- برخی پرسشها که مردم اغلب می‌پرسند
- نعل اسب اسمیل
- قضیهٔ ون در واردن
- تورنمنت شهرها

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال ششم/۳۰ شمارهٔ پیاپی: ۲۳۰ دی و بهمن ۱۳۸۴

فهرست:

سرمقاله

- **یک کامپیوتر کیفی برای هر دانش‌آموز!** تابش ۲

مقاله‌ها

- **برخی پرسشها که مردم اغلب می‌پرسند** گاورز ۴
- **نعل اسب اسمیل** ایلیاشنکو و کوتووا ۱۳
- **قضیهٔ ون در واردن** پراسلوف ۲۶

سرگرمی

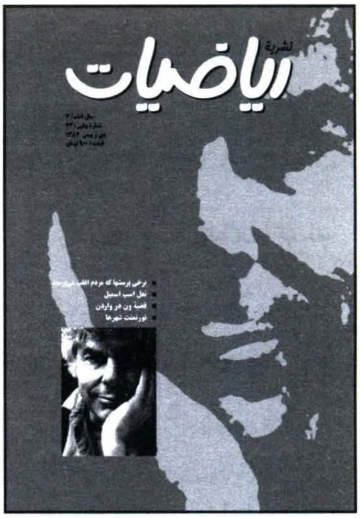
- **از باب تفریح** ۳۰

المپیاد

- **چندضلعیهای محدبی که زاویه‌هایشان برابرند/بررسی جبری** آندریسکو و انسکو ۳۱
- **پنجاه و ششمین مسابقهٔ ریاضی دبیرستانی امریکا** ۴۰
- **بیست و ششمین تورنمنت شهرها** ۴۵
- **مسأله‌های المپیادی** حمیدی ۴۹

راه حل

- **راه حلها** ۶۲



روی جلد: استیون اِسمِیل

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: محمدرضا پورنکی، یحیی تابش، ایرج ضرغام

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: زلال

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۸۹۷۱۵۸۴ـ ۸۸۹۷۱۵۸۳

یک کامپیوتر کیفی برای هر دانش‌آموز!

«اگر بتوانیم آموزش را بهتر کنیم-به‌ویژه در دوره‌های دبستان، راهنمایی و دبیرستان-دنیای بهتری خواهیم داشت.»

عبارت فوق را آقای نیکلاس نگروپونته استاد و رئیس آزمایشگاه رسانه‌ای در مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست گفته است. آقای نگروپونته تلاش خود را در این راستا با توجه به قصد جامعهٔ اطلاعاتی به تدارک یک کامپیوتر کیفی[1] برای هر دانش‌آموز به قیمت ۱۰۰ دلار معطوف داشته است! البته دانش‌آموزان کشورهای در حال توسعه هدف اصلی این طرح هستند و تولید میلیونها دستگاه از این نوع کامپیوتر شروع شده است و انتظار می‌رود از اواخر سال ۲۰۰۶ در دسترس دانش‌آموزان بعضی از کشورها قرار گیرد. این کامپیوترها پیکربندی مناسبی دارند و امکان ارتباط بی‌سیم نیز در آنها تدارک شده است که از طریق ارتباط بی‌سیم هم به اینترنت متصل می‌شوند و هم صاحبان کامپیوترها نیز بر روی یک شبکهٔ تورمانند می‌توانند با یکدیگر ارتباط برقرار کنند و با هم در زمینهٔ فعالیتهای آموزشی و نوآورانه تعامل داشته باشند.

فناوری اطلاعات و ارتباطات آموزش را دستخوش تحول و دگرگونی کرده است، ولی اینکه این تحول چگونه سامان یابد به چالشی جهانی بدل شده است. از وقتی که کامپیوترها علاوه‌بر اینکه ابزاری محاسباتی و پردازشگر اطلاعات باشند بر روی شبکه قرار گرفتند و به ابزار ارتباطی نیز تبدیل شدند چند صباحی بیشتر نمی‌گذرد. پردازشگرهای اطلاعات که ابزار ارتباطی نیز هستند اقتصاد و فرهنگ را متحول ساخته‌اند، چه در حین پردازش اطلاعات ممکن است تعامل و ارتباط دو یا چند طرفه برقرار شود که حاصل آن یا عملیات اقتصادی است و یا تعامل و همکاری فرهنگی. البته، در زمینهٔ آموزش چالش پیش آمده این است که برخی می‌پندارند حتی باید پیشرفت تکنولوژی متوقف شود تا تولید محتوای آموزشی بر روی شبکه سر و سامان بایسته‌ای پیدا کند، و گروهی دیگر بر این عقیده‌اند که فضای شبکه صرفاً گستره‌ای برای دسترسی و تبادل اطلاعات است که ایده‌های نو در آن خلق می‌شوند و رشد می‌کنند و نیز پهنهٔ رقابتی سالم است تا ایده‌های نو شکوفا شوند. آقای نگروپونته درواقع بر این دیدگاه دوم صحه گذاشته است، به‌گونه‌ای که در اجلاس جهانی جامعهٔ اطلاعاتی که در آذرماه گذشته در تونس برگزار شد ایدهٔ کامپیوترهای کیفی ۱۰۰ دلاری توجه همه را جلب کرد. آقای کوفی عنان، دبیر کل سازمان ملل متحد، نیز به این موضوع توجه جدی مبذول داشت و چنین ابراز داشت:

1. Laptop

«دانش‌آموزان با تعامل قادر به یادگیری خواهند شد نه صرفاً با دریافت دستورالعملها و رویه‌های آموزشی؛ آنها خواهند توانست گستره‌های جدیدی را در آموزش بگشایند، گستره‌هایی که به‌طور عمده بر ارتباط دو طرفه مبتنی است.»

جامعهٔ اطلاعاتی سازوکارهای خود را نیاز دارد، باید به استقبال آن برویم.

یحیی تابش
tabesh@sharif.ir

برخی پرسشها که مردم اغلب می‌پرسند

تیموتی گاورز

تیموتی گاورز استاد کرسی راوس بال در دانشگاه کمبریج انگلستان است. تحقیقات او در زمینهٔ ترکیبیات، نظریهٔ اعداد ترکیبیاتی و فضاهای باناخ است که به‌سبب دستاوردهای ارزشمندش در این زمینه‌ها در سال ۱۹۹۸ مدال فیلدز نصیبش شد. خودش می‌گوید «به‌طور کلی، گمان می‌کنم اگر ریاضیات را به ریاضیاتی که در آن از روشهای مقدماتی استفاده می‌شود و ریاضیاتی که در آن از نظریه‌های پیچیده‌تر و تکنیکهای قدیمی استفاده می‌شود تقسیم کنید، تمایلاتم به اولی بیشتر است تا دومی.» متن زیر، ترجمهٔ فصل آخر کتابی با عنوان «ریاضیات، آشنایی خیلی مختصر» از گاورز است که این روزها در شمار پرخواننده‌ترین کتابهای عامه‌فهم ریاضی است. انتشارات فاطمی ترجمهٔ فارسی این کتاب را به‌زودی منتشر می‌کند.

آیا راست است که ۳۰سالگی پایان عمر حرفه‌ای ریاضیدانان است؟

این افسانه که اغلب مردم باورش دارند، ریشه در درک نادرست از ماهیت توانایی ریاضی افراد دارد. مردم دوست دارند فکر کنند که ریاضیدانان نابغه‌اند، و نبوغ خود کیفیتی بس رمزآلود است که اندک کسانی با آن زاده می‌شوند و دیگران کوچکترین شانسی برای کسب آن ندارند.

رابطهٔ بین سن و قدرت تولید ریاضیات از کسی به کسی دیگر بسیار متفاوت است، و واقعاً هم تعداد کمی از ریاضیدانان بهترین آثارشان را بین ۲۰ و ۳۰سالگی به وجود می‌آورند. البته اکثر ریاضیدانان درمی‌یابند که دانش و تخصصشان پیوسته در طول زندگی گسترش می‌یابد و اثر این گسترش بسیار بیشتر از اثر افتی است که ممکن است برای توان مغزی «خام» پیش آید ـ به شرطی که اصلاً چنین مفهومی بامعنی باشد. راست است که فقط تعداد کمی از آثار بسیار مهم ریاضیات توسط ریاضیدانانی که بیش از چهل سال داشته‌اند خلق شده است، ولی این ممکن است دلایل جامعه‌شناختی هم داشته باشد. کسی که قادر است چنین آثار مهمی را خلق کند، به احتمال زیاد، قبل از چهل‌سالگی به واسطهٔ کارهای دیگرش کاملاً مشهور شده است و بنابراین، ممکن است به‌اندازهٔ ریاضیدانان جوانتر و کمتر جاافتاده، شور ابداع و اکتشاف نداشته باشد. اما مثالهای نقض زیادی هم برای این ادعا وجود دارد، و هستند ریاضیدانانی که حتی بعد از بازنشستگی هم با شوری شعله‌ور به کار ادامه می‌دهند.

به‌طور کلی، تصویر کلیشه‌ای ریاضیدان که عموماً مردم در ذهن دارند ـ شخصی احتمالاً بسیار باهوش، اما در عین حال، عجیب و غریب، بدلباس، بی‌توجه به جنس مخالف، و نیمه‌منزوی ـ تصویر چندان خوشایندی نیست. واقعاً اندک شماری از ریاضیدانان تا حدی در این قالب می‌گنجند، اما ابلهانه‌تر از این تصور ممکن نیست که اگر

کسی چنین نباشد، در ریاضیات به جایی نمی‌رسد. در واقع، به شرط برابری عوامل دیگر، کسی که چنین نباشد ارجحیت دارد. فقط کسر بسیار کوچکی از دانشجویان ریاضیات به سطح ریاضیدان پژوهشگر می‌رسند. اکثر آنها در مراحل پایینتر از دور خارج می‌شوند، مثلاً به دلیل از دست دادن علاقه به ریاضیات، یا قبول نشدن در دورهٔ دکترا، یا نیافتن شغل دانشگاهی بعد از به پایان رساندن دورهٔ دکترا. تصور من و خیلیهای دیگر این است که نسبت تعداد آدمهای عجیب و غریب به تعداد کل کسانی که از این هفت‌خان به سلامت می‌گذرند، کمتر از نسبت عجیب و غریبها در جمعیت دانشجویان اولیه است.

گرچه ارائهٔ تصویر منفی از ریاضیدانان ممکن است مخرب باشد، وکسانی را که از ریاضیات لذت می‌برند و می‌توانند در آن به جایی برسند از این رشته منزجر کند، اما تخریب ناشی از واژهٔ «نابغه» بیشتر درونی و احتمالاً بزرگتر است. تعریفی خام و دم‌دستی از نابغه این است: کسی که می‌تواند به‌آسانی، و در سن پایین، کاری را انجام دهد که تقریباً هیچ‌کس دیگر، مگر پس از سالها تجربه و تمرین، از پس آن برنمی‌آید. کارهای خارق‌العادهٔ نوابغ نوعی کیفیت جادویی دارند ـ مانند این است که مغز آنها نه‌تنها بسیار کاراتر از مغز ماست، بلکه اصولاً به‌نوعی کاملاً متفاوت عمل می‌کند. هر یکی دو سال یک بار، سر و کلهٔ دانشجوی ریاضی‌ای در دانشگاه کیمبریج پیدا می‌شود که می‌تواند در مدت چند دقیقه مسأله‌هایی را حل کند که دیگران، حتی کسانی که قرار است به آنها درس بدهند، چندین ساعت یا بیشتر وقت صرف حلشان می‌کنند. وقتی با چنین کسانی مواجه می‌شویم، تنها کاری که می‌توانیم بکنیم کنار ایستادن و تحسین کردن است.

تازه، این آدمهای فوق‌العاده همیشه موفقترین پژوهشگران ریاضیات نیستند. اگر می‌خواهید مسأله‌ای را حل کنید که ریاضیدانان حرفه‌ای دیگر قبل از شما کوشیده‌اند و نتوانسته‌اند حلش کنند، بین کیفیتهای زیادی که باید داشته باشید، نبوغ با تعریفی که از آن دادم، نه لازم است و نه کافی. نمونه‌ای عالی برای اثبات درستی این ادعا، اندرو وایلز است، که (وقتی تازه چهل‌سالگی را پشت سر گذاشته بود) آخرین قضیهٔ فرما را (که می‌گوید اگر x، y، z و n عددهایی طبیعی باشند و n بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه $x^n + y^n$ نمی‌تواند برابر با z^n باشد) ثابت کرد، و به این ترتیب، مشهورترین مسألهٔ حل‌نشدهٔ ریاضیات را حل کرد؛ او بی‌شک بسیار باهوش است، اما با تعریفی که من دادم نابغه نیست.

ممکن است بپرسید او چگونه توانسته است بدون نوعی قدرت مغزی بیش از حد معمول چنین کاری را انجام دهد. پاسخ این است که گرچه دستاورد او فوق‌العاده است، آنقدر فوق‌العاده نیست که قابل توجیه نباشد. من نمی‌دانم دقیقاً چه چیزی او را به موفقیت رساند، اما روشن است که او به عواملی نیاز داشته است: شهامت، اراده، صبر، دانشی گسترده از برخی از پیچیده‌ترین کارهایی که دیگران انجام داده بوده‌اند، بخت بلندِ قرار گرفتن در حلقهٔ ریاضی مناسب در زمان مناسب، و توانایی استراتژیک استثنایی.

این کیفیت آخر، نهایتاً، مهمتر از سرعت ذهنی غیرعادی است: عمیقترین آثار ریاضی را اغلب لاک‌پشتها خلق کرده‌اند نه خرگوشها. ریاضیدانان به‌تدریج که تجربه کسب می‌کنند، با فوت و فن این حرفه آشنا می‌شوند، که بخشی

از این آشنایی از مطالعهٔ کارهای ریاضیدانان دیگر حاصل می‌شود و بخشی از آن نیز در نتیجهٔ ساعتها وقتی که صرف اندیشیدن دربارهٔ ریاضیات می‌شود. آنچه تعیین می‌کند که آیا ریاضیدانی می‌تواند تخصص خود را برای حل مسائل مهم به‌کار گیرد یا نه، تا حد زیادی وابسته به برنامه‌ریزی دقیق است: پرداختن به مسائلی که احتمال بهره‌وری داشته باشند، دانستن اینکه چه‌موقع باید یک خط فکری را رها کرد (که داوری بسیار دشواری است)، توانایی ترسیم خطوط کلی استدلالها، پیش از پرداختن به جزئیات. همهٔ اینها نیاز به سطحی از پختگی دارد که به هیچ‌وجه ناسازگار با نبوغ نیست ولی همیشه نیز همراه نبوغ نیست.

چرا تعداد زنان ریاضیدان انگشت‌شمار است؟

معمولاً همه از این پرسش پرهیز می‌کنند، چون پاسخ دادن به آن فرصت خوبی برای هجوم به پاسخ‌دهنده به‌دست می‌دهد. اما نسبت کم تعداد زنان در گروهها و دانشکده‌های ریاضی، حتی امروزه، چنان جلب توجه می‌کند و چنان واقعیتی انکارناپذیر است که احساس می‌کنم مجبورم چیزی در مورد آن بگویم، حتی اگر آنچه می‌گویم چیزی نباشد جز اینکه این وضعیت را بسیار عجیب و تأسف‌انگیز می‌دانم.

نکته‌ای که حتماً باید گوشزد کرد این است که کم بودن تعداد زنان در ریاضیات هم یک پدیدهٔ آماری دیگر است: ریاضیدانانِ زنِ بسیار خوبی وجود دارند که درست مثل همتاهای مردشان، خوب بودنشان جنبه‌های بسیار زیادی دارد، از جمله در برخی موارد، نابغه بودن. هیچ‌گونه شاهدی مبنی‌بر وجود حدی بالایی برای آنچه زنان می‌توانند در ریاضیات انجام دهند در دست نیست. گاهی می‌خوانیم که عملکرد مردان در آزمونهای ذهنی خاصی بهتر از زنان است، مثلاً در آزمونهای توانایی تصویری_فضایی؛ و کسانی هم نتیجه می‌گیرند که این دلیل برتری مردان در ریاضیات است. اما این‌گونه استدلال کردن چندان قانع‌کننده نیست: تواناییهای تصویری_فضایی را می‌توان با تمرین گسترش داد، و در هر صورت، گرچه گاهی داشتن این‌گونه توانایی در ریاضیات سودمند است، به‌ندرت نداشتن آن مانع کار در ریاضیات می‌شود.

ایده‌ای پذیرفتنی‌تر این است که عوامل اجتماعی در این مورد مؤثرند: درحالی که پسران ممکن است به توانایی خود در ریاضیات فخر کنند، می‌توان تصور کرد که دختران از برتری داشتن در کاری که عموماً مردانه انگاشته می‌شود شرمسار شوند. گذشته از این، دخترانی که استعداد ریاضی دارند، تقریباً هیچ الگویی ندارند و این هم باز باعث تشدید این وضعیت می‌شود. عامل اجتماعی دیگری که در مراحل بعدی زندگی زنان روی می‌نماید این است که ریاضیات بیش از اغلب نظامهای دانشگاهی دیگر، تمرکزی خالص می‌طلبد، و ترکیب این تمرکز با وظایف مادری، گرچه ناممکن نیست، بسیار دشوار است. کاندیا مک‌ویلیام، رمان‌نویس، زمانی گفته بود که هر یک از فرزندانش به قیمت دو کتاب برایش تمام شده است؛ ولی دست‌کم، نوشتن رمان بعد از چند سال دست به قلم نبردن امکانپذیر است. اما ریاضیدانی که چند سال ریاضیات را کنار بگذارد، عادت به کارکردن را از دست می‌دهد و بازگشت در ریاضیات بسیار نادر است.

همچنین گفته شده است که ریاضیدانان زن در سن بالاتری نسبت به همتاهای مردشان موفق به انجام کارهای

مهم می‌شوند و این در ساختاری شغلی که به دستاوردهای زودهنگام ارج بسیار می‌نهد، عیب محسوب می‌شود. داستان زندگی بسیاری از ریاضیدانان زن برجسته، نشانگر صحت این ادعاست، ولی رشد دیرهنگام نیز عمدتاً ناشی از دلایل اجتماعی است که ذکر کردم.

اما هیچ‌یک از این توجیه‌ها کافی به‌نظر نمی‌رسد. به‌جای کنکاش بیشتر، بهترین کاری که می‌توانم بکنم این است که یادآور شوم که چندین کتاب در مورد این موضوع نوشته شده است و آخرین نکته اینکه این وضعیت در حال بهبود است: نسبت تعداد زنان در میان ریاضیدانان، در چند سال اخیر، پیوسته زیاد شده است، و با درنظر گرفتن اینکه جامعه چگونه تغییر کرده است و در حال تغییر است، می‌توان تقریباً مطمئن بود که این نسبت باز هم افزایش می‌یابد.

آیا ریاضیات و موسیقی با هم ارتباط دارند؟

با وجود اینکه خیلی از ریاضیدانان کاملاً با موسیقی بیگانه‌اند و کمتر موسیقیدانی به ریاضیات علاقه دارد، همه فکر می‌کنند که این دو با هم ارتباط دارند. در نتیجه، هیچ‌کس تعجب نمی‌کند اگر بشنود که ریاضیدانی خیلی خوب پیانو می‌نوازد، یا سرگرمی‌اش ساختن قطعات موسیقی است، یا عاشق شنیدن آثار باخ است.

داستانهای زیادی هست که می‌گویند ریاضیدانان به موسیقی بیش از هر شکل دیگری از هنر تمایل دارند، و در پژوهشهایی ادعا شده است که کودکانی که آموزش موسیقی دیده‌اند، در رشته‌های علمی بهتر از کودکان دیگر هستند. حدس زدن در مورد اینکه چرا ممکن است چنین باشد دشوار نیست. گرچه انتزاع در همهٔ هنرها مهم است، و گرچه موسیقی مؤلفه‌ای نمایشی دارد، موسیقی به‌وضوح انتزاعیترین هنر است: لذت شنیدن موسیقی تا حد زیادی ناشی از درک مستقیم، گرچه نه کاملاً هشیارانه، از الگوهایی محض، بدون هیچ معنای درونی است.

متأسفانه شواهد داستانی پشتیبان علمی ندارند. حتی روشن نیست که برای پژوهش در این مورد چه چیز باید پرسید. اگر داده‌های آماری زیادی گردآوری شود که نشان دهند نسبت کسانی که پیانو می‌نوازند در میان ریاضیدانان بیشتر است تا در میان غیرریاضیدانانی با سوابق علمی و اجتماعی مشابه، چه نتیجه‌ای می‌توانیم بگیریم؟ حدس من این است که چنین داده‌هایی را می‌توان گردآوری کرد، اما ساختن نظریه‌ای آزمونپذیر که ارتباط بین ریاضیات و موسیقی را توضیح دهد بسیار جالبتر است. خود شواهد آماری هم اگر مشخصتر باشند، ارزشمندترند. هم ریاضیات و هم موسیقی بسیار گسترده‌اند: ممکن است کسی به بخشهایی علاقه‌ای احساساتی داشته باشد و به بخشهای دیگر کاملاً بی‌علاقه باشد. آیا رابطه‌های ظریفی بین علایق ریاضیاتی و موسیقایی وجود دارد؟ اگر چنین باشد، این رابطه‌ها بسیار بیشتر از ارتباط خام بین این دو نظام در کل، روشنگرند.

چرا بسیاری از مردم با افتخار می‌گویند از ریاضیات بدشان می‌آید؟

معمولاً زیاد نمی‌شنویم کسی بگوید که هیچ‌وقت از زیست‌شناسی یا از ادبیات خوشش نیامده است. مطمئناً همه عاشق این رشته‌ها نیستند، ولی آنها که این رشته‌ها را دوست ندارند، به‌خوبی درک می‌کنند که کسانی دیگر هستند

که این رشته‌ها را دوست دارند. اما برعکس، به نظر می‌رسد که ریاضیات، و موضوعاتی مانند فیزیک که محتوای ریاضی بالایی دارند، نه فقط بی‌تفاوتی، بلکه انزجار واقعی در مردم برمی‌انگیزند. چه چیزی سبب می‌شود که بسیاری از مردم به محض اینکه بتوانند موضوعات ریاضی را رها کنند و تا آخر عمر خاطرهٔ روزهایی را که با ریاضیات سر و کار داشته بودند با دلهره به یاد آورند؟

احتمالاً آنچه برای مردم ناخوشایند است، بیشتر تجربهٔ کلاسهای ریاضی است تا خودِ ریاضیات، و این بیشتر قابل فهم است. چون مفاهیم ریاضی پیوسته روی مفاهیم قبلی ساخته می‌شوند، تداوم و پابه‌پای کلاس پیش آمدن در یادگیری ریاضیات بسیار مهم است. مثلاً اگر در ضرب عددهای دورقمی در یکدیگر به‌اندازهٔ کافی مهارت نداشته باشید، شمی برای قانون توزیع‌پذیری نخواهید داشت. در این صورت، احتمالاً با ضرب پرانتزها در یکدیگر در عبارتی مانند $(x+۲)(x+۳)$ راحت نخواهید بود، و بعد نمی‌توانید ریشه‌های مربعی را درست بفهمید، و اگر ریشه‌های مربعی را خوب درک نکنید، نمی‌فهمید که چرا عدد طلایی برابر است با $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$.

