نشریهٔ

ریاضیات

سال ششم / ۴
شمارهٔ پیاپی: ۲۴
اسفند ۱۳۸۴
فروردین ۱۳۸۵
قیمت: ۹۰۰ تومان

- فرمولهای اعداد اول
- جراحی مثلثی
- بزرگی ـ کوچکی
- بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور (مرحلهٔ اول)

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال ششم/۴ • شمارهٔ پیاپی: ۲۴• اسفند ۱۳۸۴و فروردین ۱۳۸۵

فهرست:

روی جلد: بزرگی ـ کوچکی را رعایت کنید!

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: محمدرضا پورنکی، یحیی تابش، ایرج ضرغام

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بردیا حسام، ارشک حمیدی، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: زلال

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۸۹۷۱۵۸۴ـ۸۸۹۷۱۵۸۳

سرنوشت و تکامل

پروفسور محسن هشترودی (۱۳۵۵_۱۲۸۶) از مشاهیر ریاضیات ایران با آوازهٔ جهانی است. او شاگرد اِلی کارتان، ریاضیدان نامدار فرانسوی، بوده است، و نیز الهامبخش چندین نسل از ریاضیدانان ایرانی. هشترودی در سال ۱۳۱۵ پس از اخذ دکتری ریاضیات از دانشگاه سوربن فرانسه به ایران بازگشت و در دانشگاه تهران به تدریس پرداخت. در نظر او «علم، تلاش برای کشف و بررسی چیزی است که هست، یعنی طبیعت و خویشتن و تاریخ آن تاریخ اسارت، مذلت، رنج و بدبختی بشر است برای اندیشه‌ای صحیح. داستان اسارت فکر آزاد، افسانه‌ای است که از پیدایش بشر همیشه تکرار گشته و می‌گردد و هرگز مکرر نیست.» متن زیر از کتاب دانش و هنر او انتخاب شده است و با ایامی که پیش رو داریم مناسبت دارد.

هر سال هنگام بهاران دنیای کهنه تجدد می‌پذیرد. نور جانبخش آفتاب روانی تازه در کالبد نیم‌جان خاک مرده می‌دمد و سبزه و گل از نو بر دشت و چمن می‌روید.

جان آدمی نیز به فیض بهاران رستاخیز می‌کند. پیمانهای گذشته از نو شروع می‌شود و روزگاران پیشین را که به‌صورت یادبودی در یادها نقش بسته است از نو زنده می‌کند.

زمین راه رفته را از سر می‌گیرد و خاکیان خود را از نو به سال تازه می‌خواند.

در دیدهٔ سرنشینان زمینی جهان نو شده است اما روشنان فلکی از دیرباز زمین کهنه را می‌شناسند و آن را همان که بود و شاید نیز پیرتر از آنچه که بود می‌یابند. جهان ماده سرنوشت مقدری دارد که از آن سرپیچی نمی‌تواند کرد. مشیت ازلی راهی کم و بیش هموار فرا روی آن گذاشته است و با همهٔ سرسختی و مقاومتی که ماده ابراز کند یک بار که مسخر گردید مطیع و منقاد است و عصیان و طغیانی از آن سر نمی‌زند.

اندیشهٔ باریک‌بین آدمی که در جستجوی راز طبیعت از عمق دریاها و مرکز آتشین زمین تا دوردست کیهانهای فراگسترده ره می‌پوید فزونی‌طلب و برتری‌جوست. مادهٔ سرسخت را تسخیر و استخدام می‌کند و در شناسایی جهان طرحی می‌ریزد که هر بار دستخوش تحول و تغییر است. هر زمان که اقتضاء کند اندیشهٔ مستدل بر خود عصیان می‌کند و طرح کهنه را در هم می‌ریزد و در چارچوب دیگری به شکلی نوین طرح دیگری پی‌ریزی می‌کند. در این تجدد و عصیان چه بسا امور و حادثات را از نو باز می‌شناسد و چه بسا چهره‌های مرموز طبیعت را از نو می‌نگرد و کم‌کم از هر یک نقاب برمی‌گیرد.

در دیدهٔ ما آدمیان خاک‌نشین است که هر سال هنگام بهار زمین خود را به‌گونهٔ پیشین می‌آراید و جلوه‌گر می‌شود. باران بهاری در نظر ما نوازشگر و تیماردار است. گویی گریهٔ ابر خشم زمستانی را از یاد می‌برد.

جهان زندگی ما باز شناخته است و این شناسایی یا بهتر بگوییم آشنایی در نتیجهٔ تکرار و تجدید چهره‌های جهان

است. اگر هر لحظه و آنی جهان کهنه به‌صورت دیگری جلوه‌گر شود همواره ناشناس خواهد ماند.

علم و دانش ما نتیجهٔ این تکرارها و تجدیدهاست و معرفت به چگونگی آنها در اصطلاح دانشمندان به قانون تعبیر می‌شود و قوانین علمی درحقیقت توضیح و تفسیر این جلوه‌گریهاست.

توجه و عنایت اندیشهٔ ژرف‌نگر بر جهان ماده پیدایشگر فعالیتهای گوناگون زندگی است. دانشمند در کوشش خود برای جستجوی راز طبیعت به قیاس و سنجش و استدلال برخاسته و در عالم کمیات و بستگیهای چندی به مطالعه و تحقیق می‌پردازد. هنرمند به‌قصد آفرینش زیبایی و درک رمز زندگی درونی به کمک احساس و دلبستگی و عشق در عالم کیفیات و روابط چونی سیر می‌کند.

آن یک راه و رسم شناسایی جهان و این یک طی طریق سیر و سلوک و آشنایی با زیباییها و لذتهای زندگی را به ما می‌آموزد. شکوفه‌های بهاری در نظر دانشمند مسأله‌ای است که چگونگی تبدیل و تحویل و تکامل دانه تا گل و میوه را حکایت می‌کند و در نظر هنرمند تجلی راز پنهانی است که زیبایی ناگفتنی ولی زیستنی و دریافتنی را بیان می‌کند.

زبان سوسن اجازهٔ سخن ندارد ولی گویای رازی است که توان دریافت.

«برآنم که سوسن پریزاده است　　زبان‌آوری فحل و آزاده است
زبان دارد اما ز راز کهن　　اجازت ندارد که گوید سخن»

م. محسن‌زاده

فرمولهای اعداد اول

یوری ماتیاسویچ

صورت مسأله

عددهای اول به‌گونه‌ای نامنظم در میان عددهای صحیح پراکنده‌اند، و بنابراین، تعجبی ندارد که ریاضیدانان قرنها به‌سختی کوشیده‌اند تا نوعی «فرمول عددهای اول» بیابند.

به راههایی بسیار گوناگون می‌توان چنین فرمولهایی سرهم‌بندی کرد. بنابراین، بسیار مهم است که ابتدا مشخص کنیم چه‌چیزی می‌خواهیم.

روشن است که ساده‌ترین فرمول برای عددهای اول به‌شکل زیر است:

$$p = p_n \qquad (۱)$$

که p_n، nامین عدد اول است. چرا چنین فرمولی کارمان را راه نمی‌اندازد؟ گرهٔ معما این است که محاسبهٔ سمت راست (۱) عموماً بسیار دشوار است ـ مثلاً خودتان عدد $p_{۱۹۷۵}$ را حساب کنید! آنچه می‌خواهیم، فرمول مشابهی است که محاسبهٔ سمت راست آن به ساده‌ترین روش ممکن انجام شود (گرچه، چنان‌که خواهیم دید، سادگی محاسبه اصلاً مفهوم روشنی نیست). این هدف ماکسیمال ماست.

برای سرعت بخشیدن به کار، می‌توانیم شرط وابستگی سمت راست به n را کنار بگذاریم و بکوشیم فرمولهایی بیابیم که عددهای اول را به دست دهند ولی نه لزوماً به ترتیبِ صعودی. همچنین می‌توانیم به فرمولی که به‌جای همهٔ عددهای اول، تعدادی نامتناهی از عددهای اول را به‌دست دهد قناعت کنیم. شاید به این هم رضایت دهیم که ممکن است چنین فرمولی چندتایی عدد مرکب هم تولید کند. این هدف مینیمال ماست.

توجه کنید که ممکن است کنکاش در فرمولهایی به‌ظاهر ساده نشان دهد که این فرمولها چندان بهتر از (۱) نیستند. مثالهایی از این نوع را بعداً خواهیم دید.

قضیهٔ اِ. م. رایت

در سال ۱۹۴۷ و. هـ. میلز نتیجهٔ زیر را منتشر کرد:

عددی حقیقی مانند λ وجود دارد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، عدد

$$\lfloor \lambda^{۳^n} \rfloor \qquad (۲)$$

اول است.[1]

بعد از انتشار این نتیجه، فرمولهای زیادی از این نوع پیدا شد. اما همهٔ این نتیجه‌ها ویژگی مشابهی دارند: فرمولبندی آنها زیبا، اما برهانشان مأیوس‌کننده است. خوانندگانی که می‌خواهند بدانند چرا چنین است می‌توانند قضیهٔ زیر را ببینند.

قضیهٔ اِ. م. رایت. عددی حقیقی مانند μ وجود دارد به‌طوری که هر عددی از نوعِ

$$\lfloor ۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲^{\mu}}}}}} \rfloor \qquad (۳)$$

اول است.

برهان. اساس برهان قضیهٔ رایت حدس برتران است. بنابر این حدس، اگر $x \geq ۴$، همواره دست‌کم یک عدد اول بین x و $۲x - ۲$ وجود دارد. این فرضیه را اولین بار برتران، ریاضیدان فرانسوی، مطرح کرد، اما نتوانست ثابتش کند و بنابراین، در پژوهشهایش از آن به‌عنوان حدسی اثبات‌ناپذیر استفاده کرد. بعداً، پ.ل. چبیشف، ریاضیدان برجستهٔ روس، برهانی برای فرضیهٔ برتران یافت.

برای یافتن عدد مطلوب μ، ابتدا باید دنباله‌ای از عددهای اول مانند $q_۱$، $q_۲$، ... بیابیم به‌طوری که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n نابرابری زیر برقرار باشد:

$$۲^{q_n} < q_{n+۱} < ۲^{q_n+۱} - ۱ \qquad (۴)$$

($q_۱$ را می‌توان هر عدد اولی گرفت و سپس براساس حدس برتران، می‌توان دنبالهٔ $\{q_n\}$ را که در ویژگی (۴) صدق کند به‌طور نامحدود ادامه داد.)

عدد

$$۲^{۲^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{۲^{\alpha}}}}}}$$

را که در آن فرایند به توان رساندن n بار انجام شده است با $\exp_۲^n \beta$، و تابع معکوس آن، یعنی

$$\log_۲(\log_۲(\ldots(\log_۲ \beta)\ldots)$$

را با $\log_۲^n \beta$ نشان می‌دهیم.

می‌کوشیم عدد μ را طوری انتخاب کنیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت مانند n رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\lfloor \exp_۲^n \mu \rfloor = q_n \qquad (۵)$$

بنابر تعریفِ جزء صحیح عدد، برابری (۵) با نابرابریهای

$$q_n \leq \exp_۲^n \mu < q_n + ۱$$

۱. در اینجا و از این پس، $\lfloor\alpha\rfloor$ جزء صحیح عدد α است، یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا برابر با α.

هم‌ارز است. اگر از دو طرف n بار در پایهٔ ۲ لگاریتم بگیریم، به نابرابریهای دیگری هم‌ارز با (۵) می‌رسیم:

$$\log_{۲}^{n} q_n \leq \mu < \log_{۲}^{n}(q_n + ۱) \qquad (۶)$$

تحقیق کنید که از (۴) نتیجه شود

$$\log_{۲}^{۱} q_{۱} < \log_{۲}^{۲} q_{۲} < \cdots < \log_{۲}^{n} q_n < \log_{۲}^{n+۱} q_{n+۱} < \cdots$$
$$< \log_{۲}^{n+۱}(q_{n+۱} + ۱) < \log_{۲}^{n}(q_n + ۱) < \cdots < \log_{۲}^{۲}(q_{۲} + ۱) < \log_{۲}^{۱}(q_{۱} + ۱) \qquad (۷)$$

درنتیجه، دنبالهٔ

$$\log_{۲}^{۱} q_{۱},\ \log_{۲}^{۲} q_{۲},\ \ldots,\ \log_{۲}^{n} q_n,\ \ldots$$

اکیداً صعودی و از بالا کراندار است، و درنتیجه، حد دارد. پس عدد μ را برابر با این حد می‌گیریم. اکنون نشان دهید عدد μ که به‌این ترتیب انتخاب شود در نابرابری

$$\log_{۲}^{n} q_n < \mu < \log_{۲}^{n}(q_n + ۱) \qquad (۸)$$

که حتی قویتر از (۶) است صدق می‌کند، و درنتیجه، برابری (۵) برقرار است و قضیهٔ رایت ثابت شده است. ∎

اشکال اساسی عبارتهای (۲) و (۳) این است که این عبارتها (یا درواقع، برهانهایشان) روشی برای به‌دست آوردن عددهای اول مشخص نمی‌کنند؛ چون برای محاسبهٔ عددی اول با استفاده از (۲) و (۳) باید عددهای λ و μ را با دقت کافی بدانیم. بنابراین، (۲) و (۳) درواقع چهره‌های مبدل فرمول (۱) هستند و چه‌بسا بدتر از آن. گذشته از این، فرمولهای (۲) و (۳) کمکی به روشن شدن ویژگیهای مجموعهٔ عددهای اول نمی‌کنند. برهان قضیهٔ رایت نشان می‌دهد که برای هر مجموعهٔ «به‌اندازهٔ کافی چگال» می‌توان فرمولهایی مشابه (۲) و (۳) به‌دست آورد. مشکلات (۲) و (۳) ریشه در وابستگی آنها به عددهای حقیقی λ و μ دارند که به‌گونه‌ای غیرمستقیم تعریف شده‌اند. در ادامهٔ این بحث، فقط فرمولهای با ضریبهای صحیح را بررسی می‌کنیم. این نوع فرمولها مزیتی مهم دارند: آنها را، اساساً، می‌توان به‌شکل صریح نوشت.

عددهای اول مرسن و فرما

فرمولهای میلز و رایت و فرمولهای دیگر مشابهِ با آنها همچنان به‌صورت نتایجی منفرد باقی مانده‌اند و راه به جایی نبرده‌اند. اما در مواردی دیگر، امکان نمایش برخی از عددهای اول به‌شکلی خاص، نتایجی عمیق و نامنتظر دربر داشته است.

در اینجا دو فرمول زیر را که شکلی بسیار ساده دارند بررسی می‌کنیم:

$$p = ۲^n - ۱$$
$$p = ۲^n + ۱$$

روشن است که فرمول (۸) همیشه عدد اول تولید نمی‌کند. مثلاً اگر n عددی مرکب مانند kl باشد که $k > ۱$

و $l > ۱$، آنگاه p بر $۲^k - ۱$ و $۲^l - ۱$ بخش‌پذیر است. ولی حتی وقتی n اول است، ممکن است فرمول (۸) عددی مرکب به‌دست دهد:

$$۲^{۱۱} - ۱ = ۲۰۴۷ = ۲۳ \times ۸۹$$

عددهای اولی را که با فرمول (۸) تولید می‌شوند، اعداد مِرسِن می‌نامند. این نامگذاری به افتخار مارَن مرسن (۱۶۴۸ـ۱۵۸۸) انجام شده است. مرسن در سال ۱۶۴۷ فهرستی از همهٔ اعداد اول n کوچکتر از یا برابر با ۲۵۷ تهیه کرد که فکر می‌کرد فرمول (۸) به‌ازای آنها عدد اول تولید می‌کند. البته مرسن برهانی برای این حدس نداد و بعدها نیز معلوم شد که حدس مرسن کاملاً درست نیست.

اعداد مرسن به‌دلیل ارتباطشان با اعداد کامل مورد توجه‌اند. (عدد کامل عددی طبیعی است که با مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های مثبت غیر از خودش برابر است.) خود اقلیدس ثابت کرد که اگر عدد اول p از نوع (۸) باشد، آنگاه عدد $\frac{p(p+۱)}{۲}$ کامل است (بکوشید این حکم را ثابت کنید). مثلاً عددهای

$$۳ = ۲^۲ - ۱, \qquad ۷ = ۲^۳ - ۱$$

اول‌اند و درنتیجه عددهای

$$۶ = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۱ + ۲ + ۳$$
$$۲۸ = \frac{۷ \times ۸}{۲} = ۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴$$

کامل‌اند. چندین قرن بعد، لئونهارت اویلر (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷) ثابت کرد همهٔ اعداد کامل زوج از نوعی هستند که اقلیدس نشان داده است (باز هم سعی کنید برهانی برای این حکم بیابید). بنابراین، این مسأله را که آیا تعداد عددهای کامل زوج محدود است، می‌توان به این مسأله که آیا تعداد عددهای مرسن زوج محدود است تبدیل کرد. مسأله درواقع این است که آیا فرمول (۸) هدف مینیمال ما را برآورده می‌کند یا نه. هنوز راه‌حلی برای این مسأله وجود ندارد.

فرمول (۹) نیز همیشه عدد اول تولید نمی‌کند. مثلاً اگر n مقسوم‌علیه اول فردی مانند m داشته باشد، آنگاه p بر $۲^{\frac{n}{m}} + ۱$ بخش‌پذیر است، و اگر خود n اول باشد، آنگاه p بر ۳ بخش‌پذیر است. پس در فرمول (۹)، n را فقط می‌توان ۰ و توانهای ۲ انتخاب کرد. درحقیقت، فرمول (۹) به‌ازای

$$n = ۰, ۲^۰, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴$$

عددهای اول به‌دست می‌دهد و پیر فرما (۱۶۶۵ـ۱۶۰۱) این فرضیه را مطرح کرد که فرمول (۹) به‌ازای هر n از نوع ۲^k عدد اول به‌دست می‌دهد. به‌همین دلیل، اعداد به‌شکل $۲^{۲^k} + ۱$ را به‌افتخار او اعداد فرما می‌نامند. اویلر دریافت که $۲^{۲^۵} + ۱$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است و به‌این ترتیب، فرضیهٔ فرما را رد کرد. امروزه چندین مقدار n از نوع ۲^k را می‌شناسیم که در فرمول (۹) عدد مرکب تولید می‌کنند. گذشته از این، غیر از عددهای فرمایی که در بالا بیان شد، هنوز هیچ عدد دیگری پیدا نشده است.

اعداد اول فرما ارتباط شگفت‌انگیزی با هندسه دارند. کارل فریدریش گاوس، ریاضیدان مشهور آلمانی، ثابت

کرد که pضلعی منتظم را، که در اینجا p اول است، می‌توان با خطکش و پرگار رسم کرد، اگر و فقط اگر p عدد فرما باشد. نتیجه‌ای کلیتر این است: mضلعی منتظم را می‌توان با خطکش و پرگار رسم کرد، اگر و فقط اگر $m = 2^s p_1 p_2 \cdots p_l$ که p_1، p_2، ...، p_l عددهای اول فرمای متمایزند.

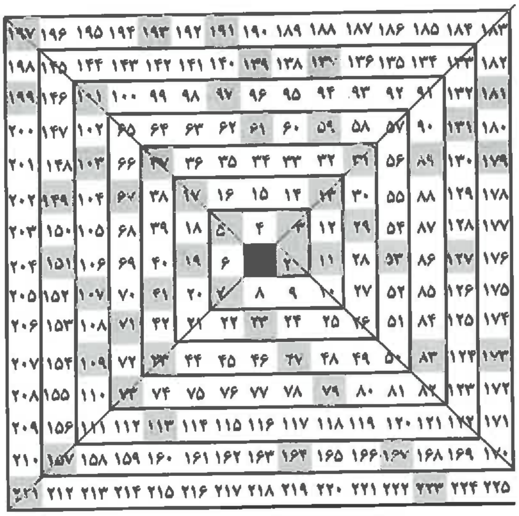
رومیزی اولام

رابطه‌های (۸) و (۹) شامل به‌توان رساندن‌اند. پرسشی جالب این است که آیا می‌توان تعدادی نامتناهی از عددهای اول را فقط با عملهای جمع، تفریق و ضرب تعریف کرد؟ سعی می‌کنیم پاسخ این پرسش را بیابیم.

اول چندجمله‌ایهایی از یک متغیر را در نظر بگیرید که ضریبهایشان عددهایی طبیعی باشند. تحقیق می‌کنیم که کدام چندجمله‌ایها مقادیر اول دارند و تعداد مقادیر اول را بررسی می‌کنیم.

کار را با بررسی چندجمله‌ایهای درجهٔ اول (چندجمله‌ایهای خطی) آغاز می‌کنیم. روشن است که در میان مقادیر چندجمله‌ای سادهٔ x تعدادی نامتناهی از عددهای اول، و درواقع، همهٔ عددهای اول، وجود دارند. اما این مورد به‌لحاظ عملی اصلاً مورد توجه نیست. اکنون چندجمله‌ای $ax + b$ را درنظر بگیرید که در آن a، b، و x عددهایی طبیعی‌اند. روشن است که اگر a و b مقسوم‌علیه مشترکی غیر از ۱ داشته باشند، $ax + b$ عددی مرکب و مضرب مقسوم‌علیه مشترک a و b است. اما حالتی که a و b نسبت به‌هم اول باشند چندان روشن نیست.

آدرین ماری لژاندر، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۳۳ـ۱۷۵۲)، این فرضیه را مطرح کرد که اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، آنگاه در تصاعد حسابی با جملهٔ اول b و قدرنسبت a تعدادی نامتناهی عدد اول وجود دارد. این فرضیه را پترگوستاو لیون دیریشله، ریاضیدان آلمانی (۱۸۵۹ـ۱۸۰۵)، ثابت کرد.

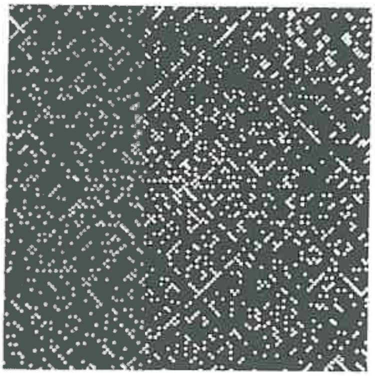


شکل ۱

اکنون چندجمله‌ایهای درجهٔ دوم را در نظر می‌گیریم. برخی از این چندجمله‌ایها واقعاً تاریخی‌اند، مثل چندجمله‌ای $x^۲ + x + ۴۱$ که خود اویلر بررسی‌اش کرد. مقدار این چندجمله‌ای به ازای $x = ۱, ۲, \ldots, ۳۹$ اول است؛ مقدار آن به‌ازای $x = ۴۰$ مرکب است.

ثابت شده است که هیچ چندجمله‌ایی (غیراز چندجمله‌ای ثابت) نمی‌تواند فقط مقادیر اول تولید کند، اما هنوز معلوم نیست که آیا چندجمله‌ایی از درجهٔ ۲ یا بزرگتر از ۲ وجود دارد که بینهایت عدد اول تولید کند یا نه.

در سالهای اخیر توجه به نمایش عددهای اول با مقادیر چندجمله‌ایهای درجهٔ دوم به‌سبب ملاحظه‌ای نامنتظر از س. م. اولام پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته است. اولام با نشان کردن عددهای اول روی حلزونیِ متشکل از همهٔ عددهای طبیعی (شکل ۱ را ببینید)، درکمال شگفتی کشف کرد که عددهای اول زنجیره‌هایی طولی در امتداد قطرها تشکیل می‌دهند. (ثابت کنید که عددهای روی قطر در شکل ۱ مقادیر چندجمله‌ایی درجهٔ دوم با ضریبهای صحیح هستند.) شگفت‌تر آنکه این الگو برای عددهای بزرگتر هم ادامه می‌یابد (این موضوع با ادامه دادن حلزونی به‌کمک کامپیوتر معلوم شده است). در شکل ۲، عددهای اول روی حلزونی برای نخستین ۱۰۰۰۰ عدد طبیعی با نقطه‌های روشن مشخص شده‌اند. الگوی نشان‌داده شده در شکل ۲ را معمولاً «رومیزی اولام» می‌نامند.



شکل ۲

توجه کنید که این الگو ویژگی حلزونیهاست و لزومی ندارد که حلزونی حتماً با ۱ شروع شود. مثلاً مقادیر چندجمله‌ای $x^۲ + x + ۴۱$ الگویی قطری روی حلزونی‌ای که با ۴۱ شروع می‌شود ایجاد می‌کنند (شکل ۳ را ببینید). اگر بخواهید الگوهای جدید و زیبایی را که عددهای اول به‌وجود می‌آورند کشف کنید، باید عزم و صبر کافی داشته باشید.

اینکه عددهای اول متمایل به تشکیل زنجیره‌هایی در امتداد قطرند تقریباً به‌تازگی کشف شده است و هنوز توجیه ریاضی کافی برای آن در دست نیست.

در انتهای مقاله به بررسی نمایش عددهای اول به‌کمک چندجمله‌ایهای چندمتغیره خواهیم پرداخت.

۵۷	۵۶	۵۵	۵۴	۵۳
۵۸	۴۵	۴۴	۴۳	۵۲
۵۹	۴۶	۴۱	۴۲	۵۱
۶۰	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵

شکل ۳

چندجمله‌ای نمایی جولیا رابینسون

تفاوت چندجمله‌ایهای نمایی با چندجمله‌ایهای استاندارد در این است که نمای آنها لزوماً عددهای طبیعی نیست، اما این چندجمله‌ایها نیز ممکن است چندجمله‌ایهای خطی از چند متغیر با ضریبهای صحیح باشند؛ یعنی چندجمله‌ایهایی به‌شکل

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k + b$$

که a_1، a_2، ...، a_k و b عددهایی صحیح و نامنفی‌اند.

عبارتهای سمتِ راست (۸) و (۹) مثالهایی از چندجمله‌ایهای نمایی در ساده‌ترین شکل‌اند.

در آنچه درپی می‌آید، همواره فرض می‌کنیم که همهٔ متغیرها مقادیر طبیعی می‌گیرند.

در سال ۱۹۵۲ جولیا رابینسون، ریاضیدان امریکایی، نتیجهٔ مهم زیر را منتشر کرد:

چندجمله‌ایی نمایی مانند $R(x_0, \ldots, x_k)$ وجود دارد که همهٔ مقادیر مثبت آن به‌ازای متغیرهای طبیعی عددهایی اول‌اند، و هر عدد اول را می‌توان به این شکل نمایش داد.

بنابراین، «فرمول اعداد اول» زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$p = R(x_0, \ldots, x_k) \qquad (۹)$$

این فرمول از چند جهت مهم است. نخست، فقط شامل عددهای صحیح است. پس، فرمول رابینسون را برخلاف فرمولهای میلز، رایت، و دیگران می‌توان به‌شکل صریح نوشت. دوم، این فرمول همهٔ عددهای اول را تعریف می‌کند نه، مانند فرمولهای دیگری که بررسی کردیم، فقط برخی از آنها را. سوم، باوجود اینکه (۱۰) عددهای غیر اول را نیز تولید می‌کند، این عددهای اضافی را به‌آسانی می‌توان غربال کرد، چون به‌ازای متغیرهای طبیعی، هر مقدار غیر اول R کوچکتر یا برابر با صفر است. این مزیت مهم فرمول رابینسون بر فرمولهای (۸) و (۹) و فرمولهای چندجمله‌ای دیگر است.

برهان جولیا رابینسون کاملاً مقدماتی است. در اینجا ایده‌های اساسی برهان را بیان می‌کنیم (تکمیل برهان را به خواننده واگذار می‌کنیم). همهٔ نتایج میانی را که باید ثابت شوند در قالب پنج لم بیان می‌کنیم. همان‌طور که خواهیم دید، وجود چندجمله‌ای نمایی R و گذشته از آن، شکل صریح این چندجمله‌ای از لمها نتیجه می‌شود.

نکاتی از برهان قضیهٔ جولیا رابینسون

برای اثبات قضیهٔ جولیا رابینسون باید چندجمله‌ای نمایی R را طوری بسازیم که معادلهٔ (۱۰) برای متغیرهای x_0، x_1، ...، x_k جواب طبیعی داشته باشد اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$p = \text{عددی اول} \qquad (۱۰)$$

این مثالی است از شرط روی متغیر p.

به مثالهایی دیگر از شرطهای روی مجموعهٔ متغیرهای

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_0, \ldots, x_k \qquad (۱۱')$$

توجه کنید. اگر قرار بگذاریم که مجموعه عددهای (′۱۱) باید در دستگاه معادلاتی به‌شکل

$$F_i(\lambda_1, \ldots \lambda_n, x_0, \ldots, x_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s) \qquad (۱۱'')$$

صدق کنند یا توصیفی مانند «همهٔ λ_iها عدد اول‌اند» یا «λ_1 اول و x_0، ...، x_k عددهایی زوج‌اند» را به‌کار ببریم، آنگاه از مجموعهٔ همهٔ دسته‌های (′۱۱) چندتایی را که در شرط اعمال شده بر آنها صدق می‌کنند انتخاب می‌کنیم.

نوع شرطهای مجاز را مشخص نمی‌کنیم. نمونهٔ شرطهایی که بیان شد برای توجیه رهیافتی که در پیش گرفته‌ایم کفایت می‌کند.

در آنچه درپی می‌آید بین متغیرها تمایز قائل می‌شویم و برخی از آنها را پارامتر می‌نامیم، به‌طوری که تقسیم متغیرها به پارامترها و متغیرها نسبی است. اگر همهٔ اعضای سمت‌چپ دستگاه معادلات (″۱۱) چندجمله‌ایهایی نمایی از λ_1، ...، λ_n، x_0، ...، x_k باشند، و به‌دنبال جوابی از دستگاه در عددهای طبیعی باشیم، آنگاه این دستگاه را به‌طور نمایی دیوفانتی می‌نامیم. اگر همهٔ F_iها چندجمله‌ایهایی معمولی باشند، آنگاه دستگاه معادلات (″۱۱) را فقط دیوفانتی می‌نامیم.

معادلهٔ (۱۰) مثالی از معادلهٔ به‌طور نمایی دیوفانتی از متغیرهای p، x_1، ...، x_k است.

دو دستگاه از شرطهایی را که پارامترهای یکسان داشته باشند، نسبت به این مجموعهٔ پارامترها هم‌ارز می‌نامیم، اگر مجموعهٔ مقادیری از پارامترها که به‌ازای آنها یکی از دو دستگاه جواب دارد بر مجموعهٔ مقادیری از پارامترها که به‌ازای آنها دستگاه دیگر جواب دارد منطبق باشد. (توجه کنید که در تعریف ما هیچ‌چیز درمورد رابطهٔ میان مقادیر متغیر گفته نشده است. درواقع در حالت مورد بحث ما این مقادیر اهمیتی ندارند، چون دستگاههای هم‌ارز با مفهوم بالا ممکن است اصلاً متغیرهای مشترکی نداشته باشند.)

به‌عنوان مثالی از شرطهای هم‌ارز نسبت به پارامتر λ، نابرابری

$$2^n < \lambda < 2^{n+1}$$

و برابری

$$\lambda = (2x_0 + 1)x_1$$

را درنظر بگیرید. به‌آسانی دیده می‌شود که هر یک از این شرطها جواب دارد اگر و فقط اگر پارامتر λ متعلق به مجموعهٔ عددهایی باشد که توانی با نمای طبیعی از ۲ نیستند.

با اصطلاحاتی که به‌کار برده‌ایم می‌توانیم هدف خود را این‌طور بیان کنیم: چندجمله‌ای نمایی $R(x_0, \ldots, x_k)$ را چنان بیابید که شرط (۱۰) هم‌ارز با شرط (۱۱) نسبت به پارامتر p باشد.

چنان‌که خواهیم دید، این شرط که پارامتر p فقط در سمت چپ (۱۰) باشد بیش از اندازه محدودکننده است.

فرض کنید چندجمله‌ای نمایی $Q(p, x_1, \ldots, x_k)$ پیدا شده است به‌طوری که معادلهٔ به‌طور نمایی دیوفانتیِ (شرطِ روی p، x_1، ...، x_k)

$$Q(p, x_1, \ldots, x_k) = 0 \tag{۱۱}$$

هم‌ارز با شرط (۱۱) است.

فرض کنید

$$R(x_0, \ldots, x_k) = x_0 \left(1 - Q^2(x_0, x_1, \ldots, x_k)\right) \tag{۱۲}$$

لم ۱ . اگر چندجمله‌ایهای نمایی R و Q با رابطهٔ (۱۳) به‌هم مرتبط باشند، آنگاه معادله‌های (۱۰) و (۱۲) نسبت به پارامتر p هم‌ارزند.

کافی است دستگاه معادلات به‌طور نمایی دیوفانتی

$$Q_1(p, x_1, \ldots, x_k) = 0$$
$$\vdots$$
$$Q_l(p, x_1, \ldots, x_k) = 0$$

را (به‌جای معادلات مطلوب) بیابیم که هم‌ارز است با شرط (۱۱) نسبت به p.

لم ۲ . اگر

$$Q(p, x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{l} Q_i^2(p, x_1, \ldots, x_k)$$

آنگاه دستگاه (۱۴) با دستگاه (۱۲) هم‌ارز است.

اکنون می‌کوشیم دستگاهی از معادلات به‌طور نمایی دیوفانتی بیابیم که هم‌ارز با شرط (۱۱) باشد.

عدد اول چیست؟

ممکن است خواننده از این پرسش شگفت‌زده شود. درواقع، همه می‌دانند که عدد اول عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ است که فقط بر ۱ و خودش بخش‌پذیر باشد. البته این درست است، اما استفاده از چنین تعریفی آسان نیست،

چون متضمن برهان به روش افناست؛ یعنی بررسی فراگیر برای یافتن مقسوم‌علیه‌های ممکن غیر از ۱ و خود عدد. اما بهتر است که اعداد اول را چنین تعریف کنیم: عدد p اول است اگر $p > ۱$ و p بر هیچ عدد طبیعی کوچکتر از p و مخالف ۱ بخش‌پذیر نباشد. تعریف زیر برای هدف ما از تعریف قبل نیز بهتر است: عدد p اول است اگر $p > ۱$ و به‌ازای هر عدد طبیعی کوچکتر از p مانند q، $\gcd(q,p) = ۱$.[۲]

در این تعریف، شرط $q \neq ۱$ وجود ندارد، و به‌علاوه، با این تعریف می‌توان تعدادی متغیر از شرطهای $\gcd(۱,p) = ۱$، $\gcd(۲,p) = ۱$، ... و $\gcd(p-۱,p) = ۱$ را به شرط واحد

$$\gcd((p-۱)!,p) = ۱$$

تبدیل کرد.

بنابراین، می‌توانیم دستگاه اول شرطهای هم‌ارز با شرط (۱۱) نسبت به پارامتر p را بنویسیم:

$$p = r + ۱ \tag{۱۳}$$

$$s = r! \tag{۱۴}$$

$$\gcd(s,p) = ۱ \tag{۱۵}$$

شرط اول از شرطهای بالا شکل مطلوب معادلهٔ به‌طور نمایی دیوفانتی را دارد (درحقیقت، شکل معادلهٔ دیوفانتی)، و معادلهٔ سوم را با معرفی دو متغیر جدید به‌آسانی می‌توان به این شکل تبدیل کرد.

لم ۳. شرط (۱۷) با شرط زیر نسبت به پارامترهای p و s هم‌ارز است:

$$x_۱ s - x_۲ p = ۱ \tag{۱۳}$$

چون معادلهٔ (۱۸) به‌طور نمایی دیوفانتی است، نتیجه می‌شود که کافی است دستگاهی از معادلات به‌طور نمایی دیوفانتی به‌دست آوریم که با شرط (۱۶) نسبت به پارامترهای r و s هم‌ارز باشد.

فاکتوریل چگونه محاسبه می‌شود؟

شرط (۱۶) شامل r فاکتوریل ($r!$) است، که برای ما مانعی محسوب می‌شود. توجه کنید که فاکتوریل در عبارتهای شامل ضریبهای دوجمله‌ای ظاهر می‌شود:

$$\binom{t}{r} = \frac{t(t-۱)\dots(t-r+۱)}{r!}$$

که در آن $t \geq r$. بنابراین،

$$r! = \frac{t(t-۱)\dots(t-r+۱)}{\binom{t}{r}}$$

۲. $\gcd(a,b)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای a و b است.

چندجمله‌ایِ صورت کسر بالا پیچیده است. سعی می‌کنیم به‌جای آن چندجمله‌ایی ساده‌تر، یعنی چندجمله‌ای t^r را بگذاریم. به‌ازای $t \geq r$،

$$\begin{aligned}\frac{t^r}{\binom{t}{r}} &= \frac{t^r}{t(t-1)\dots(t-r+1)} \cdot \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)}{\binom{t}{r}} \\ &= \left(1+\frac{1}{t-1}\right)\left(1+\frac{2}{t-2}\right)\dots\left(1+\frac{r-1}{t-r+1}\right)\cdot r! \\ &\geq r!\end{aligned}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$r! = \lim_{t\to\infty} \frac{t^r}{\binom{t}{r}} \tag{14}$$

اما نمی‌توانیم از این عبارت استفاده کنیم، چون t، پارامتر دستگاه معادلات مطلوب، می‌تواند مقادیر به‌دلخواه بزرگ، اما متناهی بگیرد. بدون گذر به حد، با استفاده از اینکه $r!$ عددی صحیح است، از (۱۹) و (۲۰) نتیجه می‌گیریم که به‌ازای tهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ،

$$r! = \left\lfloor \frac{t^r}{\binom{t}{r}} \right\rfloor \tag{15}$$

لم ۴ . فرمول (۲۱) به‌ازای $t \geq 2r^{r+2}$ درست است.

با استفاده از لم ۴ می‌توان شرط (۱۶) را به دستگاه

$$t = 2r^{r+2} \tag{22}$$

$$c = \binom{t}{r} \tag{23}$$

$$t^r = sc + (x_3 - 1) \tag{24}$$

$$(x_3 - 1) + x_4 = c \tag{25}$$

تبدیل کرد که با (۱۶) نسبت به پارامترهای r و s هم‌ارز است (این را تحقیق کنید).

پس اکنون تنها مانع کار ما ضریبهای دوجمله‌ای است.

ضریبهای دوجمله‌ای ضریبهای یک دوجمله‌ای‌اند!

کمی قبل از تعریف ضریبهای دوجمله‌ای برحسب فاکتوریل استفاده کردیم. اما ضریبهای دوجمله‌ای را به چند روش دیگر هم می‌توان تعریف کرد. مثلاً بسط

$$(u+1)^t = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} u^i \tag{26}$$

را در نظر بگیرید. اگر این فرمول را به‌عنوان اتحادی نسبت به u بگیریم، می‌توان آن را تعریف ضریبهای دوجمله‌ای دانست. اما لازم داریم که u متغیری باشد که در هر جواب خاص از دستگاه مورد جستجو فقط یک مقدار بگیرد.

توجه کنید که

$$\binom{t}{i} \leq \sum_{i=۰}^{t} \binom{t}{i} = (۱+۱)^t = ۲^t \tag{۲۷}$$

درنتیجه، اگر

$$u > ۲^t \tag{۲۸}$$

آنگاه $\binom{t}{۰}$، $\binom{t}{۱}$، ...، $\binom{t}{t}$ رقمهای عدد $(۱+u)^t$ درمبنای u هستند. بنابراین، ضریبهای دوجمله‌ای با این شرط که برابری (۲۶) و نابرابریهای (۲۷) و (۲۸) برای دست‌کم یک مقدار u همزمان برقرار باشند، به‌طور یکتا تعریف می‌شود.

لم ۵. نسبت به پارامترهای r، t، و c شرط (۲۳) با دستگاه معادلات زیر هم‌ارز است:

$$u = ۲^t + ۱ \tag{۲۹}$$

$$x_۵ = u + ۱ \tag{۳۰}$$

$$s_۵^t = x_۶ u^{r+۱} + cu^r + x_۷ \tag{۳۱}$$

$$x_۷ + x_۸ = u^r \tag{۳۲}$$

$$c + x_۹ = u \tag{۳۳}$$

در اینجا همهٔ شرطها از اول به‌شکل مناسب‌اند.

بنابراین، نشان داده‌ایم که نسبت به پارامتر p، شرط (۱۱) با دستگاه معادلات به‌طور نمایی دیوفانتی (۱۵)، (۱۸)، (۲۲)، (۲۴)، (۲۵)، (۲۹) − (۳۳) هم‌ارز است. پس برای به‌دست آوردن معادلهٔ نمایی مطلوب، کافی است که نام متغیرهای r، s، t، c، و u را با $x_{۱۰}$، $x_{۱۱}$، $x_{۱۲}$، $x_{۱۳}$، و $x_{۱۴}$ عوض کنیم، لم ۲ را برای ترکیب همهٔ معادله‌ها در یک معادلهٔ واحد به‌کار بگیریم و معادلهٔ حاصل را با استفاده از لم ۱ به‌شکل مطلوب (۱۰) تبدیل کنیم.

گامهای بعدی

فرمول (۱۰) شمارهٔ توالی عدد اولی را که تعریف می‌کند به‌طور صریح نشان نمی‌دهد. روش ساختن چندجمله‌ای نمایی R که در بالا شرح دادیم، بی‌واسطه به افزودن این شمارهٔ توالی به فرمول (۱۰) منجر نمی‌شود. در سال ۱۹۶۱، مارتین دیویس، هیلاری پاتنام، و جولیا رابینسون با روشی بسیار پیچیده‌تر قضیه‌ای بسیار قویتر را ثابت کردند که نتیجهٔ زیر را دربر دارد.

نتیجهٔ ۱ . چندجمله‌ایی نمایی مانند $P(x_0, \dots, x_k, n)$ وجود دارد که به‌ازای هر مقدار پارامتر ثابت n و مقادیر اختیاری برای متغیرهای دیگر، چندجمله‌ای P فقط یک مقدار مثبت می‌گیرد، و این عدد nامین عدد اول است.

در سال ۱۹۷۰، نویسندهٔ این مقاله با استفاده از نتایج دیگر قضیهٔ جولیا رابینسون توانست معادله‌ای دیوفانتی به‌شکل

$$M(a, b, c, z_1, \dots, z_m) = 0 \qquad (۳۴)$$

بسازد که جواب دارد اگر و فقط اگر پارامترهای a، b، و c با رابطهٔ $a = b^c$ به‌هم مربوط باشند. این نتیجه اجازه می‌دهد که واژهٔ «نمایی» را در صورت قضیهٔ قبل حذف کنیم، یعنی امکان ساختن چندجمله‌ایی را می‌دهد که عددهای اول را تعریف می‌کند. اما شرح این موضوع نیاز به مقاله‌ای دیگر دارد.

مسائل

مسألهٔ ۱ . ثابت کنید که در تصاعدهای حسابی

$$۳, ۷, ۱۱, \dots, \qquad ۵, ۱۱, ۱۷, \dots$$

بینهایت عدد اول وجود دارد.

مسألهٔ ۲ . مجموعهٔ چندجمله‌ایهایی را مشخص کنید که مقادیرشان در امتداد قطر قرارگیرد، اگر حلزونی شکلهای ۱ و ۳

الف) با ۱ شروع شود.

ب) با عدد دلخواه u شروع شود.

پ) با عدد u شروع شود و شامل جملات تصاعد حسابی u، $u + v$، $u + ۲v$، ... باشد.