زنجیره‌های زیادی از این نوع وجود دارند، ولی پابه‌پای ریاضیات پیش آمدن چیزی بیش از حفظ مهارتهای تکنیکی است. پی‌درپی ایده‌های جدیدی مطرح می‌شوند که هر یک بسیار مهم و به‌مراتب پیچیده‌تر از ایده‌های قبلی است، و هر یک مغاکی است برای عقب افتادن. مثالی بارز، استفاده از حروف برای نمایش اعداد است که بسیاری آن را گیج‌کننده می‌دانند، ولی از سطحی به بالا، یکی از بنیادیترین ایده‌های تمامی ریاضیات است. مثالهای دیگر، اعداد منفی، اعداد مختلط، مثلثات، به توان رساندن، لگاریتمها، و مبانی حسابان است. کسانی که هنگام رسیدن به یکی از این ایده‌ها آمادگی برداشتن گام مفهومیِ لازم را نداشته باشند، در همهٔ ریاضیاتی که روی آن ایده ساخته شده است احساس عدم امنیت می‌کنند. این افراد به‌تدریج عادت می‌کنند که فقط نیمی از آنچه را که معلم ریاضیات می‌گوید دریابند، و بعد از چند گام عقب ماندنِ دیگر، حتی نیم نیز برایشان تخمین بیش از حد خوش‌بینانه‌ای است. در این میان، آنها کسان دیگری را می‌بینند که بدون هیچ دشواری پابه‌پای کلاس پیش می‌روند. به این ترتیب، جای تعجب نیست که کلاس ریاضیات برای خیلیها چیزی در حد مصیبت می‌شود.

آیا این وضعیت لازمهٔ ریاضیات است؟ آیا این سرنوشت محتوم بعضی از آدمهاست که در مدرسه از ریاضیات بدشان بیاید؟ یا ممکن است بتوان این موضوع را به‌گونه‌ای متفاوت طوری تدریس کرد که افراد بسیار کمتری از این کاروان عقب بمانند؟ من متقاعد شده‌ام که هر کودکی که در سنی پایین به‌طور خصوصی با معلمی خوب و مشتاق ریاضیات کار کند، در بزرگی ریاضیات را دوست خواهد داشت. البته این بی‌درنگ سیاست آموزشی قابل اجرایی را مشخص نمی‌کند، ولی دست‌کم نشان می‌دهد که ممکن است شیوهٔ تدریس ریاضیات جای بهبود داشته باشد.

کمی قبل، به‌طور ضمنی تمایزی میان مهارت تکنیکی و درک مفاهیم دشوار قائل شدم، ولی به‌نظر می‌رسد که تقریباً هرکسی که در یکی از این دو خوب باشد در دیگری هم خوب است. درواقع، اگر درک یک شیء ریاضی بیش از آنکه درک جوهر آن شیء باشد، عمدتاً یاد گرفتن قواعدی است که آن شیء از آنها تبعیت می‌کند، در این صورت، این همان چیزی است که انتظار داریم ـ تمایز میان مهارت تکنیکی و درک ریاضیات، کمتر از آنکه ممکن

است تصور شود دقیق و مشخص است.

این ملاحظه باید چه اثری بر تجربهٔ کلاس درس داشته باشد؟ من از هیچ نوع تغییر انقلابی طرفداری نمی‌کنم-تا همین‌جا هم ریاضیات به‌اندازهٔ کافی از این نوع تغییرات آسیب دیده است-اما تغییر کوچکی در تأکید می‌تواند اثر فوق‌العاده‌ای داشته باشد. مثلاً فرض کنید دانش‌آموزی این اشتباه رایج را مرتکب شود که فکر کند $x^{a+b} = x^a + x^b$. معلمی که بر معنی ذاتی عبارتهایی مانند x^a تأکید کرده باشد، به دانش‌آموز می‌گوید که x^{a+b} به این معنی است که $a+b$ تا x همه در هم ضرب شوند که به‌وضوح مثل آن است که a تا x در هم ضرب شوند و سپس در b تا x که در هم ضرب شده‌اند، ضرب شوند. متأسفانه بسیاری از بچه‌ها این استدلال را پیچیده‌تر از آن می‌یابند که قابل درک باشد، و به هر حال، اگر a و b عددهایی طبیعی نباشند، این استدلال دیگر معتبر نیست.

برای این بچه‌ها می‌توان رهیافت انتزاعیتری را به‌کار برد. هر چیزی را که لازم است در مورد توانها دانسته شود می‌توان از چند قاعدهٔ بسیار ساده نتیجه گرفت، که مهمترینِ آنها $x^{a+b} = x^a x^b$ است. اگر بر این قاعده به اندازهٔ کافی تأکید شده باشد، اولاً کمتر احتمال دارد که اشتباه بالا روی دهد، و ثانیاً اگر دانش‌آموزی اشتباه کند، تصحیح آن آسانتر است: کافی است به دانش‌آموز گفته شود که قاعدهٔ درست را به‌کار نبرده است.

منظورم این نیست که رهیافت انتزاعی به دانش‌آموز توضیح داده شود، بلکه فقط معلم از الزامات آن آگاه باشد. مهمترین الزامش این است که می‌توان مفاهیم ریاضی را بدون دانستن مفهوم دقیقشان، به‌کار برد. این ممکن است ایدهٔ بدی به‌نظر آید، اما معمولاً یاد دادن کاربرد آسانتر است، و درک عمیقترِ معنی، اگر معنایی بالاتر از کاربرد وجود داشته باشد، اغلب خودبه‌خود به دنبال می‌آید.

آیا ریاضیدانان در کارشان از کامپیوتر استفاده می‌کنند؟

پاسخ مختصر این است که ریاضیدانان از کامپیوتر استفاده نمی‌کنند، یا دست‌کم به‌طور بنیادی استفاده نمی‌کنند. البته مانند هرکس دیگری، برای تایپ کردن یا برای ارتباط برقرارکردن با یکدیگر وابسته به کامپیوترند، و امروزه اینترنت روز به‌روز سودمندتر می‌شود. در حوزه‌هایی از ریاضیات نیز محاسباتی طولانی و ناخوشایند لازمهٔ کارند، و برنامه‌های خیلی خوبی برای انجام این محاسبات وجود دارند.

درنتیجه، کامپیوتر ابزاری بسیار سودمند است که باعث صرفه‌جویی زیادی در وقت می‌شود، و گاهی این اثر چنان زیاد است که ریاضیدانان به‌کمک کامپیوتر می‌توانند نتایجی را کشف کنند که بدون آن هرگز نمی‌توانستند. در هر صورت، نوع کمکی که می‌توان از کامپیوتر انتظار داشت بسیار محدود است. اگر چنین اتفاق افتد که مسألهٔ شما، یا آنطور که بیشتر اتفاق می‌افتد، زیرمسألهٔ شما از دستهٔ آن اقلیت کوچک مسائلی باشد که می‌توان با جستجوهای طولانی و تکراری حلشان کرد، خب چه بهتر. اما از طرف دیگر، اگر در حل مسأله‌ای مانده باشید و نیاز به ترفندی یا ایده‌ای زیرکانه داشته باشید، با تکنولوژی امروز، کامپیوتر هیچ نوع کمکی به شما نخواهد کرد. درواقع، بیشترِ ریاضیدانان می‌گویند که مهمترین ابزار کارشان تکه‌ای کاغذ و چیزی است که با آن بتوان نوشت.

دیدگاه خود من، که دیدگاه اقلیت است، این است که این وضعیت دوامی نخواهد آورد و تا حدود صد سال دیگر، کامپیوترها بیشتر و بیشتر می‌توانند کار ریاضیدانان را انجام دهند ـ که احتمالاً آغازش با حل تمرینهای ساده یا با نجات ما از یک هفته وقت صرف کردن برای اثبات لمی خواهد بود که یک ساختار مشهور مثال نقضش را می‌سازد (از تجربه‌ای بسیار متداول صحبت می‌کنم) ـ و سرانجام به‌تمامی جای ما را خواهند گرفت. بسیاری از ریاضیدانان در بارهٔ اینکه کامپیوترها تا چه حد خواهند توانست در ریاضیات به‌کار آیند، بسیار بدبین‌ترند (یا شاید خوشبین‌ترند؟).

پژوهش در ریاضیات چگونه ممکن است؟

برعکس، می‌توان پرسید چه چیزی سبب می‌شود که امکان پژوهش در ریاضیات اینقدر تناقض‌آمیز به‌نظر آید؟ راهی خوب برای تولید مسأله این است که پدیده‌ای ریاضی را بگیرید که تحلیل دقیقش بسیار پیچیده باشد، و گزاره‌هایی تقریبی در مورد آن بیان کنید. روشی دیگر، این است: مفهوم ریاضی دشواری، مانند منیفلد چهاربعدی، را انتخاب کنید؛ می‌بینید که پاسخ دادن به ساده‌ترین پرسشها در مورد آن ممکن است بسیار دشوار باشد.

اگر رازی در مورد پژوهش ریاضی وجود داشته باشد، این نیست که مسائل دشوار وجود دارند ـ درواقع، ابداع مسئله‌های بسیار بسیار دشوار کار سختی نیست ـ بلکه این است که آنقدر مسائلی با سطح دشواری مناسب وجود دارد که هزاران ریاضیدان را درگیر می‌کنند. این مسائل مطمئناً باید چالش‌برانگیز باشند، اما در عین حال، باید بارقه‌ای از امید به حل‌شدنشان نیز بتابانند.

آیا هیچ‌گاه غیرحرفه‌ایها توانسته‌اند مسائل ریاضی را حل کنند؟

ساده‌ترین پاسخ به این پرسش که کمتر از هر پاسخی گمراه‌کننده باشد، یک «نه» سرراست است. ریاضیدانان حرفه‌ای خیلی زود درمی‌یابند که تقریباً هر ایده‌ای که در مورد هر مسألهٔ مشهوری دارند، قبلاً بسیاری کسان دیگر هم آن ایده را داشته‌اند. برای اینکه ایده‌ای شانس جدید بودن را داشته باشد، باید ویژگی خاصی داشته باشد که توجیه کند چرا قبلاً کسی به فکر آن نیفتاده است. شاید جدید بودن ایده‌ای به این دلیل باشد که بسیار بدیع و غیرمنتظره است، اما چنین چیزی بسیار نادر است: به‌طور کلی وقتی ایده‌ای به ذهن می‌آید، دلیلی برای آن وجود دارد، نه اینکه به یکباره از عدم بجوشد و بالا بیاید. و اگر این ایده به ذهن شما می‌آید، چرا نباید به ذهن هیچ‌کس دیگری آمده باشد؟ دلیلی پذیرفتنی‌تر این است که این ایده مربوط به ایده‌های دیگری باشد که شهرت خاصی ندارند، ولی شما زحمت یادگرفتن و هضم‌کردنشان را به خود هموار کرده‌اید. این امر دست‌کم احتمال این را که دیگران قبل از شما آن ایده را داشته‌اند کم می‌کند، گرچه این احتمال به صفر نمی‌رسد.

دانشکده‌های ریاضی در سراسر جهان به‌طور مرتب نامه‌هایی از کسانی دریافت می‌کنند که ادعا می‌کنند مسائل مشهوری را حل کرده‌اند، و تقریباً همهٔ این راه‌حلها، بدون «استثنا»، نه فقط نادرست، بلکه به‌طرز خنده‌داری نادرست‌اند. برخی از آنها، بدون اینکه حتی به‌دقت بررسی شوند، چنان بی‌شباهت به اثبات چیزی، هرچه می‌خواهد

باشد، هستند که حتی تلاشی برای حل مسأله محسوب نمی‌شوند. آنهایی که دست‌کم برخی از قراردادهای معمول ارائهٔ راه‌حلهای ریاضی را رعایت کرده‌اند، از استدلالهایی چنان مقدماتی استفاده کرده‌اند که اگر درست بودند، قرنها پیش کشف شده بودند. کسانی که این نامه‌ها را می‌نویسند، هیچ درکی از اینکه پژوهش ریاضی چقدر دشوار است، از اینکه سالها تلاش بی‌وقفه برای کسب دانش و تخصص کافی برای انجام کارهای بدیعِ مهم لازم است، و از اینکه ریاضیات تا چه‌حد کاری گروهی است ندارند.

منظورم از این نکتهٔ آخر این نیست که ریاضیدانان در گروههای بزرگ کار می‌کنند، گرچه بسیاری از مقاله‌های پژوهشی دو یا سه مؤلف دارند. اما منظورم این است که همچنان‌که ریاضیات بسط می‌یابد، فنون جدیدی ابداع می‌شود که استفاده از آنها برای پاسخ دادن به انواع خاصی از مسأله‌ها غیرقابل اجتناب می‌شود. به این ترتیب، هر نسلی از ریاضیدانان روی شانه‌های نسلهای قبل می‌ایستند، و مسأله‌هایی را حل می‌کنند که زمانی هیچ امیدی به حلشان نمی‌رفته است. اگر بخواهید در انزوا و دور از جریان ریاضیات کار کنید، باید خود به تنهایی همهٔ این فنون را ابداع کنید و درنتیجه، همچون فردی معلول در دنیای ریاضیات خواهید بود.

این به‌معنای آن نیست که هیچ آماتوری هرگز نمی‌تواند پژوهش مهمی در ریاضیات انجام دهد. درواقع، یکی دو نمونه از این آماتورها در تاریخ ریاضیات وجود دارند. در سال ۱۹۷۵، مارجوری رایس، که زنی خانه‌دار در سن دیه‌گو بود و آموزش ریاضی کمی دیده بود، بعد از خواندن مقاله‌ای در مورد آجرفرش کردن صفحه با پنج‌ضلعیهای نامنتظم در نشریهٔ ساینتیفیک اَمریکن، سه روش جدید برای این کار کشف کرد. و در سال ۱۹۵۲، کورت هیگنر ۵۸ ساله، که مدیر مدرسه‌ای در آلمان بود، یکی از حدسهای مشهور گاوس را که برای بیش از یک قرن حل‌نشده مانده بود ثابت کرد.

اما این مثالها ناقض آنچه گفتم نیستند. مسائلی وجود دارند که به‌نظر نمی‌رسد ارتباط نزدیکی با بدنهٔ اصلی ریاضیات داشته باشند، و دانستن فنون موجود ریاضیات چندان به‌کار این نوع مسأله‌ها نمی‌آید. مسألهٔ یافتن راهی جدید برای آجرفروش کردن با پنج‌ضلعیها از این نوع بود: ریاضیدانی حرفه‌ای برای حل این مسأله چندان مجهزتر از آماتوری باهوش نیست. دستاورد رایس بیشتر شبیه دستاورد اخترشناس آماتوری است که ستارهٔ دنباله‌دار جدیدی را کشف می‌کند ـ شهرت حاصل، پاداش بجایی است برای جستجویی طولانی. در مورد هیگنر، گرچه او ریاضیدانی حرفه‌ای نبود، ولی مطمئناً در انزوا کار نمی‌کرد. بخصوص، خودش توابع پیمانه‌ای را درس داده بود. در اینجا نمی‌توانم توضیح دهم که توابع پیمانه‌ای چه هستند ـ درواقع این مبحث را معمولاً حتی پیشرفته‌تر از آن می‌دانند که در درسهای دورهٔ کارشناسی ریاضی مطرح شود.

نکتهٔ جالب این است که هیگنر برهان خود را به روشی کاملاً متداول ننوشت، وگرچه مقاله‌اش با اکراه چاپ شد، تا سالها همه فکر می‌کردند که برهان او نادرست است. در اواخر دههٔ ۱۹۶۰، این مسأله دوباره، مستقلاً، توسط الن بیکر و هرولد استارک حل شد، و در این زمان بود که کار هیگنر به‌دقت بازنگری شد و معلوم شد که درست است. متأسفانه، هیگنر در سال ۱۹۶۵ درگذشت و آنقدر زنده نماند تا اعادهٔ حیثیت‌اش را ببیند.

چرا ریاضیدانان برخی قضیه‌ها و برهانها را زیبا می‌دانند؟

ممکن است استفاده از زبان زیبایی‌شناسی در مورد چیزی به خشکی ریاضیات عجیب به‌نظر آید، ولی استدلالهای ریاضی می‌توانند لذت‌بخش باشند، و این لذت مشترکات زیادی با لذت زیبایی‌شناختی متداول دارد.

یکی از تفاوتها، دست‌کم از دیدگاه زیبایی‌شناسی، این است که ریاضیدان ناشناستر از هنرمند است. درحالی که ممکن است ریاضیدانی را که برهانی زیبا را کشف کرده است بسیار تحسین کنیم، داستان انسانیِ پشت این کشف نهایتاً رنگ می‌بازد و درنهایت، این خود ریاضیات است که ما را مشغوف می‌کند.

• ترجمهٔ مهران اخباریفر

Timothy Gowers, Some frequently asked questions, chapter 8 of the book *Mathematics, A Very Short Introduction*, Oxford University Press, 2002.

نعل اسب اسمیل

یولی ایلیاشنکو و آنا کوتووا

وقتی استیون اِسمِیل، ریاضیدان امریکایی و برندهٔ مدال فیلدز (در سال ۱۹۶۶)، حدود ۴۰ سال پیش «نعل اسب» معروفش را به جهان ریاضیات معرفی کرد در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل شور و هیجان زیادی به‌پا شد. در عین حال، این ساختمان چنان ساده است که می‌توان آن را در چارچوب برنامهٔ آموزشی ریاضیات دبیرستانی هم مطرح کرد.

دینامیک نمادین

بحث را با مسألهای از پنجاه‌وششمین المپیاد ریاضی مسکو آغاز می‌کنیم که در آن ایدهٔ دینامیک نمادین آمده است:

به‌ازای دو عدد حقیقی دلخواه مانند a و b دنبالهٔ

$$p_n = \lfloor ۲\{an+b\}\rfloor, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

را در نظر بگیرید (در اینجا $\{x\}$ و $\lfloor x\rfloor$ به‌ترتیب جزء کسری و جزء صحیح عدد xاند). هر گروه از جمله‌های متوالی این دنباله را واژه می‌نامیم.

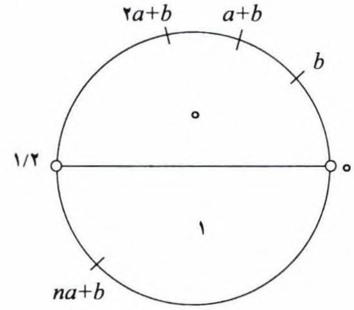
الف) اگر $k = ۴$، آیا می‌توان گفت که هر مجموعهٔ مرتب از k تا صفر و یک، به‌ازای دو عدد مانند a و b، واژه‌ای در دنبالهٔ p_n است؟

ب) اگر $k = ۵$، چطور؟

توجه کنید که در اینجا ابتدا تصاعد حسابی $(na+b)_{n\geq ۰}$ را تشکیل می‌دهیم، بعد جزء کسری هر جمله را حساب و آن را دو برابر می‌کنیم. دست‌آخر با محاسبهٔ جزء صحیح هرکدام از جمله‌های به‌دست آمده دنباله‌ای جدید می‌سازیم. با بررسی مقادیر جمله‌های حاصل به‌ازای مقدارهای مختلف a و b معلوم می‌شود که همهٔ جمله‌های دنبالهٔ p_n صفر یا یک‌اند. درواقع مقدار جزء کسری، عددی در بازهٔ $[۰, ۱)$ است و ازاین‌رو جزء صحیح دو برابر آن یا ۰ است یا ۱.

این مسأله تعبیر هندسی قشنگی دارد. دایره‌ای به محیط ۱ در نظر بگیرید که در مبدأ محور اعداد بر آن مماس باشد. اکنون مجسم کنید که هر دو نیمهٔ محور اعداد دور این دایره پیچانده شوند. در این صورت هر نقطه مانند x از محور روی نقطه‌ای از این دایره می‌افتد که از دوران مبدأ به‌اندازهٔ زاویهٔ $\{x\}\,۳۶۰^\circ$ حول مرکز این دایره به‌دست می‌آید. روشن است که همهٔ نقاط محور که تفاضلشان عددی صحیح باشد روی یک نقطه از دایره می‌افتند، زیرا دورانهای متناظرشان به‌اندازهٔ مضربهای صحیح دور کامل با هم فرق دارند و بنابراین عملاً عین هم‌اند. ازاین‌رو، نقاط x و $\{x\}$ با یک نقطه از دایره نشان داده می‌شوند. اکنون مسأله‌مان دربارهٔ دنبالهٔ p_n، مسأله‌ای دربارهٔ دینامیک نمادینِ دورانهای دایره از آب درمی‌آید. اما منظورمان از این عبارت چیست؟

نقاط متناظر با عددهای b، $a+b$، $۲a+b$، ... را روی دایره در نظر بگیرید (شکل ۱ را ببینید). همان‌طور که پیش از این اشاره کردیم این نقاط را می‌توان جمله‌های دنبالهٔ $(an+b)_{n\geq ۰}$ محسوب کرد. همچنین معلوم است که همهٔ این نقاط از نقطهٔ اول، b، تحت دورانهای متوالی به‌اندازهٔ زاویهٔ a به‌دست می‌آیند (در اینجا و از این به بعد همهٔ زاویه‌ها برحسب کسرهایی از یک دور کامل بیان می‌شوند). اگر نقطهٔ $na+b$ در نیمدایرهٔ بالایی از ۰ تا $\frac{۱}{۲}$ (شامل ۰ و بدون $\frac{۱}{۲}$) قرار داشته باشد، مقدار متناظر p_n برابر با ۰ است. در مورد نقاط روی نیمدایرهٔ پایینی هم $p_n = ۱$.



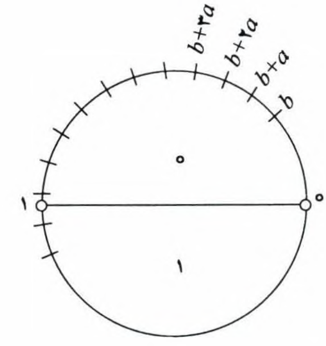
شکل ۱

اکنون می‌توانیم معنی اصطلاحِ «دینامیک نمادین» را توضیح دهیم. دینامیک به حرکت نقطه دور دایره تحت دورانهای پیاپی (مکرر) اشاره دارد. اشارهٔ نمادین هم به شاخص آگاهی یافتن از موقعیتهای نقطه است: به‌جای مکان دقیق نقطه فقط مایلیم بدانیم که درکدام نیمهٔ دایره قرار دارد. با دینامیک نمادین می‌توانیم مسأله را به‌راحتی حل کنیم.

اگر صفرهای متوالی زیادی در دنباله‌مان وجود داشته باشد، زاویهٔ دوران، یا به بیان دقیقتر جزء کسری آن، کوچک است، زیرا نقطهٔ متحرکمان تحت تعداد نسبتاً زیادی از دورانهای متوالی به‌اندازهٔ زاویهٔ a در نیمدایرهٔ بالایی می‌ماند. دست‌آخر، وقتی نقطه به نیمدایرهٔ پایینی می‌رود مدت زمانی نسبتاً طولانی هم باید در آنجا بماند (زیرا مقدار a کوچک است؛ شکل ۲ را ببینید). بنابراین دنباله‌ای که در آن فقط یک رقم ۱ در میان ردیفی طولانی از رقمهای ۰ بیاید ممکن نیست واژه‌ای در p_n باشد.

به‌ویژه می‌توانیم ثابت کنیم که اگر $k = ۵$، واژهٔ ۰۰۰۱۰ هرگز به‌دست نمی‌آید. درواقع از اینکه سه تا صفر پشت سر هم در p_n وجود دارد می‌فهمیم که $|a|$ از $\frac{۱}{۴}$ یک دورکامل کمتر است. در همان حال از وجود قطعهٔ ۰۱۰ معلوم می‌شود که نقطهٔ موردنظر از نیمدایرهٔ بالایی به نیمدایرهٔ پایینی می‌پرد و بعد بلافاصله به نیمدایرهٔ بالایی برمی‌گردد. اما چنین چیزی فقط وقتی ممکن است که $|a|$ از $\frac{۱}{۴}$ یک دورکامل بزرگتر باشد. پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین ثابت کرده‌ایم در حالتی که $k = ۵$، پاسخ سؤال منفی است.

اما در حالتی که $k = ۴$، هرکدام از ۱۶ واژهٔ k رقمی صفر و یکی ممکن را می‌توان در p_n به‌دست آورد (این ادعا را می‌توان مستقیماً با ساختن واژه‌های موردنظر ثابت کرد که آن را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم).