مسألهٔ ۳ . بنابر قضیهٔ ویلسون، اگر p اول باشد، آنگاه $(p - ۱)! + ۱$ بر p بخش‌پذیر است. چگونه می‌توانیم از این نتیجه برای کاهش تعداد متغیرهای چندجمله‌ای نمایی R که اعداد اول را تولید می‌کند استفاده کنیم؟

مسألهٔ ۴ . چندجمله‌ای نمایی $S(x_0, \dots, x_k)$ را طوری بسازید که مجموعهٔ نیم‌مجموعهای دوقلوهای اول را تولید کند؛ یعنی عددهای $S(x_0, \dots, x_k) - ۱$ و $S(x_0, \dots, x_k) + ۱$ اول باشند و برعکس، اگر $s - ۱$ و $s + ۱$ اول باشند آنگاه مقادیری برای x_0، x_1، ...، x_k وجود داشته باشند که $S(x_0, \dots, x_k) = s$.

مسألهٔ ۵ . چندجمله‌ای نمایی $T(q, x_0, \dots, x_m)$ را طوری بسازید که

الف) اگر q عددی اول باشد، عددهای x_0، ...، x_m وجود داشته باشند که $T(q, x_0, \dots, x_m) > 0$.

ب) اگر q اول باشد و

$$T(q, x_0, \ldots, x_m) > 0$$

آنگاه $T(q, x_0, \ldots, x_m)$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از q باشد.

پ) اگر q اول نباشد، آنگاه

$$T(q, x_0, \ldots, x_m) \leq 0$$

این چندجمله‌ای نمایی «فرمول عدد اول بعدی» است.

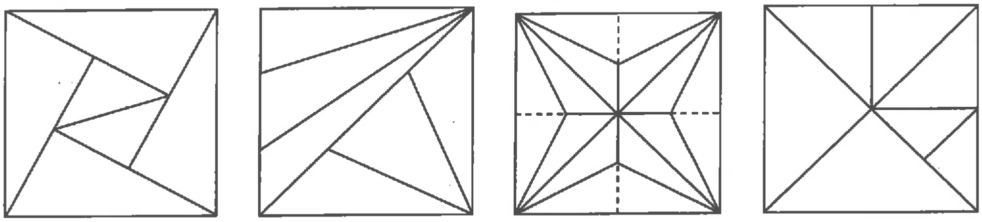
• ترجمهٔ مهران اخباریفر

Yuri Matiyasevich, Formulas for Prime Numbers, *Kvat Selecta: Algebra and Analysis*, II, AMS, 1999, pp. 13-24.

جراحی مثلثی

اُ. ایژبولدین و ل. کورلیانچیک

در این مقاله چند مسأله مطرح می‌کنیم که در آنها چندضلعیها به تعدادی مثلث تقسیم می‌شوند. مثلاً مربع را می‌توان به چند راه مختلف به مثلثها تقسیم کرد (شکلهای ۱ تا ۴ را ببینید).



شکل ۱   شکل ۲   شکل ۳   شکل ۴

اکنون این شکلها را با دقت بررسی می‌کنیم. مثلاً در شکلهای ۱ و ۴ همهٔ مثلثها قائمه‌اند و در شکل ۲ همه منفرجه. طبیعتاً این پرسش پیش می‌آید: آیا می‌توان مربع را به تعدادی مثلث تقسیم کرد که همه حاده باشند؟

از این گذشته، در همهٔ این شکلها دست‌کم دو مثلث وجود دارد که در یک ضلع مشترک‌اند. آیا همیشه وضعیت همین‌طور است؟

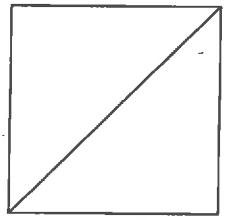
در شکلهای ۲ و ۳ همهٔ مثلثها هم‌مساحت‌اند و تعدادشان زوج است. آیا می‌توان مربع را به تعدادی فرد مثلث هم‌مساحت تقسیم کرد؟

به‌طور کلی‌تر، فهمیدن این موضوع جالب است که آیا یک چندضلعی را می‌توان تحت محدودیتهای مشخصی به تعدادی مثلث تقسیم کرد. این محدودیتها را مثلاً می‌توان در مورد زاویه‌های مثلثهای موردنظر، تعداد یا آرایش آنها و چیزهایی از این دست در نظر گرفت.

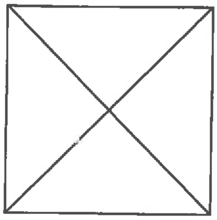
مثلثهای حاده

مسألهٔ ۱. آیا می‌توان مربع را به تعدادی مثلث حاده تقسیم کرد؟

طبیعتاً برای حل این مسأله ابتدا سعی می‌کنیم که مربع را آن‌طور که خواسته شده است تقسیم کنیم. مثلاً، اول می‌توانیم مربع را در امتداد یک قطر (شکل ۵) یا دو قطر (شکل ۶) تقسیم کنیم. در هر دو حالت مسأله‌مان تبدیل می‌شود به اینکه مثلثهای قائمه را به مثلثهای حاده تقسیم کنیم.

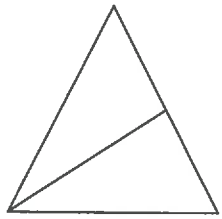


شکل ۵

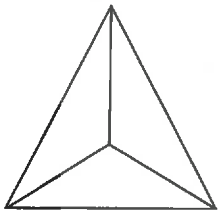


شکل ۶

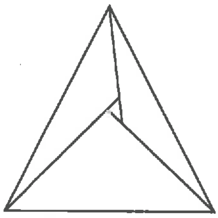
اما چطور می‌توان مثلثی را به مثلثهای دیگر تقسیم کرد؟ سه حالت ساده می‌توان در نظر گرفت (شکلهای ۷ تا ۹).



شکل ۷



شکل ۸



شکل ۹

در هر سه‌تای این شکلها دست‌کم یکی از مثلثهای حاصل حاده نیست! از خواننده می‌خواهیم سعی کند چند مثلث را خودش تقسیم کند؛ احتمالاً به این فرضیه می‌رسید که پاسخ سؤال بالا منفی است. اکنون با وضعیتی روبه‌رو هستیم که برای ریاضیدانان امری کاملاً عادی است: یا می‌توانیم همین‌طور به یافتن ساختار خواسته‌شده ادامه دهیم یا دنبال آن باشیم که ثابت کنیم اساساً چنین ساختاری وجود ندارد. از شما می‌خواهیم که دربارهٔ این مسأله تأمل کنید؛ به این پرسش کمی بعد پاسخ می‌دهیم. تا موقع آن فرا رسد، سراغ مسألهٔ دیگری می‌رویم.

مثلثهایی که روی ضلعهایشان رأسهای مثلثهای دیگر وجود ندارند

در همهٔ شکلهای بالا مثلثی وجود دارد که ضلعهایش شامل هیچ رأسی از مثلثهای دیگر نیستند (بجز احتمالاً رأسهای دو سر هر ضلع).

مسألهٔ ۲ . آیا می‌توان n ضلعی محدبی را به مثلثهایی تقسیم کرد که هر یک از آنها دست‌کم یک ضلع داشته باشد که شامل رأس (یا رأسهایی) از مثلثهای دیگر باشد؟

ثابت می‌کنیم که چنین کاری ممکن نیست. عکس این را فرض کنید. درضمن، فرض کنید T تعداد مثلثهای ایجادشده و V_{int} تعداد رأسهای «درونی»، یعنی رأسهایی که روی ضلعهای این مثلثها قرار دارند، باشد. روشن است که $T \geq V_{\text{int}}$، زیرا بنابر فرضمان می‌توانیم به هر مثلث رأسی درونی را که روی کرانه‌اش قرار دارد نسبت دهیم.

توجه کنید که به مثلثهای مختلف رأسهای متمایز نسبت داده می‌شود، چون هیچ رأسی ممکن نیست به‌طور همزمان رأس درونی دو مثلث مختلف باشد.

اکنون مجموع زاویه‌های همهٔ این مثلثها را حساب می‌کنیم. از یک طرف، مجموع این زاویه‌ها برابر با $۱۸۰^\circ \times T$ است. از طرف دیگر، مجموع زاویه‌های مجاور رأسهای درونی $۱۸۰^\circ \times V_{\text{int}}$، و مجموع زاویه‌های مجاور رأسهای nضلعی $۱۸۰^\circ \times (n-۲)$ است. بنابراین مجموع کل زاویه‌های این مثلثها از

$$۱۸۰^\circ \times V_{\text{int}} + ۱۸۰^\circ \times (n-۲)$$

کمتر نیست. پس می‌توان نوشت

$$۱۸۰^\circ \times T \geq ۱۸۰^\circ \times V_{\text{int}} + ۱۸۰^\circ \times (n-۲) > ۱۸۰^\circ \times V_{\text{int}}$$

که این نتیجه با نابرابری $V_{\text{int}} \geq T$ که پیش از این به‌دست آمد تناقض دارد.

به این ترتیب قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیهٔ ۱. هر وقت nضلعی محدبی به تعدادی مثلث تقسیم شده باشد، ضلعهای دست‌کم یکی از این مثلثها شامل هیچ رأسی از مثلثهای دیگر نیستند (بجز احتمالاً رأسهای دو سر هر ضلع).

تمرین ۱. آیا این قضیه در مورد چندضلعیهایی که محدب نباشند هم درست است؟

مثلثهای بدون ضلع مشترک

مسألهٔ ۳. آیا می‌توان nضلعی محدبی را به تعدادی مثلث طوری تقسیم کرد که هیچ دو تایی از آنها ضلع مشترک نداشته باشند؟

ابتدا ساده‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم، یعنی وقتی که $n = ۳$. ساختار موردنظر در شکل ۹ نشان داده شده است.

اکنون سعی می‌کنیم چهارضلعی محدبی را به شکل خواسته شده به تعدادی مثلث تقسیم کنیم. کاملاً طبیعی است که این کار را از مربع آغاز کنیم. به شکلهای ۱ تا ۴ نگاه کنید: هر یک از آنها شامل (دست‌کم) یک جفت مثلث است که یک ضلع مشترک دارند.

باز هم بر سر دو راهی قرار گرفته‌ایم: یا باید ثابت کنیم که نمی‌توان nضلعی را آن‌طور که خواسته شده است تقسیم کرد یا باید به جستجو برای یافتن ساختار موردنظر ادامه دهیم.

همان‌طور که خواهیم دید، وجود چنین ساختاری غیرممکن است، یعنی nضلعی محدب $(n \geq ۴)$ هرطور هم که تقسیم شود دست‌کم دو مثلث وجود دارد که در یک ضلع مشترک‌اند؛ البته، اثبات این مطلب تا اندازه‌ای پیچیده است.

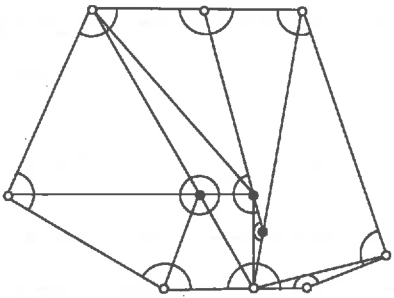
برای اثبات این ادعا ابتدا قضیهٔ کمکی مهمی را بیان و ثابت می‌کنیم.

نابرابری $V \leq T + ۲$

قضیهٔ ۲. فرض کنید nضلعی محدبی به T مثلث تقسیم شده باشد و V تعداد کل رأسهای این مثلثها باشد. در این صورت $V \leq T + ۲$.

اثبات. مجموع کل زاویه‌های همهٔ مثلثهای موردنظر $T \times {۱۸۰}^\circ$ است. اکنون مقدار این مجموع را از راه دیگری حساب می‌کنیم. مجموعهٔ رأسهای همهٔ این مثلثها را به دو بخش تقسیم می‌کنیم.

در بخش اول همهٔ رأسهای nضلعی داده‌شده را می‌آوریم (در شکل ۱۰ این رأسها را توخالی نشان داده‌ایم). بخش دوم از بقیهٔ رأسها تشکیل شده است (در شکل ۱۰ آنها را توپر نشان داده‌ایم).



شکل ۱۰

روشن است که مجموع زاویه‌های مجاور رأسهای توخالی برابر با مجموع زاویه‌های nضلعی است؛ بنابراین

$$\text{مجموع «زاویه‌های توخالی»} = {۱۸۰}^\circ \times (n - ۲)$$

اکنون یک رأس توپر دلخواه در نظر بگیرید. معلوم است که مجموع زاویه‌های مجاورش یا ${۱۸۰}^\circ$ است یا ${۳۶۰}^\circ$ (شکل ۱۰ را ببینید)؛ در هر صورت، این مجموع از ${۱۸۰}^\circ$ کمتر نیست. چون $V - n$ رأس توپر وجود دارد، پس

$$\text{مجموع «زاویه‌های توپر»} \geq {۱۸۰}^\circ \times (V - n)$$

بنابراین

$$\text{مجموع کل زاویه‌های همهٔ مثلثها} = {۱۸۰}^\circ \times T$$

$$= \text{مجموع «زاویه‌های توخالی»} + \text{مجموع «زاویه‌های توپر»}$$

$$\geq {۱۸۰}^\circ \times (n - ۲) + {۱۸۰}^\circ \times (V - n) = {۱۸۰}^\circ \times (V - ۲)$$

پس نابرابریی که می‌خواستیم به‌دست می‌آید:

$$V \leq T + ۲$$

به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

راه‌حل مسألهٔ ۳. فرض کنید nضلعی محدبی را به تعدادی مثلث طوری تقسیم کرده باشیم که هیچ دو تایی از آنها ضلعی مشترکی نداشته باشند.

از دو راه مختلف تعداد پاره‌خطهایی را که ضلعهای این مثلثها هستند حساب می‌کنیم. این پاره‌خطها را «ضلع» می‌نامیم و تعدادشان را با S نشان می‌دهیم. روشن است که $S = ۳T$، چون هر مثلث سه ضلع دارد و هیچ‌یک از ضلعهای دو مثلث مختلف یکی نیستند.

مجموعهٔ رأسها و نیز مجموعهٔ ضلعها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

(i) رأسها و ضلعهای کرانه‌ای، یعنی آنهایی که روی کرانهٔ nضلعی داده‌شده قرار دارند. تعداد رأسها و ضلعهای کرانه‌ای را به‌ترتیب با V_b و S_b نشان می‌دهیم.

(ii) رأسها و ضلعهای داخلی، یعنی همهٔ آنهایی که کرانه‌ای نیستند. تعداد این رأسها و ضلعها را هم به‌ترتیب با V_{in} و S_{in} نشان می‌دهیم.

روشن است که

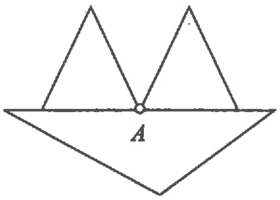
$$V = V_b + V_{\text{in}}, \qquad S = S_b + S_{\text{in}}$$

اکنون میان S_b، تعداد ضلعهای کرانه‌ای، و V_b، تعداد رأسهای کرانه‌ای، رابطه‌ای پیدا می‌کنیم. به این منظور، کرانهٔ nضلعی داده‌شده را «یک‌بار طی می‌کنیم». در طول این حرکت «رأسها» و «ضلعها» یکی در میان قرار دارند، یعنی تعدادشان با هم برابر است؛ پس $V_b = S_b$.

رابطه‌ای هم میان S_{in}، تعداد ضلعهای داخلی، و V_{in}، تعداد رأسهای داخلی، وجود دارد؛ البته، این رابطه پیچیده‌تر است: $V_{\text{in}} \geq S_{\text{in}}$. برای اثبات این نابرابری آن دسته از رأسهای داخلی را انتخاب می‌کنیم که درون ضلعها قرار دارند. چنین رأسهایی را درونی می‌نامیم و تعدادشان را با V_{int} نشان می‌دهیم. واضح است که $V_{\text{in}} \geq V_{\text{int}}$. بنابراین برای اثبات نابرابری $۳V_{\text{in}} \geq S_{\text{in}}$ کافی است ثابت کنیم که

$$۳V_{\text{int}} \geq S_{\text{in}}$$

در صورتی که بتوانیم به هر رأس درونی سه ضلع داخلی طوری نسبت دهیم که هر ضلع داخلی متناظر با دست‌کم یک رأس باشد، نابرابری موردنظر ثابت می‌شود. چنین تناظری وجود دارد؛ این تناظر در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۱

اکنون باید مطمئن شویم که هر ضلع داخلی متناظر با دست‌کم یک رأس درونی است. درستی این موضوع در مورد ضلعهایی که شامل رأسی باشند واضح است. اگر ضلعی داخلی شامل هیچ رأسی نباشد، این ضلع بخشی از یک ضلع مثلثی دیگر است. در این صورت دست‌کم یکی از دو سرش رأسی درونی است و همین رأس متناظر با ضلع موردنظر است.

به این ترتیب $۳V_{\text{int}} \geq S_{\text{in}}$ و درنتیجه $۳V_{\text{in}} \geq S_{\text{in}}$. بنابراین

$$
\begin{aligned}
۳T = S = S_{\text{in}} + S_b &\leq ۳V_{\text{in}} + V_b \\
&= ۳(V_{\text{in}} + V_b) - ۲V_b = ۳V - ۲V_b \leq ۳V - ۲n
\end{aligned}
$$

درنتیجه $V \geq T + \frac{۲}{۳}n$. اکنون چون $n \geq ۴$، پس $V \geq T + \frac{۸}{۳} > T + ۲$، که این نتیجه با قضیهٔ ۲ تناقض دارد.

به این ترتیب قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۳. هر وقت nضلعی محدبی $(n \geq ۴)$ به تعدادی مثلث تقسیم شده باشد، در میان آنها دست‌کم دو مثلث وجود دارند که در یک ضلع مشترک‌اند.

اثبات بالا را با دقت بررسی کنید و بعد تمرینهای زیر را حل کنید.

تمرینها

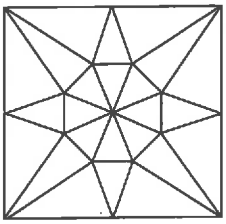
۱. فرض کنید مثلثی به T مثلث طوری تقسیم شده باشد که هیچ پاره‌خطی ضلع مشترک دو مثلث نباشد. همچنین فرض کنید V تعداد کل رأسهای مثلثها در این تجزیه باشد. ثابت کنید $V = T + ۲$.

۲. فرض کنید nضلعی‌ای $(n \geq ۴)$ به تعدادی مثلث تقسیم شده باشد. ثابت کنید دست‌کم $n - ۳$ پاره‌خط وجود دارند که هر یک از آنها ضلع مشترک دو تا از این مثلثهاست.

۳. در قضیه‌های ۲ و ۳ شرط محدب بودن چندضلعی آمده است. آیا این قضیه‌ها در مورد چندضلعیهایی که محدب نیستند هم برقرارند؟

بازگشت به مسألهٔ تقسیم مربع به مثلثهای حاده

در دو مسأله از مسأله‌هایی که در بخشهای قبلی حل کردیم تقسیم چندضلعی به مثلثها، به‌شکل خواسته‌شده، امکان‌پذیر نبود. ممکن است این‌طور به‌نظر برسد که اگر نتوانیم در همان بار اول تجزیهٔ موردنظر را انجام دهیم چنین تجزیه‌ای اصلاً وجود ندارد. به هر حال این نتیجه‌گیری درست نیست! به مسألهٔ ۱ بازمی‌گردیم که در آن می‌خواستیم مربعی را به تعدادی مثلث حاده تقسیم کنیم. با وجود اینکه در نخستین تلاشمان ناکام ماندیم چنین تجزیه‌ای وجود دارد و در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲

تمرینها

۱. در شکل ۱۲، ۲۴ مثلث وجود دارد. آیا می‌توان با مثلثهای کمتر از این هم تجزیهٔ موردنظر را به‌دست آورد؟

۲. ثابت کنید که هر چندضلعی محدب را می‌توان به تعدادی مثلث حاده تقسیم کرد.

مثلثهای هم‌مساحت

مسألهٔ ۴. آیا می‌توان مربع را به تعدادی فرد مثلث هم‌مساحت تقسیم کرد؟

صورت این مسأله شبیه مسأله‌هایی است که پیش از این حل کردیم. البته، این مسأله بسیار دشوارتر است. در اینجا پاسخ منفی است. خودمان نتوانستیم این حکم را با استفاده از روشهای مقدماتی ثابت کنیم و بسیار تحسین‌برانگیز خواهد بود که کسی بتواند این کار را انجام دهد. (می‌توانید راه‌حلی بسیار دشوار از این مسأله را در مقالهٔ «عددهای ۲ ای» در نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۱۸، صفحهٔ ۲۱ ببینید.)

مجموعهٔ متنوعی از تجزیه‌ها

تا اینجا مسألهٔ تقسیم چندضلعیها به مثلثها را فقط زخمی کرده‌ایم. در این زمینه مسأله‌های جالب بسیاری را می‌توان طرح کرد که هر یک از آنها ممکن است موضوع مقاله‌ای پژوهشی باشد. در اینجا تنوع مسأله‌ها بسیار زیاد است؛ حتی مسألهٔ تقسیم مربعها را هم به‌طورکامل تمام نکردیم. خوانندگان را به حل مسأله‌های زیر دعوت می‌کنیم.

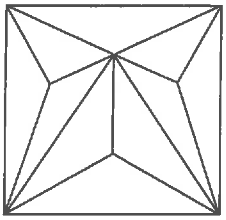
مسأله‌ها

۱. در شکل ۲، مربع را به ۱۲ مثلث منفرجه تقسیم کردیم؛ در شکل ۱۳، مربع به ۱۰ مثلث منفرجه تقسیم شده است. آیا می‌توان مربع را به مثلثهای منفرجهٔ کمتر از این هم تقسیم کرد؟ حداقل تعداد ممکن مثلثها در تجزیه‌ای از این دست چند است؟

۲. آیا می‌توان مربع را به تعدادی مثلث طوری تقسیم کرد که هیچ دو تایی از آنها برابر نباشند و همهٔ آنها

(i) مثلثهای قائمه باشند؟

(ii) مثلثهای متساوی‌الساقین باشند؟



شکل ۱۳

(iii) مثلثهای متساوی‌الساقین قائمه باشند؟

(iv) با یکدیگر متشابه باشند؟

(v) هم‌محیط باشند؟

(vi) هم‌مساحت باشند؟

۳. آیا می‌توان مربع را به تعدادی مثلث

(i) «بسیار منفرجه» تقسیم کرد؟ یعنی آیا می‌توان مربع را طوری به مثلثها تقسیم کرد که یکی از زاویه‌های هر یک از مثلثها از ۱۲۰° بزرگتر باشد؟ بزرگتر از ۱۷۹° چطور؟

(ii) «تقریباً متساوی‌الاضلاع»، یعنی مثلثهایی که همهٔ زاویه‌هایشان از ۷۰° کمتر باشند، تقسیم کرد؟

(iii) که سه زاویهٔ هر یک از آنها مقادیر داده شدهٔ α، β و λ باشند (مثلاً سه زاویهٔ هر یک از آنها ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° باشند)، تقسیم کرد؟

(iv) همهٔ زاویه‌هایی مانند α را پیدا کنید که بتوان مربع را به مثلثهایی تقسیم کرد که زاویه‌هایشان همگی از α کمتر باشند.

۴. آیا می‌توان مربع را به تعدادی مثلث طوری تقسیم کرد که هر مثلث دقیقاً

(i) دو همسایه داشته باشد؟

(ii) سه همسایه داشته باشد؟

(iii) n همسایه داشته باشد (در اینجا n عددی معلوم است)؟

دو مثلث را در صورتی همسایه می‌نامند که دست‌کم یک نقطهٔ مشترک (این یک شکل از تعریف است) یا یک پاره‌خط مشترک (این هم شکل دیگری از تعریف است) داشته باشند.

• ترجمهٔ مهرداد مسافر

O. Izhboldin and L. Kurlyandchik, Triangular surgery, *Quantum*, November/Desember 2000, pp. 34-37.

بزرگی-کوچکی

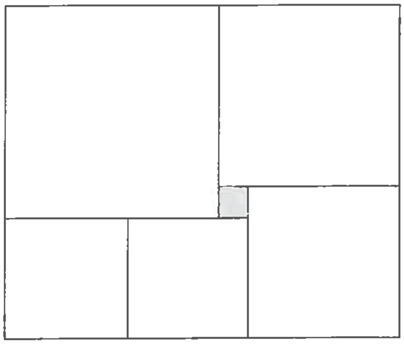
ارشک حمیدی

می‌گویند «خوبه آدم بزرگی-کوچکی سرش بشه.» در این مقاله می‌بینیم که گاهی جانب بزرگترها را داشتن و گاهی گوشهٔ چشمی به کوچکترها داشتن برای حل کردن مسأله‌ها مفید است. ممکن است مسأله‌ای به بررسی تعدادی (شاید نامتناهی) عنصر مربوط باشد. مثلاً، در مسأله‌های هندسی معمولاً با ویژگیهای چندین نقطه، خط و یا شکلهای دیگر سروکار داریم یا در معادله‌ها با چندین عدد که ویژگیهایی خاص دارند.

مسأله حل‌کنهای حرفه‌ای در این موارد از تکنیک زیر زیاد استفاده می‌کنند: اگر شد، فرض کنید عنصرهای مسأله «به‌ترتیب»‌اند. «بزرگترین» و «کوچکترین» عنصرها را در نظر بگیرید. ممکن است این عنصرها راههای خوبی پیش پای شما بگذارند و اطلاعات مفیدی دربر داشته باشند.

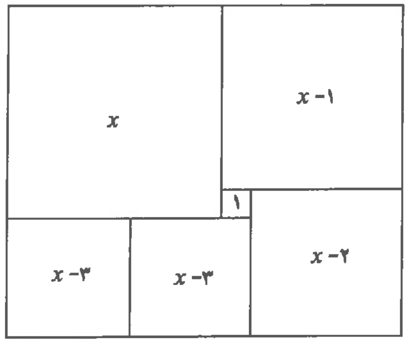
مسألهٔ سادهٔ زیر را در نظر بگیرید.

مسألهٔ ۱ . مستطیل شکل زیر را به شش مربع تقسیم کرده‌ایم. اگر طول ضلع مربع سایه‌دار ۱ باشد، طول ضلعهای مستطیل چقدر است؟



راه‌حل. کوچکترین و بزرگترین مربع را در نظر بگیرید. در مورد کوچکترین مربع، که همان مربع سایه‌دار است، همه‌چیز را می‌دانیم: طول ضلع این مربع برابر با ۱ است.

توجه کنید که اگر طول ضلع بزرگترین مربع را بدانیم، طول ضلع بقیهٔ مربعها را هم می‌توانیم حساب کنیم. درحقیقت، اگر طول ضلع بزرگترین مربع برابر با x باشد، طول ضلع بقیهٔ مربعها $x - 1$، $x - 2$، $x - 3$ و $x - 3$ است (شکل ابتدای صفحهٔ بعد را ببینید؛ در مورد آخر، توجه کنید که اگر طول ضلع مربع پایین سمت چپ برابر با y باشد، چون ضلعهای روبه‌رو در مستطیل برابرند، $y + x = (x - 2) + (x - 1)$، پس $y = x - 3$).

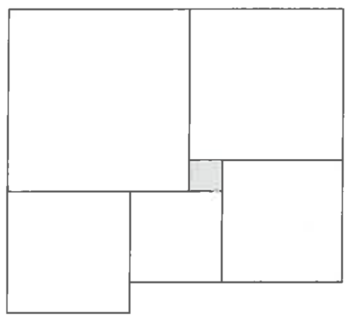


اکنون توجه کنید که طول ضلع بالایی مستطیل برابر با $x + (x - ۱)$ است و طول ضلع پایینی مستطیل برابر با $(x - ۳) + (x - ۳) + (x - ۲)$. درنتیجه

$$x + (x - ۱) = (x - ۲) + (x - ۳) + (x - ۳)$$

بنابراین $x = ۲$ و طول ضلعهای مستطیل موردنظر ۱۱ و ۱۳ است.

تمرین ۱. شکل زیر از شش مربع ساخته شده است. اگر طول ضلع مربع سایه‌دار برابر با ۱ باشد، طول ضلع مربع پایین سمت چپ چقدر است؟



مسألهٔ ۲ . روی دایره‌ای ۳۰ عدد طوری نوشته‌ایم که هر یک از آنها برابر است با قدرمطلق تفاضل دو عدد بعد از آن (در جهت ساعتگرد). می‌دانیم که مجموع این عددها برابر با ۱ است. این عددها را پیدا کنید.

راه‌حل. ابتدا توجهٔ کنید که چون هر یک از عددهای نوشته‌شده روی دایره برابر با قدرمطلق تفاضل دو عدد دیگر است، پس همهٔ این عددها غیرمنفی‌اند. فرض کنید بزرگترین این عددها (یا یکی از بزرگترین این عددها) برابر با x باشد. در این صورت دو عدد بعد از x از x بزرگتر نیستند و اختلافشان برابر با x است. این وضعیت هم فقط وقتی پیش می‌آید که یکی از آنها برابر با x باشد و دیگری برابر با صفر. بنابراین این سه عدد یا x، x، ۰ (به همین ترتیب) هستند یا x، ۰، x (به همین ترتیب).

اکنون اگر در جهت پاد ساعتگرد روی دایره حرکت کنیم می‌توانیم همهٔ عددها را پیدا کنیم. در هر دو حالت همین مجموعه از عددها تکرار می‌شوند (درحقیقت، دنبالهٔ عددهای روی دایره دنباله‌ای متناوب با طول دورهٔ تناوب ۳ است). چون مجموع عددها برابر با ۱ است، پس $1 = (2x)10$ و درنتیجه $x = \frac{1}{20}$. به این ترتیب، بیست تا از عددهای موردنظر برابر با $\frac{1}{20}$اند و بقیه صفرند.

مسألهٔ ۳. آیا می‌توان چهار عدد طبیعی متمایز مانند a، b، c و d پیدا کرد که

$$a^a + b^b = c^c + d^d$$

راه‌حل. فرض کنید عددهای طبیعی a، b، c و d ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. فرض کنید c بزرگترین این عددها باشد. در این صورت $c \geq 4$ و درنتیجه

$$a^a + b^b < 2(c-1)^{c-1} < 2c^{c-1} < c^c < c^c + d^d$$

که تناقض است. بنابراین عددهایی با ویژگیهای موردنظر وجود ندارند.

البته، کوچکترین یا بزرگترین عنصر مسأله معمولاً به‌طور مستقیم به چیزی که اثبات آن در حکم مسأله خواسته شده ربط ندارد. در موارد مختلف باید کوچکترین یا بزرگترین عضو، اولین یا آخرین عضو، کوچکترین یا بزرگترین فاصله، کوچکترین یا بزرگترین زاویه، کوچکترین یا بزرگترین مساحت، ... از اشیای مربوط به عنصرهای مسأله را در نظر گرفت. اما نحوهٔ استدلال معمولاً یکسان است: فرض کنید حکم درست نباشد؛ یکی از «کوچکترین» یا «بزرگترین»ها را در نظر بگیرید؛ طوری استدلال کنید که موردی کوچکتر یا بزرگتر به‌دست بیاورید؛ به این ترتیب به تناقض رسیده‌اید و حکم درست است.

در مسأله‌های زیر روش کار را تا حدودی روشن کرده‌ایم.

مسألهٔ ۴. روی میز صرافی چند سکهٔ طلا قرار دارد که با هم تماس ندارند. دزد بی‌دستی می‌خواهد با بینی‌اش یکی از سکه‌ها را تا لبهٔ میز بیاورد و آن را بردارد. البته می‌خواهد این کار را طوری انجام دهد که سکه‌ای که می‌خواهد بردارد به هیچ‌یک از سکه‌های دیگر برخورد نکند (مبادا که صراف متوجه شود). آیا می‌تواند این کار را بکند؟

راه‌حل. متأسفانه، بله! روی صفحهٔ میز دستگاه مختصاتی در نظر بگیرید. دزد کافی است سکه‌ای را انتخاب کند که مختص y آن از بقیه بیشتر است. فرض کنید مرکز این سکه نقطهٔ C و شعاع آن r باشد. ثابت می‌کنیم که می‌توان این سکه را به بالا هُل داد، به‌طوری که به هیچ سکه‌ای برخورد نکند. فرض کنید چنین نباشد و در نواری که سکهٔ موردنظر طی می‌کند تا ضمن حرکت به سمت بالا به لبهٔ میز برسد به سکه‌ای به مرکز C' و شعاع r' در نقطه‌ای مانند A برخورد کند. اگر A' تصویر A روی خطی افقی باشد که از C می‌گذرد، آن‌وقت $C'A' < C'A$ و درنتیجه $C'A' < r'$؛ یعنی، سکه‌ها با هم تماس داشته‌اند، که ممکن نیست.

مسألهٔ ۵. ساحران در مقابل موسی (ع) هزار مار دو سر بر زمین رها کردند. آیا ممکن است این مارها طوری بر زمین بخوابند که هر یک از دو سر آنها بر بدن ماری دیگر قرار گرفته باشد؟

راه‌حل. مسأله را می‌توان این‌طور بیان کرد: آیا می‌توان هزار پاره‌خط در صفحه رسم کرد که هر یک از دو سر آنها روی یکی دیگر از پاره‌خطها قرار بگیرد؟

فرض کنید بتوان این پاره‌خطها را رسم کرد. دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که محور y آن موازی هیچ‌یک از پاره‌خطها نباشد. اکنون نقطهٔ انتهای پاره‌خطی را در نظر بگیرید که مختص x آن از بقیه کوچکتر است. معلوم است که این نقطه روی هیچ‌یک از پاره‌خطهای دیگر قرار ندارد. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و نمی‌توان پاره‌خطهایی با ویژگیهای موردنظر رسم کرد.

تمرین ۲. آیا می‌توان تعدادی متناهی بردار در صفحه طوری رسم کرد که مجموع هر دو تا از آنها با مجموع دو تای دیگر از آنها برابر باشد؟

مسألهٔ ۶. تعدادی متناهی نقطهٔ سیاه و سفید روی صفحه طوری قرار دارند که روی هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ همرنگ را به هم وصل می‌کند نقطه‌ای به رنگ دیگر قرار دارد. ثابت کنید همهٔ این نقطه‌ها روی یک خط راست قرار دارند.

راه‌حل. فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت دست‌کم یک مثلث وجود دارد که رأسهایش از نقطه‌های موردنظرند. در میان مثلثهایی که رأسهایشان از نقطه‌های موردنظرند مثلثی را انتخاب کنید که مساحتش از بقیه کمتر باشد. دو رأس این مثلث همرنگ‌اند. بنابراین نقطه‌ای به رنگ دیگر روی ضلع میان آنها قرار دارد. درنتیجه می‌توانیم مثلثی پیدا کنیم که رأسهایش از نقطه‌های موردنظر است، اما مساحتش کمتر است.

مسألهٔ ۷. پانزده گانگستر (که تیرشان خطا نمی‌رود!) در محوطه‌ای وسیع ایستاده‌اند. می‌دانیم که فاصلهٔ هر دو گانگستر با فاصلهٔ هر دو تای دیگر فرق دارد. در یک لحظه هر گانگستر به نزدیکترین گانگستر به خودش شلیک می‌کند. ثابت کنید دست‌کم یکی از گانگسترها زنده می‌ماند.

راه‌حل. دو گانگستری را در نظر بگیرید که فاصلهٔ آنها از فاصلهٔ هر دو گانگستر دیگر کمتر است. این دو به هم شلیک می‌کنند. اگر گانگستر دیگری به یکی از این دو شلیک کند، دوازده شلیک می‌ماند و سیزده نفر، یعنی یکی زنده می‌ماند. اگر هیچ گانگستری به دو گانگستر موردنظر شلیک نکند، می‌توانیم این دو را کنار بگذاریم و مانند قبل استدلال کنیم (در مورد سیزده گانگستر). اگر وضع به همین منوال ادامه پیدا کند، در انتها یک گانگستر می‌ماند (و البته، قطعاً، زنده).

مسألهٔ ۸. ۳۰۰ خط راست در صفحه طوری رسم کرده‌ایم که هیچ دو تایی از آنها موازی نیستند و هیچ سه تایی از آنها از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید در میان ناحیه‌هایی که این خطها صفحه را به آنها تقسیم می‌کنند دست‌کم ۱۰۰ مثلث وجود دارد.

راه‌حل. یکی از خطها را انتخاب کنید. همهٔ نقطه‌های برخورد خطهای مفروض را که روی این خط قرار ندارند در نظر بگیرید و از اینها آن نقطه‌ای را انتخاب کنید که فاصله‌اش تا خط انتخاب‌شده کمترین است. در میان ناحیه‌هایی که در صفحه به‌وجود آمده، دست‌کم یک مثلث وجود دارد: مثلثی که یک رأسش نقطهٔ انتخاب‌شده است و دو رأس دیگرش روی خط انتخاب‌شده قرار دارد (درحقیقت، هیچ خطی مثلثی را که با خط انتخاب‌شده و دو خط راستی که از نقطهٔ انتخاب‌شده می‌گذرند تشکیل می‌شود قطع نمی‌کند). همین کار را با بقیهٔ خطها تکرار می‌کنیم. توجه کنید که هر مثلث حداکثر متناظر با سه خط راست متمایز است. بنابراین دست‌کم $\frac{۳۰۰}{۳}$ یا ۱۰۰ مثلث داریم.

تمرین ۳. ۳۰۰۰ خط راست در صفحه طوری رسم کرده‌ایم که هیچ دو تایی از آنها موازی نیستند و هیچ سه تایی از آنها از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید در میان ناحیه‌هایی که این خطها صفحه را به آنها تقسیم می‌کنند دست‌کم ۲۰۰۰ مثلث وجود دارد.

مسألهٔ ۹ . در شهری می‌توان از هر ایستگاه مترو به هر ایستگاه دیگر رفت. ثابت کنید می‌توان یکی از ایستگاهها را بست، به‌طوری که باز هم بتوان از هر ایستگاه به هر ایستگاه دیگر رفت.

راه‌حل. ایستگاه دلخواهی مانند S در نظر بگیرید و فرض کنید T دورترین ایستگاه تا S باشد، به این تعبیر که کوتاهترین راه میان S و T نسبت به کوتاهترین راه میان S و هر ایستگاه دیگر از تعداد بیشتری ایستگاه بگذرد (یا دست‌کم از تعداد کمتری ایستگاه نگذرد). اکنون ایستگاه T را ببندید. در این صورت باز هم می‌توان از ایستگاه S به هر ایستگاه (غیربستهٔ) دیگر رفت، زیرا راه میان S و این ایستگاه از T نمی‌گذرد (در غیر این صورت، می‌توان ایستگاه دورتری به S نسبت به T پیدا کرد). اکنون توجه کنید که اگر دو ایستگاه متمایز از S در نظر بگیریم، می‌توانیم از هر یک از آنها به دیگری برویم، زیرا کافی است از یکی از آنها به S برویم و بعد به ایستگاه دیگر.

مسألهٔ ۱۰ . سالنی ۵×۵ از ۲۵ خانهٔ ۱×۱ درست شده است. قرار است ۲۵ نفر در این خانه‌ها بایستند. هر یک از این افراد حداکثر سه دشمن در میان بقیهٔ افراد دارد. آیا می‌توان جای افراد را طوری مشخص کرد که هیچ‌کس همسایهٔ دشمنانش نباشد (دو نفر همسایه‌اند، هرگاه خانه‌هایی که در آنها ایستاده‌اند ضلعی مشترک داشته باشند).

راه‌حل. خوشبختانه، بله! تعداد راههایی که می‌توان این افراد را در خانه‌ها جا داد متناهی است. بنابراین در یکی از آنها «دردسر» از بقیه کمتر است (یعنی، تعداد زوجهای دشمنی که کنار هم ایستاده‌اند کمترین مقدار ممکن است). اگر در این آرایش هیچ‌کس همسایهٔ دشمنانش نباشد که کار تمام است. فرض کنید دو نفر همسایه دشمن هم باشند. ثابت می‌کنیم در میان ۲۳ نفر دیگر کسی مانند C وجود دارد که C با هیچ‌یک از همسایگان B دشمنی ندارد و همین‌طور B با همسایگان C.

توجه کنید که B حداکثر ۴ همسایه دارد و هر یک از این همسایه‌ها حداکثر ۳ دشمن. اما یکی از همسایگان B، یعنی A، یکی از دشمنانش B است. بنابراین تا اینجا حداکثر $۱ - ۳ \times ۴$ یا ۱۱ نفر را نمی‌توانیم به‌جای C انتخاب کنیم.

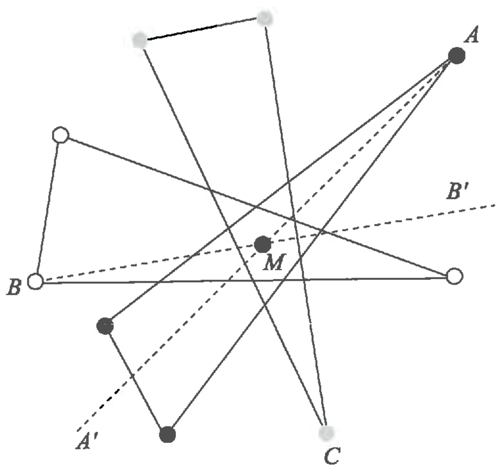
از طرف دیگر، B حداکثر ۳ دشمن دارد و هر یک از آنها حداکثر ۴ همسایه، که اگر این را هم حساب کنیم که یکی از همسایه‌های یکی از دشمنان B، یعنی A، خود B است، پس حداکثر ۱ − ۴ × ۳ نفر دیگر را هم نمی‌توانیم به‌جای C انتخاب کنیم.

بنابراین تعداد کسانی که واجد شرایط C نیستند حداکثر ۲۲ نفر است، اما ۲۳ نفر بجز A و B داریم. بنابراین کسی مانند C وجود دارد که ویژگیهای موردنظر را دارد. اکنون اگر جای B و C را عوض کنیم «دردسر» کمتر می‌شود.

تمرین ۴. در هر خانهٔ جدولی $m \times n$ عددی نوشته‌ایم. می‌توانیم علامت همهٔ عددهای یکی از ستونها یا یکی از سطرها را همزمان عوض کنیم. ثابت کنید می‌توان این کار را چند بار تکرار کرد تا درنهایت جدولی به‌دست آید که در آن مجموع عددهای هر ستون و مجموع عددهای هر سطر غیرمنفی باشد.

مسألهٔ ۱۱ . نقطهٔ M درون سه مثلث قرار دارد. ثابت کنید می‌توان از هر یک از این مثلثها یک رأس طوری انتخاب کرد که نقطهٔ M درون یا روی مثلثی باشد که رأسهایش این رأسها هستند.

راه‌حل. در میان زاویه‌هایی که رأسشان نقطهٔ M است و ضلعهایشان از دو رأس دو مثلث مختلف می‌گذرند بزرگترین زاویه را در نظر بگیرید. فرض کنید این زاویه AMB باشد (شکل زیر را ببینید). در این صورت، درون زاویه‌های AMB' و BMA' هیچ رأسی از مثلث سوم قرار ندارد. بنابراین رأسی از مثلث سوم باید درون زاویهٔ متقابل به رأس با زاویهٔ $A'MB'$ قرار داشته باشد (در غیر این صورت همهٔ رأسهای مثلث سوم درون زاویهٔ AMB قرار دارند و درنتیجه نقطهٔ M درون این مثلث قرار ندارد). این رأس را C بنامید. مثلث موردنظر مثلث ABC است: نقطهٔ M درون این مثلث قرار دارد، زیرا M و C در یک طرف خط AB قرار دارند و پاره‌خطهای AC و BC به‌ترتیب امتدادهای BM و AM را قطع می‌کنند.