شکل ۲

چند اصطلاح

این مسألهٔ المپیادی نمونه‌ای تمام و کامل از «دینامیک نمادین» است. در اینجا می‌خواهیم وضعیتهایی کلیتر مشابه این را در نظر بگیریم. برای این کار بهتر است که چند مفهوم کلی را معرفی کنیم. نگاشتی از یک دامنه مثلاً از صفحه ـ گرچه این محدودیت اجباری نیست ـ به دامنهٔ (صفحهٔ) دیگر را در نظر بگیرید. دامنهٔ اول را (که نگاشت روی آن تعریف شده است) فضای فاز نگاشت و نگاشتهای حاصل از تکرارهای پشت سر هم نگاشت اصلی را تکرارهای آن می‌نامند. به بیان دقیقتر، اینها تکرارهای مثبت‌اند، در حالی که تکرارهای نگاشت وارون تکرارهای منفی‌اند (نسبت به نگاشت اصلی). تکرارها روی دامنه‌ای تعریف می‌شوند که در حالت کلی بخشی از کل فضای فاز است. در این مقاله برای تکرار nام نگاشتی مانند f از نماد $f^n(x)$ استفاده می‌کنیم. (منظور از این نماد این است که وقتی $n > ۰$، f nبار و وقتی $n < ۰$، $f^{-۱}$، $|n|$بار پشت سر هم به‌کار برده می‌شود؛ وقتی هم که $n = ۰$، منظور از این نماد نگاشت همانی است.)

مدار نقطه‌ای مانند x تحت نگاشتی مانند f را مجموعهٔ تصویرهای x تحت همهٔ تکرارهای f، f^nها ($n \in \mathbb{Z}$)، تعریف می‌کنیم. توجه کنید که این مجموعه فقط برای نقطه‌هایی مانند x تعریف می‌شود که متعلق به اشتراک دامنه‌های همهٔ تکرارها، اعم از مثبت و منفی، باشند.

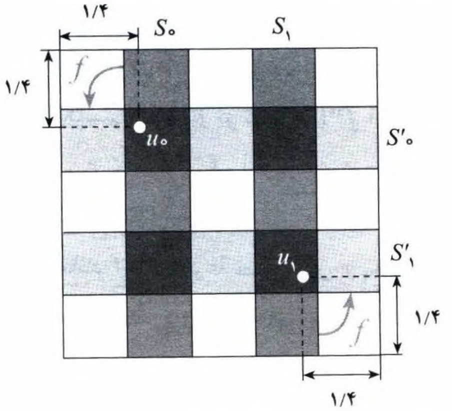
اکنون مجسم کنید که فضای فاز به دو بخش مانند $S_۰$ و $S_۱$ تقسیم شود. به هر نقطه که مدارش خوش‌تعریف باشد «سرنوشتش» را نسبت می‌دهیم. یعنی دنباله‌ای مانند (a_n) را که جملاتش صفر و یک‌اند این‌طور تعریف می‌کنیم: اگر $f^n(x) \in S_۰$، آن‌وقت $a_n = ۰$ و اگر $f^n(x) \in S_۱$، آن‌وقت $a_n = ۱$. این دنباله را با $\omega(x)$ نشان می‌دهیم و آن را سرنوشت نقطهٔ x می‌نامیم. علاوه‌بر «سرنوشت کامل» (یا فقط «سرنوشت») که وقتی n از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند به‌دست می‌آید، بعضی وقتها از «تکه‌های» آن هم استفاده می‌کنیم: سرنوشتهای آینده و گذشته که متناظر با مقدارهایی از nاند که به‌ترتیب غیرمنفی و منفی‌اند، یا سرنوشتهای متناهی که متناظر با تکه‌های متناهی مختلف از مجموعهٔ عددهای صحیح‌اند، مانند عددهایی صحیح مانند n که $n_۱ \leq n \leq n_۲$.

دینامیک نمادین فقط با این قبیل اطلاعات دربارهٔ مدارها سروکار دارد ـ مکان دقیق نقطهٔ $f^n(x)$ اهمیتی ندارد بلکه فقط این مهم است که این نقطه به کدام بخش فضای فاز تعلق دارد. در اینجا سؤالاتی طبیعی شبیه آنهایی که در مسألهٔ المپیادی بالا مطرح شدند بررسی می‌شوند: آیا دنبالهٔ متناهی یا نامتناهی دلخواهی از صفر و یک ممکن است سرنوشت نقطه‌ای باشد؟ اگر چنین است چند نقطهٔ سرنوشتشان یک دنبالهٔ داده شده است؟ هنگام حل نخستین مسأله فهمیدیم که دنباله‌هایی وجود دارند که سرنوشت هیچ نقطه‌ای نیستند. در اینجا از بحث در مورد پرسش دوم، دربارهٔ مجموعهٔ نقاطی که سرنوشتشان دنباله‌ای داده شده است، صرفنظر می‌کنیم و بررسی آن را به‌عنوان مسأله‌ای بسیار سودمند به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

نگاشت نعل اسبی

از اینجا به بعد دیگر می‌توانیم دربارهٔ نعل اسب اسمیل صحبت کنیم. در همین ابتدای کار باید اعتراف کنیم که این نگاشت اصلاً شبیه نعل اسب نیست. علت این نامگذاری را در آخر مقاله توضیح می‌دهیم.

مربع واحد را در نظر بگیرید و آن را به پنج نوار عمودی برابر و به‌همین ترتیب، به پنج نوار افقی برابر تقسیم کنید (شکل ۳ را ببینید). از میان نوارهای عمودی، دومی و چهارمی، S_0 و S_1، و از میان نوارهای افقی هم دومی و چهارمی (از بالا)، S'_0 و S'_1، را نگه دارید و بقیه را حذف کنید.



شکل ۳

اکنون نگاشتی را در نظر بگیرید که مستطیل S_0 را در راستای عمودی به نسبت $\frac{1}{5}$ جمع می‌کند، آن را در راستای افقی پنج‌بار می‌کشد و آنچه را که به‌دست می‌آید روی S'_0 می‌گذارد. با کمی تأمل می‌توان فهمید که نقطهٔ u_0 درگوشهٔ بالا سمت چپ مربع واحد که فاصله‌اش از ضلعهای بالایی و سمت چپی مربع $\frac{1}{4}$ است تحت این نگاشت دست‌نخورده می‌ماند. درنتیجه، این همان نقطه‌ای است که جمع کردن در راستای عمودی به نسبت $\frac{1}{5}$ و کشش در راستای افقی با ضریب ۵ نسبت به آن انجام می‌شود.

معلوم شد که این نگاشت روی مستطیل S_0 چطور عمل می‌کند. اما دامنهٔ آن از دو مستطیل S_0 و S_1 تشکیل شده است. این نگاشت روی مستطیل S_1 هم درست به‌همین ترتیب تعریف می‌شود، بجز اینکه باید گوشهٔ پایین سمت راست مربع بزرگ جایگزین گوشهٔ بالا سمت چپ آن شود. این نگاشت S_1 را در راستای عمودی پنج‌بار جمع می‌کند، آن را در راستای افقی پنج‌بار می‌کشد و حاصل را روی S'_1 قرار می‌دهد. نقطهٔ u_1 از مربع اصلی که فاصله‌اش از ضلعهای پایینی و سمت راستی مربع $\frac{1}{4}$ است ثابت می‌ماند (شکل ۳ را ببینید).

بنابراین نگاشت نعل اسبی نگاشتی است که در شکل ۳ نشان داده شده است. فضای فاز آن اجتماع مستطیلهای S_0 و S_1 است؛ بُردش هم اجتماع S'_0 و S'_1 است.

معلوم شده است که مجموعهٔ نقاطی که به‌ازای آنها مدارهای کامل این نگاشت تعریف می‌شوند از خود فضای فاز بسیار باریکتر است. برای توصیف این مجموعه به مجموعهٔ کامل کانتور که آن را ناپیوستار کانتور یا به‌طور ساده مجموعهٔ کانتور هم می‌نامند نیاز داریم.

مجموعهٔ کامل کانتور

تعریف مجموعهٔ کانتور که در اینجا می‌آوریم احتمالاً با تعریفی که از این مجموعه دیده‌اید اندکی تفاوت دارد. پاره‌خط $[0,1]$ را در نظر بگیرید. این بازه را به پنج قسمت برابر تقسیم کنید، بازه‌های دوم و چهارم را نگه دارید و سه‌تای دیگر را حذف کنید. بعد همین عمل را در مورد هر کدام از پاره‌خطهای باقی‌مانده انجام دهید: آن را به پنج قسمت برابر تقسیم کنید و قسمتهای اولی، آخری و وسطی را حذف کنید و همین‌طور این کار را ادامه دهید.[1]

پاره‌خطهایی که بعد از مرحلهٔ اول باقی می‌مانند، یعنی پاره‌خطهای

$$\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], \qquad \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$$

را پاره‌خطهای مرحلهٔ ۱ می‌نامند. در این صورت به استقرا پاره‌خطهای مرحلهٔ nام از تکه‌های متناظر پاره‌خطهای مرحلهٔ $(n-1)$ام ساخته می‌شوند. اجتماع همهٔ پاره‌خطهای مرحلهٔ nام را با W_n نشان می‌دهیم.

اکنون مجموعهٔ کامل کانتور را، که آن را با C نشان می‌دهیم، اشتراک همهٔ مجموعه‌های W_n، $n \in \mathbb{N}$، تعریف می‌کنیم.

آیا این اشتراک ناتهی است؟ اگر چنین است مجموعهٔ C شامل چند نقطه است؟

معلوم شده است که مجموعهٔ C درست به‌اندازهٔ کل بازهٔ $[0,1]$ عضو دارد.

برای اثبات این حکم جالب همهٔ عددهای از ۰ تا ۱ را در مبنای پنج می‌نویسیم (یعنی به‌جای مبنای ۱۰

۱. در روش متداول ساختن مجموعهٔ کانتور بازهٔ واحد را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند، قسمت وسطی را حذف می‌کنند و در مورد دو قسمت باقی‌مانده همین عمل حذف یک‌سوم میانی را تکرار می‌کنند و همین‌طور این کار را ادامه می‌دهند. می‌توان استدلال کرد که ساختمانهای «دوپنجم» و «دوسوم» معادل‌اند.

معمولی از مبنای ۵ استفاده می‌کنیم) و پاره‌خطهای مرحلهٔ nام را در نظر می‌گیریم:

$$\left[\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}\right]=[۰/۱,۰/۲]$$
$$\left[\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}\right]=[۰/۳,۰/۴]$$

(کسرهای طرف راست تساویهای بالا در مبنای پنج نوشته شده‌اند؛ یعنی عبارت $۰/a_۱a_۲a_۳\ldots$ نشان‌دهندهٔ عدد $\frac{a_۱}{۵}+\frac{a_۲}{۲۵}+\frac{a_۳}{۱۲۵}+\cdots$ است که در آن $۰\le a_i\le ۴$). همان‌طور که می‌بینید عددهای این پاره‌خطها عددهایی‌اند که نخستین رقم بعد از ممیزشان (البته در مبنای پنج) ۱ یا ۳ است. (به‌نظر می‌رسد که نقاط انتهایی طرف راست بازه‌هایمان از این قاعده مستثنی باشند. در هر حال می‌توانستیم آنها را به‌صورت کسرهای متناوب یعنی به‌شکل $۰/۱\overline{۴}=۰/۲$ و $۰/۳\overline{۴}=۰/۳$ بنویسیم یا اینکه اصلاً آنها را نادیده بگیریم، زیرا در هر صورت در مرحلهٔ بعدی حذف می‌شوند.) اما وقتی پاره‌خطهای مرحلهٔ ۱ به پاره‌خطهای مرحلهٔ ۲ تقسیم می‌شوند چه پیش می‌آید؟ از هر کدامشان دو پاره‌خط کوچکتر به طول $\frac{۱}{۲۵}$ باقی می‌ماند:

$$\left[\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵},\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۲۵}\right]$$
$$\left[\frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۲۵},\frac{۱}{۵}+\frac{۴}{۲۵}\right]$$
$$\left[\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۲۵},\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۲۵}\right]$$
$$\left[\frac{۳}{۵}+\frac{۳}{۲۵},\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۲۵}\right]$$

عددهای این بازه‌ها در مبنای پنج به‌ترتیب به‌شکل $۰/۱۱\ldots$، $۰/۱۳\ldots$، $۰/۳۱\ldots$ و $۰/۳۳\ldots$ نوشته می‌شوند و ازاین‌رو دومین رقم بعد از ممیزشان هم ۱ یا ۳ است.

روشن است که این روال همیشه ادامه دارد: در مبنای پنج، nرقم نخست بعد از ممیز هر عدد در مجموعهٔ W_n فقط از رقمهای یک و سه‌اند. (می‌توانید این حکم را به‌طور دقیق به استقرا ثابت کنید.)

بنابراین هر نقطهٔ مجموعهٔ کانتور را که در بالا تعریف کردیم می‌توان به‌شکل کسری نامتناهی در مبنای پنج نمایش داد که همهٔ رقمهایش یک و سه‌اند.

برعکس، هر کسر از این دست نشان‌دهندهٔ نقطه‌ای از مجموعهٔ C است. درواقع، اگر نخستین رقم بعد از ممیز در کسری که در مبنای پنج نوشته شده است ۱ باشد، نقطهٔ متناظر متعلق به پاره‌خط سمت چپی مرحلهٔ اول است؛ اگر این رقم ۳ باشد نقطهٔ موردنظر در پاره‌خط سمت راستی قرار دارد. از آنجایی که دومین رقم بعد از ممیز هم ۱ یا ۳ است نقطهٔ موردنظر متعلق به یکی از پاره‌خطهای مرحلهٔ ۲ است. در این صورت به استقرا می‌توان ثابت کرد که این نقطه به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، متعلق به W_n و درنتیجه متعلق به اشتراک همهٔ مجموعه‌هایی مانند W_n،

یعنی مجموعهٔ C، است.

اکنون اگر در این کسرها به‌جای همهٔ یکها، صفر و به‌جای همهٔ سه‌ها، یک بگذاریم، همهٔ کسرهای نامتناهی ممکن را که از صفر و یک تشکیل شده‌اند به‌دست می‌آوریم. اما عددهای حاصل نمایشهای دودویی همهٔ عددهای از ۰ تا ۱ اند! به این ترتیب وجود تناظری یک‌به‌یک میان مجموعهٔ کانتور و کل بازهٔ $[۰, ۱]$ ثابت می‌شود.

تمرینی جالب این است که بررسی کنید مجموع طولهای همهٔ بازه‌هایی که در حین ساختن مجموعهٔ کانتور از بازهٔ $[۰, ۱]$ حذف می‌شوند برابر با ۱ است. یعنی اینکه زیرمجموعه‌ای مانند C از بازهٔ واحد ساخته‌ایم که شامل همان تعداد نقاط کل بازه است اما هیچ فضایی از این بازه را اشغال نمی‌کند!

دینامیک نمادین نگاشت نعل اسبی

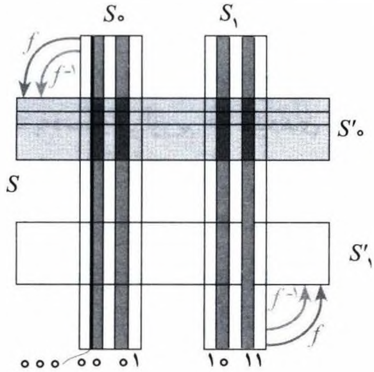
پیش از اینکه به نقاطی بپردازیم که سرنوشتشان نسبت به نگاشت نعل اسبی دنبالهٔ (صفر و یکی) نامتناهی داده‌شده‌ای است، پرسشی ساده‌تر را بررسی می‌کنیم: مجموعهٔ نقاطی که سرنوشتشان دنبالهٔ متناهی داده‌شده‌ای باشد، چه شکلی است؟

مثلاً فرض کنید $a_۰ = ۰$ یا $a_۰ = ۱$. مجموعهٔ نقاط متناظر در فضای فاز کدام است؟ پاسخ این پرسش را می‌توان مستقیماً از تعریف فهمید. بنابر تعریف، $a_۰ = ۰$، یعنی تصویر x تحت توان صفرم f متعلق به $S_۰$ است. اما $f^۰$ نگاشت همانی است: $f^۰(x) = x$؛ درنتیجه، شرط $a_۰ = ۰$ یعنی اینکه نقطهٔ x عضو $S_۰$ است. به‌همین ترتیب شرط $a_۰ = ۱$ هم متناظر با این است که $x \in S_۱$.

اکنون همان پرسش را در مورد سرنوشتی متناهی به طول ۲ بررسی می‌کنیم. مجموعهٔ نقاط متناظر با مقدارهای داده‌شدهٔ زوج $a_۰a_۱$ چیست (مقدارهای مختلف $a_۰a_۱$ عبارت‌اند از ۰۰، ۰۱، ۱۰ و ۱۱)؟

به شکل ۴ نگاه کنید. نقاط متناظر با ۰۰ آنهایی‌اند که هم خودشان متعلق به $S_۰$اند و هم تصویر اولشان (یعنی $f(x)$). یعنی تصویر هر نقطه از این دست متعلق به مربع دوم از پنج مربع برابر تشکیل‌دهندهٔ مستطیل $S'_۰$ است. این مربعها تصویر کدام مجموعه‌ها تحت نگاشت f اند؟ پاسخ واضح است: باید مستطیل $S_۰$ را به پنج مستطیل عمودی برابر تقسیم کنیم. نگاشت f از این مستطیلها kامی (از چپ) را به kامین مربع (از چپ) در $S'_۰$ می‌نگارد. بنابراین مجموعهٔ نقاطی که سرنوشت آینده‌شان ۰۰ است دومین نوار عمودی از چپ در $S_۰$اند. به‌همین ترتیب سرنوشت ۰۱ متناظر با نقاط چهارمین نوار از چپ در $S_۰$ است. مجموعه‌های نقاطی که سرنوشتهای آینده‌شان ۱۰ و ۱۱ اند به‌ترتیب دومین و چهارمین نوار عمودی در $S_۱$اند.

با توجه به آنچه گفته شد دیگر پیدا کردن نقاطی که سرنوشت آینده‌شان با دنبالهٔ داده‌شدهٔ $a_۰a_۱a_۲$ آغاز شود، آسان است. مثلاً مجموعهٔ نقاطی را در نظر بگیرید که سرنوشت آینده‌شان ۰۰۰ است. این نقاط همگی در نواری قرار دارند که سرنوشت آینده‌اش ۰۰ است. نگاشت f این نوار را به مستطیل افقی باریکی به عرض $\frac{۱}{۲۵}$ و طول ۱ می‌نگارد. اما سرنوشت نقاط موردنظر باید ۰۰۰ باشد. درنتیجه تصویرهای این نقاط تحت تکرار دوم f، $f^۲$،



شکل ۴

هم باید در مستطیل باریک موردنظر باشند و هم در S_0. اشتراک S_0 با این مستطیل، مستطیلی $\frac{۱}{۲۵} \times \frac{۱}{۵}$ است (پررنگترین مستطیل در شکل ۴) و این هم تصویر مجموعهٔ نقاط با سرنوشت ۰۰۰ تحت $f^۳$ است. بنابراین مجموعهٔ موردنظر، خودش، نوار عمودی باریک پررنگ (به عرض $\frac{۱}{۱۲۵}$)، دومین نوار از پنج نوار تشکیل‌دهندهٔ نوار ۰۰، است.

اگر این استدلالها را به‌طور نامحدود به‌کار گیریم به لم زیر می‌رسیم. در صورت این لم از دستگاه مختصاتی استفاده می‌کنیم که مبدأ آن در گوشهٔ پایین سمت چپ مربع واحد اولیه است. مختصات نقاط را در مبنای پنج می‌نویسیم.

لم ۱ . مجموعهٔ نقاطی که سرنوشت آینده‌شان دنبالهٔ نامتناهی داده‌شده‌ای مانند $\omega^+ = a_0 a_1 \ldots a_n \ldots$ است پاره‌خطی عمودی متشکل از نقاطی است که طول همه‌شان برابر با $a(\omega^+) = ۰/\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$ است که در آن اگر $a_n = ۰$، $\alpha_n = ۱$ و اگر $a_n = ۱$، $\alpha_n = ۳$ و عرضهایشان از ۰ تا ۱ متغیر است.

برای اثبات این لم توجه کنید که همان‌طور که قبلاً توضیح دادیم طول همهٔ نقاطی که سرنوشتشان دنباله‌ای داده‌شده به طول n باشد متعلق به یکی از پاره‌خطهای ثابت مرحلهٔ nام در ساختن مجموعهٔ کانتور است. اثبات دقیق این لم را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون به قضیهٔ اصلی این مقاله می‌رسیم.

قضیه. هر دنبالهٔ صفر و یکی مانند ω که از هر دو طرف نامتناهی باشد سرنوشت یک و فقط یک نقطه است. مجموعهٔ همهٔ نقاطی که سرنوشتشان نامتناهی و خوش‌تعریف باشد از نقاطی تشکیل شده است که طولهایشان متعلق به مجموعهٔ کانتور، C، روی ضلعی افقی از مربع و عرضهایشان متعلق به مجموعهٔ کانتور روی ضلعی عمودی از آن هستند.

اثبات. دنبالهٔ داده‌شده،

$$\omega = \dots a_{-2}a_{-1}a_0a_1a_2\dots$$

را می‌توان به‌شکل تلفیق دو زیردنباله، یکی از راست نامتناهی و دیگری از چپ نامتناهی، نمایش داد:

$$\omega^+ = a_0a_1a_2\dots, \qquad \omega^- = \cdots a_{-3}a_{-2}a_{-1}$$

برای کامل کردن اثبات این قضیه یک لم دیگر لازم داریم. لم ۲ همان لم ۱ منتها در مورد دنباله‌های از چپ نامتناهی است و درست به‌همان روش ثابت می‌شود.

لم ۲. مجموعهٔ نقاطی که سرنوشت گذشته‌شان دنبالهٔ نامتناهی داده‌شده‌ای مانند $\omega^- = \dots a_{-n}\dots a_{-1}$ است پاره‌خطی افقی است که عرضهای همهٔ نقاط آن برابر با $b(\omega^-) = 0/\beta_{-1}\beta_{-2}\dots$ است که در آن اگر $a_{-n} = 0$، $\beta_{-n} = 1$ و اگر $a_{-n} = 1$، $\beta_{-n} = 3$ و طولهایشان از ۰ تا ۱ متغیر است.

به این ترتیب مجموعهٔ همهٔ نقاطی را که سرنوشت آینده‌شان ω^+ است (این مجموعه پاره‌خطی عمودی است) و نیز مجموعهٔ همهٔ نقاطی را که سرنوشت گذشته‌شان ω^- است (این مجموعه پاره‌خطی افقی است) یافته‌ایم. اما مجموعهٔ نقاطی که سرنوشتشان ω است کدام‌اند؟ روشن است که این مجموعه نقطهٔ اشتراک این دو پاره‌خط است! چنین نقطه‌ای همیشه وجود دارد و یکتاست.

بنابراین، قضیه ثابت شده است و می‌توانیم نتیجه‌هایش را بیان کنیم.

نتایج

ابتدا نقاط پایدار در شکل ۳ را که سرنوشتشان از همه ساده‌تر است در نظر می‌گیریم. نقطهٔ بالا سمت چپ، u_0، در کل گذشته و آینده در همان مکان اولیه‌اش در S_0 می‌ماند. همهٔ رقمهای سرنوشت این نقطه صفرند. به‌همین ترتیب، همهٔ رقمهای سرنوشت نقطهٔ پایدار پایین سمت راست، u_1، یک‌اند.