مسألهٔ ۱۲ . آیا می‌توان چندضلعی‌ای محدب را به ۱۰۰ مثلث متساوی‌الاضلاع متمایز تقسیم کرد؟

راه‌حل. خیر، نمی‌توان. فرض کنید چندضلعی‌ای محدب را به ۱۰۰ مثلث متساوی‌الاضلاع متمایز تقسیم کرده‌ایم. در میان مثلثهایی که دست‌کم یکی از ضلعهای آنها چسبیده به ضلعی از چندضلعی است کوچکترین مثلث (برحسب طول ضلع) را انتخاب کنید. فرض کنید این مثلث ABC باشد و ضلع AB به یکی از ضلعهای چندضلعی چسبیده باشد. چون چندضلعی محدب است، در همان طرفی از ضلع AB قرار دارد که نقطهٔ C. ضلعی از مثلثی دیگر چسبیده به یکی از ضلعهای AC و AB است (در غیر این صورت، چندضلعی موردنظر بر مثلث ABC منطبق می‌شود). فرض کنید مثلث متساوی‌الاضلاع T به ضلع AC چسبیده باشد. در این صورت طول ضلع مثلث T از طول ضلع مثلث ABC بیشتر است، و درنتیجه ضلعی از مثلث T که چسبیده به ضلع AC است از نقطهٔ C رد می‌شود.

به همین ترتیب معلوم می‌شود که اگر مثلثی چسبیده به ضلع BC از مثلث ABC باشد، ضلعی از آن که چسبیده به ضلع BC است از نقطهٔ C رد می‌شود. یعنی این مثلث باید مثلث T را قطع کند، که ممکن نیست. بنابراین هیچ مثلثی چسبیده به ضلع BC از مثلث ABC وجود ندارد. یعنی C رأسی از زاویه‌ای از چندضلعی است که از ۱۸۰° بیشتر است، که ممکن نیست، زیرا چندضلعی موردنظر محدب است.

مسألهٔ ۱۳ . بر سطح خورشید تعدادی متناهی لکهٔ دایره‌ای قرار دارد که هیچ‌یک از آنها بیش از نیمی از سطح خورشید را نپوشانده است. فرض می‌کنیم که مرز این لکه‌ها هم جزء آنهاست و یکدیگر را قطع نمی‌کنند. ثابت کنید روی سطح خورشید دو نقطه وجود دارند که دو سر یک قطرند و بیرون لکه‌ها قرار دارند.

راه‌حل. لکه‌ای را در نظر بگیرید که شعاعش از بقیه بزرگتر است. دایره‌ای را در نظر بگیرید که این لکه را دربر دارد، شعاعش از شعاع خورشید کمتر است و هیچ‌یک از دیگر لکه‌ها را هم قطع نمی‌کند. این دایره را نسبت به مرکز خورشید منعکس کنید (یعنی هر نقطهٔ آن را به مرکز خورشید وصل کنید و امتداد دهید تا خورشید را قطع کند). هیچ‌یک از لکه‌ها دایره‌ای را که به‌دست می‌آید به‌طور کامل نمی‌پوشاند، زیرا شعاع این دایره از شعاع همهٔ لکه‌ها بزرگتر است. این دایره را با چند لکه هم نمی‌توان پوشاند، زیرا لکه‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند. هر نقطهٔ این دایره که با لکه‌ای پوشانده نشده است و سر دیگر قطری که از این نقطه می‌گذرد ویژگی موردنظر را دارند.

مسألهٔ ۱۴ . $۲n+۳$ نقطه در صفحه طوری قرار دارند که هیچ سه تایی از آنها روی یک خط راست نیستند و هیچ چهار تایی از آنها روی یک دایره. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که از سه تا از این نقطه‌ها می‌گذرد و از بقیهٔ نقطه‌ها n تا درون این دایره قرار دارند و n تا بیرون آن.

راه‌حل. کوچکترین چندضلعی محدبی را در نظر بگیرید که این نقطه‌ها را دربر دارد. فرض کنید AB یکی از ضلعهای این چندضلعی باشد. بقیهٔ نقطه‌ها را با $C_۱$، $C_۲$، ... و $C_{۲n+۱}$ طوری علامت‌گذاری کنید که

$$\angle AC_۱B < \angle AC_۲B < \cdots < AC_{۲n+۱}B$$

در این صورت نقطه‌های $C_۱$، … و C_n بیرون دایرهٔ محیطی مثلث $ABC_{n+۱}$ قرار دارند و نقطه‌های $C_{n+۲}$، … و $C_{۲n+۱}$ درون این دایره.

مسألهٔ ۱۵ . همهٔ تابعها مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را طوری پیدا کنید که

$$f(n)=f(f(n-۱))+f(f(n+۱)),\qquad n\geq ۲ .$$

راه‌حل. فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. فرض کنید در میان عددهای

$$f(۲), f(۳), f(۴), \ldots$$

کوچکترین عدد $f(n_\circ)$ باشد. توجه کنید که

$$f(n_\circ+۱)\geq f(n_\circ)=f(f(n_\circ-۱))+f(f(n_\circ+۱))\geq ۱+۱>۱$$

بنابراین $f(f(n_\circ+۱))>f(n_\circ)$ و درنتیجه

$$f(n_\circ)=f(f(n_\circ-۱))+ff(f(n_\circ+۱))\geq ۱+f(n_\circ)$$

که ممکن نیست، بنابراین، تابعی وجود ندارد که ویژگیهای موردنظر را داشته باشد.

تمرین ۵. دربارهٔ تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ می‌دانیم

$$f(n+f(n))=f(n),\qquad n\in\mathbb{N}$$

و به‌ازای عددی طبیعی مانند $n_\circ$، $f(n_\circ)=۱$. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n)=۱$.

تمرین ۶. روی صفحه تعدادی چندضلعی قرار دارد که هر دو تا از آنها یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید خطی راست وجود دارد که همهٔ این چندضلعیها را قطع می‌کند.

تمرین ۷. چند دانشمند که برخی از آنها با هم دوست‌اند در کنگره‌ای گرد آمده‌اند. می‌دانیم که تعداد دوستان هیچ دو نفری از آنها در میان شرکت‌کنندگان در کنگره برابر نیست و هیچ دو نفری از آنها دوست مشترکی ندارند. ثابت کنید در میان این دانشمندان کسی هست که دقیقاً یک دوست در میان شرکت‌کنندگان در این کنگره دارد.

تمرین ۸. n عدد طبیعی بزرگتر از ۱ و کوچکتر از $(۲n-۱)^۲$ داریم که هر دو تا از آنها نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید دست‌کم یکی از این عددها اول است.

تمرین ۹. در دایره‌ای چند وتر رسم کرده‌ایم و می‌دانیم که هر یک از آنها از وسط یکی دیگر از وترهای رسم‌شده می‌گذرد. ثابت کنید همهٔ این وترها قطرند.

تمرین ۱۰. هشت نقطه درون دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند. ثابت کنید فاصلهٔ دست‌کم دو تا از آنها از ۱ کمتر است.

تمرین ۱۱. ۱۰۰ نقطه روی صفحه مفروض‌اند، فاصلهٔ هیچ دو تایی از آنها از ۱ بیشتر نیست و هر مثلثی که رأسهایش سه تا از این نقطه‌ها باشند منفرجه است. ثابت کنید همهٔ این نقطه‌ها درون دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ قرار دارند.

تمرین ۱۲. n نقطه روی صفحه قرار دارند و هر سه تا از آنها درون دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند. ثابت کنید همهٔ این نقطه‌ها درون دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند.

تمرین ۱۳. نقطه‌ای درون مثلثی حاده قرار دارد. ثابت کنید بیشترین فاصلهٔ این نقطه تا رأسهای مثلث از دو برابر کمترین فاصلهٔ آن تا ضلعهای مثلث کمتر است.

تمرین ۱۴. از نقطه‌ای درون چندضلعی‌ای محدب عمودهایی بر ضلعهای آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید پای دست‌کم یکی از این عمودها روی ضلع نظیرش قرار دارد (نه روی امتداد آن).

تمرین ۱۵. از هر رأس چندضلعی‌ای عمودهایی بر ضلعهایی که این رأس روی آنها قرار ندارد رسم کرده‌ایم. ثابت کنید دست‌کم در مورد یک رأس پای یکی از عمودهایی که رسم شده روی ضلع نظیرش قرار دارد (نه روی امتداد آن).

تمرین ۱۶. ثابت کنید با شش یال هر چهاروجهی می‌توان دو مثلث رسم کرد.

تمرین ۱۷. n نقطهٔ سیاه و n نقطهٔ سفید روی صفحه قرار دارند. ثابت کنید n پاره‌خط در صفحه وجود دارند که یکدیگر را قطع نمی‌کنند و دو سر هر یک از آنها از این نقطه‌ها و به رنگهای مختلف‌اند.

تمرین ۱۸. روی صفحه لکه‌ای جوهر ریخته است. کمترین و بیشترین فاصلهٔ هر نقطه از لکه را تا مرز آن حساب می‌کنیم. در میان کمترین فاصله‌ها بیشترین را انتخاب می‌کنیم و نیز در میان بیشترین فاصله‌ها کمترین را. اگر این دو عدد برابر باشند، لکه به چه شکلی است؟

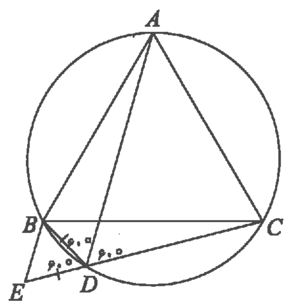
در کلاس درس هندسه

جعفر نیوشا

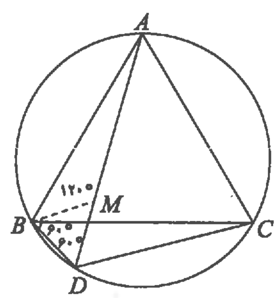
مسأله. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در دایره‌ای محاط شده است. نقطهٔ D را روی کمان کوچکتر BC اختیار می‌کنیم. ثابت کنید $DA = DB + DC$.

تذکر. اگر D وسط کمان کوچکتر BC باشد، آن‌وقت $DB = DC = R$ و $DA = 2R$، که در آنها R شعاع دایره‌ای است که مثلث ABC در آن محاط شده است. در این صورت، بدیهی است که $DA = DB + DC$. بنابراین فرض می‌کنیم D وسط کمان کوچکتر BC نیست (یعنی $DB \neq DC$).

راه‌حل اول. پاره‌خط DC را از سمت نقطهٔ D به‌اندازهٔ DB تا نقطهٔ E امتداد می‌دهیم. در این صورت $DB = DE = EB$. بنابراین دو مثلث ABD و CBE همنهشت‌اند (به حالت ض‌زض). به این ترتیب $AD = CE = DC + BD$.



راه‌حل دوم. از نقطهٔ B خطی رسم می‌کنیم که با BD زاویهٔ $60°$ تشکیل دهد. نقطهٔ برخورد این خط را با AD نقطهٔ M می‌نامیم. در این صورت $BD = BM = MD$. به این ترتیب، دو مثلث AMB و BCD همنهشت‌اند (به حالت ض‌زض). بنابراین $AM = DC$ و درنتیجه $AD = AM + MD$ یا $AD = DC + BD$.



راه‌حل سوم. بنابر قضیهٔ کسینوسها در مثلثهای ABD و ACD،

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \times DB \cos 60^\circ$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \times DC \cos 60^\circ$$

بنابراین، چون $AB = AC$،

$$AD^2 + DB^2 - AD \times DB = AD^2 + DC^2 - AD \times DC$$

درنتیجه

$$AD(DB - DC) = DB^2 - DC^2 = (DB + DC)(DB - DC)$$

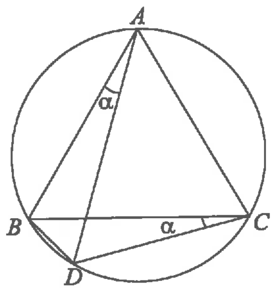
بنابراین (چون $DB \neq CD$)، $AD = DB + DC$.

راه‌حل چهارم. فرض کنید شعاعِ دایره‌ای که مثلث ABC در آن محاط شده است R باشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ADC و BCD،

$$AD = 2R\sin(60^\circ + \alpha), \qquad DC = 2R\sin(60^\circ - \alpha), \qquad DB = 2R\sin\alpha$$

بنابراین

$$DB + DC = 2R(\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha)) = 2R \times 2\sin 30^\circ \cos(30^\circ - \alpha)$$
$$= 2R\sin(90^\circ - (30^\circ - \alpha)) = 2R\sin(60^\circ + \alpha) = AD$$



راه‌حل پنجم. بنابر قضیهٔ بطلمیوس،

$$DA \times BC = DB \times AC + DC \times AB$$

اما $BC = AC = AB$ و درنتیجه $DA = DB + DC$.

بیست‌وچهارمین المپیاد ریاضی کشور

مرحلهٔ اول

۷ بهمن‌ماه ۱۳۸۴

۱. ضرایب چندجمله‌ای P صحیح است. تحت کدام‌یک از شرایط زیر P **نمی‌تواند** ریشهٔ صحیح داشته باشد؟

الف) $P(۵) = ۵$ و $P(۶) = ۶$ ب) $P(۵) = ۵$ و $P(۶) = ۵$

ج) $P(۵) = ۶$ و $P(۶) = ۶$ د) $P(۵) = ۶$ و $P(۶) = ۵$

ه) تحت هر کدام از این شرایط، P می‌تواند ریشهٔ صحیح داشته باشد.

۲. شازده کوچولو، روی سیارهٔ کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا، ۳۰π متر به شرق، ۲۰π متر به شمال، ۳۰π متر به غرب و سرانجام ۲۰π متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

الف) صفر ب) ۳۰π ج) ۲۰π د) ۴۰π ه) ۱۵π

۳. چند سه‌تایی طبیعی $۱۰ \leq z > y > x$ وجود دارد که $x + y = z$؟

الف) ۱۵ ب) ۲۰ ج) ۴۰ د) ۴۵ ه) ۵۰

۴. به‌ازای چند عدد طبیعی مانند m حاصل $\sqrt{m+۱۵} + \sqrt{m-۱}$ صحیح است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) بی‌نهایت

۵. از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصلهٔ دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می‌دانیم که فاصلهٔ شهر A از دو شهر دیگر ۶۰ و ۵۰ کیلومتر و فاصلهٔ دو شهر B و C از هم ۴۰ کیلومتر است.

الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ ه) ۷۰

۶. الگوریتم زیر را روی چندجمله‌ای $P(x)$ اجرا کرده‌ایم.

۱. d را برابر درجهٔ P قرار بده و اگر $d < ۱$ به سطر ۴ برو.

۲. a را برابر ضریب x^d در P قرار بده و $P(x) - ax^{d-۱}(x+۲)$ را به‌جای $P(x)$ بگذار.

۳. به سطر ۱ برو.

۴. P را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است. P در آغاز کدام بوده است؟

الف) $x^{۱۰} - ۴۵x^{۳}$ ب) $۱۳x^{۷} - ۲$ ج) $x^{۱۱} - ۸۳x^{۳}$ د) $۱۶x^{۸} + x$ ه) $-x^{۱۱} + ۸۴$

۷. فرض کنید $(۲ + \sqrt{۳})^{n} = ۵۰۴۲ + b\sqrt{۳}$ که در آن n طبیعی و b صحیح است. b چند است؟

الف) ۱۳۸۴ ب) ۳۵۴۳ ج) ۷۸۰ د) ۵۸۲۲ ه) ۲۹۱۱

۸. مستطیلی در صفحه با رئوس $(۰,۰)$، $(۰,۱۰۰)$، $(۱۵۰,۰)$ و $(۱۵۰,۱۰۰)$ در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطرگذرا از رأس $(۰,۰)$ اضلاع مستطیل را دو نقطهٔ متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ قطر را هم بشمارید.

الف) ۹۹ ب) ۱۰۰ ج) ۱۹۹ د) ۲۰۰ ه) ۳۰۰

۹. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نسبت به ضرب بسته است؟ اعداد طبیعی‌ای که یکانشان در بسط مبنای...

الف) چهار، ۱ یا ۲ یا ۳ است. ب) پنج، ۱ یا ۲ یا ۴ است.
ج) هفت، ۱ یا ۲ یا ۴ است. د) نه، ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸ است.
ه) ده، ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۵ است.

۱۰. نیم‌سازهای داخلی مثلث ABC دایرهٔ محیطی آن را در نقاط A'، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I' مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازهٔ $\angle B'I'C'$ برابر کدام گزینهٔ است؟

الف) $۹۰^\circ + \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۴}$ ب) $۱۸۰^\circ - \frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۴}$ ج) $۲\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}$
د) $۱۸۰^\circ - \widehat{A}$ ه) $۲\widehat{A}$

۱۱. اگر a، b و c اعدادی حقیقی باشند که $a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} = ۱$، مجموعه همهٔ مقادیر ممکن $ab + bc + ca$ زیرمجموعه کدام‌یک از بازه‌های زیر است؟

الف) $[۰,۲]$ ب) $[-۱,۰]$ ج) $[۰,۱]$
د) $[-۲,\frac{۱}{۲}]$ ه) $[\frac{-۱}{۲},۲]$

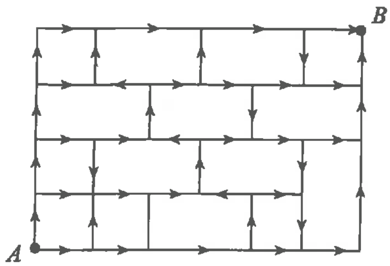
۱۲. دوربینی زیر یک هواپیما نصب شده است. هواپیما روی مسیری خطی در حال اوج‌گیری است. زمین را مسطح فرض کنید. مساحت فیلمبرداری‌شده، تابع درجهٔ چندی از جابجایی مکانی هواپیماست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ ه) چندجمله‌ای نیست.

۱۳. تصاعد حسابی از اعداد اول با قدر نسبت $n^{۲} + ۱$، که n عددی طبیعی است حداکثر چند عضو دارد؟

الف) ۳　　ب) ۴
ج) ۵　　د) ۶
ه) تصاعد با هر تعداد عضو وجود دارد.

۱۴. در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم. مسیرها در جهت فلش یک‌طرفه هستند. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

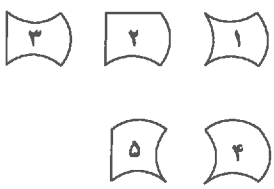


الف) ۳۷　　ب) ۵۸
ج) ۱۲　　د) ۶۳
ه) ۶۴

۱۵. طول یال مکعبی یک واحد است. اگر A، B و C رأس‌های مجاور به رأس D باشند، کمترین مقدار مجموع مربعات فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه P از خطوط AB، BC و CA چقدر است؟

الف) ۱　　ب) $\frac{۱}{۲}$　　ج) $\frac{۳}{۲}$　　د) $\frac{۳}{۴}$　　ه) $\frac{۱}{۴}$

۱۶. هر یک از کاشیهای روبه‌رو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع ۱ × ۱ به‌دست آمده است. هرکدام از این کاشیها را «صفحه‌پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحهٔ نامتناهی شبکه‌بندی‌شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه دوران داد و آن را پشت‌وروکرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهارگوشهٔ آن روی نقاط شبکه قرارگیرد. کدام‌یک از کاشیها صفحه‌پرکن هستند؟



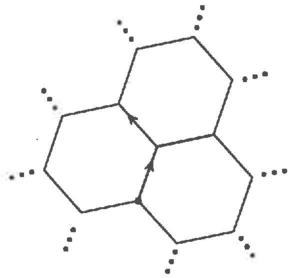
الف) ۱ و ۵　　ب) ۲ و ۴ و ۵　　ج) ۲ و ۳ و ۵　　د) ۳ و ۴　　ه) ۲ و ۴

۱۷. کدام بزرگتر است؟

الف) $۲^{۴۳۱}$　　ب) $۳^{۴۲۱}$　　ج) $۴^{۳۲۱}$　　د) $۲۱^{۴۳}$　　ه) $۳۱^{۴۲}$

۱۸. در مثلث ABC نقطهٔ D محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با ضلع BC و نقطهٔ E محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر $BE = ED$، کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۳A + ۲C = ۱۸۰^\circ$　　ب) $۲A + ۳C = ۱۸۰^\circ$
ج) $B - C = ۹۰^\circ$　　د) $۲B + C = ۱۸۰^\circ$
ه) $B = ۲C$



۱۹. کندوی زنبوری از شش‌ضلعیهای منتظم با طول واحد تشکیل شده است. بچه‌زنبوری روی اضلاع حرکت می‌کند و به هر رأسی که می‌رسد می‌تواند به‌سمت چپ یا راست خود برود. اگر این زنبور ۱ بار به چپ، ۲ بار به راست، ۴ بار به چپ،... و $۲^{۱۳۸۴}$ بار به چپ برود، فاصلهٔ مکان نهایی او از ابتدای حرکتش چند واحد است؟

الف) بین صفر و $۲^{۵}$ ب) بین $۲^{۵}$ و $۲^{۱۰}$

ج) بین $۲^{۱۰}$ و $۲^{۱۵}$ د) بین $۲^{۱۵}$ و $۲^{۲۰}$

ه) بین $۲^{۱۳۸۴}$ و $۲^{۱۳۸۵}$

۲۰. می‌خواهیم برای سه روستا به فاصلهٔ دوبه‌دوی ۹، ۱۴ و ۱۹ کیلومتر، مدرسه‌ای بسازیم. کمترین مقدار a که بتوان مدرسه را جایی ساخت که فاصله‌اش از هر سه روستا بیش از a کیلومتر نباشد چند است؟

الف) ۹ ب) ۹٫۵ ج) $۷\sqrt{۲}$ د) $\frac{۵۷\sqrt{۲}}{۸}$ ه) ۱۰

۲۱. بسط مبنای ۲− را با استفاده از ارقام صفر و یک، شبیه بسط مبنای ۲ تعریف می‌کنیم. مثلاً

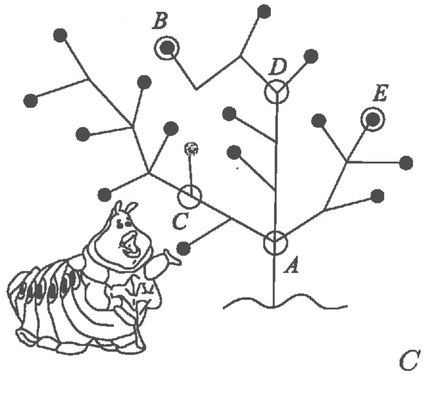
$$(۱۰۱)_{-۲} = ۱\times(-۲)^{۲} + ۰\times(-۲)^{۱} + ۱\times(-۲)^{۰} = ۵$$

۱۱۷ در مبنای ۲−، چند تا یک دارد؟ (توجه کنید گذاشتن علامت منفی، مثلاً $-(۱۰۱)_{-۲}$، مجاز نیست.)

الف) ۲ ب) ۴

ج) ۶ د) ۱۱۷ بسط مبنای ۲− ندارد.

ه) ۱۱۷ بیشتر از یک بسط در مبنای ۲− دارد.



۲۲. کرمی شکمو می‌خواهد همهٔ میوه‌های درخت روبه‌رو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کمترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایرهٔ سیاه توپر مشخص شده‌اند.

الف) A ب) B ج) C

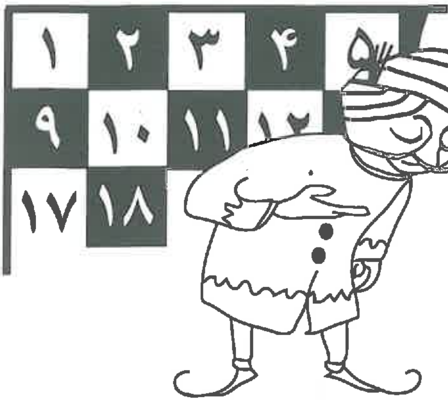
د) D ه) E

۲۳. $*$، عملی روی اعداد صحیح است با این خاصیت که جابجایی و شرکت‌پذیر است، ولی روی جمع پخش نمی‌شود. به‌جای آن برای هر a، b و c صحیح $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)-a$. می‌دانیم که

۳ = ۱ * ۱. در این صورت ۱۰ * ۱۰ چند است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۰۲ ج) ۱۲۰ د) ۲۵۰ هـ) ۳۰۰

۲۴. در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پاداش دهد، طرف در دیزی را باز دید(!) و خواست به‌ازای خانهٔ اول شطرنج یک دانه گندم، به‌ازای خانهٔ دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانهٔ قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحهٔ شطرنج مانند شکل روبه‌رو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندمها به‌ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)



الف) ۰٫۳۳ ب) ۰٫۵۰ ج) ۰٫۶۶ د) ۰٫۷۵ هـ) هیچ‌کدام

۲۵. در مثلث ABC نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ E محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلع BC است. اگر نقطهٔ L وسط AM و K محل برخورد AE با BL باشد و بین اضلاع مثلث رابطهٔ $2(AC - AB) = BC$ باشد، آنگاه $\frac{AK}{AE}$ کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $\frac{1}{2}$ هـ) $\frac{3}{4}$

۲۶. دو نفر با هم مشاعره می‌کنند؛ اولی بیتی از اشعار زیر را می‌خواند و دومی باید بیت جدیدی بگوید که با حرف آخر بیت قبلی شروع شده باشد. چند بیت وجود دارد با شروع از آنها نفر اول می‌تواند مستقل از بازی نفر دوم برنده شود؟ بازنده کسی است که نتواند شعری بخواند.

این سر به مهر نامه بدان مهربان رسان	کس را خبر مکن که کجا می‌فرستمت
نور تویی سور تویی دولت منصور تویی	مرغ که طور تویی خسته به منقار مرا
ای پادشه خوبان داد از غم تنهایی	دل بی تو به جان آمد وقت است که بازآیی
نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود	مزد آن گرفت جان برادر که کار کرد
درخت تو گر بار دانش بگیرد	به زیر آوری چرخ نیلوفری را
تا توانی دلی به‌دست آور	دل شکستن هنر نمی‌باشد
یعقوب‌وار وا اسفاها همی زنم	دیدار خوب یوسف کنعانم آرزوست
تا نگردی بی‌خبر از جسم و جان	کی خبر یابی ز جانان یک زمان
یار شو و یار بین دل شو و دلدار بین	در پی سرو روان چشمه و گلزار بین
دوست آن باشد که گیرد دست دوست	در پریشان‌حالی و درماندگی

الف) صفر ب) ۲ ج) ۵ د) ۸ ه) ۱۰

۲۷. A، B و C سه زیرمجموعهٔ دلخواه مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعهٔ مختلف می‌توان ساخت؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۸ د) ۱۲۸ ه) ۲۵۶

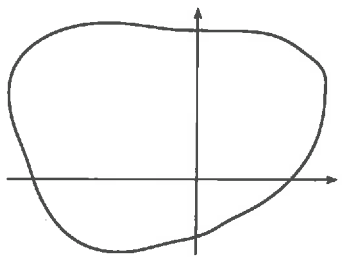
۲۸. فاصلهٔ مرکزهای دو دایره به شعاع $\sqrt{۳}$، برابر ۴ است. نقاطی را در نظر بگیرید که خارج دو دایره هستند و هر خط گذرنده از آن نقاط، دست‌کم یکی از دو دایره را قطع می‌کند. مساحت این مجموعه چقدر است؟

الف) صفر ب) $۲\pi - \sqrt{۳}$ ج) $۴\pi - ۲\sqrt{۳}$
د) $۲\sqrt{۳} - \pi$ ه) $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$

۲۹. خانه‌های یک مستطیل ۵×۴ را می‌خواهیم با چهار رنگ طوری رنگ کنیم که در هر مربع ۲×۲، هر چهار رنگ ظاهر شوند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۹۲ ج) ۲۴ د) ۲۶۴ ه) ۲۸۸

۳۰. شکل روبه‌رو مجموعهٔ جوابهای کدام‌یک از معادله‌های زیر در صفحه است؟



الف) $x^۳ + xy + y^۳ = ۴$
ب) $\cos x + x^۲ + y^۲ + y = ۲$
ج) $x^۲y^۳ + xy^۲ + y = ۱$
د) $x^۴ + y^۴ = ۲y - x + ۱$
ه) $\sin(x+y) + \sin x + \sin y = ۱$

پاسخ سوالهای بیست‌وچهارمین المپیاد ریاضی کشور

نصیر کریمی

۱. گزینهٔ (ب)، چندجمله‌ایهای x، $x - ۲۴$، $-x^۲ + ۱۱x$ و $x - ۱۱$ ریشهٔ صحیح دارند و به‌ترتیب درگزینه‌های (الف)، (ج) و (د) صدق می‌کنند.

توجه کنید که اگر ضریبهای چندجمله‌ای $P(x)$ عددهایی صحیح باشند و m و n دو عدد صحیح متمایز باشند، آن‌وقت $m - n \mid P(m) - P(n)$ (خودتان این مطلب را ثابت کنید). اکنون فرض کنید $P(۵) = P(۶) = ۵$ و عدد صحیح k ریشهٔ $P(x)$ باشد. در این صورت،

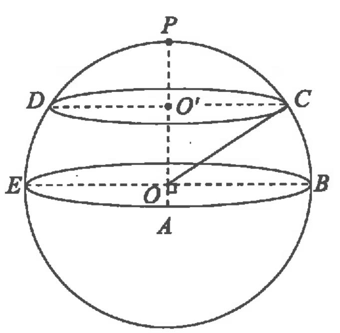
$$۵ - k \mid P(۵) - P(k), \quad ۶ - k \mid P(۶) - P(k)$$

اما $P(k) = ۰$، و درنتیجه $P(۵) - P(k) = P(۶) - P(k) = ۵$. بنابراین، دو عدد صحیح متوالی $۵ - k$ و $۶ - k$ مقسوم‌علیه عدد اول ۵ هستند، که ممکن نیست. بنابراین $P(x)$ ریشهٔ صحیح ندارد.

یادداشت. مسأله‌هایی شبیه این مسأله درکتابهای ویژهٔ المپیاد بسیار به چشم می‌خورد. مثلاً، درکتابهای زیر:

۱. آمادگی برای المپیادهای ریاضی، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، ۱۳۶۹.

۲. مباحث و مسایل المپیاد ریاضی، به قلم برندگان مدالهای المپیادهای جهان، انتشارات پیش‌دانشگاهیان، ۱۳۷۸.



۲. گزینهٔ (ب). فرض کنید شازده کوچولو ابتدا در نقطهٔ A باشد، سپس به نقطهٔ B رفته باشد، بعد به C و D و درانتها به نقطهٔ E رسیده باشد (شکل زیر را ببینید). محیط دایرهٔ EAB برابر است با $۲ \times ۶۰\pi$ یا ۱۲۰π. می‌دانیم $\overset{\frown}{AB} = ۳۰\pi$، پس $\angle AOB = ۹۰^\circ$، که در آن O مرکز کره (سیاره) است. از طرف دیگر، محیط دایرهٔ PCB هم ۱۲۰π است و $\overset{\frown}{BC} = ۲۰\pi$، پس $\angle BOC = ۶۰^\circ$. بنابراین $O'C = OC\cos ۶۰^\circ = ۳۰$. به این ترتیب، محیط دایرهٔ به مرکز O' و شعاع $O'C$ برابر است با $۳۰\pi \times ۲$ یا ۶۰π. همچنین، $\overset{\frown}{CD} = ۳۰\pi$، و درنتیجه $\angle CO'D = ۱۸۰^\circ$. اکنون توجه کنید که چون $\angle DOE = ۶۰^\circ$، پس E روی استواست. همچنین، $O'C \parallel OB$ و $O'D \parallel OE$، پس $\angle BOE = \angle CO'D = ۱۸۰^\circ$ و چون $\angle BOA = ۹۰^\circ$، پس $\angle AOE = ۹۰^\circ$. به این ترتیب، $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB} = ۳۰\pi$.

۳. گزینهٔ (ب). **راه‌حل اول.** فرض کنید عددهای طبیعی x، y و z ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. چون $۱ \leq x < y$، پس $۲ \leq y$ و درنتیجه $۳ \leq x + y = z$. به این ترتیب، با محاسبه می‌توان فهمید که جوابها عبارت‌اند از

$$z = ۳;\ (x, y, z) = (۱, ۲, ۳)$$

$$z = ۴;\ (x, y, z) = (۱, ۳, ۴)$$

$$z = ۵;\ (x, y, z) = (۱, ۴, ۵), (۲, ۳, ۵)$$

$$z = ۶;\ (x, y, z) = (۱, ۵, ۶), (۲, ۴, ۶)$$

$$z = ۷;\ (x, y, z) = (۱, ۶, ۷), (۲, ۵, ۷), (۳, ۴, ۷)$$

$$z = ۸;\ (x, y, z) = (۱, ۷, ۸), (۲, ۶, ۸), (۳, ۵, ۸)$$

$$z = ۹;\ (x, y, z) = (۱, ۸, ۹), (۲, ۷, ۹), (۳, ۶, ۹), (۴, ۵, ۹)$$

$$z = ۱۰;\ (x, y, z) = (۱, ۹, ۱۰), (۲, ۸, ۱۰), (۳, ۷, ۱۰), (۴, ۶, ۱۰)$$

بنابراین تعداد کل جوابها برابر با ۲۰ است.

راه‌حل دوم. به $\binom{۱۰}{۲}$ طریق می‌توان دو عدد متمایز از میان عددهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ انتخاب کرد. اگر تفاضل (مثبت) این دو عدد عددی طبیعی شود که برابر با عدد کوچکتر نیست، می‌توانیم یک سه‌تایی مطلوب به‌دست بیاوریم. در پنج حالتِ $\{۱, ۲\}$، $\{۲, ۴\}$، $\{۳, ۶\}$، $\{۴, ۸\}$ و $\{۵, ۱۰\}$ تفاضل موردنظر برابر با عدد کوچکتر می‌شود. تا اینجا $\binom{۱۰}{۲} - ۵$ سه‌تایی مطلوب را شمرده‌ایم، اما هر سه‌تایی مطلوب مانند (x, y, z) را دوبار شمرده‌ایم، یک‌بار با انتخاب $\{z, y\}$ و یک‌بار با انتخاب $\{z, x\}$. بنابراین تعداد سه‌تاییهای مطلوب برابر با $\frac{\binom{۱۰}{۲} - ۵}{۲}$ یا ۲۰ است.

راه‌حل سوم. فرض کنید x و y عددهایی طبیعی باشند، $x < y$ و $x + y = k$. در این صورت، چون $x < y$، پس $x \leq y - ۱$ و درنتیجه $k = x + y \geq ۲x + ۱$. بنابراین $x \leq \frac{k-۱}{۲}$ و چون x عددی طبیعی است، پس $x \leq \left\lfloor \frac{k-۱}{۲} \right\rfloor$. از طرف دیگر، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند x که $x \leq \left\lfloor \frac{k-۱}{۲} \right\rfloor$، می‌توان عددی یکتا و متمایز از x مانند y پیدا کرد که $x + y = k$. یعنی، تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y = k$ برابر است با $\left\lfloor \frac{k-۱}{۲} \right\rfloor$. به این ترتیب، تعداد جوابهای معادلهٔ $x + y = z$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی با شرط $x < y < z \leq ۱۰$ برابر است با (توجه کنید که $۳ \leq z \leq ۱۰$)

$$\left\lfloor \frac{۳-۱}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۴-۱}{۲} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{۱۰-۱}{۲} \right\rfloor = ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۳ + ۳ + ۴ + ۴ = ۲۰$$

۴. گزینهٔ (ب). فرض کنید m عددی طبیعی و $\sqrt{m+۱۵} + \sqrt{m-۱}$ عددی صحیح باشد. معلوم است

که $\sqrt{m+15}+\sqrt{m-1}$ عددی طبیعی است. فرض کنید $\sqrt{m+15}+\sqrt{m-1}=a$. در این صورت، اگر دو طرف این تساوی را به توان دو برسانیم، معلوم می‌شود که

$$2m+14+2\sqrt{(m-1)(m+15)}=a^2$$

بنابراین $2\sqrt{(m-1)(m+15)}$ هم عددی طبیعی است. فرض کنید

$$2\sqrt{(m-1)(m+15)}=k$$

در این صورت

$$4(m^2+14m-15)=k^2$$

پس k^2 و درنتیجه k عددی زوج است. فرض کنید $k=2k'$. در این صورت $m^2+14m-15=k'^2$ یا $(m+7)^2-64=k'^2$. بنابراین

$$(m+k-k')(m+7+k')=64$$

چون $m+k+k' \geq m+7-k'$، پس حالتهای زیر پیش می‌آید:

(i) $m+7-k'=1$ و $m+7+k'=64$؛ درنتیجه، $2k'=2^6-1$، که ممکن نیست.

(ii) $m+7-k'=2$ و $m+7+k'=32$؛ درنتیجه، $k'=15$ و $m=10$. بنابراین $a=8$.

(iii) $m+7-k'=4$ و $m+7+k'=16$؛ درنتیجه، $k'=6$ و $m=3$. بنابراین $a=4\sqrt{2}$.

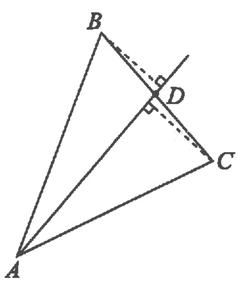
(iv) $m+7-k'=8$ و $m+7+k'=8$؛ درنتیجه، $k'=1$ و $m=1$. بنابراین $a=4$.

به این ترتیب، درکل دو عدد ویژگیهای موردنظر را دارند.

۵. گزینهٔ (ب). فرض کنید جاده‌ای که از A خارج شده است، جادهٔ میان B و C را در نقطهٔ D قطع کند. در این صورت فاصلهٔ B تا این جاده حداکثر برابر با BD است و فاصلهٔ C تا این جاده حداکثر برابر با CD است. بنابراین مجموع فاصله‌های B و C از جادهٔ موردنظر برابر است با $BD+CD$. از طرف دیگر،

$$BD+DC \leq BC=40$$

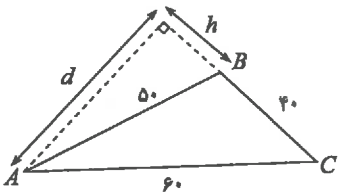
و تساوی وقتی پیش می‌آید که جاده‌ای که از A می‌گذرد بر BC عمود باشد.



به این ترتیب، کافی است ثابت کنیم که B و C در دو طرف خطی که از A بر BC عمود رسم می‌شود قرار دارند. فرض کنید چنین نباشد و B و C در یک طرف این خط قرار بگیرند. در این صورت، با نمادگذاری شکل زیر، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$d^۲ + h^۲ = ۵۰^۲, \qquad d^۲ + (h + ۴۰)^۲ = ۶۰^۲$$

بنابراین $d^۲ + h^۲ + ۱۶۰۰ + ۸۰h = ۳۶۰۰$ یا $۴۱۰۰ + ۸۰h = ۳۶۰۰$، که ممکن نیست.



۶. گزینهٔ (الف). فرض کنید

$$P(x) = ax^d + a_{d-۱}x^{d-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$$

در این صورت $P(x)$ مرحله به مرحله به چندجمله‌ایهای زیر تبدیل می‌شود، تا اینکه به چندجمله‌ایی ثابت تبدیل شود:

$$(a_{d-۱} - ۲a)x^{d-۱} + a_{d-۲}x^{d-۲} + \cdots + a_۱x + a_۰$$

$$(a_{d-۲} - ۲a_{d-۱} + ۴a)x^{d-۲} + a_{d-۳}x^{d-۳} + \cdots + a_۱x + a_۰$$

$$\vdots$$

$$(-۲)^۰a_۰ + (-۲)^۱a_۱ + (-۲)^۲a_۲ + \cdots + (-۲)^{d-۱}a_{d-۱} + (-۲)^d a_d$$

می‌دانیم که حاصل آخرین عبارت برابر با ۱۳۸۴ شده است، بنابراین گزینه‌های داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

(الف) $(-۲)^۳ \times (-۴۵) + (-۲)^{۱۰} \times ۱ = ۱۳۸۴$

(ب) $(-۲) + (-۲)^۷ \times ۱۳ = -۱۶۶۶$

(ج) $(-۲)^۳ \times (-۸۳) + (-۲)^{۱۱} = -۱۳۸۴$

(د) $(-۲)^۱ \times ۱ + (-۲)^۸ \times ۱۶ = ۴۰۹۴$

(ه) $۸۴ + (-۲)^{۱۱} \times (-۱) = ۲۱۳۲$

۷. گزینهٔ (ه). راه‌حل اول. ابتدا به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $(۲ + \sqrt{۳})^n = a_n + b_n\sqrt{۳}$، که در آن a_n و b_n عددهایی صحیح‌اند، آن‌وقت

$$(۲ - \sqrt{۳})^n = a_n - b_n\sqrt{۳}$$

اگر $n = ۱$، آن‌وقت $a_۱ = ۲$ و $b_۱ = ۱$، پس حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای n درست باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}(۲+\sqrt{۳})^{n+۱} &= (۲+\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})^n = (۲+\sqrt{۳})(a_n + b_n\sqrt{۳})\\ &= (۲a_n + ۳b_n) + (a_n + ۲b_n)\sqrt{۳}\\ (۲-\sqrt{۳})^{n+۱} &= (۲-\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})^n = (۲-\sqrt{۳})(a_n - b_n\sqrt{۳})\\ &= (۲a_n + ۳b_n) - (a_n + ۲b_n)\sqrt{۳}\end{aligned}$$

بنابراین حکم به‌ازای $n+۱$ هم درست است. از طرف دیگر،

$$(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳}) = ۱$$

پس

$$(۲+\sqrt{۳})^n(۲-\sqrt{۳})^n = ۱$$

بنابراین

$$(a_n + b_n\sqrt{۳})(a_n - b_n\sqrt{۳}) = a_n^۲ - ۳b_n^۲ = ۱$$

درنتیجه، چون $a_n = ۵۰۴۲$، پس

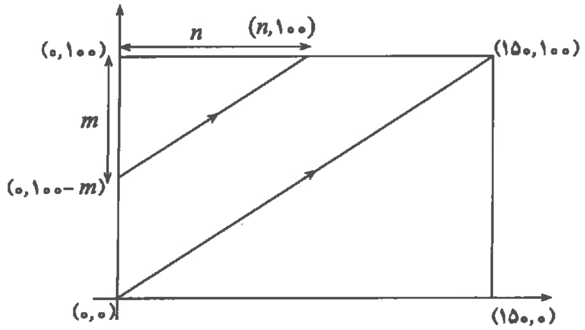
$$b = b_n = \sqrt{\frac{۵۰۴۲^۲ - ۱}{۳}} = ۲۹۱۱$$

راه‌حل دوم. با نمادگذاری راه‌حل اول، $a_{n+۱} = ۲a_n + ۳b_n$ و $b_{n+۱} = a_n + ۲b_n$. اما $a_۱ = ۲$ و $b_۱ = ۱$. بنابراین

$$a_۲ = ۷, b_۲ = ۴; \qquad a_۳ = ۲۶, b_۳ = ۱۵; \qquad a_۴ = ۹۷, b_۴ = ۵۶$$
$$a_۵ = ۳۶۲, b_۵ = ۲۰۹; \qquad a_۶ = ۱۳۵۱, b_۶ = ۷۸۰; \qquad a_۷ = ۵۰۴۲, b_۷ = ۲۹۱۱$$

بنابراین $b = b_۷ = ۲۹۱۱$.