علاوه‌بر نقاط پایدار نقاط جالب دیگری هم به‌نام نقاط تناوبی وجود دارند. اینها نقاطی‌اند که بعد از تعدادی از تکرارهای نگاشت f به مکان اولیه‌شان بازمی‌گردند. فکر می‌کنید چندتا از این جور نقطه‌ها وجود دارد؟

یکی از ویژگیهای استثنایی و دور از انتظار f این است که تعداد نقطه‌های از این دست نامتناهی است.

نتیجهٔ ۱. نگاشت f تعدادی نامتناهی نقطهٔ تناوبی دارد.

اثبات. سرنوشت نقطه‌ای تناوبی هم تناوبی است، یعنی دنباله‌ای متناوب از صفر و یکهاست. اینکه جای خود، با استفاده از قضیهٔ بالا حتی می‌توانیم عکس این حکم را ثابت کنیم: اگر سرنوشت نقطه‌ای تناوبی باشد آن‌وقت نقطهٔ موردنظر خودش هم تناوبی است.

در واقع فرض کنید که به‌ازای عددی طبیعی مانند p سرنوشت نقطه‌ای مانند x این ویژگی را داشته باشد که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $a_{n+p} = a_n$، یعنی سرنوشت نقطهٔ موردنظر تناوبی با دورهٔ تناوب p باشد. در

این صورت، این نقطه بعد از حداکثر p تکرار نگاشت f به مکان اولیه‌اش بازمی‌گردد؛ زیرا سرنوشتهای نقاط x و $f^p(x)$ عین هم‌اند و فقط یک نقطه وجود دارد که سرنوشتش دنباله‌ای داده‌شده باشد، پس این نقاط یکی‌اند. اکنون از آنجایی که تعدادی نامتناهی دنبالهٔ صفر و یکی تناوبی وجود دارد و از هر کدامشان نقطه‌ای تناوبی به‌دست می‌آید، پس تعدادی نامتناهی نقطهٔ تناوبی وجود دارد.

هر نقطهٔ تناوبی مانند x در طول تغییر مکانش تحت تکرارهای نگاشت f میان تعدادی متناهی نقطه، یعنی x، $f(x)$، ...، $f^p(x)$ که در اینجا p دورهٔ تناوب نقطهٔ موردنظر است، از یکی به دیگری «می‌پرد». نوع دیگری از مدار آن است که وقتی $n \to \infty$، به نقطه‌ای حدی میل می‌کند. یعنی همهٔ نقاط چنین مداری به‌ازای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ، درون یک همسایگی نقطهٔ حدی، هر قدر هم که کوچک باشد، می‌مانند. به‌راحتی می‌توان فهمید که نقطهٔ حدی u باید یکی از نقاط ثابت نگاشت f باشد. درواقع، اگر وقتی $n \to \infty$، نقاط $f^n(x)$ به نقطهٔ u میل کنند، آن‌وقت نقطهٔ $f^{n+1}(x)$ به $f(u)$ میل می‌کند، زیرا بنابر تعریف f، فاصلهٔ میان $f^{n+1}(x)$ و $f(u)$ از پنج برابر فاصلهٔ میان $f^n(x)$ و u بیشتر نیست و درنتیجه آن هم به ۰ میل می‌کند. اما دنباله‌های $f^n(x)$ و $f^{n+1}(x)$ از نظر هندسی یکی هستند (زیرا فقط در شماره‌گذاریشان با هم فرق دارند)، پس به یک نقطه میل می‌کنند و $f(u) = u$. همهٔ این ملاحظات را می‌توان در مورد رفتار حدی مدارها وقتی $n \to -\infty$ هم به‌کار گرفت.

از تلفیق ویژگیهای حدی گذشته و آیندهٔ مدارها تعریفهای زیر به‌دست می‌آیند: مدار را در صورتی هم‌تخت می‌نامند که نقاطش در هر دو حالت $n \to \infty$ و $n \to -\infty$ به یک نقطهٔ ثابت میل کنند. اگر نقاط مدار در گذشتهٔ نامتناهی و آیندهٔ نامتناهی به نقاط ثابت مختلفی میل کنند می‌گوییم که مدار ناهم‌تخت است.

نتیجهٔ ۲. نگاشت f تعدادی نامتناهی از هر کدام از مدارهای هم‌تخت و ناهم‌تخت دارد.

برای اثبات این نتیجه نقطه‌ای را در نظر بگیرید که رقمهای دنبالهٔ سرنوشتش از مرحله‌ای به بعد در آینده و نیز از مرحله‌ای به قبل در گذشته، همگی صفرند. تعدادی نامتناهی از این دست نقاط و درنتیجه تعدادی نامتناهی مدار وجود دارد. ثابت می‌کنیم هر کدام از این مدارها هم‌تخت است و حدش نقطهٔ پایدار u_0 از S_0 است.

فرض کنید که مثلاً «صفرهای آینده» از مرحلهٔ nام به بعد بیایند:

$$a_n = a_{n+1} = \cdots = 0$$

در این صورت سرنوشت آیندهٔ نامتناهی $f^k(x)$، $k \geq n$، عین سرنوشت u_0 است (همهٔ رقمهای سرنوشت u_0 صفرند). بنابر لم ۱ طولهای نقاط $f^k(x)$ و u_0 با هم برابرند. بنابراین وقتی $k \geq n$، $f^k(x)$ همیشه در همان پاره‌خط عمودی در S_0 می‌ماند و بنابر تعریف f، با هر بار اعمال f به‌اندازهٔ $\frac{1}{5}$ فاصله به u_0 نزدیکتر می‌شود. یعنی اینکه وقتی $n \to \infty$، $f^k(x)$ به u_0 میل می‌کند. همین استدلال در مورد گذشته هم درست است، با این تفاوت که باید پاره‌خطی افقی جایگزین پاره‌خط عمودی گذرا از u_0 شود.

اگر به‌جای صفرها، یک بگذاریم مدارهای هم‌تختی به‌دست می‌آوریم که به نقطهٔ ثابت دوم u_1 (در S_1) میل

می‌کنند. اگر هم فقط در گذشته یا در آینده به‌جای صفرها یک بگذاریم مدارهایی ناهم‌تخت به‌دست می‌آوریم.

توجه کنید که توصیف مدارهای هم‌تخت و ناهم‌تخت که در اینجا به‌کار می‌بریم کامل است، یعنی هر کدام از این مدارها سرنوشتی دارد که در هر دو سر از صفرها و/یا یکهای پشت سر هم تشکیل شده است.

حکم بعدی تعمیم نتیجهٔ قبلی است.

نتیجهٔ ۳. به‌ازای هر دو نقطهٔ مانند x و y نقطه‌ای وجود دارد که مدارش در آینده به مدار x و در گذشته به مدار y میل می‌کند.

سعی کنید که این نتیجه را خودتان ثابت کنید. مطلبی که ممکن است بخواهید در اثبات از آن استفاده کنید (و واقعاً در اثبات نتیجهٔ ۲ از آن استفاده شد) پیش از این در اثبات قضیهٔ اصلی آمده است: هر دنبالهٔ صفر و یکی که نیمهٔ «گذشته» آن ω^- و نیمهٔ «آینده»اش ω^+ باشد سرنوشت نقطه‌ای به مختصات $(a(\omega^+), b(\omega^-))$ است که در آن a و b همانهایی‌اند که در لمهای ۱ و ۲ تعریف شدند.

این قسمت از بحث را با ذکر ویژگی دیگری از مدارهای تناوبی، که اثبات آن را هم به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم، به پایان می‌بریم.

نتیجهٔ ۴. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند p، فقط تعدادی متناهی نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب p وجود دارد.

این مطلب به‌ویژه به این معناست که هر نقطهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب معلوم یک همسایگی دارد که در آن هیچ نقطهٔ دیگری با همان دورهٔ تناوب وجود ندارد. پرسش جالب دیگری که می‌توان در این زمینه مطرح کرد این است که چند مدار تناوبی با کوچکترین دورهٔ تناوب داده‌شدهٔ p وجود دارند؟

چرا مثالی که بررسی کردیم این‌قدر فوق‌العاده بود؟ چرا این مثال دیدگاه ریاضیدانان را نسبت به دینامیک تغییر داد؟

لاپلاس و اسمیل: قطعیت و آشوب

حدود دو قرن پیش پیر سیمون لاپلاس در رساله‌اش با عنوان مقاله‌ای فلسفی در باب احتمالات نوشت: «هر موجود ذی‌شعوری که در هر لحظهٔ معین همهٔ نیروهای هستی‌بخش طبیعی و مکانهای نسبی همهٔ اجزای تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسد، به‌شرطی که دانشش آن‌قدر جامع باشد که بتواند همهٔ این اطلاعات را به‌منظور تجزیه و تحلیل تحت کنترل خود درآورد، خواهد توانست حرکت بزرگترین اجرام عالم تا کوچکترین اتمهای آن را به یک سان در قالب یک دستور جای دهد. با این دستور هیچ چیزی بلاتکلیف نمی‌ماند، در یک لحظه هم آینده را دربر می‌گیرد و هم گذشته را.»

این سخنان کشف فلسفی مهمی را دربر دارد: همهٔ فرایندهای تکاملی عالم را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی، احتمالاً در فضای فازی با بعد بسیار بالا، توصیف کرد.

این مفهوم براساس مطلبی است که کاملاً فراتر از مرزهای دانش آن روزگار قرار دارد ـ قضیهٔ وجود و یکتایی برای معادلات دیفرانسیل معمولی. این قضیه را بعدها اوگوستن لویی کشی ثابت کرد.

مدتها به‌نظر می‌رسید فلسفه‌ای که براساس این قضیه شکل گرفته بود واقعیات پیرامونمان را به‌طور مناسبی توصیف می‌کند. نگاشت نعل اسبی اسمیل زمینه‌های ایجاد دیدگاهی کاملاً متفاوت را فراهم کرد.

مجسم کنید فرایندی را مشاهده می‌کنیم که با نگاشت f (همان که قبلاً تعریف کردیم) توصیف می‌شود: ردّ تغییر مکان نقاط تحت تکرارهای این نگاشت را می‌گیریم. مانند قبل به‌جای مدار واقعی هر نقطه سرنوشتش برایمان مهم است. فرض کنید که آزمایش موردنظر را دوبار با یک نقطه تکرار کنیم: هر بار یک نقطه با یک مختصات اولیه انتخاب و دقت می‌کنیم که نگاشت f و تکرارهایش این نقطه را به کدام نقاط می‌نگارند.

مشکل اینجاست که نمی‌توانیم مختصات را با دقت کامل اندازه‌گیری کنیم. اگرمختصات اولیه را آزمایشگر مشخص کرده باشد آن‌وقت نقاط انتخاب‌شده در این دو آزمایش دقیقاً روی هم قرار نمی‌گیرند ـ کمی با هم فرق دارند. اما همان‌طور که می‌دانید هرچه اختلاف نقاط کمتر باشد سرنوشتهایشان بیشتر بر هم منطبق می‌شوند. در هر صورت، این سرنوشتها حتماً از مرحله‌ای دیگر با هم یکی نیستند.

مجسم کنید که اولین آزمایش انجام شده و سرنوشت نامتناهی نقطهٔ اول نوشته شده است. همچنین مجسم کنید که آزمایش دیگری همزمان انجام شود: شخصی سکه‌ای را پشت سر هم پرتاب می‌کند؛ اگر شیر آمد، صفر و اگر خط آمد یک می‌نویسد. به این ترتیب دنبالهٔ صفر و یکی نامتناهی دیگری به‌دست می‌آید. بعد این دو دنباله را با هم ادغام می‌کنیم: دنبالهٔ اول را از $-\infty$ تا مرحله‌ای در آینده، مثلاً وقتی که $n = ۱۰۰۰$، می‌نویسیم و از این مرحله به بعد هم دنبالهٔ دوم را می‌نویسیم. بنابر قضیه‌ای که ثابت کردیم نقطه‌ای وجود دارد که سرنوشتش این دنبالهٔ جدید می‌شود. فاصلهٔ این نقطه از نقطهٔ اول از $۵^{-۱۰۰۰}$ بیشتر نیست (عرضهای این نقاط برابرند، زیرا سرنوشت گذشته‌شان یکی است و طولهایشان هم در مبنای پنج تا ۱۰۰۰ رقم اول برابرند). بنابراین از نظر هر آزمایشگری این دو نقطه از هم غیرقابل تشخیص‌اند. با این همه، سرنوشتهایشان از مرحله‌ای به بعد متمایزند و این تفاوت ذاتاً تصادفی است.

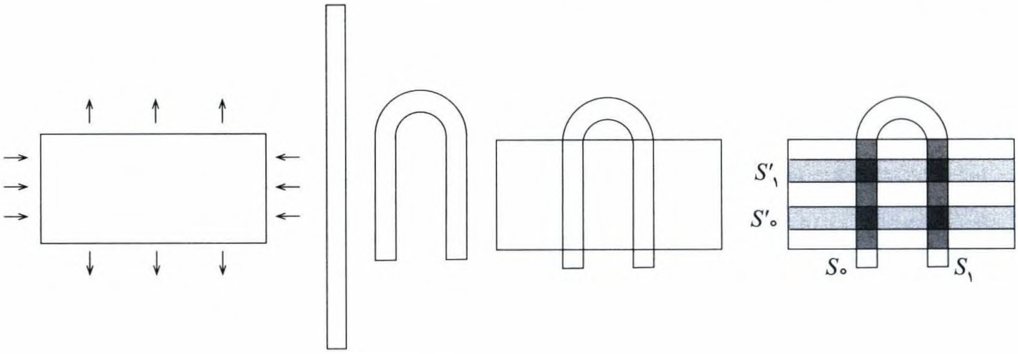
این اثر در فرایندهای پیچیده‌تری که با معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شوند بیشتر نمود پیدا می‌کند و آن را تجدیدناپذیری آزمایش می‌نامند. می‌توانیم شرایط اولیه را با بیشترین دقت ممکن دوباره ایجاد کنیم و همان آزمایش را انجام دهیم اما بعد ازگذشت زمان شاهد نتایج کاملاً متفاوتی خواهیم بود.

در طول سالهای ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۵ به مطالعهٔ رفتار آشوبناک دستگاههای مشمول قطعیت بیش از هر موضوع دیگری توجه شد. در بسیاری از دستگاههای واقعی که با معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شوند قطعیت رفته‌رفته به‌صورت یک ویژگی صرفاً نظری درمی‌آید. عملاً در آزمایشهای به‌ظاهر یکسان انحرافهای اجتناب‌ناپذیر به نتایجی منجر می‌شوند که به‌طور آشوبناکی متفاوت‌اند.

اکنون می‌خواهیم دوباره دربارهٔ نگاشت جالبی که ساختیم صحبت کنیم. هنوز توضیح نداده‌ایم که وجه تسمیهٔ نعل اسب در این نگاشت چیست.

نعل اسب اسمیل

نگاشت اصلی‌ای که اسمیل بررسی کرد این‌طور ساخته می‌شود: مستطیلی را در نظر بگیرید (شکل ۵)، آن را در راستای افقی فشرده کنید و در راستای عمودی بکشید، به طوری که مستطیل عمودیِ باریک و بلندی درست شود که از ضلع پایینیِ و عرض مستطیل اولیه بیرون بزند، بعد آن را به‌شکل نعل اسب خم کنید و همان‌طور که در شکل ۵ نشان داده شده است روی شکل اولیه بیندازید.



شکل ۵

در اصل ترکیب این دو نگاشت را نگاشت نعل اسبی می‌نامند. در نظر اول به‌زحمت بتوان وجه اشتراکی میان این نگاشت و نگاشتی که پیش از این دیدیم یافت. البته، در صورتی که دامنهٔ این نگاشت جدید را محدود کنیم به‌راحتی متوجه شباهتشان می‌شویم.

اشتراک دامنه و برد نگاشت نعل اسبی را در نظر بگیرید: این مجموعه، از دو مستطیل S_0 و S_1 در شکل ۵ تشکیل شده است. فرض کنید که نگاشت وارون روی S_0 و S_1 خطی باشد (یعنی نگاشت موردنظر فقط کششهای یکنواخت موازی با ضلعهای این مستطیلها باشد؛ اسمیل این شرط را آورده بود). در این صورت تصویر وارون کامل S_0، S'_0، مستطیلی دراز نزدیک قاعدهٔ پایینی مستطیل اولیه است؛ به‌همین ترتیب، از S_1 مستطیلی دراز مانند S'_1 نزدیک قاعدهٔ بالایی مستطیل اولیه به‌دست می‌آوریم. نگاشت موردنظر S'_0 را به S_0 و S'_1 را به S_1 می‌نگارد. اما این وضعیت ما را به‌یاد نگاشت f که قبلاً ساخته بودیم می‌اندازد، هرچند که این دو نگاشت یکی نیستند.

مسألهٔ ارزشمند دیگر صورت‌بندی و اثبات حکمی مشابه قضیهٔ اصلیمان در مورد این نگاشت (تکه‌ای) خطی است.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Yuly Ilyashenko and Anna Kotova, Smale's horseshoe, *Quantum*, May/June 1995, pp. 13-18.

قضیهٔ ون در واردن دربارهٔ تصاعدهای حسابی

ویکتور پراسلوف

قضیهٔ وَن دِر واردِن دربارهٔ تصاعدهای حسابی تاریخچهٔ جالبی دارد. ابتدا باؤدِت حدس زد که

(A) اگر عددهای طبیعی به دو دسته افراز شوند، آنگاه به‌ازای هر عدد طبیعی مانند l می‌توان در یکی از این دسته‌ها تصاعدی حسابی به طول l یافت؛ یعنی، به‌ازای عددهایی مانند a و d، یکی از این دسته‌ها شامل عددهای زیر است

$$a, a+d, a+۲d, \ldots, a+(l-۱)d$$

این حدس خیلی زود مشهور شد. بسیاری از ریاضیدانان تلاش کردند آن را ثابت کنند، اما معلوم شد که کار ساده‌ای نیست. اولین نتایج مهم را دو ریاضیدان برجسته به نامهای امیل آرتین اُتو شِرِیِر به‌دست آوردند.
ابتدا شریر ثابت کرد که حدس باؤدت معادل حکم زیر است:

(B) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند l عددی طبیعی مانند $N(l)$ وجود دارد که اگر عددهای ۱، ۲، . . . و $N(l)$ را به دو دسته افراز کنیم، یکی از این دسته‌ها شامل تصاعدی حسابی به طول l است.

بعد آرتین ثابت کرد که حکم (B) معادل حکم زیر است:

(C) به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند l و k عددی طبیعی مانند $N(l,k)$ وجود دارد که اگر عددهای ۱، ۲، . . . و $N(l,k)$ را به k دسته افراز کنیم، یکی از این دسته‌ها شامل تصاعدی حسابی به طول l است.

حکم (A) به‌سادگی از حکم (C) نتیجه می‌شود. اما اثبات حکم (C) به استقرای دوگانه روی k و l ساده‌تر است. این اثبات نسبتاً پیچیده را ون در واردن در سال ۱۹۲۷ پیدا کرده است.
افراز مجموعه‌ای به k دسته را می‌توان به رنگ کردن عضوهای آن با k رنگ تعبیر کرد. به این ترتیب حکم (C) را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

(C') به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند l و k عددی طبیعی مانند $N(l,k)$ وجود دارد که اگر عددهای ۱، ۲، . . . و $N(l,k)$ را با k رنگ رنگ کنیم، می‌توانیم تصاعد حسابی تکرنگی به طول l پیدا کنیم.

بعدها اثباتهای جدیدی برای قضیهٔ ون در واردن و نیز تعمیمهای آن پیدا شد. در اینجا یکی از این تعمیمها را بررسی می‌کنیم که اثباتش نسبتاً ساده است. این اثبات از پ. اندرسون است.

در فضای nبعدی[1] مجموعهٔ نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که مختصاتش عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. این مجموعه را مشبکه و نقطه‌های آن را نقطه‌های مشبکه‌ای می‌نامیم.

قضیه. فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌های مشبکه‌ای باشد. در این صورت هر طور که مشبکه را با k رنگ رنگ کنیم عددی طبیعی مانند a و برداری مانند v که مختصاتش عددهایی صحیح و نامنفی‌اند وجود دارند که اعضای مجموعهٔ $aS+v$ (یعنی تصویر S تحت تجانس با ضریب a و بعد انتقال موازی به‌اندازهٔ v) همگی به یک رنگ‌اند. علاوه‌بر این، می‌توان تخمینهایی برای عدد a و مختصات بردار v پیدا کرد که فقط به مجموعهٔ S و عدد k بستگی دارند.

توجه. اگر در قضیهٔ بالا فرض کنیم $n=۱$ و $S=\{۱,۲,\ldots,l\}$، قضیهٔ ون در واردن به‌دست می‌آید.

برای اثبات این قضیه بهتر است مکعبی را در نظر بگیریم که از همهٔ نقطه‌های مشبکه‌ای که مختصاتشان عددهایی از ۰ تا $N-۱$ هستند تشکیل شده است. این مکعب را با K_N نشان می‌دهیم؛ این مکعب N^n نقطهٔ مشبکه‌ای دربر دارد، که در آن n بعد فضایی است که انتخاب کرده‌ایم. می‌توان حکم قضیه را در مورد مجموعهٔ S به‌شکل زیر صورتبندی کرد:

(A_S) عددی طبیعی مانند N وابسته به k، تعداد رنگها، وجود دارد که هر طور نقطه‌های مشبکه‌ای مکعب K_N را با k رنگ رنگ کنیم، این مکعب شامل مجموعه‌ای تکرنگ به‌شکل $aS+v$ است.

طرح کلی اثبات این قضیه را در زیر می‌آوریم. اگر S از یک نقطه تشکیل شده باشد، درستی حکم (A_S) معلوم است. بنابراین کافی است ثابت کنیم که اگر w نقطه‌ای مشکبه‌ای باشد که در S نیست، از درستی (A_S) درستی $(A_{S\cup w})$ نتیجه می‌شود، که در آن $S\cup w$ مجموعه است که از افزودن w به S به‌دست می‌آید. برای اثبات این مطلب به حکم کمکی زیر، که در آن p عددی طبیعی است، نیاز داریم:

$(C_{S,w,p})$ عددی طبیعی مانند N_p وجود دارد که هر طور مکعب K_{N_p} را با k رنگ رنگ کنیم، می‌توان عددهایی طبیعی مانند $a_۱$، ... و a_p و برداری مانند v که مختصاتش عددهایی صحیح و نامنفی‌اند پیدا کرد که هر یک از مجموعه‌های

$$\begin{aligned}
T_۰ &= (a_۱+\cdots+a_p)w+v\\
T_۱ &= a_۱S+(a_۲+\cdots+a_p)w+v\\
T_۲ &= (a_۱+a_۲)S+(a_۳+\cdots+a_p)w+v\\
&\vdots\\
T_p &= (a_۱+\cdots+a_p)S+v
\end{aligned}$$

تکرنگ باشند.

۱. اگر با مفهوم فضای چندبعدی آشنا نیستید می‌توانید فرض کنید $n=۲$ یا $n=۳$؛ در مورد قضیهٔ ون در واردن $n=۱$.

اثبات این حکم را در دو مرحله می‌آوریم.

مرحلهٔ ۱. اگر (A_S) درست باشد، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند p، $(C_{S,w,p})$ هم درست است.

ابتدا $(C_{S,w,p})$ را به‌ازای $p = ۱$ ثابت می‌کنیم. در این حالت باید ثابت کنیم که مکعبی مانند $K_{N_۱}$ شامل مجموعه‌های تکرنگ $a_۱ w + v$ و $a_۱ S + v$ است. از (A_s) نتیجه می‌شود که K_N شامل مجموعهٔ تکرنگ $aS + v$ است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a_۱ = a$ و K_N را به مکعب بزرگتری مانند $K_{N_۱}$ گسترش دهیم، به‌طوری که به‌ازای هر نقطه از مکعب K_N مانند v نقطهٔ $aw + v$ درون معکب $K_{N_۱}$ قرار داشته باشد.