۸. گزینهٔ (الف). ابتدا خطهای بالای قطر موردنظر را می‌شماریم. فرض کنید خطی موازی این قطر ضلعهای مستطیل را در نقطه‌های $(۰, ۱۰۰-m)$ و $(n, ۱۰۰)$ قطع کند، که در آنها m و n عددهایی طبیعی‌اند، $m < ۱۰۰$ و $n < ۱۵۰$. در این صورت، بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{m}{n} = \frac{۱۰۰}{۱۵۰} = \frac{۲}{۳}$. بنابراین $۳m = ۲n$. درنتیجه، $۳ \mid n$. چون $۰ < n < ۱۵۰$، پس ۴۹ خط با ویژگیهای موردنظر وجود دارد، زیرا تعداد مضربهای ۳ در میان عددهای ۱ تا ۱۴۹ برابر است با $\left[\frac{۱۴۹}{۳}\right]$ یا ۴۹ (توجه کنید که اگر n عددی طبیعی و مضرب ۳ باشد، می‌توانیم فرض کنیم $m = \frac{۲n}{۳}$؛ در این صورت $m < ۱۰۰$، و خطی که از نقطه‌های $(۰, ۱۰۰-m)$ و $(n, ۱۰۰)$ می‌گذرد ویژگی موردنظر را دارد). به‌دلیل تقارن، ۴۹ خط هم زیر قطر موردنظر وجود دارند که ویژگیهای موردنظر را دارند. اگر خود قطر را هم بشماریم، درکل ۹۹ خط ویژگی موردنظر را دارند.



۹. گزینهٔ (ج). ابتدا توجه کنید که اگر رقم یکان عددی در مبنای ۷ برابر با ۱ باشد، این عدد به‌شکل $7k+1$ است. به همین ترتیب، اگر رقم یکان عددی در مبنای ۷ برابر با ۲ یا ۴ باشد، این عدد (به‌ترتیب) به‌شکل $7k+2$ و $4k+4$ است. اکنون توجه کنید که

$$(7k+1)(7k'+1)=7(7kk'+k+k')+1=7t+1$$
$$(7k+2)(7k'+2)=7(7kk'+2k+2k')+4=7t+4$$
$$(7k+4)(7k'+4)=7(7kk'+4k+4k'+2)+2=7t+2$$
$$(7k+1)(7k'+2)=7(7kk'+2k+k')+2=7t+2$$
$$(7k+2)(7k'+4)=7(7kk'+4k+2k'+1)+1=7t+1$$
$$(7k+4)(7k'+1)=7(7kk'+k+4k')+4=7t+4$$

بنابراین مجموعهٔ عددهای طبیعی‌ای که رقم یکانشان در بسط مبنای هفت، ۱، ۲ یا ۴ است نسبت به ضرب بسته است. مثالهای زیر نشان می‌دهند که گزینه‌های دیگر درست نیستند.

الف) $(2)_4 \times (2)_4 = 2\times 2 = 4 = (10)_4$.

ب) $(2)_5 \times (2)_5 = 2\times 4 = 8 = (13)_5$.

د) $(2)_9 \times (2)_9 = 2\times 6 = 12 = (13)_9$.

هـ) $(2)_{10} \times (2)_{10} = 2\times 2 = 4 = (4)_{10}$.

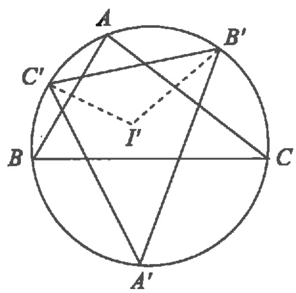
۱۰. گزینهٔ (الف). چون I' محل برخورد نیمسازهای مثلث $A'B'C'$ است، پس $\angle I'B'C' = \angle I'B'A'$ و $\angle I'C'B' = \angle I'C'A'$. بنابراین

$$\angle B'I'C' = 180^\circ - (\angle I'B'C' + \angle I'C'B')$$
$$= 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\angle A'B'C' + \frac{1}{2}\angle A'C'B'\right)$$

$$= ۱۸۰^\circ - \left(۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\angle B'A'C'\right)$$

$$= ۹۰^\circ + \frac{\widehat{B'A}}{۴} + \frac{\widehat{AC'}}{۴}$$

$$= ۹۰^\circ + \frac{۲\frac{\angle B}{۲}}{۴} + \frac{۲\frac{\angle C}{۲}}{۴} = ۹۰^\circ + \frac{\angle B + \angle C}{۴}$$



۱۱. گزینهٔ (هـ). توجه کنید که $a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ca$ (برای اثبات این نابرابری، از نابرابری واضح

$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲ \geq ۰$$

استفاده کنید). بنابراین $ab + bc + ca \leq ۱$. از طرف دیگر، $(a+b+c)^۲ \geq ۰$، پس

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ca \geq ۰$$

و درنتیجه

$$ab + bc + ca \geq -\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $-\frac{۱}{۲} \leq ab + bc + ca \leq ۱$. در هر دو نابرابری تساوی هم پیش می‌آید: در نابرابری سمت راست به‌ازای $a = b = c = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و در نابرابری سمت چپ به‌ازای $a = -b = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $c = ۰$. بنابراین

$$ab + bc + ca \in \left[-\frac{۱}{۲}, ۱\right] \subset \left[-\frac{۱}{۲}, ۲\right]$$

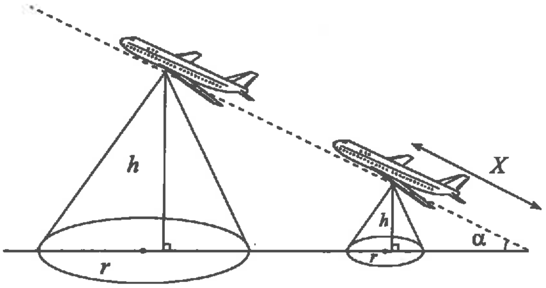
یادداشت. این سؤال هم در منابع موجود به زبان فارسی آمده است؛ مثلاً، در کتاب زیر:

ا. انگل، استراتژیهای حل مسأله، ترجمهٔ بهمن اصلاح‌پذیر (و دیگران)، انتشارات مبتکران، ۱۳۸۳.

۱۲. گزینهٔ (ب). اگر ارتفاع هواپیما (در جایی که دوربین قرارگرفته) از سطح زمین h باشد، ناحیهٔ فیلمبرداری‌شده دایره‌ای به شعاع $r = f(h)$ است. از طرف دیگر، مخروطهایی که (به رأس دوربین و قاعدهٔ ناحیهٔ فیلمبرداری‌شده) در ارتفاعهای مختلف تشکیل می‌شوند متشابه‌اند. بنابراین $\frac{r}{h}$ همواره مقداری ثابت مانند k است. درنتیجه

$$\text{مساحت ناحیهٔ فیلمبرداری‌شده در ارتفاع } h = \pi r^۲ = \pi (kh)^۲ = \pi k^۲ h^۲$$

پس مساحت چندجمله‌ایی درجهٔ دوم از h است. اگر جابه‌جایی مکانی X باشد، چون $h = X\sin\alpha$ (شکل را ببینید)، مساحت ناحیهٔ موردنظر برابر می‌شود با $\pi k^۲ \sin^۲\alpha X^۲$، پس مساحت چندجمله‌ایی درجهٔ دوم از X است.



یادداشت. بهتر بود در صورت سؤال به‌جای «تابع درجه چندی...» نوشته می‌شد «چندجمله‌ای درجه چندی [چندمی] ...». علاوه‌بر این، چون پرسش در مورد مساحت است، اولین چیزی که به‌نظر می‌رسد، چندجمله‌ای درجهٔ دوم است، که جواب نیز هست، و به‌نظر می‌رسد که دانش‌آموزان دقیقتر دیرتر به جواب می‌رسند و با کمی خوش‌شانسی می‌توان گزینهٔ صحیح را پیدا کرد.

۱۳. گزینهٔ (الف). ابتدا توجه کنید که ۳، ۵ و ۷ تصاعدی سه‌عضوی از عددهای اول است که قدرنسبتش ۲ است (به‌ازای $n = ۱$ در صورت مسأله). اکنون ثابت می‌کنیم که تصاعدی چهارعضوی با ویژگیهای موردنظر وجود ندارد (و درنتیجه، تصاعدی که تعداد عضوهایش بیشتر باشد و ویژگیهای موردنظر را هم داشته باشد وجود ندارد). فرض کنید تصاعد $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، $p_۴$ ویژگیهای موردنظر را داشته باشد:

$$p_۱, \quad p_۲ = p_۱ + n^۲ + ۱, \quad p_۳ = p_۱ + ۲n^۲ + ۲, \quad p_۴ = p_۱ + ۳n^۲ + ۳$$

حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

(i) اگر $p_۱ = ۳$، آن‌وقت $۳ \mid p_۴$، و چون $p_۴$ عددی اول است، پس $p_۴ = ۳$، که ممکن نیست.

(ii) اگر $p_۱ = ۳k + ۱$ و $n = ۳t$، آن‌وقت می‌توان نوشت $n^۲ + ۱ = ۳s + ۱$ و درنتیجه

$$p_۳ = p_۱ + ۲n^۲ + ۲ = ۳(k + ۲s + ۱)$$

بنابراین $p_۳ \mid ۳$، و چون $p_۳$ عددی اول است، پس $p_۳ = ۳$، که ممکن نیست.

(iii) اگر $p_۱ = ۳k - ۱$ و $n = ۳t$، آن‌وقت می‌توان نوشت $n^۲ + ۱ = ۳s + ۱$ و درنتیجه

$$p_۲ = p_۱ + n^۲ + ۱ = ۳(k + s)$$

بنابراین $p_۲ \mid ۳$، و چون $p_۲$ عددی اول است، پس $p_۲ = ۳$ و درنتیجه $p_۱ = ۲$. به این ترتیب، $p_۳ = ۴$، که ممکن نیست.

(iv) اگر $p_1 = 3k+1$ و $n = 3t \pm 1$، آن‌وقت می‌توان نوشت $n^2 + 1 = 3s + 2$ و درنتیجه

$$p_2 = p_1 + n^2 + 1 = 3(k+s+1)$$

بنابراین $3 \mid p_2$، و چون p_2 عددی اول است، پس $p_2 = 3$ و درنتیجه $p_1 = 2$، که ممکن نیست.

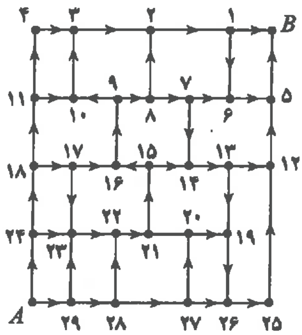
(v) اگر $p_1 = 3k-1$ و $n = 3t \pm 1$، آن‌وقت می‌توان نوشت $n^2 + 1 = 3s + 2$ و درنتیجه

$$p_3 = p_1 + 2n^2 + 2 = 3(k+2s+1)$$

بنابراین $3 \mid p_3$، و چون p_3 عددی اول است، پس $p_3 = 3$، که ممکن نیست.

به این ترتیب در هر چهار حالت به تناقض می‌رسیم و درنتیجه تصاعدی چهارعضوی با ویژگیهای موردنظر وجود ندارد.

۱۴. گزینهٔ (ب). نقطه‌های تقاطع را مطابق شکل زیر شماره‌گذاری می‌کنیم.



فرض کنید T_n تعداد مسیرها از نقطهٔ n به نقطهٔ B باشد. در این صورت $T_5 = 1$. بنابراین

$$\begin{cases} T_{12} = 1 \Rightarrow T_{25} = 1 \Rightarrow T_{26} = 1 \\ T_6 = 1 \Rightarrow T_1 = 1 + T_6 = 2 \Rightarrow T_2 = 2 \Rightarrow T_3 = 2 \end{cases}$$

$$T_{26} = 1 \Rightarrow T_{19} = 1 \Rightarrow T_{13} = T_{19} + T_{12} = 2 \Rightarrow T_{14} = 2 \Rightarrow T_7 = T_6 + T_{14} = 3$$
$$\Rightarrow T_8 = T_7 + T_2 = 5$$

$$T_3 = 2 \Rightarrow \begin{cases} T_{10} = 1 \Rightarrow T_9 = T_8 + T_{10} = 7 \Rightarrow T_{16} = 7 \Rightarrow T_{15} = T_{14} + T_{16} = 9 \\ \qquad \Rightarrow T_{21} = 9 \Rightarrow T_{22} = 9 \Rightarrow T_{23} = 9 \\ T_4 = 2 \Rightarrow T_{11} = T_4 + T_{10} = 4 \end{cases}$$

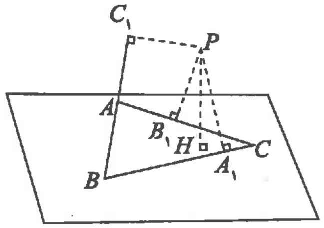
$$T_{۲۰} = T_{۲۱} + T_{۱۹} = ۱۰ \Rightarrow T_{۲۷} = T_{۲۶} + T_{۲۰} = ۱۱ \Rightarrow T_{۲۸} = T_{۲۲} + T_{۲۷} = ۲۰$$
$$\Rightarrow T_{۲۹} = T_{۲۸} + T_{۲۳} = ۲۹ \Rightarrow T_{۱۷} = T_{۱۶} + T_{۲۳} = ۱۶$$
$$\Rightarrow T_{۱۸} = T_{۱۷} + T_{۱۱} = ۲۰ \Rightarrow T_{۲۴} = T_{۱۸} + T_{۲۳} = ۲۹$$

درنتیجه، تعداد راههای رسیدن از نقطهٔ A به نقطهٔ B برابر است با $T_{۲۹} + T_{۲۴} = ۵۸$.

۱۵. چون طول یال مکعب یک واحد است، پس $AB = BC = CA = \sqrt{۲}$. فرض کنید کمترین مقدار موردنظر به‌ازای نقطهٔ P به‌دست بیاید و P در صفحهٔ ABC نباشد. فرض کنید H پای عمود وارد از P بر صفحهٔ ABC باشد. در این صورت، اگر $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ به‌ترتیب پای عمودهای وارد از P بر ضلعهای BC، CA و AB باشند،

$$PA_۱^۲ + PB_۱^۲ + PC_۱^۲ = PH^۲ + HA_۱^۲ + PH^۲ + HB_۱^۲ + HC_۱^۲$$
$$> HA_۱^۲ + HB_۱^۲ + HC_۱^۲$$

و درنتیجه H نقطهٔ بهتری نسبت به P است.



بنابراین، کمترین مقدار موردنظر به‌ازای نقطه‌ای مانند P در صفحهٔ مثلث ABC پیش می‌آید. فرض کنید X، Y و Z به‌ترتیب فاصله‌های P از BC، CA و AB باشند. در این صورت

$$S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA} = \frac{(X+Y+Z)\sqrt{۲}}{۲}$$

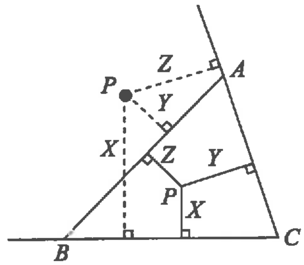
بنابراین اگر P درون مثلث ABC باشد،

$$\frac{(X+Y+Z)\sqrt{۲}}{۲} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

و درنتیجه $X + Y + Z = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$. اگر P بیرون مثلث ABC باشد،

$$\frac{(X+Y+Z)\sqrt{۲}}{۲} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA} > S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین $X + Y + Z > \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$.



اکنون توجه کنید که اگر a، b و c عددهایی حقیقی باشند،

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + bc + ca$$

و درنتیجه

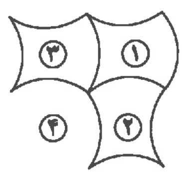
$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲bc + ۲ca \leq ۳(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

بنابراین

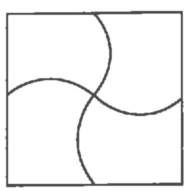
$$X^۲ + Y^۲ + Z^۲ \geq \frac{۱}{۳}(X+Y+Z)^۲ \geq \frac{۱}{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

تساوی نیز وقتی پیش می‌آید که $X+Y+Z = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$ و $X = Y = Z$، یعنی وقتی که P مرکز ثقل مثلث ABC باشد.

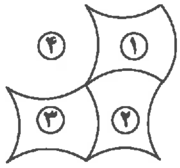
۱۶. گزینهٔ (هـ). راه‌حل اول. فرض کنید nامین کاشی در حرکت nام روی صفحه قرار بگیرد. در مورد کاشی نوع ۱، در حرکت چهارم نمی‌توانیم کاشی‌ای روی صفحه قرار دهیم.



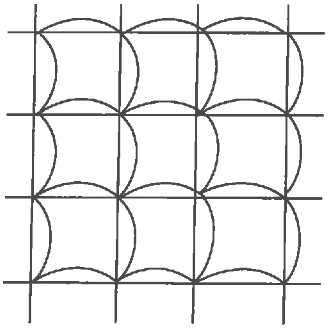
در مورد کاشی نوع ۲، با چهار کاشی می‌توان مربعی ۲ × ۲ را فرش کرد و سپس با مربعهایی از این دست صفحه را فرش کرد.



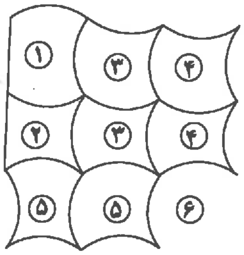
در مورد کاشی نوع ۳، در حرکت چهارم نمی‌توانیم کاشی‌ای روی صفحه قرار دهیم.

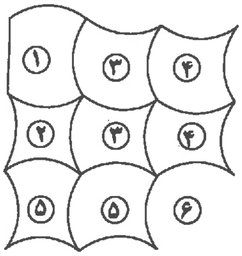


در مورد کاشی نوع ۴، می‌توان صفحه را مانند شکل زیر فرش کرد.



در مورد کاشی نوع ۵، می‌توان به دو طریق عمل کرد، که در هر دو مورد در حرکت ششم نمی‌توانیم کاشی‌ای روی صفحه قرار دهیم.





راه‌حل دوم. فرض کنید مساحت قطاع موردنظر α باشد. در این صورت مساحت کاشی نوع ۱ برابر با $۲\alpha - ۱$ و مساحت کاشیهای نوع ۳ و ۵ برابر با $۱ - \alpha$ است. اکنون توجه کنید که اگر مربع $n \times n$ را با یک نوع کاشی فرش کنیم، حتماً مربع $(n - ۲) \times (n - ۲)$ درون آن نیز به‌طور کامل فرش می‌شود. درنتیجه، مثلاً در مورد کاشیهای نوع ۳ و نوع ۵، $n^۲(۱ - \alpha) \geq (n - ۲)^۲$؛ یعنی، $n^۲\alpha \leq ۴n - ۴$ و درنتیجه

$$\alpha \leq \frac{۴(n - ۱)}{n^۲} < \frac{۴}{n + ۱}$$

بنابراین به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n باید $n < \frac{۴}{\alpha} - ۱$، که تناقض است. پس با کاشیهای نوع ۳ و نوع ۵ نمی‌توان مربع $(n - ۲) \times (n - ۲)$ را، به‌ازای nهای بزرگ، پوشاند. به همین ترتیب معلوم می‌شود که با

کاشیهای نوع ۱ هم نمی‌توان صفحه را فرش کرد. در مورد کاشیهای نوع ۲ و نوع ۴ می‌توان شبیه راه‌حل اول عمل کرد.