اکنون باید ثابت کنیم که اگر (A_S) و $(C_{S,w,p})$ درست باشند، $(C_{S,w,p+۱})$ هم درست است. در این بخش اثبات از ایدهٔ مهمی استفاده می‌کنیم که اثبات ون در واردن هم مبتنی بر آن است. فرض کنید مشبکه را با k رنگ رنگ کرده‌ایم. به نقطهٔ v مکعب $v + K_N$ را نسبت می‌دهیم. این مکعب از N^n نقطهٔ مشبکه‌ای تشکیل شده است، بنابراین می‌توان این نقطه‌های مشبکه‌ای را به k^{N^n} طریق مختلف با k رنگ رنگ کرد. به این k^{N^n} طریق خانواده‌ای از k^{N^n} رنگ جدید نسبت می‌دهیم و از آنها برای رنگ کردن هر نقطه مانند v مطابق با رنگ‌آمیزی مکعب $v + k_N$ استفاده می‌کنیم. اکنون رنگهای بیشتری داریم، اما رنگ‌آمیزی جدید این ویژگی را دارد که رنگ جدید دو نقطهٔ u و v وقتی و فقط وقتی یکسان است که به‌ازای هر نقطه از مکعب K_N مانند x رنگ قدیمی نقطه‌های $x + u$ و $x + v$ یکسان باشد، یعنی مکعبهای $u + K_N$ و $v + K_N$ دقیقاً به همان روش قدیمی رنگ شده‌اند. این رنگ‌آمیزی جدید را القایی می‌نامیم؛ این رنگ‌آمیزی به رنگ‌آمیزی اولیه و ابعاد مکعب K_N بستگی دارد.

فرض کنید (A_S) و $(C_{S,w,p})$ هر دو درست باشند. در این صورت عددی طبیعی مانند N_p وجود دارد که هر طور مکعب K_{N_p} را با k رنگ رنگ کنیم می‌توانیم عددهایی طبیعی مانند $a_۱$، ... و a_p و برداری مانند v پیدا کنیم که به‌ازای آنها مجموعه‌های $T_۰$، $T_۱$، ... و T_p تکرنگ باشند. رنگ‌آمیزی القایی با $k^{N_p^n}$ رنگ نظیر K_{N_p} را در نظر بگیرید. می‌توانیم از حکم $(C_{S,w,۱})$ که در بالا ثابت کردیم در مورد این رنگ‌آمیزی استفاده کنیم. به این ترتیب معلوم می‌شود که مکعبی مانند $K_{N'}$ وجود دارد که شامل مجموعه‌های تکرنگ (در رنگ‌آمیزی القایی) $a'w + v'$ و $a'S + v'$ است. اینکه مجموعهٔ $a'S + v'$ تکرنگ است یعنی اینکه به‌ازای هر نقطه از مجموعهٔ S مانند s رنگ‌آمیزی اولیهٔ مکعب $K_{N_p} + a's + v'$ با بقیه یکسان است. هر یک از این مکعبهای همرنگ شامل مجموعه‌های تکرنگ

$$T_q + a's + v', \qquad q = ۰, ۱, \ldots, p$$

است و رنگ این مجموعه‌ها ربطی به s ندارد. بنابراین مجموعه‌های تکرنگ

$$T'_{q+۱} = a'S + T_q + v'$$

را به‌دست می‌آوریم.

اگر مجموعهٔ تکرنگ $T'_۰ = a'w + T_۰ + v'$ را به این مجموعه‌ها اضافه کنیم، مجموعه‌های تکرنگ موردنظر

را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
T'_0 &= (a' + a_1 + \cdots + a_p)w + v'' \\
T'_1 &= a'S + (a_1 + a_2 + \cdots + a_p)w + v'' \\
&\vdots \\
T'_{p+1} &= (a' + a_1 + \cdots + a_p)S + v''
\end{aligned}$$

که در آنها $v'' = v + v'$.

مرحلهٔ ۲. اگر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند p، $(C_{S,w,p})$ درست باشد، $(A_{S\cup w})$ هم درست است.

در اینجا فقط از اینکه $(C_{S,w,p})$ به‌ازای $p = k$، که در آن k تعداد رنگهاست، استفاده می‌کنیم. در این حالت مجموعه‌های تکرنگ T_0، T_1، ... و T_k را به‌دست می‌آوریم. تعداد این مجموعه‌ها از تعداد رنگها بیشتر است، بنابراین دو تا از آنها باید همرنگ باشند. فرض کنید مثلاً رنگهای T_r و T_q، که در اینجا $r < q$، یکسان باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned}
T_r &= (a_1 + \cdots + a_{r-1})S + (a_r + \cdots + a_{q-1})w + (a_q + \cdots + a_p)w + v \\
T_q &= (a_1 + \cdots + a_{r-1})S + (a_r + \cdots + a_{q-1})S + (a_q + \cdots + a_p)w + v
\end{aligned}$$

فرض کنید

$$a' = a_r + \cdots + a_{q-1}$$

و

$$v' = (a_1 + \cdots + a_{r-1})s + (a_q + \cdots + a_p)w + v$$

که در آن s نقطه‌ای از S است. در این صورت $a'(S \cup w) + v'$ مجموعه‌ای تکرنگ به‌شکل موردنظر است.

• ترجمهٔ محمدصالح زارع‌پور

V. Prasolov, The Van der Waerden Theorem on Arithmetical Progressions, *Essays on Numbers and Figures*, pp. 61-63. AMS, 2000.

از باب تفریح

۱. دو توپ قرمز، دو توپ آبی، دو توپ سبز، دو توپ زرد و دو توپ سفید داریم. چند توپ غیرهمرنگ را در کفهٔ سمت چپ ترازو و دیگر توپهای همرنگ آنها را در کفهٔ سمت راست قرار داده‌ایم. کفهٔ سمت چپ ترازو پایین آمده است. اگر جای دو توپ همرنگ را عوض کنیم، یا کفهٔ سمت راست ترازو پایین می‌آید یا ترازو به حالت تعادل درمی‌آید. چند توپ روی کفه‌های ترازو قرار دارد؟

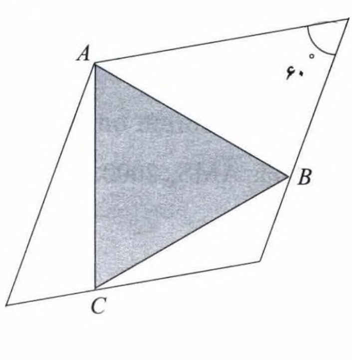
۲. متوازی‌الاضلاع را در امتداد خطی راست که از مرکزش می‌گذرد طوری ببرید که بتوان با دو تکه‌ای که به‌دست می‌آید یک لوزی ساخت.

۳. اسبی روی صفحهٔ شطرنجی ۶×۶ طوری حرکت کرده است که به هر یک از خانه‌ها دقیقاً یک بار رفته است و در انتها به جایی که در ابتدا بوده است برگشته است. در شکل روبه‌رو، شمارهٔ برخی خانه‌ها را که اسب به‌ترتیب در آنها بوده است نوشته‌ایم. شمارهٔ بقیهٔ خانه‌ها را مشخص کنید.

۱۷				۱۱	
۲			۲۵		
۲۳	۱۶	۱			
۳۰			۱۹		
۱۵				۱۳	
۸					۳۵

۴. آیا چندضلعی‌ای محدب وجود دارد که نه محور تقارن داشته باشد نه مرکز تقارن، اما اگر آن را نسبت به نقطه‌ای به‌اندازهٔ زاویه‌ای کوچکتر از ۱۸۰° دوران دهیم بر خودش منطبق شود؟

۵. مطابق شکل زیر، مثلث ABC درون لوزیی که یکی از زاویه‌هایش ۶۰° است محاط شده است. یکی از زاویه‌های این مثلث هم ۶۰° است. ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.



(راه‌حل در صفحهٔ ۶۲)

چندضلعیهای محدبی که زاویه‌هایشان برابرند

بررسی جبری

تیتو آندریسکو و بوگدان انسکو

توصیف جبری جالبی از چندضلعیهای محدبی را که زاویه‌هایشان برابرند در لم زیر آورده‌ایم.

لم ۱ . فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی حقیقی و مثبت باشند و ε ریشهٔ nام اولیه‌ای از واحد باشد، یعنی

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

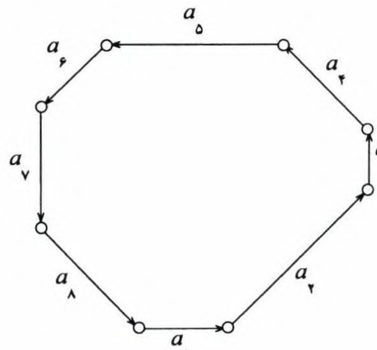
اگر طول ضلعهای چندضلعی محدبی که زاویه‌هایش برابر (به ترتیب پادساعتگرد) a_1، a_2، ... و a_n باشد، آن‌وقت

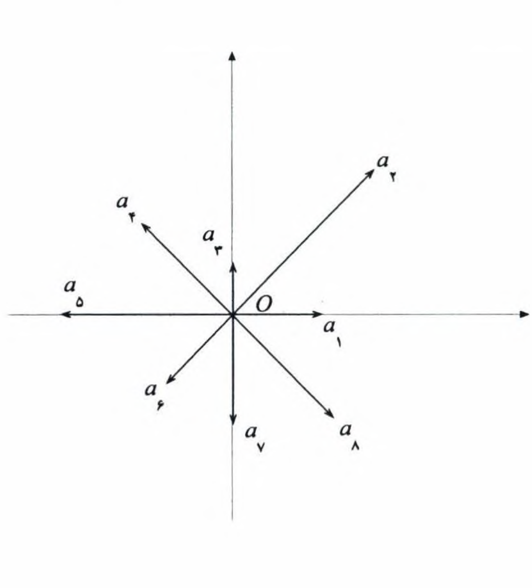
$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \cdots + a_n\varepsilon^{n-1} = 0$$

برهان. ضلعهای چندضلعی موردنظر را بردارهایی با جهت پادساعتگرد در نظر بگیرید (در شکل زیر حالتی را که $n = 8$ نشان داده‌ایم). در این صورت مجموع این بردارها صفر است. اکنون همهٔ بردارها را طوری انتقال دهید که ابتدای همهٔ آنها نقطهٔ O باشد. اگر عددهای مختلط نظیر انتهای این بردارها را در نظر بگیریم و a_1 را روی قسمت مثبت محور x انتخاب کنیم، معلوم می‌شود که این انتهاها a_1، $a_2\varepsilon$، $a_3\varepsilon^3$، ... و $a_n\varepsilon^{n-1}$ هستند. درنتیجه

$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^3 + \cdots + a_n\varepsilon^{n-1} = 0$$

■





عکس این حکم درست نیست. مثلاً اگر a، b، c و d طول ضلعهای چهارضلعی‌ای باشند و

$$a + bi + ci^{2} + di^{3} = 0$$

آن‌وقت $(a-c) + i(b-d) = 0$؛ این تساوی هم اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد درست است (و لزومی ندارد که زاویه‌های چهارضلعی برابر باشند، یعنی چهارضلعی مستطیل باشد). البته، از روش اثبات لم بالا معلوم می‌شود که اگر a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت باشند و

$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^{2} + \cdots + a_n\varepsilon^{n-1} = 0$$

آن‌وقت چندضلعی‌ای وجود دارد که زاویه‌هایش برابرند و طول ضلعهایش a_1، a_2، ... و a_n است.

در این مقاله چند مسأله از مسابقه‌های ریاضی را که مربوط به چندضلعیهایی محدب با زاویه‌های برابرند بررسی می‌کنیم. برای برخی از این مسأله‌ها دو راه‌حل می‌آوریم: راه‌حلی هندسی و راه‌حلی جبری.

مسألهٔ ۱ . ثابت کنید اگر طول ضلعهای شش‌ضلعی‌ای محدب که زاویه‌هایش برابرند a_1، a_2، ... و a_6 (به‌همین ترتیب) باشد، آن‌وقت

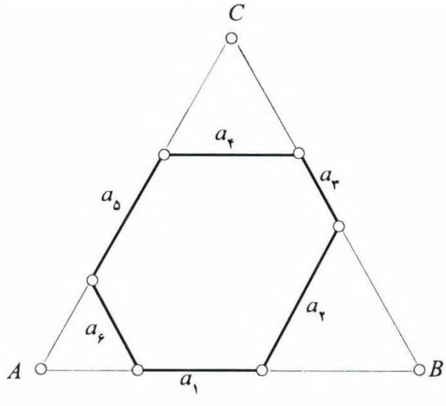
$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$$

(انتخاب تیم رومانی)

راه‌حل اول. اگر ضلعهای شش‌ضلعی را که یکی در میان امتداد دهیم به مثلثی مانند ABC می‌رسیم (شکل صفحهٔ بعد را ببینید). چون زاویه‌های شش‌ضلعی برابرند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. علاوه‌بر این، مثلث ABC اجتماع شش‌ضلعی موردنظر و سه مثلث کوچک دیگر است، که اینها هم متساوی‌الاضلاع‌اند. توجه کنید که

$$AB = a_1 + a_2 + a_6, \qquad BC = a_2 + a_3 + a_4, \qquad CA = a_4 + a_5 + a_6$$

چون $AB = BC = CA$، نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.



راه‌حل دوم. فرض کنید ε ریشهٔ ششم اولیه‌ای از واحد باشد، یعنی $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}$. در این صورت

$$a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + a_4\varepsilon^3 + a_5\varepsilon^4 + a_6\varepsilon^5 = 0$$

اما

$$\varepsilon^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

درنتیجه $\varepsilon^4 = -\varepsilon$ و $\varepsilon^5 = -\varepsilon^2$. بنابراین

$$(a_1 - a_4) + (a_2 - a_5)\varepsilon + (a_3 - a_6)\varepsilon^2 = 0$$

از طرف دیگر، چون $\varepsilon^3 = -1$ (و $\varepsilon \neq -1$)، پس $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$. بنابراین ε ریشهٔ مشترک معادله‌های

$$(a_1 - a_4) + (a_2 - a_5)z + (a_3 - a_6)z^2 = 0$$

و

$$z^2 - z + 1 = 0$$

است، که در هر دو ضریبها حقیقی‌اند. چون ε عددی حقیقی نیست، پس این دو معادله باید ریشهٔ مشترک دیگری داشته باشند، که $\overline{\varepsilon}$ است، و درنتیجه ضریبهای این دو معادله متناسب‌اند؛ یعنی،

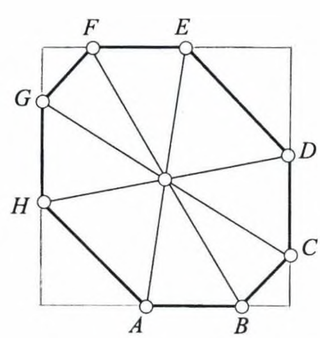
$$a_1 - a_4 = -(a_2 - a_5) = a_3 - a_6$$

همان چیزی که می‌خواهیم.

مسألهٔ ۲ . طول ضلعهای هشت‌ضلعی‌ای محدب که زاویه‌هایش برابرند عددهایی گویا هستند. ثابت کنید این هشت‌ضلعی مرکز تقارن دارد.

(المپیاد روسیه)

راه‌حل اول. فرض کنید هشت‌ضلعی موردنظر $ABCDEFGH$ باشد. زاویه‌های هشت‌ضلعی‌ای محدب که زاویه‌هایش برابرند برابر 135° اند. بنابراین، خطهایی که پاره‌خطهای AB، CD، EF و GH روی آنها قرار دارند مستطیلی تشکیل می‌دهند.



چون ضلعهای روبه‌رو در این مستطیل برابرند، پس

$$AB + \frac{\sqrt{۲}}{۲}(AH + BC) = EF + \frac{\sqrt{۲}}{۲}(DE + FG)$$

یا، معادل آن،

$$AB - EF = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(DE + FG - AH - BC)$$

چون طول ضلعهای هشت‌ضلعی موردنظر عددهایی گویا هستند، تساوی آخر وقتی و فقط وقتی درست است که

$$AB - EF = DE + FG - AH - BC = ۰$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$CD - GH = FG + AH - DE - BC = ۰$$

از این تساویها نتیجه می‌شود $AB = EF$، $CD = GH$، $BC = FG$ و $DE = AH$. بنابراین ضلعهای روبه‌رو در هشت‌ضلعی موردنظر برابر و موازی‌اند. درنتیجه، چهارضلعیهای $ABEF$، $BCFG$، $CDGH$ و $DEHA$ متوازی‌الاضلاع‌اند و درنتیجه وسط پاره‌خطهای AE، BF، CG و DH بر هم منطبق است. معلوم است که این نقطهٔ مشترک میان این پاره‌خطها مرکز تقارن هشت‌ضلعی موردنظر است.

راه‌حل دوم. طول ضلعهای هشت‌ضلعی موردنظر را $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n بنامید. در این صورت

$$a_۱ + a_۲\varepsilon + \cdots + a_۸\varepsilon^۷ = ۰$$

که در آن $\varepsilon = \cos\frac{۲\pi}{۸} + i\sin\frac{۲\pi}{۸}$. توجه کنید که $\varepsilon^۴ = -۱$ و درنتیجه تساوی بالا را می‌توان به‌شکل

$$a_۱ - a_۵ + (a_۲ - a_۶)\varepsilon + (a_۳ - a_۷)\varepsilon^۲ + (a_۴ - a_۸)\varepsilon^۳ = ۰$$

نوشت. بنابراین ε ریشهٔ مشترک چندجمله‌ایهای

$$f(x) = x^۴ + ۱$$

و

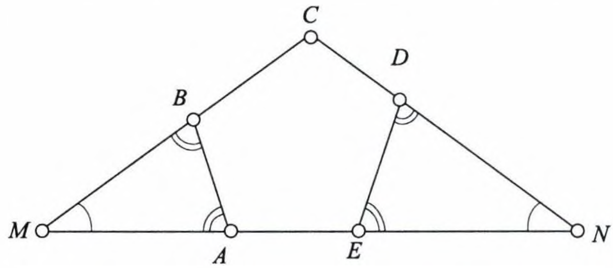
$$g(x) = a_۱ - a_۵ + (a_۲ - a_۶)\varepsilon + (a_۳ - a_۷)\varepsilon^۲ + (a_۴ - a_۸)\varepsilon^۳$$

است، که ضریبهایشان عددهایی گویا هستند. اگر g چندجمله‌ایی غیرثابت باشد، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک f و g چندجمله‌ایی غیرثابت با ضریبهای گویاست، که ممکن نیست، زیرا f در مجموعهٔ چندجمله‌ایهای با ضریبهای گویا تحویلناپذیر است. (برای اینکه بفهمید چرا چنین است، توجه کنید که ریشه‌های این چندجمله‌ای غیرحقیقی‌اند، پس تنها راهی که بتوان آن را به‌شکل حاصلضربی از چندجمله‌هایی که ضریبهایشان حقیقی‌اند نوشت چنین است: $f = (x^۲ + \sqrt{۲}x + ۱)(x^۲ - \sqrt{۲}x + ۱)$). بنابراین، g باید ثابت باشد و درنتیجه ضلعهای روبه‌رو در هشت‌ضلعی موردنظر برابر و موازی‌اند. انتهای راه‌حل مانند راه‌حل قبل است.

مسألهٔ ۳ . فرض کنید $ABCDE$ پنج‌ضلعی محدبی باشد که زاویه‌هایش برابرند و طول ضلعهایش عددهایی گویا هستند. ثابت کنید این پنج‌ضلعی منتظم است.

(المپیاد ریاضی بالکان)

راه‌حل اول. فرض کنید M و N به‌ترتیب نقطه‌های برخورد خط AE با BC و CD باشند.



چون زاویه‌های $ABCDE$ برابرند، مثلثهای AMB و DNE متساوی‌الساقین‌اند و $\angle M = \angle N = ۳۶^\circ$. بنابراین مثلث CMN هم متساوی‌الساقین است و $CM = CN$. به این ترتیب،

$$BC + BM = CD + DN$$

اما $AB = ۲\cos ۷۲^\circ BM$ و $DE = ۲\cos ۷۲^\circ DN$، و درنتیجه

$$AB - DE = ۲\cos ۷۲^\circ (BM - DN) = ۲\cos ۷۲^\circ (CD - BC)$$

چون $\cos ۷۲^\circ$ عددی گویا نیست، از تساوی آخر نتیجه می‌شود $AB = DE$ و $CD = BC$. اکنون آنچه می‌خواهیم به‌سادگی به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. حکمی کلیتر را ثابت می‌کنیم.

لم ۲ . عدد طبیعی p وقتی و فقط وقتی اول است که هر pضلعی محدب که زاویه‌هایش برابرند و طول ضلعهایش گویا هستند منتظم باشد.

برهان. فرض کنید p عددی اول باشد و عددهای گویای $a_۱$، $a_۲$، ... و a_p طول ضلعهای چندضلعی‌ای محدب باشند که زاویه‌هایش برابرند. دیدیم که اگر

$$\varepsilon = \cos \frac{۲\pi}{p} + i \sin \frac{۲\pi}{p}$$

آن‌وقت ε ریشهٔ چندجمله‌ای

$$P(X) = a_۱ + a_۲ X + \cdots + a_p X^{p-۱}$$

است. از طرف دیگر، ε ریشهٔ چندجمله‌ای

$$Q(X) = ۱ + X + X^{۲} + \cdots + X^{p-۱}$$

هم هست. چون این دو چندجمله‌ای ریشه‌ای مشترک دارند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان باید چندجمله‌ایی غیرثابت باشد که ضریبهایش عددهایی گویا هستند. بنابراین Q را می‌توان به‌شکل حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای غیرثابت که ضریبهایشان عددهایی گویا هستند تجزیه کرد، که ممکن نیست (برای اثبات این مطلب می‌توان از محک آیزنشتاین در مورد چندجمله‌ای $Q(X+۱)$ استفاده کرد).

برعکس، فرض کنید p عددی اول نباشد و مثلاً $p = mn$، که در آن m و n عددهایی طبیعی و بزرگتر از ۱ اند. بنابراین ε^n ریشهٔ mامی از واحد است، یعنی

$$۱ + \varepsilon^n + \varepsilon^{۲n} + \cdots + \varepsilon^{(m-۱)n} = ۰$$

اگر این تساوی را با تساوی

$$۱ + \varepsilon + \varepsilon^{۲} + \varepsilon^{۳} + \cdots + \varepsilon^{p-۱} = ۰$$

جمع کنیم معلوم می‌شود که ε ریشه‌ای از چندجمله‌ایی است که درجه‌اش $p - ۱$ است و یکی از ضریبهایش ۱ و ضریب دیگری از آن ۲ است. یعنی pضلعی محدبی وجود دارد که زاویه‌هایش برابرند، طول یکی از ضلعهایش ۱ است و طول ضلع دیگری از آن ۲ است. چون این چندضلعی منتظم نیست، ادعایمان را ثابت کرده‌ایم. ∎

مسألهٔ ۴. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n (به همین ترتیب) طول ضلعهای چندضلعی‌ای محدب باشند که زاویه‌هایش برابر است. ثابت کنید اگر $a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_n$، آن‌وقت این چندضلعی منتظم است.

(المپیاد بین‌المللی ریاضی)

راه‌حل اول. دو حالت را بررسی می‌کنیم: n فرد باشد و n زوج باشد. اگر n فرد باشد و مثلاً $n = ۲k + ۱$، نیمساز زاویهٔ $A_{۲k+۱}A_۱A_۲$ را در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که این نیمساز بر ضلع $A_{k+۱}A_{k+۲}$ عمود است. همهٔ ضلعهای چندضلعی موردنظر را بر این خط تصویر کنید. اگر طول تصویر ضلع $A_iA_{i+۱}$ را با x_i نشان دهیم (طبق معمول فرض می‌کنیم $A_{۲k+۲} = A_۱$)، آن‌وقت

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = x_{k+۲} + x_{k+۳} + \cdots + x_{۲k+۱} = A_۱B$$

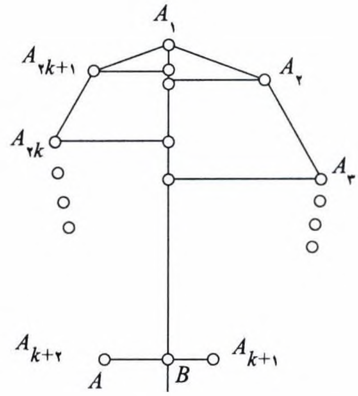
(شکل صفحهٔ بعد را ببینید). از طرف دیگر، زاویهٔ میان $A_iA_{i+۱}$ و $A_۱B$ برابر است با زاویهٔ میان $A_{۲k+۳-i}A_{۲k+۲-i}$ و $A_۱B$، درنتیجه

$$x_i \geq x_{۲k+۲-i}, \qquad ۱ \leq i \leq k$$

بنابراین، تساوی بالا فقط وقتی درست است که ضلعهای چندضلعی موردنظر برابر باشند.

اگر n زوج باشد، استدلال مانند قبل است، فقط در این حالت به‌جای نیمساز زاویهٔ $A_{۲k+۱}A_۱A_۲$ باید

عمودهای وارد بر ضلعهای $A_۱A_۲$ و $A_{k+۱}A_{k+۲}$ را در نظر بگیریم (به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که در این حالت این دو ضلع موازی‌اند).



راه‌حل دوم. فرض کنید

$$\varepsilon = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}$$

در این صورت ε ریشهٔ nام اولیه‌ای از واحد و ریشهٔ چندجمله‌ای

$$P(X) = a_۱ + a_۲X + \cdots + a_nX^{n-۱}$$

است. حکم مسأله از لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۳. فرض کنید

$$P(X) = a_۱ + a_۲X + \cdots + a_nX^{n-۱}$$

که در آن

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_n > ۰$$

اگر α ریشه‌ای از P باشد، آن‌وقت $|\alpha| \geq ۱$، و فقط وقتی $|\alpha| = ۱$ که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.

برهان. توجه کنید که

$$a_۱ + a_۲\alpha + \cdots + a_n\alpha^{n-۱} = ۰$$

اگر این تساوی را در $۱ - \alpha$ ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$-a_۱ + \alpha(a_۱ - a_۲) + \alpha^۲(a_۲ - a_۳) + \cdots + \alpha^{n-۱}(a_{n-۱} - a_n) + a_n\alpha^n = ۰$$

یا، معادل آن،

$$a_۱ = \alpha(a_۱ - a_۲) + \alpha^۲(a_۲ - a_۳) + \cdots + \alpha^{n-۱}(a_{n-۱} - a_n) + a_n\alpha^n$$

اکنون فرض کنید $|\alpha| = 1$. در این صورت

$$\begin{aligned} a_1 &= |\alpha(a_1 - a_2) + \alpha^2(a_2 - a_3) + \cdots + \alpha^{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n\alpha^n| \\ &\le |\alpha|(a_1 - a_2) + |\alpha|^2(a_2 - a_3) + \cdots + |\alpha|^{n-1}(a_{n-1} - a_n) + a_n|\alpha|^n \\ &\le (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + a_n = a_1 \end{aligned}$$

درنتیجه، در همهٔ نابرابریها باید تساوی داشته باشیم. چون α عددی حقیقی نیست، این امر فقط وقتی ممکن است که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. ∎

مسألهٔ ۵ . فرض کنید n عددی طبیعی باشد که توان هیچ عدد اولی نیست. ثابت کنید چندضلعی‌ای محدب وجود دارد که زاویه‌هایش برابرند و طول ضلعهایش به ترتیبی ۱، ۲، . . . و n است.

راه‌حل. تنها کاری که باید بکنیم این است که ثابت کنیم چندجمله‌ایی مانند

$$f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$$

وجود دارد که در آن a_1، a_2، . . . و a_n جایگشتی از عددهای ۱، ۲، . . . و n است و $f(\varepsilon) = 0$، که در اینجا $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. معادل این حکم را ثابت می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم جایگشتی از عددهای ۰، ۱، . . . و $n-1$ مانند $\sigma(0)$، $\sigma(1)$، . . . و $\sigma(n-1)$ وجود دارد که

$$\varepsilon^{\sigma(0)} + 2\varepsilon^{\sigma(1)} + 3\varepsilon^{\sigma(2)} + \cdots + n\varepsilon^{\sigma(n-1)} = 0$$

ابتدا توجه کنید که چون n توانی از عددی اول نیست، می‌توان نوشت $n = pq$، که در آن p و q دو عدد طبیعی و نسبت به هم اول‌اند.

فرض کنید k عددی صحیح باشد، $0 \le k \le n-1$ و

$$a = \left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor, \qquad b = k - q\left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor$$

فرض کنید $\sigma(k)$ باقیماندهٔ تقسیم $aq + bp$ در تقسیم بر n باشد. چون p و q نسبت به هم اول‌اند، σ خوش‌تعریف است. توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) = 1 &+ 2\varepsilon^p + 3\varepsilon^{2p} + \cdots + q\varepsilon^{(q-1)p} \\ &+ (q+1)\varepsilon^q + (q+2)\varepsilon^{q+p} + \cdots + 2q\varepsilon^{q+(q-1)p} \\ &+ (2q+1)\varepsilon^{2q} + (2q+2)\varepsilon^{2q+p} + \cdots + 3q\varepsilon^{2q+(q-1)p} \\ &\vdots \\ &+ ((p-1)q+1)\varepsilon^{(p-1)q} + \cdots + pq\varepsilon^{(p-1)q+(q-1)p} \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم

$$\zeta = 1 + 2\varepsilon^p + 3\varepsilon^{2p} + \cdots + q\varepsilon^{(q-1)p}$$

$$\xi = 1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(q-1)p}$$

آن‌وقت

$$f(\varepsilon) = \zeta + q\varepsilon^q\xi + \varepsilon^q\zeta + 2q\varepsilon^{2q}\xi + \varepsilon^{2q}\zeta + \cdots + (p-1)q^{(p-1)q}\xi + \varepsilon^{(p-1)q}\zeta$$

معلوم است که $\xi = 0$، بنابراین

$$f(\varepsilon) = \zeta(1 + \varepsilon^q + \varepsilon^{2q} + \cdots + \varepsilon^{(p-1)q}) = 0$$

همان چیزی که می‌خواهیم.

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

Titu Andreescu, Bogdan Enescu, Equiangular Polygons, An Algebraic Approach, *Mathematical Reflections*, 1, 2006.

پنجاه‌وششمین آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا

گروه الف، ۱ فوریهٔ ۲۰۰۵

۱. ۱۰٪ عدد x، ۲ و ۲۰٪ آن y است. $x - y$ کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۵ د) ۱۰ ه) ۲۰

۲. جواب معادله‌های $۲x + ۷ = ۳$ و $bx - ۱۰ = -۲$ برحسب x یک عدد است. مقدار b کدام است؟

الف) ۸− ب) ۴− ج) ۲− د) ۴ ه) ۸

۳. قطر مستطیلی که آن را با x نشان می‌دهیم دو برابر عرض مستطیل است. مساحت مستطیل برابر است با

الف) $\frac{۱}{۴}x^۲$ ب) $\frac{۲}{۵}x^۲$ ج) $\frac{۱}{۲}x^۲$ د) $x^۲$ ه) $\frac{۳}{۲}x^۲$

۴. مغازه‌ای هر پنجره را ۱۰۰ دلار می‌فروشد. این هفته به‌ازای خرید هر ۴ پنجره، ۱ پنجره رایگان به مشتریان خود می‌دهد. دیوید ۷ تا پنجره می‌خواهد و پیتر ۸ تا. اگر این دو نفر به‌جای اینکه جداگانه خرید کنند با هم خرید کنند چند دلار صرفه‌جویی می‌کنند؟

الف) ۱۰۰ ب) ۲۰۰ ج) ۳۰۰ د) ۴۰۰ ه) ۵۰۰

۵. میانگین ۲۰ عدد برابر ۳۰ و میانگین ۳۰ عدد دیگر برابر ۲۰ است. میانگین این ۵۰ عدد چند است؟

الف) ۲۳ ب) ۲۴ ج) ۲۵ د) ۲۶ ه) ۲۷

۶. خانه‌های جاش و مایک ۱۳ مایل از هم فاصله دارند. دیروز، جاش با دوچرخه به طرف خانهٔ مایک رفت و مدتی بعد مایک با دوچرخهٔ خودش به‌طرف خانهٔ جاش به‌راه افتاد. وقتی به هم رسیدند جاش دو برابر مدت زمان مایک و با سرعتی معادل چهارپنجم سرعت او دوچرخه‌سواری کرده بود. وقتی به هم رسیدند مایک چند مایل دوچرخه‌سواری کرده بوده است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۷. مربع $EFGH$ طوری درون مربع $ABCD$ قرار گرفته است که اگر هر ضلع آن را امتداد دهیم از یکی از رأسهای $ABCD$ می‌گذرد. طول هر ضلع مربع $ABCD$ برابر با $\sqrt{۵۰}$ است و $BE = ۱$. مساحت $EFGH$ برابر است با

الف) ۲۵ ب) ۳۲ ج) ۳۶ د) ۴۰ ه) ۴۲

۸. فرض کنید A، M و C رقمهایی هستند که

$$(۱۰۰A + ۱۰M + C)(A + M + C) = ۲۰۰۵$$

مقدار A کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۹. به‌ازای دو مقدار از a معادلهٔ $۴x^۲ + ax + ۸x + ۹ = ۰$ فقط یک جواب دارد. مجموع این مقدارهای a برابر است با

الف) ۱۶− ب) ۸− ج) ۰ د) ۸ هـ) ۲۰

۱۰. شش وجه مکعبی چوبی را که روی هر وجه آن n مربع واحد وجود دارد با رنگ قرمز رنگ کرده‌ایم و سپس آن را به $n^۳$ مکعب واحد بریده‌ایم. دقیقاً $\frac{۱}{۴}$ تعداد کل وجه‌های این مکعبها قرمز است. n کدام است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

۱۱. چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که رقم وسط هر یک از آنها میانگین دو رقم اول و آخر آن است؟

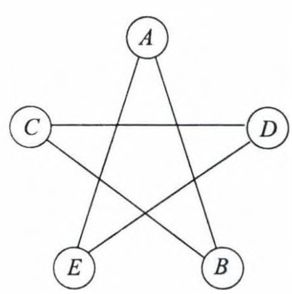
الف) ۴۱ ب) ۴۲ ج) ۴۳ د) ۴۴ هـ) ۴۵

۱۲. خطی از نقاط $A(۱,۱)$ و $B(۱۰۰,۱۰۰۰)$ گذشته است. چند نقطهٔ دیگر با مختصات صحیح بر روی این خط هستند که بین نقاط A و B قرار دارند؟

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۳ د) ۸ هـ) ۹

۱۳. در هر یک از رأسهای ستارهٔ پنج‌ضلعی $ABCDE$ یکی از عددهای ۳، ۵، ۶، ۷ و ۹ را نوشته‌ایم (از هر عدد دقیقاً یک بار استفاده کرده‌ایم). مجموع عددهای نوشته‌شده در دو سر پاره‌خطهای AB، BC، CD، DE و EA تصاعدی حسابی تشکیل داده‌اند، که البته جمله‌هایش لزوماً به این ترتیب نیستند. جملهٔ میانی این تصاعد حسابی برابر است با

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ هـ) ۱۳

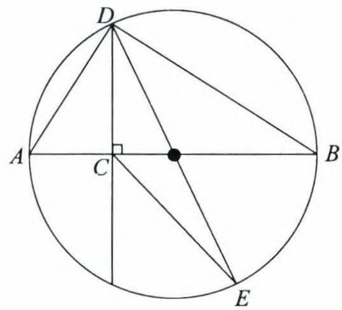


۱۴. از تاسی معمولی یکی از نقطه‌ها را به تصادف حذف کرده‌ایم و احتمال برداشتن هر نقطه‌ای با بقیه برابر است. تاس را می‌ریزیم؛ احتمال اینکه تاس عددی فرد بنشیند کدام است؟

الف) $\frac{۵}{۱۱}$ ب) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۱۱}{۲۱}$ هـ) $\frac{۶}{۱۱}$

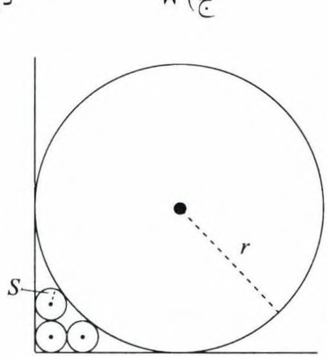
۱۵. فرض کنید C نقطه‌ای روی قطر AB دایره‌ای باشد و $2AC = BC$. D و E نقطه‌هایی دیگر روی دایره‌اند، به‌طوری که $DC \perp AB$ و DE قطر دیگر دایره است. نسبت مساحت مثلث DCE به مثلث ABD برابر است با

الف) $\frac{۱}{۶}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{۲}{۳}$



۱۶. در ربع اول صفحهٔ xy سه دایره به شعاع s رسم شده‌اند. دایرهٔ اول بر هر دو محور مماس است، دایرهٔ دوم بر محور x و دایرهٔ اول مماس است و دایرهٔ سوم بر محور y و دایرهٔ اول. دایره‌ای با شعاع r، بر هر دو محور و دایره‌های دوم و سوم مماس است. نسبت $\frac{r}{s}$ کدام است؟

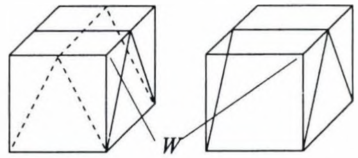
الف) ۵ ب) ۶ ج) ۸ د) ۹ هـ) ۱۰



۱۷. مکعب واحد را دو بار بریده‌ایم تا سه منشور مثلثی به‌دست آید که دوتای آنها همنهشت‌اند (شکل ۱). سپس مکعب را دوباره به همان روش در امتداد خطهای نقطه‌چین در شکل ۲ بریده‌ایم و این‌بار ۹ قطعه حاصل

شده است (شکل ۲). حجم قطعه‌ای که شامل رأس W است چقدر است؟

الف) $\frac{1}{12}$ ب) $\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) $\frac{1}{6}$ هـ) $\frac{1}{4}$



شکل ۲ شکل ۱

۱۸. عدد مرکبی را که بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد «اول‌نما» می‌نامند. کوچکترین سه عدد اول‌نما ۴۹، ۷۷ و ۹۱ هستند. ۱۶۸ عدد اول کوچکتر از ۱۰۰۰ وجود دارد. تعداد عددهای اول‌نمای کمتر از ۱۰۰۰ کدام است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۰۲ ج) ۱۰۴ د) ۱۰۶ هـ) ۱۰۸

۱۹. کیلومترشمار ماشینی خراب از عدد ۳ به ۵ می‌پرد، یعنی از رقم ۴ صرف‌نظر از اینکه جایش کجاست رد نمی‌شود. مثلاً اگر کیلومترشمار عدد ۰۰۰۰۳۹ را نشان دهد، بعد از طی ۱ مایل عدد ۰۰۰۰۵۰ را نمایش می‌دهد. اگر کیلومترشمار عدد ۰۰۲۰۰۵ را نشان دهد، ماشین چند مایل را طی کرده است؟

الف) ۱۴۰۴ ب) ۱۴۶۲ ج) ۱۶۰۴ د) ۱۶۰۵ هـ) ۱۸۰۴

۲۰. فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

فرض‌کنید $f^{(2)}(x)=f\big(f(x)\big)$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n\ge 2$، $f^{(n+1)}(x)=f^{(n)}\big(f(x)\big)$. به‌ازای چند تا x در بازهٔ $[0,1]$، $f^{(2005)}(x)=\frac{1}{2}$؟

الف) ۰ ب) ۲۰۰۵ ج) ۴۰۱۰ د) 2005^2 هـ) 2^{2005}

۲۱. چند تا سه‌تایی از عددهای صحیح مانند (a,b,c) که در آنها $a\ge 2$، $b\ge 1$ و $c\ge 0$ در تساویهای $\log_a b=c^{2005}$ و $a+b+c=2005$ صدق می‌کنند؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۲۲. جعبهٔ مکعب‌مستطیل شکل P در کره‌ای به شعاع r محاط شده است. مساحت سطح P برابر با ۳۸۴ و مجموع طول یالهایش ۱۱۲ است. r کدام است؟

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۴ هـ) ۱۶

۲۳. دو عدد متمایز مانند a و b به‌طور تصادفی از مجموعهٔ $\{۲, ۲^۲, ۲^۳, \ldots, ۲^{۲۵}\}$ انتخاب شده‌اند. احتمال اینکه $\log_a b$ عددی صحیح باشد کدام است؟

الف) $\frac{۲}{۲۵}$ ب) $\frac{۳۱}{۳۰۰}$ ج) $\frac{۱۳}{۱۰۰}$ د) $\frac{۷}{۵۰}$ هـ) $\frac{۱}{۲}$

۲۴. فرض کنید $P(x) = (x-۱)(x-۲)(x-۳)$. به‌ازای چندتا چندجمله‌ای مانند $Q(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ سوم $R(x)$ وجود دارد که $P\big(Q(x)\big) = P(x) \cdot R(x)$؟

الف) ۱۹. ب) ۲۲ ج) ۲۴ د) ۲۷ هـ) ۳۲

۲۵. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ نقطه‌ها با مختصاتی مانند (x, y, z) باشد که در آنها x، y و z عددهایی در مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲\}$اند. چند مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد که همهٔ رأسهایشان در مجموعهٔ Sاند؟

الف) ۷۲ ب) ۷۶ ج) ۸۰ د) ۸۴ هـ) ۸۸

(پاسخ در صفحهٔ ۶۴)

بیست‌وششمین تورنمنت شهرها

دور پاییزی، ۲۰۰۵

سؤالهای دو سال اول

سطح معمولی

۱. در مثلث ABC نقطه‌های D، E و F به‌ترتیب وسط BC، CA و ABاند و L، M و N به‌ترتیب پای ارتفاع وارد از A، B و Cاند. ثابت کنید می‌توان با پاره‌خطهای DN، EL و FM مثلثی رسم کرد.

۲. در هر رأس مکعبی عددی نوشته‌ایم. در هر مرحله، هر عدد را با میانگین عددهای نوشته‌شده در سه رأس مجاورش عوض می‌کنیم. هر هشت عدد را همزمان عوض می‌کنیم. پس از ده مرحله، همهٔ عددها همان عددهایی شده‌اند که در ابتدا بودند. آیا لزوماً نتیجه می‌شود که هر هشت عدد در آغاز برابر بوده‌اند؟

۳. پاره‌خطی به طول ۱ را به یازده پاره‌خط کوتاهتر که طول هر کدام حداکثر a است بریده‌ایم. به‌ازای چه مقدارهایی از a حکم زیر درست است: صرفنظر از اینکه پاره‌خط را چگونه بریده باشیم، با هر سه تا از این یازده پاره‌خط می‌توان مثلثی رسم کرد.

۴. یکی از مهره‌های شطرنج را می‌توان هر جایی روی صفحهٔ شطرنجی ۱۵ × ۱۵ قرار داد. این مهره می‌تواند از روی ۸ یا ۹ خانهٔ خالی در جهت عمودی یا افقی بپرد، اما نمی‌تواند به خانه‌ای دو بار برود. این مهره حداکثر به چند خانه می‌تواند برود؟

۵. یکی از شش سکه‌ای که در اختیار داریم تقلبی است. وزن سکهٔ واقعی یا سکهٔ تقلبی را نمی‌دانیم، اما می‌دانیم که وزن سکه‌های واقعی یکسان است و با وزن سکهٔ تقلبی فرق دارد. با ترازویی که وزن کل سکه‌هایی را که با آن می‌کشیم نشان می‌دهد، چگونه می‌توانیم با سه بار وزن کردن سکهٔ تقلبی را پیدا کنیم؟

سطح پیشرفته

۱. عدد مقلوب عددی طبیعی است که از چپ به راست همان‌طور خوانده می‌شود که از راست به چپ. مثلاً ۱، ۳۴۳ و ۲۰۰۲ مقلوب‌اند، اما ۲۰۰۵ نیست. آیا می‌توان ۲۰۰۵ عدد طبیعی مانند n پیدا کرد که n و $n + ۱۱۰$ هر دو مقلوب باشند؟

۲. امتداد ضلعهای AB و AC از چهارضلعی محدب $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کرده‌اند. نقطه‌های M و N به‌ترتیب وسطهای AB و CDاند. ثابت کنید اگر $AD = BC$، آن‌وقت مثلث MNK منفرجه است.

۳. در آغاز، روی هر یک از ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ یک رخ قرار دارد. در هر حرکت می‌توان هر رخی را که تعدادی فرد از رخهای باقی‌مانده روی صفحه را تهدید می‌کند برداشت. حداکثر چند رخ را می‌توان برداشت؟

۴. طول هر ضلع چندضلعی‌ای از ۱۰۰ سانتی‌متر بیشتر است. در آغاز، دو مورچه روی یک ضلع این چندضلعی به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. این دو مورچه روی محیط چندضلعی طوری حرکت می‌کنند که فاصله‌شان از هم، در امتداد خطی راست، ۱۰ سانتی‌متر باقی می‌ماند.

الف) فرض کنید چندضلعی محدب باشد. آیا همواره ممکن است که از هر نقطهٔ چندضلعی هر دو مورچه رد شوند؟

ب) فرض کنید چندضلعی لزوماً محدب نباشد. آیا همواره ممکن است که از هر نقطهٔ چندضلعی دست‌کم یکی از مورچه‌ها رد شود؟

۵. بزرگترین عدد طبیعی مانند N را پیدا کنید که سه‌تایی یکتایی مانند (x, y, z) از عددهای طبیعی وجود داشته باشد که $۹۹x + ۱۰۰y + ۱۰۱z = N$.

۶. ۱۰۰۰ شیشه مربا داریم که مقدار مربای هر شیشه با بقیه فرق دارد، اما از $\frac{۱}{۱۰۰}$ مقدار کل مرباها بیشتر نیست. هر روز دقیقاً ۱۰۰ تا از شیشه‌ها را انتخاب می‌کنیم و از هر شیشه به یک اندازه مربا می‌خوریم. ثابت کنید می‌توان در تعدادی متناهی از روزها همهٔ مربا را خورد.

سؤالهای دو سال آخر

سطح معمولی

۱. آیا عددهایی طبیعی مانند a، b و n وجود دارند که $n^۲ < a^۳ < b^۳ < (n + ۱)^۲$؟

۲. پاره‌خطی به طول $\sqrt{۵} + \sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ در دست است. آیا می‌توان پاره‌خطی به طول ۱ را با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار رسم کرد؟

۳. یکی از شش سکه‌ای که در اختیار داریم تقلبی است. وزن سکهٔ واقعی یا سکهٔ تقلبی را نمی‌دانیم، اما می‌دانیم که وزن سکه‌های واقعی یکسان است و با وزن سکه‌های تقلبی فرق دارد. با ترازویی که وزن کل

سکه‌هایی را که با آن می‌کشیم نشان می‌دهد، چگونه می‌توانیم با سه‌بار وزن کردن سکهٔ تقلبی را پیدا کنیم؟

۴. روی هر سه ضلع قائم‌الزاویهٔ ABC و در بیرون آن مربعهایی را رسم کرده‌ایم که مرکزهای آنها D، E و F است. ثابت کنید نسبت مساحت مثلث DEF به مساحت مثلث ABC

الف) از ۱ بیشتر است.

ب) دست‌کم ۲ است.

۵. مکعبی روی صفحه قرار گرفته است و روی وجه بالایی آن حرف A نوشته شده است. در هر حرکت، مکعب از روی یکی از یالهای پایینی‌اش روی وجه مجاور آن برگردانده می‌شود. پس از چند حرکت، مکعب به حالت اولیه‌اش بازگردانده می‌شود (باز هم حرف A روی وجه بالایی است). آیا ممکن است حرف A، 90° چرخیده است؟

سطح پیشرفته

۱. به‌ازای کدام عددهای طبیعی مانند n می‌توان عددهایی طبیعی و متمایز مانند a_1، a_2، ... و a_n پیدا کرد که

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1}$$

عددی طبیعی باشد؟

۲. طول هر ضلع چندضلعی‌ای از ۱۰۰ سانتی‌متر بیشتر است. در آغاز، دو مورچه روی یک ضلع این چندضلعی به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. این دو مورچه روی محیط چندضلعی طوری حرکت می‌کنند که فاصله‌شان از هم، در امتداد خطی راست، ۱۰ سانتی‌متر باقی می‌ماند.

الف) فرض کنید چندضلعی محدب باشد. آیا همواره ممکن است که از هر نقطهٔ چندضلعی هر دو مورچه رد شوند؟

ب) فرض کنید چندضلعی لزوماً محدب نباشد. آیا همواره ممکن است که از هر نقطهٔ چندضلعی دست‌کم یکی از مورچه‌ها رد شود؟

۳. در آغاز، روی هر یک از ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنجی 8×8 یک رخ قرار دارد. در هر حرکت می‌توان هر رخی را که تعدادی فرد از رخهای باقی‌مانده روی صفحه را تهدید می‌کند برداشت. حداکثر چند رخ را می‌توان برداشت؟

۴. روی دایره‌ای تعدادی متناهی نقطه به رنگ قرمزند. هر یک از این نقطه‌ها با عددی مثبت و کوچکتر از یا برابر با ۱ برچسب خورده است. دایره را به سه کمان طوری تقسیم کرده‌ایم که هر نقطهٔ قرمز دقیقاً روی یکی از آنها قرار گرفته است. مجموع برچسبهای همهٔ نقطه‌های قرمز روی هر یک از کمانها را حساب می‌کنیم. اگر روی

کمانی نقطه‌ای قرمز وجود نداشت این مجموع را صفر در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که همواره می‌توان عمل تقسیم را طوری انجام داد که تفاضل مجموعهای نظیر هر دو کمان حداکثر ۱ باشد.

۵. در مثلث ABC، $\angle A = 2\angle B = 4\angle C$. نیمسازهای زاویه‌های A، B و C ضلعهای روبه‌رو به این زاویه‌ها را به‌ترتیب در نقطه‌های D، E و F قطع کرده‌اند. ثابت کنید $DE = DF$.

۶. در آغاز روی تخته‌سیاه چیزی نوشته نشده است. در هر حرکت می‌توان یا دو تا ۱ اضافه کرد یا دو نسخه از عددی مانند n را پاک کرد و به‌جای آنها $n - 1$ و $n + 1$ را نوشت. دست‌کم چند حرکت لازم است تا ۲۰۰۵ روی تخته نقش ببندد؟

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول خرداد ماه ۱۳۸۵ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۱۹۱. a، b و k عددهایی صحیح‌اند و

$$0 < a^2 + b^2 - kab \le k$$

ثابت کنید $a^2 + b^2 - kab$ مربع کامل است.

۱۹۲. همهٔ عددهای طبیعی مانند k، $k > 1$، را طوری پیدا کنید که عددهایی طبیعی و متمایز مانند m و n وجود داشته باشند که بتوان هر یک از عددهای $k^m + 1$ و $k^n + 1$ را با معکوس کردن رقمهای دیگری به‌دست آورد.

۱۹۳. آیا عددهایی حقیقی مانند a و b وجود دارند که

الف) $a + b$ گویا باشد اما به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \ge 2$، $a^n + b^n$ گنگ باشد؟

ب) $a + b$ گنگ باشد اما به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \ge 2$، $a^n + b^n$ گویا باشد؟

۱۹۴. k، l، m و n عددهایی طبیعی‌اند، $k < l < m < n$ و $kn = lm$. ثابت کنید $\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 \ge k + 2$.

۱۹۵. a، b، c، x، y و z عددهای حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{c+a}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

۱۹۶. همهٔ تابعها مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f(x^5 - y^5) = x^2 f(x^3) - y^2 f(y^3)$$

۱۹۷. دو شعبده‌باز به طریق زیر شعبده‌بازی می‌کنند. شعبده‌باز اول از سالن بیرون می‌رود. شعبده‌باز دوم دسته‌ای از ۱۰۰ کارت را که روی آنها عددهای از ۱ تا ۱۰۰ نوشته است درمی‌آورد و از سه نفر از تماشاچیان می‌خواهد

که یکی‌یکی و هر نفر یک کارت بردارند. شعبده‌باز دوم کارتهایی را که هر تماشاچی برداشته است می‌بیند. او سپس یک کارت از کارتهای باقی‌مانده در دسته به این سه کارت اضافه می‌کند. تماشاچیان این چهار کارت را بُر می‌زنند، بعد شعبده‌باز اول را صدا می‌زنند و این چهار کارت را به او می‌دهند. شعبده‌باز اول به این چهار کارت نگاهی می‌اندازد و «حدس می‌زند» که کدام کارت را تماشاچی اول برداشته است، کدام کارت را تماشاچی دوم وکدام کارت را تماشاچی سوم. ثابت کنید شعبده‌بازها می‌توانند این کار را به‌درستی انجام دهند.

۱۹۸. مستطیلی ۳×۲۰۰ را به مستطیلهایی ۲×۱ تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید تعداد راههای انجام این کار بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۹۹. طول ضلعهای چندضلعی‌ای در صفحه با هم برابر است و مختصات رأسهای این چندضلعی عددهایی گویا هستند. ثابت کنید تعداد ضلعهای این چندضلعی عددی زوج است.

۲۰۰. A، B و C سه نقطهٔ متمایز در صفحه‌اند. درضمن، مختصات این نقطه‌ها عددهایی صحیح‌اند و

$$(AB + BC)^۲ < ۸S_{ABC} + ۱$$

ثابت کنید نقطه‌های A، B و C سه رأس یک مربع‌اند.

راه‌حلها

۱۴۶. آیا عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $n!$ با ۱۳۸۴ شروع شود؟

راه‌حل. فرض کنید $m = ۱۰۰۰۱۰۰۰۰۰$. اگر $k < ۹۹۹۹۹$ و

$$(m + k)! = abcd\ldots$$

آن‌وقت

$$(m + k + ۱)! = abcd\ldots \times ۱۰۰۰۱\ldots = efgh\ldots$$

که در آن $efgh$ یا برابر با $abcd$ است یا برابر با چهار رقم اول $abcd + ۱$. بنابراین چهار رقم اول هر یک از عددهای

$$(m + ۱)!, \qquad (m + ۲)!, \ldots, \qquad (m + ۹۹۹۹۹)! \qquad (*)$$

یا همان چهار رقم اول عدد قبل از آن است یا چهار رقم اول عددی که از این چهار رقم به‌علاوهٔ یک به‌دست می‌آید. همچنین، چون رقم پنجم $(m + k)!$ $(k < ۹۹۹۹۹)$ برابر با ۱ است، در محاسبهٔ $(m + k + ۱)!$ رقم پنجم $(m + k)!$ را باید با رقم اول $(m + k)!$ جمع کنیم. بنابراین در میان هر ده عدد متوالی در میان عددهای $(*)$ چهار رقم اول یکی از عددها یکی زیاد می‌شود. درنتیجه، چهار رقم اول این عددها هر یک از ۹۰۰۰ عدد ممکن را اختیار می‌کنند. به‌ویژه، یکی از آنها ۱۳۸۴ است.

۱۴۷. تعداد مقسوم‌علیه‌های همهٔ جمله‌های دنباله‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی برابر است. ثابت کنید زیردنباله‌ای نامتناهی از این دنباله وجود دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عضو آن برابر است.

راه‌حل. به‌سادگی معلوم می‌شود که کافی است ثابت کنیم که اگر هر جملهٔ دنباله حداکثر n مقسوم‌علیه داشته باشد، آن‌وقت زیردنباله‌ای با ویژگیهای موردنظر وجود دارد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

اگر $n = ۱$، آن‌وقت هر جملهٔ دنباله برابر با ۱ است و می‌توانیم زیردنبالهٔ موردنظر را خود دنباله انتخاب کنیم. فرض کنید حکم به‌ازای $n = k$ درست باشد و $(a_i)_{i\geq ۱}$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی باشد که هر جمله‌اش حداکثر $k + ۱$ مقسوم‌علیه دارد. دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. عددی اول مانند p وجود دارد که بی‌نهایت جملهٔ این دنباله را می‌شمارد. فرض کنید این جمله‌ها $a_{i_۱}$، $a_{i_۲}$، ... باشند و دنبالهٔ

$$\frac{a_{i_۱}}{p}, \frac{a_{i_۲}}{p}, \dots$$

را در نظر بگیرید. هر جملهٔ این دنباله حداکثر k مقسوم‌علیه دارد. درنتیجه، بنابر فرض استقرا، می‌توانیم زیردنباله‌ای از آن مانند

$$\frac{a_{j_۱}}{p}, \frac{a_{j_۲}}{p}, \dots$$

انتخاب کنیم که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عضو آن برابر با عددی مانند d باشد. به این ترتیب، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عضو زیردنبالهٔ

$$a_{j_۱}, a_{j_۲}, \dots$$

از دنبالهٔ اصلی برابر با pd است و این زیردنباله ویژگیهای موردنظر را دارد.

حالت ۲. هر عدد اول فقط تعدادی متناهی از جمله‌های دنباله را می‌شمارد. زیردنباله‌ای پیدا می‌کنیم که هر دو عضو آن نسبت به هم اول‌اند. فرض کنید $i_۱ = ۱$. اگر $i_۱$، $i_۲$، ... و i_m انتخاب شده بودند، فرض کنید $i_{m+۱}$ کوچکترین عدد طبیعی بزرگتر از i_m باشد که $a_{i_{m+۱}}$ نسبت به هر یک از جمله‌های $a_{i_۱}$، ... و a_{i_m} اول است. چنین عددی وجود دارد، زیرا تعداد مقسوم‌علیه‌های اول جمله‌های $a_{i_۱}$، ... و a_{i_m} متناهی است و این مقسوم‌علیه‌های اول فقط تعدادی متناهی از جمله‌های دنباله را می‌شمارند. زیردنبالهٔ $(a_{i_k})_{k\geq ۱}$ ویژگیهای موردنظر را دارد.

۱۴۸. S مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی بزرگتر از ۱ است. می‌دانیم که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n عضوی از S مانند s وجود دارد که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک s و n یا ۱ است یا s. ثابت کنید دو عضو از S مانند s و t وجود دارند که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک s و t عددی اول است.

راه‌حل از شایان دشمیز، دبیرستان علامه حلی، تهران، منطقهٔ ۱۱. فرض کنید $S = \{s_۱, s_۲, \ldots, s_k\}$ و n کوچکترین عدد طبیعی باشد که

$$(n, s_i) > ۱, \qquad ۱ \leq i \leq k$$

((a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای طبیعی a و b است). توجه کنید که n بر مربع هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نیست. بنابر فرض مسأله، iای وجود دارد که $n \mid s_i$.

فرض کنید p مقسوم‌علیه اولی از s_i باشد. بنابر ویژگی n، $\frac{n}{p}$ نسبت به عضوی از S مانند s_j اول است. چون $(n, s_j) > ۱$، پس $p \mid s_j$، اما s_j بر هیچ مقسوم‌علیه اول دیگری از s_i بخش‌پذیر نیست (زیرا هر چنین مقسوم‌علیهی $\frac{n}{p}$ را می‌شمارد). بنابراین $p = (s_i, s_j)$، و حکم مسأله درست است.

۱۴۹. a، b، c و d عددهایی طبیعی‌اند، $a > b > c > d$ و

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

هر یک از عددهای $ab + cd$، $ac + bd$ و $ad + bc$ دست‌کم چند مقسوم‌علیه اول دارد؟

راه‌حل. پاسخ، به‌ترتیب ۳، ۳ و ۲ است و وقتی به‌دست می‌آید که $a = ۱۱$، $b = ۹$، $c = ۶$ و $d = ۱$.

فرض کنید

$$\alpha = b + d + a - c$$
$$\beta = b + d - a + c$$

ابتدا ثابت می‌کنیم $ad + bc$ اول نیست. چون

$$\alpha\beta = a(b + d + a - \alpha) + bd = a\alpha + (a + b)(a + d)$$

پس $\alpha \mid (a+b)(a+d)$. چون $\alpha > a + b$، α مقسوم‌علیه اول مشترکی مانند $p_۱$ با $a + b$ دارد.

چون $c - d = (a + b) - \alpha$، پس $p_۱ \mid c - d$. اکنون توجه کنید که

$$ad + bc = d(a + b) + b(c - d)$$

درنتیجه $p_۱ \mid ad + bc$. اما $p_۱ \neq ad + bc$، زیرا $p_۱ \leq \alpha$ و

$$ad + bc = d(a + b) + b(c - d) = d\alpha + (d + b)(c - d) > \alpha$$

برای کامل کردن راه‌حل کافی است عددهایی اول مانند $p_۲$ و $p_۳$، که لزومی ندارد متمایز باشند، پیدا کنیم که $p_۲p_۳$ برابر با $ab + cd$ و $ac + bd$ نباشد و هر دو آنها را بشمارد.

توجه کنید که $c - d < b < a$، پس

$$a + b = \alpha + c - d < \alpha + \frac{a + b}{۲}$$

و درنتیجه $a + b < ۲\alpha$، که چون $\alpha \mid (a+b)(a+d)$، پس α مقسوم‌علیه اول مشترکی مانند $p_۲$ با

$a+d$ دارد. از طرف دیگر، $b-c=\alpha-(a+d)$، پس $p_۲ \mid b-c$. چون

$$ab+cd=b(a+d)-d(b-c)$$

پس $p_۲ \mid ab+cd$.

اکنون توجه کنید که $\beta \mid (c+b)(c+d)$، زیرا

$$\alpha\beta=ac+bd=(b+d+c-\beta)+bd$$
$$=-\beta c+(b+c)(c+d)$$

ثابت می‌کنیم که β و $b+c$ مقسوم‌علیه اول مشترکی مانند $p_۳$ دارند. اگر چنین نباشد، $\beta \mid c+d$ و درنتیجه $\beta \mid a-b$، زیرا $a-b=c+d-\beta$. فرض کنید

$$k_۱=\frac{c+d}{\beta}, \qquad k_۲=\frac{a-b}{\beta}$$

چون $\beta>۰$، $c+d>a-b$ و درنتیجه $k_۱>k_۲\geq ۱$. توجه کنید که

$$۲\alpha\beta=۲(ac+bd)=(a+b)(c+d)+(a-b)(c-d)$$
$$=(a+b)k_۱\beta+k_۲\beta(c-d)$$

بنابراین

$$(k_۱-۲)(a+b)+(k_۲+۲)(c-d)=۰$$

که تناقض است، زیرا $k_۱\geq ۲$.

توجه کنید که $p_۲ \mid \alpha$ و $p_۳ \mid \beta$ و درنتیجه $p_۲p_۳ \mid ac+bd$. چون $\alpha>b-c\geq p_۲$ و $\beta>c-b$ ... پس $\alpha\beta>p_۲p_۳$. بنابراین در تجزیهٔ $ac+bd$ به عددهای اول باید عامل دیگری هم وجود داشته باشد.

چون $a-d=c+b-\beta$، پس $p_۳ \mid a-d$. توجه کنید که

$$ab+cd=ac+bd+(b-c)(a-d)$$

درنتیجه $p_۲p_۳ \mid ab+cd$. چون

$$ab+cd>ac+bd>p_۲p_۳$$

پس در تجزیهٔ $ab+cd$ به عددهای اول باید عامل دیگری هم وجود داشته باشد.

۱۵۰. n عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\sum_{m=۱}^{۶n-۱}\min\left(\left\{\frac{m}{۶n}\right\},\left\{\frac{m}{۳n}\right\}\right)=\frac{۹n-۳}{۴}$$

($\{t\}$ جزء کسری عدد حقیقی t است، یعنی $\{t\}=t-\lfloor t\rfloor$.)

راه‌حل از شایان دشمیز، دبیرستان علامه حلی، تهران، منطقهٔ ۱۱ و سینا کیهانیان، دبیرستان سلام، تهران، منطقهٔ ۱. توجه کنید که اگر $m < ۳n$، آن‌وقت

$$\left\{\frac{m}{۳n}\right\} = \frac{m}{۳n} > \frac{m}{۶n} = \left\{\frac{m}{۶n}\right\}$$

اگر $m = ۳n$، آن‌وقت

$$\left\{\frac{m}{۳n}\right\} = ۰ < \left\{\frac{m}{۶n}\right\} = \frac{۱}{۲}$$

اگر $m = ۳n + z$، $۰ < z < ۳n$، آن‌وقت $\frac{z}{۶n} < \frac{۱}{۲}$، پس $\frac{z}{۶n} + \frac{۱}{۲} < \frac{z}{۳n}$ و درنتیجه

$$\left\{\frac{m}{۳n}\right\} = \frac{z}{۳n} > \frac{۳n+z}{۶n} = \left\{\frac{m}{۶n}\right\}$$

بنابراین

$$\sum_{m=۱}^{۶n-۱} \min\left(\left\{\frac{m}{۶n}\right\}, \left\{\frac{m}{۳n}\right\}\right) = \sum_{m=۱}^{۳n-۱} \frac{m}{۶n} + ۰ + \sum_{m=۳n+۱}^{۶n-۱} \frac{m-۳m}{۲n} = \frac{۹n-۳}{۴}$$

۱۵۱. a، b، c، x، y و z عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^۲+b^۲+c^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)} \geq \frac{۲}{۳}(a+b+c)(x+y+z)$$

راه‌حل از شایان دشمیز، دبیرستان علامه حلی، تهران، منطقهٔ ۱۱. پس از ساده کردن معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم

$$\begin{aligned} &۳\sqrt{(a^۲+b^۲+c^۲)(x^۲+y^۲+z^۲)} \\ &\qquad \geq a(۲y+۲z-x) + b(۲x+۲z-y) + c(۲x+۲y-z) \end{aligned}$$

فرض کنید

$$A = ۲y+۲z-x, \qquad B = ۲x+۲z-y, \qquad C = ۲x+۲y-z$$

بنابر نابرابری کشی ـ شوارتز،

$$(a^۲+b^۲+c^۲)(A^۲+B^۲+C^۲) \geq (aA+bB+cC)^۲$$

اما

$$A^۲+B^۲+C^۲ = ۹(x^۲+y^۲+z^۲)$$

و درنتیجه

$$۹(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}) \geq (aA+bB+cC)^{۲}$$

که همان نابرابری موردنظر است.

۱۵۲. همهٔ تابعها مانند $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\big(x-f(y)\big) = f(x+y^{۱۳۸۴}) + f\big(f(y)+y^{۱۳۸۴}\big) + ۱$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد، یعنی به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f\big(x-f(y)\big) = f(x+y^{۱۳۸۴}) + f\big(f(y)+y^{۱۳۸۴}\big) + ۱ \qquad (۱)$$

اگر در این تساوی فرض کنیم $x=f(x)$ معلوم می‌شود که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند y،

$$f\big(f(y)+y^{۱۳۸۴}\big) = \frac{f(\circ)-۱}{۲}$$

همچنین، اگر در تساوی (۱) x را به $x+f(y)$ تبدیل کنیم معلوم می‌شود که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f(x) = f\big(x+f(y)+y^{۱۳۸۴}\big) + \frac{f(\circ)+۱}{۲} \qquad (۲)$$

فرض کنید $g(x)=f(x)+x^{۱۳۸۴}$ و $c=\frac{f(\circ)+۱}{۲}$. در این صورت تساوی (۲) را می‌توان به‌شکل

$$f(x) = f\big(x+g(y)\big)+c \qquad (۳)$$

نوشت.

فرض کنید $h(y)=g\big(y+g(\circ)\big)-g(y)$. در این صورت از تساوی (۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f\big(x+h(y)\big) &= f\big(x+h(y)+g(y)\big)+c \\ &= f\big(x+g\big(y+g(\circ)\big)\big)+c \\ &= f(x) \end{aligned} \qquad (۴)$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} h(y) &= g\big(y+g(\circ)\big)-g(y) \\ &= \big(y+g(\circ)\big)^{۱۳۸۴} - y^{۱۳۸۴} + f\big(y+g(\circ)\big) - f(y) \\ &= ۱۳۸۳g(\circ)y^{۱۳۸۳} + \cdots + g(\circ)^{۱۳۸۴} - c \end{aligned}$$

یعنی $h(y)$ چندجمله‌ایی غیرصفر است و درنتیجه مقداری غیرصفر دارد. بنابراین از تساوی (۴) نتیجه می‌شود که f تابعی ثابت است. به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود $f(x)=-۱$.

به‌سادگی معلوم می‌شود تابع $f(x) = -1$ ویژگیهای موردنظر را دارد.

راه‌حل رسیده: سینا کیهانیان، دبیرستان سلام، تهران، منطقهٔ ۱.

۱۵۳. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان هر n عدد گنگ، سه عدد وجود داشته باشند که مجموع هر دو تا از آنها عددی گنگ باشد.

راه‌حل از شایان دشمیز، دبیرستان علامه حلی، تهران، منطقهٔ ۱۱. اگر عددهای $\sqrt{2}$، $2 - \sqrt{2}$، $3 - \sqrt{2}$ و $\sqrt{2} + 7$ را در نظر بگیریم معلوم می‌شود که $n \neq 4$. بنابراین $n \geq 5$.

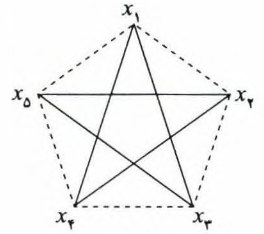
ابتدا توجه کنید که اگر x، y و z سه عدد گنگ باشند، دست‌کم یکی از عددهای $x + y$، $z + y$ و $x + z$ گنگ است. مثلاً، اگر $x + y$، $x + z$ گویا باشند، $y + z$ گنگ است، زیرا

$$y + z = (x + y) + (x + z) - 2x$$

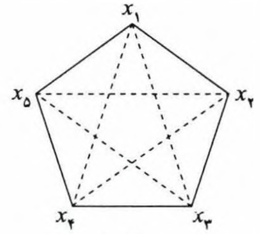
اکنون ۵ عدد گنگ دلخواه در نظر بگیرید. گرافی ۵رأسی در نظر بگیرید که رأسهایش متناظر این ۵ عدد باشند و رأس i را به رأس j با یالی قرمز به هم وصل کنید، به‌شرطی که $i + j$ گویا باشد و اگر این‌طور نبود این دو رأس را با یالی آبی به هم وصل کنید. اگر مثلاً در رأسی مانند i، دست‌کم سه یال همرنگ به هم برسند، آن‌وقت رأسهایی مانند j، k و z وجود دارند که یالهای ij، ik و iz همرنگ‌اند. در این صورت دست‌کم یکی از مثلثهای ijk، ijz، ikz و jkz تکرنگ است. بنابر آنچه در ابتدا گفتیم مثلث قرمز نداریم، پس حتماً مثلثی آبی داریم و درنتیجه حکم درست است. اگر حالت قبل پیش نیاید، از هر رأس دو یال قرمز و دو یال آبی خارج شده است. در این صورت

$$\text{تعداد یالهای قرمز} = \text{تعداد یالهای آبی} = \frac{\text{تعداد کل یالها}}{2} = \frac{\binom{5}{2}}{2} = 5$$

بنابراین دو حالت ممکن است پیش بیاید:



حالت ۲



حالت ۱

در هر دو حالت، یالهایی که خط‌چین‌اند قرمزند. در حالت ۲، عددهای

$$x_1 + x_2, \quad x_2 + x_3, \ldots, \quad x_5 + x_1$$

گویا هستند. به این ترتیب عددهایی گویا مانند $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ و $c_۴$ وجود دارند که

$$x_۲ = c_۱ - x_۱, \quad x_۳ = c_۲ + x_۱, \quad x_۴ = c_۳ - x_۱, \quad x_۵ = c_۴ + x_۱$$

درنتیجه، $x_۵ + x_۱ = ۲x_۱ + c_۴$،که درست نیست، زیرا سمت چپ این تساوی عددی گویاست و سمت راست آن عددی گنگ. در حالت دوم هم کافی است دور $x_۱x_۳x_۵x_۲x_۴x_۱$ را در نظر بگیرید و به تناقض برسید.

۱۵۴. n عددی طبیعی است و $n \geq ۳$. در هر خانهٔ جدولی $n \times n$ عددی صحیح نوشته‌ایم. می‌دانیم که مجموع عددهای نوشته‌شده در هر جدول ۳×۳ و نیز مجموع عددهای نوشته در هر جدول ۵×۵ در جدول اصلی عددی زوج است. همهٔ عددها مانند n را طوری تعیین کنید که مجموع همهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول عددی زوج باشد.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم عددهای موردنظر به‌شکل $۳k$ و $۵k$ هستند، که در آنها k عددی طبیعی است.

معلوم است که اگر $n = ۳k$ $(n = ۵k)$، می‌توان جدول $n \times n$ را به $k^۲$ مربع ۳×۳ (۵×۵) تقسیم کرد. چون مجموع عددهای نوشته‌شده در این مربعها زوج است، پس مجموع همهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول هم زوج است.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر n نه مضرب ۳ باشد نه مضرب ۵ ممکن است مجموع همهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول عددی فرد باشد.

دنباله‌های

$$۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱\ldots \qquad (۱)$$

و

$$۱۰۰۰۱۱۰۰۰۱۱۰۰۰۱۱۰۰۰۱۱۰۰۰۱\ldots \qquad (۲)$$

را در نظر بگیرید. هر دو این دنباله‌ها متناوب‌اند و طول دورهٔ تناوبشان به‌ترتیب ۳ و ۵ است. فرض کنید A_k و B_k به‌ترتیب مجموع k جملهٔ اول دنباله‌های (۱) و (۲) باشند. به‌سادگی معلوم می‌شود که به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند k و m،

$$A_{k+۱۵m} \equiv A_k \ (\text{به‌پیمانهٔ ۲}), \qquad B_{k+۱۵m} \equiv B_k \ (\text{به‌پیمانهٔ ۲})$$

در خانه‌های جدول $n \times n$ مطابق قاعدهٔ زیر عددهای ۰ و ۱ قرار می‌دهیم: اگر kامین جملهٔ دنبالهٔ (۱) برابر با ۱ بود، نخستین n جملهٔ دنبالهٔ (۲) را در خانه‌های ستون kام جدول قرار می‌دهیم؛ اگر kامین جملهٔ دنبالهٔ (۱) برابر با ۰ بود، در همهٔ خانه‌های ستون kام جدول عدد صفر را می‌نویسیم. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموع همهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول برابر با A_nB_n است. توجه کنید که

$$A_۱ = ۱, A_۲ = ۱, A_۴ = ۳, A_۷ = ۵, A_۸ = ۵, A_{۱۱} = ۷, A_{۱۳} = ۹, A_{۱۴} = ۹$$

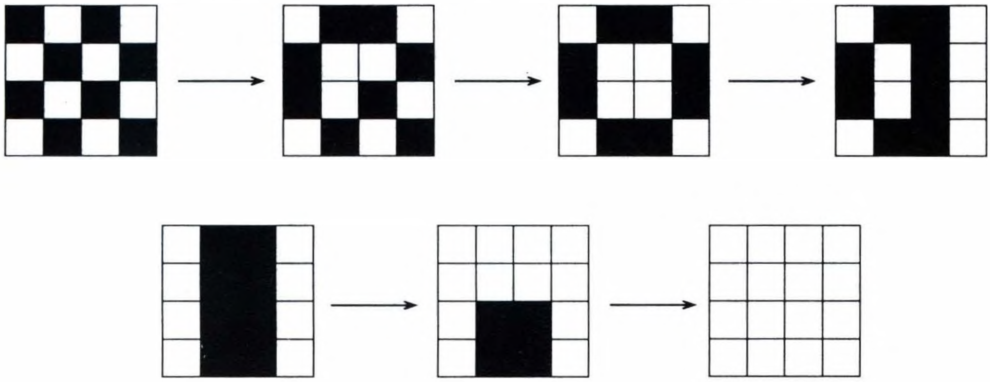
$$B_۱ = ۱, B_۲ = ۱, B_۴ = ۳, B_۷ = ۳, B_۸ = ۳, B_{۱۱} = ۵, B_{۱۳} = ۵, B_{۱۴} = ۵$$

بنابراین، اگر n مضرب ۳ یا ۵ نباشد، مجموع همهٔ عددهای نوشته‌شده در جدول عددی فرد است (به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموع عددهای نوشته‌شده در هر مربع ۳ × ۳ و نیز هر مربع ۵ × ۵ در جدول اصلی عددی زوج است).

۱۵۵. n عددی طبیعی است و $n \geq ۳$. خانه‌های جدولی $n \times n$ را مانند صفحهٔ شطرنج با رنگهای سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم. در هر حرکت می‌توانید جدولی ۲ × ۲ را از جدول اصلی انتخاب کنید و رنگ هر یک خانهٔ آن را به رنگ مخالف آن درآورید. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که پس از تعدادی متناهی حرکت بتوان همهٔ خانه‌های جدول را به یک رنگ درآورد.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم که عددهای موردنظر مضربهای ۴ اند.

به‌سادگی معلوم می‌شود که همهٔ خانه‌های هر مربع ۴ × ۴ را می‌توان به یک رنگ درآورد:

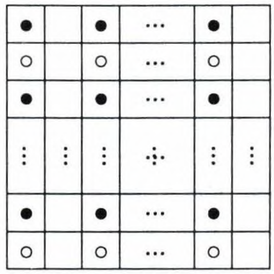


بنابراین، اگر $n = ۴k$ $(k \geq ۲)$، کافی است جدول $n \times n$ را به $k^۲$ مربع ۴ × ۴ تقسیم کنیم و رنگ آنها را عوض کنیم.

اکنون ثابت می‌کنیم اگر n مضرب ۴ نباشد، نمی‌توان همهٔ خانه‌های جدول را به یک رنگ درآورد. فرض کنید چنین نباشد. فرض کنید N کمترین تعداد حرکتهایی باشد که پس از آنها همهٔ خانه‌های جدول به یک رنگ درمی‌آیند.

ابتدا فرض کنید n عددی زوج باشد، مثلاً $n = ۴k + ۲$. در شکل (۱) خانه‌هایی را که با «•» و نیز خانه‌هایی را که با «○ » علامت گذاشته‌ایم در نظر بگیرید. تعداد خانه‌های هر نوع $(۲k + ۱)^۲$ است، که عددی فرد است.

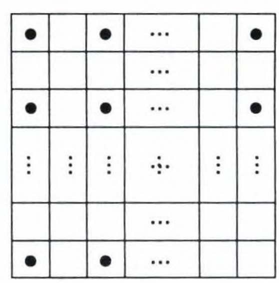
فرض کنید که رنگ همهٔ خانه‌ها در انتها به رنگ خانه‌هایی باشد که علامتشان «•» است. چون هر مربع ۲ × ۲ دقیقاً یک خانه از هر نوع دارد، در هر حرکت رنگ دقیقاً یکی از خانه‌های هر نوع عوض می‌شود. اما رنگ هر خانه با علامت «○» باید عوض شود، پس هر یک از آنها در تعداد فردی از حرکتها شرکت دارد.



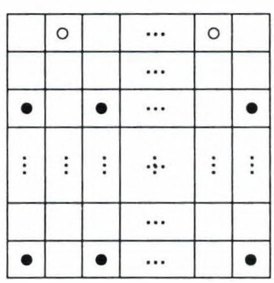
شکل ۱

بنابراین، تعداد کل حرکتها، یعنی N، عددی فرد است. از طرف دیگر، رنگ هر خانه با علامت «●» باید ثابت بماند، پس هر یک از آنها در تعداد زوجی از حرکتها شرکت دارد. یعنی N عددی زوج است. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم.

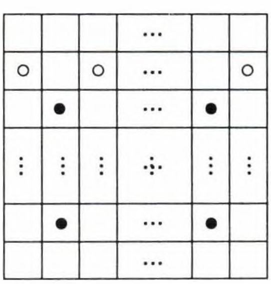
اکنون فرض کنید n عددی فرد باشد، مثلاً $n = ۲k + ۱$. در شکل (۲) خانه‌های با علامت «●» را در نظر بگیرید. همهٔ این خانه‌ها به یک رنگ‌اند، مثلاً همگی سیاه‌اند. تعداد کل خانه‌های سیاه برابر با $۲k^۲ + ۲k + ۱$ است، که عددی فرد است. توجه کنید که پس از هر حرکت زوجیت تعداد خانه‌های هر نوع تغییر نمی‌کند. بنابراین، درنهایت تعداد کل خانه‌های سیاه عددی فرد است (و درنتیجه برابر با صفر نیست). یعنی درنهایت رنگ همهٔ خانه‌ها سیاه است. بنابراین درنهایت رنگ هر خانه با علامت «●» تغییر نمی‌کند و درنتیجه در تعداد فردی از حرکتها شرکت دارد. بنابراین N عددی زوج است.



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

اکنون ثابت می‌کنیم که N عددی فرد است، که درنتیجه به تناقض رسیده‌ایم. همهٔ خانه‌های علامت‌دار در شکل (۳) (به‌ازای $n = ۴m - ۱$) و نیز همهٔ خانه‌های علامت‌دار در شکل (۴) (به‌ازای $n = ۴m + ۱$) را در نظر بگیرید. در هر دو این جدولها تعداد خانه‌های با علامت «○» عددی فرد است (به‌ترتیب برابر با $۲m - ۱$ و $۲m + ۱$). رنگ هر یک از این خانه‌ها باید عوض شود، یعنی هر یک از آنها در تعداد فردی حرکت شرکت دارند. در عین حال، رنگ خانه‌های با علامت «●» عوض نمی‌شود، پس هر یک از آنها در تعداد زوجی حرکت شرکت دارند. بنابراین N عددی فرد است.

۱۵۶. مختصات رأسهای پنج‌ضلعی‌ای محدب عددهایی صحیح‌اند. ثابت کنید درون یا روی پنج‌ضلعی محدبی که رأسهایش نقطه‌های برخورد قطرهای پنج‌ضلعی اصلی‌اند دست‌کم یک نقطه وجود دارد که مختصاتش عددهایی صحیح‌اند.

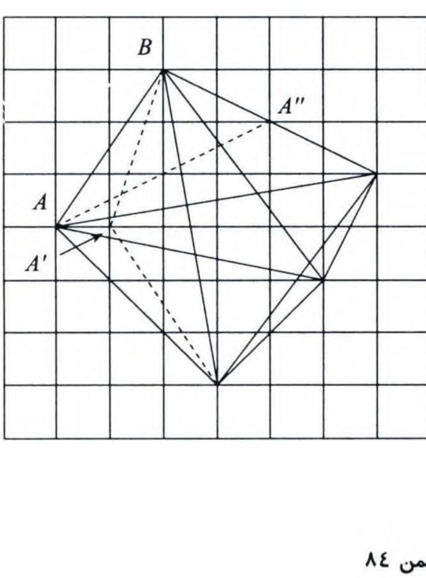
راه‌حل. به‌ازای هر پنج‌ضلعی مانند P پنج‌ضلعی‌ای را که از تقاطع قطرهای این پنج‌ضلعی پدید می‌آید با $Q(P)$ و «ستاره»ای را که با قطرهای پنج‌ضلعی اصلی تشکیل می‌شود با $R(P)$ نشان می‌دهیم. معلوم است که $Q(P) \subset R(P)$.

فرض کنید پنج‌ضلعی‌ای محدب مانند P_0 وجود داشته باشد که به‌ازای آن $Q(P_0)$ هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای (نقطه‌ای که مختصاتش عددهایی صحیح‌اند) دربر نداشته باشد. اگر درون یا روی پنج‌ضلعی P_0 پنج نقطه وجود داشته باشند که پنج‌ضلعی‌ای مانند P_1 تعریف کنند که $Q(P_1)$ هم هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای دربر نداشته باشد، P_0 را با P_1 عوض می‌کنیم.

چون تعداد نقطه‌های مشبکه‌ای P_0 متناهی است، می‌توانیم این کار را آنقدر تکرار کنیم که به چندضلعی‌ای مانند P برسیم که $Q(P)$ شامل هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای نباشد و P هیچ پنج‌ضلعی کوچکتری با این ویژگی را دربر نداشته باشد.

اکنون توجه کنید که در هر پنج‌ضلعی محدب که رأسهایش نقطه‌هایی مشبکه‌ای‌اند، یکی از نقطه‌های وسط ضلعها یا قطرها هم مشبکه‌ای است (به‌سادگی می‌توانید این مطلب را با در نظر گرفتن زوجیت مختصات رأسها ثابت کنید).

اگر درون یا روی $R(P)$ نقطه‌ای مشبکه‌ای وجود داشت، پنج‌ضلعی‌ای مانند P' در نظر می‌گیریم که از عوض کردن رأس متناظر ستاره (مثلاً A) با این نقطهٔ مشبکه‌ای (نقطهٔ A') به‌دست می‌آید (شکل را ببینید).



چون $Q(P) \subset Q(P')$، پنج‌ضلعی‌ای محدب مانند P' به‌دست آورده‌ایم که درون P قرار دارد و $Q(P')$ هیچ نقطهٔ مشبکه‌ای دربر ندارد. این هم با تعریف P تناقض دارد.

چون P دست‌کم یک نقطهٔ مشبکه‌ای دربر دارد (که وسط یکی از ضلعها یا قطرهایش است) و این نقطه درون $R(P)$ یا روی آن نیست، پس این نقطه لزوماً وسط یکی از ضلعهای P است.

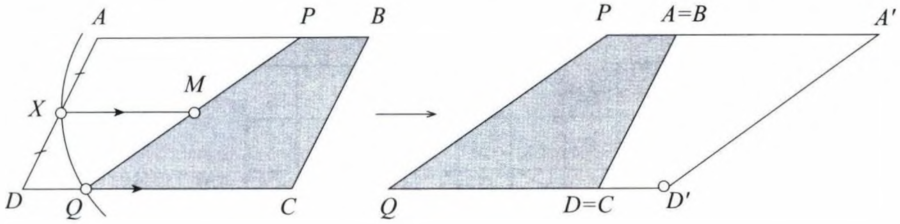
اکنون پنج‌ضلعی (محدب) P'' را در نظر می‌گیریم که رأسهایش نقطه‌هایی مشبکه‌ای‌اند و از جایگزین کردن B با A'' به‌دست می‌آید. چون (بنابر محدب بودن) $Q(P'') \subset R(P)$، پس $Q(P'')$ نقطه‌ای مشبکه‌ای دربر ندارد و این هم با تعریف P تناقض دارد. این تناقضها ناشی از فرض وجود پنج‌ضلعی P_0 است، پس به این ترتیب حکم را ثابت کرده‌ایم.

راه‌حلها

از باب تفریح

۱. ابتدا توجه کنید که هر توپ روی کفهٔ سمت چپ از توپ همرنگش روی کفهٔ سمت راست سنگینتر است (در غیر این صورت، توپی روی کفهٔ سمت چپ وجود دارد که از توپ همرنگش روی کفهٔ سمت راست سبکتر است، و اگر جای آنها را عوض کنیم تعادل ترازو تغییر نمی‌کند). اگر تعداد توپها روی هر کفه از سه تا کمتر نباشد، می‌توانیم جای دو توپ همرنگ را که اختلاف وزنهایشان از بقیه کمتر است عوض کنیم، بی‌آنکه تعادل ترازو تغییر کند. بنابراین در هر سمت حداکثر دو توپ قرار دارد. معلوم است که ممکن است روی هر کفه یک توپ قرار داشته باشد. دو تا توپ هم ممکن است وجود داشته باشد، به شرط اینکه اختلاف وزنهای توپهای همرنگ یکسان باشد

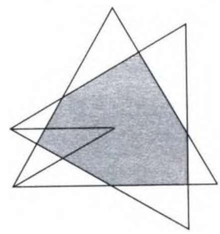
۲. فرض کنید خط موردنظر PQ باشد (شکل زیر را ببینید). می‌توانیم لوزی موردنظر را با جابه‌جا کردن $APQD$ طوری که AD و BC بر هم منطبق شوند به‌دست بیاوریم. اما PQ را چگونه رسم کنیم؟ برای اینکه $PA'D'Q$ لوزی شود، باید $QP = QD' = DC$. برای اینکه این وضعیت پیش بیاید یک راه این است که از M (مرکز متوازی‌الاضلاع) خطی موازی DC رسم کنیم. این خط AD را در نقطه‌ای مانند X قطع می‌کند. در این صورت دایرهٔ به مرکز M و شعاع MX، DC را در نقطهٔ Q قطع می‌کند که همان نقطهٔ موردنظر است.



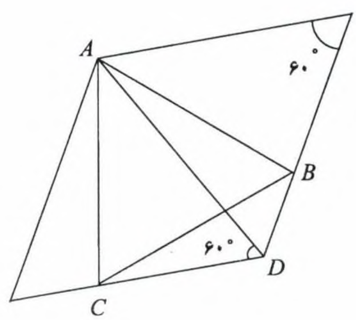
۳. شکل زیر را ببینید.

۱۷	۲۴	۳	۳۲	۱۱	۲۶
۲	۳۱	۱۸	۲۵	۴	۳۳
۲۳	۱۶	۱	۱۰	۲۷	۱۲
۳۰	۹	۲۸	۱۹	۳۴	۵
۱۵	۲۲	۷	۳۶	۱۳	۲۰
۸	۲۹	۱۴	۲۱	۶	۳۵

۴. بله، وجود دارد. مثلثی متساوی‌الاضلاع را حول مرکز ثقلش به‌اندازهٔ ۶۰° دوران دهید و تقاطع مثلث اصلی با تصویرش را در نظر بگیرید (شکل زیر را ببینید). اگر این شکل را حول مرکز ثقل مثلث اصلی به‌اندازهٔ ۱۲۰° دوران دهیم بر خودش منطبق می‌شود، اما نه محور تقارن دارد نه مرکز تقارن.



۵. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. از ویژگیهای لوزی معلوم است که $\angle ADC = \angle BDA = ۶۰^\circ$. فرض کنید $\angle ACB = ۶۰^\circ$. در این صورت چهارضلعی $ACDB$ محاطی است (زیرا زاویه‌های ACD

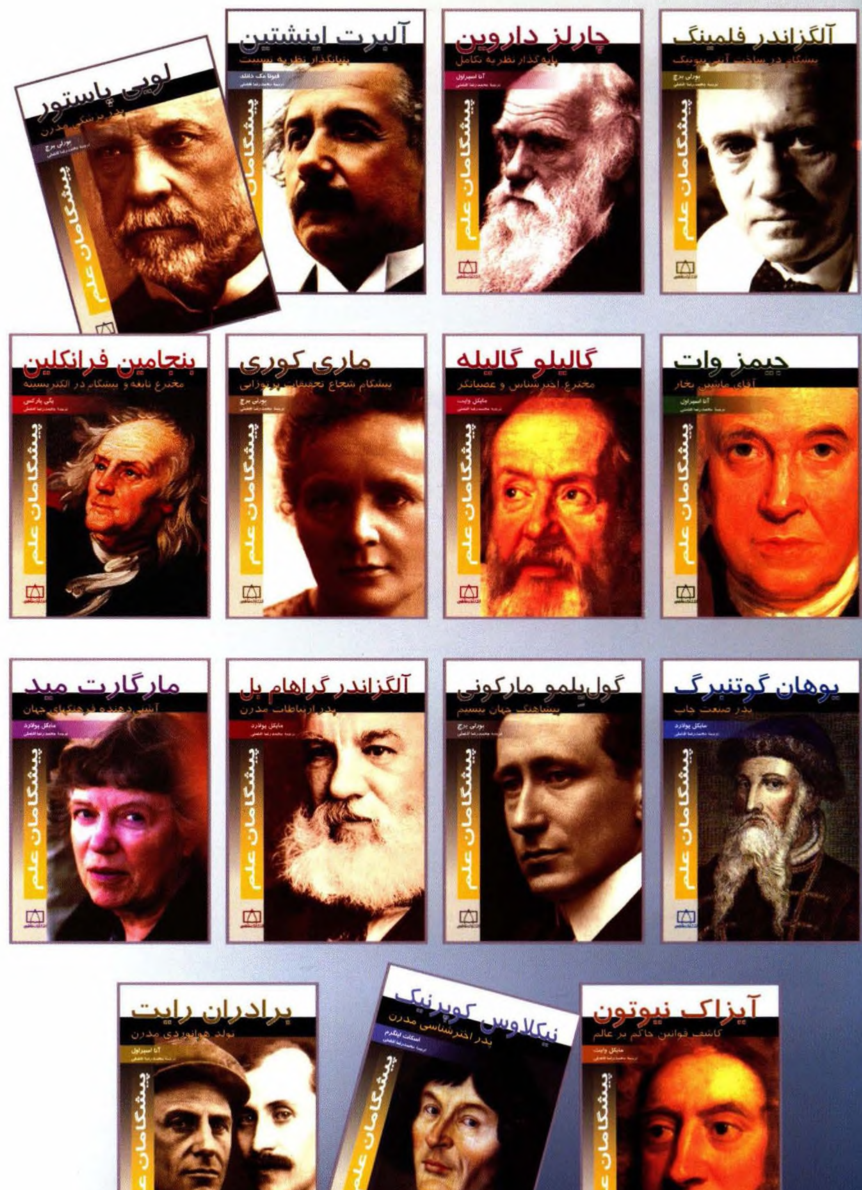


و ADB برابرند)، درنتیجه زاویهٔ CAB مکمل زاویهٔ CDB است، یعنی زاویهٔ CAB هم 60° است. بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر زاویهٔ ABC برابر با 60° باشد، نحوهٔ استدلال به‌همین روش است. اگر زاویهٔ 60° مکمل زاویهٔ CDB باشد، باز هم چهارضلعی $ACDB$ محاطی است و درنتیجه $\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$. یعنی باز هم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

پنجاه‌وششمین آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا

۱. د	۲. ب	۳. ب	۴. الف	۵. ب
۶. ب	۷. ج	۸. د	۹. الف	۱۰. ب
۱۱. هـ	۱۲. د	۱۳. د	۱۴. د	۱۵. ج
۱۶. د	۱۷. الف	۱۸. الف	۱۹. ب	۲۰. هـ
۲۱. ج	۲۲. ب	۲۳. ب	۲۴. ب	۲۵. ج

مجموعهٔ پیشگامان علم



مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
منتشر می‌کند:

مجموعهٔ پیشگامان علم، شرح زندگی و تلاش زنان و مردانی است که بهترین دوران عمر خود را وقف اثبات برتری برهان علمی بر تعصب کورکورانه، و گسترش افق اندیشه و تفکر علمی انسان کردند.

در این مجموعه سرگذشت زنان و مردانی را مطالعه می‌کنید که در کارگاه، آزمایشگاه یا کتابخانهٔ خود و در کنار ابزارهایشان، بیش از هر جا و هر زمان، احساس سعادت می‌کردند. سرگذشت آنها فقط شرح آزمایشهای کسالت‌آور علمی نیست، سرگذشت نبوغ شگفت‌آور انسان و تأثیر آن در جهان امروز است.