۱۷. گزینهٔ (ب). از نابرابرهای زیر معلوم می‌شود که $۴^{۳۲۱}$ از $۲^{۴۳۱}$، $۲۱^{۴۳}$ و $۳۱^{۴۲}$ بزرگتر است:

$$۴^{۳۲۱} = (۲^۲)^{۳۲۱} = ۲^{۶۴۲} > ۲^{۴۳۱}$$

$$۴^{۳۲۱} = (۴^۳)^{۱۰۷} = ۶۴^{۱۰۷} > ۲۱^{۱۰۷} > ۲۱^{۴۳}$$

$$۴^{۳۲۱} = (۴^۳)^{۱۰۷} = ۶۴^{۱۰۷} > ۳۱^{۱۰۷} > ۳۱^{۴۲}$$

اکنون ثابت می‌کنیم $۴^{۳۲۱} < ۳^{۴۲۱}$. چون $۲۱۸۷ = ۳^۷$ و $۲۰۴۸ = ۲^{۱۱}$، پس $۲^{۱۱} < ۳^۷$. بنابراین

$$۳^{۴۲۱} > ۳^{۴۲۰} = (۳^۷)^{۶۰} > (۲^{۱۱})^{۶۰} = ۲^{۶۶۰} > ۲^{۶۴۲} = ۴^{۳۲۱}$$

۱۸. گزینهٔ (ب). فرض کنید I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد. در این صورت E پای عمود وارد از I بر BC است. توجه کنید که چون $ED = BE$، $IE = IE$ و $\angle IED = \angle IEB$، پس مثلثهای IED و IEB همنهشت‌اند. بنابراین $\angle IBE = \angle IDE$، و درنتیجه $\angle IDE = \frac{۱}{۲}\angle B$. اما

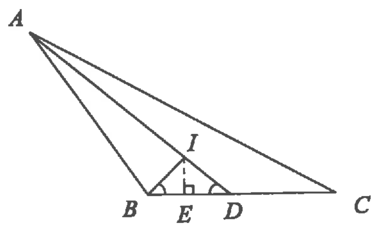
$$\angle BAD = \angle ADB + \angle DBA = ۱۸۰^\circ$$

پس

$$\angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} + \angle B$$

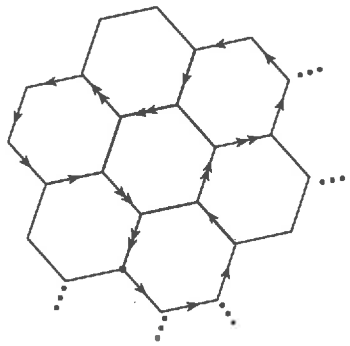
و درنتیجه $\frac{۱}{۲}\angle A + \angle C = \frac{۱}{۲}\angle B$ یا $\angle B = \angle A + ۲\angle C$. از طرف دیگر، $\angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ$ و درنتیجه

$$\angle A + (\angle A + ۲\angle C) + \angle C = ۲\angle A + ۳\angle C = ۱۸۰^\circ$$



۱۹. گزینهٔ (الف). اگر زنبور شش‌بار متوالی به سمت راست یا به سمت چپ برود، محیط یک شش‌ضلعی را طی می‌کند و به‌جای اولش برمی‌گردد. به استقرا می‌توان ثابت کرد که اگر n عددی فرد باشد، ۲^n به‌شکل $۲ + ۶k$ است و اگر n عددی زوج باشد، ۲^n به‌شکل $۴ + ۶k$ است. بنابراین، چون $۶k$ها در مکان زنبور تأثیری ندارند، مانند این است که زنبور یک بار به سمت چپ رفته است، دو بار به سمت راست، چهار بار

به سمت چپ، دو بار به سمت راست، چهار بار به سمت چپ، ... و چهار بار به سمت چپ. به‌سادگی معلوم می‌شود که مسیر زنبور دوری به‌شکل زیر است:



معلوم است که این زنبور هر جا که بایستد با نقطهٔ ابتدای حرکتش فاصلهٔ چندانی ندارد، یعنی فاصله‌اش تا نقطهٔ ابتدای حرکتش قطعاً از ۲۵ کمتر است.

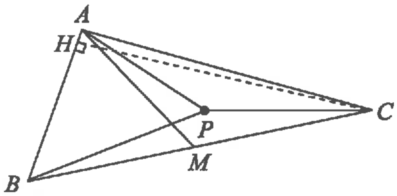
۲۰. گزینهٔ (ب). این سه روستا را A، B و C بنامید. فرض کنید M وسط BC باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که A منفرجه است، یعنی ارتفاع وارد از C خط BA را بیرون پاره‌خط BA قطع می‌کند. فرض کنید چنین نباشد و نقطه‌ای مانند H روی AB وجود داشته باشد که $CH \perp AB$. در این صورت، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$CH^۲ + AH^۲ = ۱۴^۲, \qquad BH^۲ + CH^۲ = ۱۹^۲$$

بنابراین

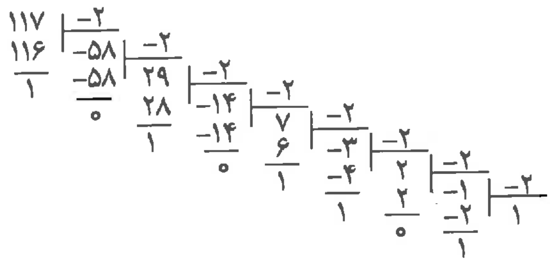
$$(۹ - AH)^۲ + CH^۲ = ۱۹^۲$$

پس $۱۹^۲ = ۸۱ - ۱۸AH + AH^۲ + CH^۲$ و درنتیجه $۱۸AH = ۳۶۱ - ۲۷۷$، که ممکن نیست. به این ترتیب زاویهٔ A منفرجه است و درنتیجه $AM < \frac{BC}{۲} = ۹/۵$. بنابراین اگر مدرسه را در نقطهٔ M بسازیم، a برابر با ۹/۵ می‌شود.



اکنون فرض کنید مدرسه را در نقطهٔ P بسازیم. اگر P روی پاره‌خط BC نباشد، آن‌وقت $PB + PC > BC = ۱۹$ و درنتیجه یا $PB > ۹/۵$ یا $PC > ۹/۵$. درنتیجه، چون $PB \le a$ و $PC \le a$، پس $a \ge ۹/۵$. اگر P روی پاره‌خط BC باشد و بر M منطبق نباشد، طول یکی از پاره‌خطهای PB و PC از ۹/۵ بیشتر است، زیرا $PB + PC = ۱۹$ و $PB \neq PC$. بنابراین a نیز از ۹/۵ بزرگتر است و درنتیجه کمترین مقدار ممکن a برابر با ۹/۵ است.

۲۱. گزینهٔ (ج). برای به‌دست آوردن بسط ۱۱۷ در مبنای ۲− (مانند مبناهای طبیعی) تقسیمهای متوالی بر ۲− انجام می‌دهیم:



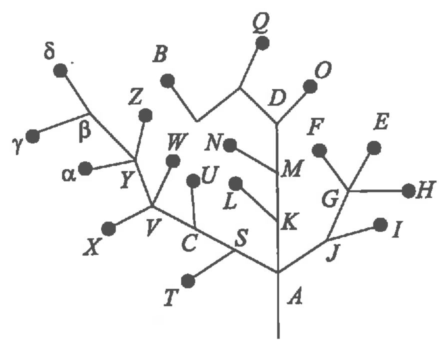
درنتیجه $۱۱۷ = (۱۱۰۱۱۰۱۰۱)_{-۲}$، که با محاسبه هم معلوم می‌شود این نمایش درست است.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر عددی غیرصفر بسطی در مبنای ۲− داشته باشد، این بسط یکتاست (البته، می‌توان ثابت کرد که هر عدد صحیح غیرصفر بسطی در مبنای ۲− دارد). فرض کنید N عددی صحیح و غیرصفر باشد و

$$N = c_m(-۲)^m + c_{m-۱}(-۲)^{m-۱} + \cdots + c_۱(-۲) + c_۰, \qquad c_i \in \{۰, ۱\}, ۰ \leq i \leq m$$

توجه کنید که $c_۰$ باقیماندهٔ تقسیم N بر ۲ است، $c_۱$ باقیماندهٔ تقسیم $\frac{N-c_۰}{۲}$ بر ۲ است، و همین‌طور تا آخر. بنابراین $c_۰$، $c_۱$، ... و c_m به‌طور یکتا مشخص می‌شوند.

۲۲. گزینهٔ (ب). نقطه‌ها را مانند شکل زیر با حروف علامتگذاری می‌کنیم:



بهترین مسیر ممکن با شروع حرکت از نقطه‌های A، B، C، D و E به‌ترتیب عبارت است از

$A: AJIJIGHGFGEAKLKMNMDODPQPRBRPDMKAS$
$TSCUCVWVXVYZY\alpha Y\beta\delta\beta\gamma$

که شامل ۵۲ حرکت است.

$$B : BRPQPDODMNMKLKAJIJIJGHGEGFGJAST$$
$$SCUCVWVXVYZY\alpha Y\beta\delta\beta\gamma$$

که شامل ۴۶ حرکت است.

$$C : CUCVWVXVYZY\alpha Y\beta\delta\beta\gamma\beta YVCSTSAJIJGHGF$$
$$GEGJAKLKMNMDODPQPRB$$

که شامل ۵۰ حرکت است.

$$D : DODPQPRBRPDMNMKLKAJIJGHGEGFGJA$$
$$STSCUCVWVXVYZY\alpha Y\beta S\beta\gamma$$

که شامل ۴۹ حرکت است.

$$E : EGHGFGJIJAKLKMNMDODPQPRBRPDMKA$$
$$STSCUCVWVXVYZY\alpha Y\beta\delta\beta\gamma$$

که شامل ۴۹ حرکت است.

به این ترتیب نقطهٔ B برای شروع حرکت کرم مناسبتر است.

۲۳. گزینهٔ (ج). ابتدا به استقرا روی k ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $1 * k = 2k + 1$. اگر $k = 1$، توجه کنید که $1 * 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$. اکنون فرض کنید $1 * (k - 1) = 2(k - 1) + 1$. در این صورت

$$1 * k = 1 * ((k - 1) + 1) = (1 * (k - 1)) + 1 * 1 - 1$$
$$= 2(k - 1) + 1 + 3 - 1 = 2k + 1$$

به این ترتیب حکم ثابت شده است و درنتیجه $1 * 10 = 21$.

اکنون به استقرا ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $10 * k = 11k + 10$. چون $*$ جابه‌جایی است، پس

$$1 * 10 = 10 * 1 = 11 \times 1 + 10$$

فرض کنید $10 * (k - 1) = 11(k - 1) + 10$. در این صورت

$$10 * k = 10 * ((k - 1) + 1) = (10 * (k - 1)) + 10 * 1 - 10$$
$$= 11(k - 1) + 10 + 21 - 10 = 11k + 10$$

به این ترتیب، $10 * 10 = 11 \times 10 + 10 = 120$.

یادداشت. مفاهیمی چون «عمل» روی اعداد صحیح و ویژگیهای این عمل مانند جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و پخش شدن این عمل روی جمع در هیچ‌یک از کتابهای دورهٔ دبیرستان نیامده است. چون تعریف این مفاهیم در صورت سؤال هم ذکر نشده است، به‌نظر می‌رسد این سؤال برای دانش‌آموزان دورهٔ دبیرستان مناسب نیست.

۲۴. گزینهٔ (ج). چون هر خانه $۲^۸$ برابر خانهٔ بالایی خود و ۲ برابر خانهٔ قبلی خود (با شماره‌گذاری ذکرشده در صورت سؤال) ارزش دارد، پس مجموع ارزشهای خانه‌های سفید ردیف اول $\frac{۱}{۲}$ مجموع ارزشهای خانه‌های سیاه ردیف اول است. بنابراین مجموع ارزشهای خانه‌های سفید ردیف اول $\frac{۱}{۳}$ مجموع ارزشهای کل خانه‌های ردیف اول است. در مورد ردیف دوم، مجموع ارزشهای خانه‌های سفید ۲ برابر مجموع ارزشهای خانه‌های سیاه است و درنتیجه، مجموع ارزشهای خانه‌های ردیف دوم $\frac{۲}{۳}$ مجموع ارزشهای کل خانه‌های ردیف دوم است. به همین ترتیب، این نسبت در مورد ردیف سوم $\frac{۱}{۳}$، در مورد ردیف چهارم $\frac{۲}{۳}$، ... و در مورد ردیف هشتم $\frac{۲}{۳}$ است. فرض کنید مجموع ارزشهای همهٔ خانه‌های واقع در ردیفهای فرد برابر با k باشد. در این صورت مجموع ارزشهای همهٔ خانه‌های واقع در ردیفهای زوج برابر با $۲^۸k$ است. درنتیجه

$$\text{مجموع کل ارزشها} = ۲^۸k + k = ۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۲^{۶۳} = ۲^{۶۴} - ۱$$

پس $k = \frac{۲^{۶۴} - ۱}{۲^۸ + ۱}$. به این ترتیب

$$\text{مجموع ارزشهای خانه‌های سفید} = \underset{\text{در ردیفهای زوج}}{\text{مجموع ارزشهای خانه‌های سفید}} + \underset{\text{در ردیفهای فرد}}{\text{مجموع ارزشهای خانه‌های سفید}}$$

$$= \frac{k}{۳} + \frac{۲}{۳} \times ۲^۸k = \frac{۲^۹ + ۱}{۳}k$$

درنتیجه

$$\frac{\text{مجموع ارزشهای خانه‌های سفید}}{\text{مجموع ارزشهای کل خانه}} = \frac{\frac{۲^۹+۱}{۳}k}{۲^{۶۴} - ۱} = \frac{\frac{۲^۹+۱}{۳}k}{(۲^۸ + ۱)k} \simeq \frac{۲(۲^۸ + ۱)}{۳(۲^۸ + ۱)} = \frac{۲}{۳} \simeq ۰/۶۶$$

۲۵. گزینهٔ (ب). فرض کنید دایرهٔ محاطی مثلث بر ضلعهای AB و AC به‌ترتیب در نقطه‌های F و D مماس باشد. در این صورت $BE = BF$، $AF = AD$ و $CD = CE$. بنابراین

$$BE + AC = BE + AD + DC = \frac{BE + BF}{۲} + \frac{AD + AF}{۲} + \frac{CD + CE}{۲}$$
$$= \frac{AB + BC + CA}{۲}$$

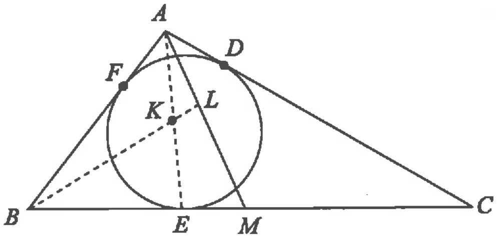
و درنتیجه

$$BE = \frac{AB + BC - CA}{۲} = \frac{BC + \left(-\frac{BC}{۲}\right)}{۲} = \frac{BC}{۴}$$

اما $BM = \frac{BC}{۲}$. درنتیجه

$$BE = EM, \qquad AL = LM$$

بنابراین K مرکز ثقل مثلث ABM است و $\frac{AK}{AE} = \frac{۲}{۳}$.



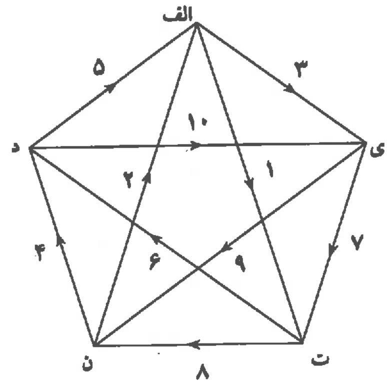
۲۶. گزینهٔ (ج). بیتها را از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری می‌کنیم. ثابت می‌کنیم نفر اول می‌تواند از بیت ۱ شروع کند و برنده شود.

فرض کنید نفر اول بیت ۱ را انتخاب کند. نفر دوم دو انتخاب دارد: بیتهای ۶ و ۸. فرض کنید نفر دوم بیت ۶ را انتخاب کند. در این صورت اولی بیت ۵ را انتخاب می‌کند و دومی مجبور است بیت ۳ را انتخاب کند. اولی بیت ۷ را انتخاب می‌کند و دومی مجبور است بیت ۸ را انتخاب کند و اولی با انتخاب بیت ۲ برنده می‌شود. اکنون فرض کنید دومی در حرکت اول خودش بیت ۸ را انتخاب کند. اولی بیت ۲ را انتخاب می‌کند و دومی مجبور است بیت ۳ را انتخاب کند. اولی بیت ۷ را انتخاب می‌کند و دومی مجبور است بیت ۶ را انتخاب کند. اولی با انتخاب بیت ۵ برنده می‌شود.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر نفر اول ابتدا بیت ۳ را انتخاب کند ممکن است ببازد. فرض کنید نفر اول بیت ۳ را انتخاب کند و نفر دوم بیت ۷ را انتخاب کند. نفر اول دو انتخاب دارد: بیتهای ۶ و ۸. فرض کنید بیت ۶ را انتخاب کند. در این صورت دومی بیت ۱۰ را انتخاب می‌کند و اولی مجبور است بیت ۹ را انتخاب کند. دومی بیت ۳ را انتخاب می‌کند و اولی مجبور است بیت ۱ را انتخاب کند. دومی بیت ۸ را انتخاب می‌کند و اولی مجبور است بیت ۴ را انتخاب کند و دومی با انتخاب بیت ۵ بازی را می‌برد. در حالت دوم، نفر اول بیت ۸ را انتخاب می‌کند. دومی بیت ۴ را انتخاب می‌کند. نفر اول دو انتخاب دارد: بیتهای ۵ و ۱۰. اگر بیت ۵ را انتخاب کند، دومی مجبور است بیت ۱ را انتخاب کند و اولی مجبور است بیت ۶ را انتخاب کند و دومی بیت ۱۰ را انتخاب می‌کند و اولی مجبور است بیت ۹ را انتخاب کند و دومی با انتخاب بیت ۲ می‌برد. اگر اولی پس از انتخاب شدن بیتهای ۳، ۷، ۸ و ۴ بیت ۱۰ را انتخاب کند، بیتهای ۹، ۲، ۱، ۶ و ۵ به اجبار باید انتخاب شوند (با شروع از دومی) و در پایان بیتی برای اولی نمی‌ماند. بنابراین در هر صورت اولی با انتخاب بیت ۳ می‌بازد.

گراف صفحهٔ بعد نمایش بازی است و شمارهٔ روی هر یال متناظر با شمارهٔ یکی از بیتهاست. این گراف به

نوعی متقارن است و درنتیجه بیتهای شمارهٔ ۳، ۷، ۸، ۴ و ۵ مشابه هم و بیتهای شمارهٔ ۱، ۹، ۶، ۲ و ۱۰ هم مشابه یکدیگرند. بنابراین اولی با انتخاب پنج بیت می‌برد و با انتخاب پنج بیت دیگر ممکن است ببازد.



۲۷. گزینهٔ (هـ). مکمل مجموعهٔ X را با $\overline{X}$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$X \cap Y = \overline{\overline{X} \cup \overline{Y}}, \qquad X - Y = \overline{\overline{X} \cup Y}$$

بنابراین اشتراک و تفاضل دو مجموعه را با این دو عمل می‌توان ساخت. اکنون ۸ مجموعهٔ دوبه‌دو مجزا معرفی می‌کنیم که اجتماع آنها مجموعهٔ عددهای طبیعی است:

$$D_۱ = \overline{A \cup B \cup C},\ D_۲ = A - (B \cup C),\ D_۳ = (A \cap B) - C,\ D_۴ = B - (A \cup C)$$

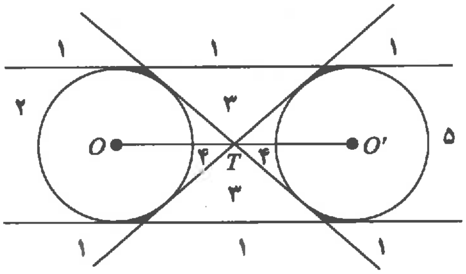
$$D_۵ = (B \cap C) - A,\ D_۶ = C - (A \cup B),\ D_۷ = (A \cap C) - B,\ D_۸ = A \cap B \cap C$$

اکنون می‌توانیم از مجموعهٔ $\{D_۱, D_۲, \ldots, D_۸\}$، $۲^۸$ زیرمجموعه انتخاب کنیم که هر یک متناظر با یک مجموعه است: کافی است به $\{D_{i_۱}, D_{i_۲}, \ldots, D_{i_n}\}$ مجموعهٔ $D_{i_۱} \cap D_{i_۲} \cap \ldots \cap D_{i_n}$ را نظیر کنیم. پس در کل حداکثر $۲^۸$ زیرمجموعه می‌توانیم بسازیم، و ساختن این تعداد زیرمجموعه هم واقعاً ممکن است: کافی است فرض کنیم

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}, \qquad B = \{۱, ۲, ۵, ۶\}, \qquad C = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$$

یادداشت. درکتابهای درسی ازکلمهٔ مکمل به‌عنوان متمم یاد شده است و اصلاً عجیب نیست که بسیاری از دانش‌آموزان از فهم این سؤال و درنتیجه حل آن محروم بمانند.

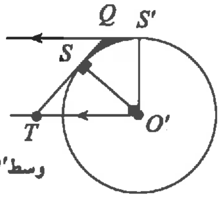
۲۸. گزینهٔ (هـ). مطابق شکل زیر نقاط خارج دو دایره را به ناحیه‌های سیاه‌شده و ۵ ناحیهٔ دیگر تقسیم می‌کنیم. اگر از هر نقطهٔ ناحیهٔ ۱ خطی موازی خط‌المرکزین دو دایره رسم کنیم، هیچ‌یک از دو دایره را قطع نمی‌کند. اگر از هر نقطهٔ ناحیه‌های ۲ و ۴، مانند P، خطی عمود بر PO رسم کنیم، هیچ‌یک از دو دایره را قطع نمی‌کند.



اگر از هر نقطهٔ ناحیهٔ ۵، مانند P'، خطی عمود بر $P'O'$ رسم کنیم، هیچ‌یک از دو دایره را قطع نمی‌کند. اگر از هر نقطهٔ ناحیهٔ ۳ به وسط خط‌المرکزین دو دایره (نقطهٔ T) وصل کنیم، خط حاصل هیچ‌یک از دایره‌ها را قطع نمی‌کند. به‌روشنی معلوم است که هر خطی که از نقطه‌ای از ناحیه‌های سیاه‌شده می‌گذرد دست‌کم یکی از دو دایره را قطع می‌کند. اکنون مجموع مساحتهای ناحیه‌های سیاه‌شده را حساب می‌کنیم. چون $O'T = ۲$، $O'S = \sqrt{۳}$ و $\angle O'ST = ۹۰^\circ$، پس $\angle O'TQ = ۶۰^\circ$ و درنتیجه $\angle SQS' = ۱۲۰^\circ$. بنابراین $\angle S'OS = ۶۰^\circ$. به این ترتیب،

$$\text{مساحت یکی از ناحیه‌های سیاه‌شده} = (\text{مساحت } SQS'O) - (\text{مساحت قطاع } SOS')$$
$$= \sqrt{۳} \times ۱ - \frac{۳\pi}{۶} = \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}$$

درنتیجه مجموع مساحتهای ناحیه‌های سیاه‌شده برابر است با $۴\left(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲}\right)$ یا $۴\sqrt{۳} - ۲\pi$.



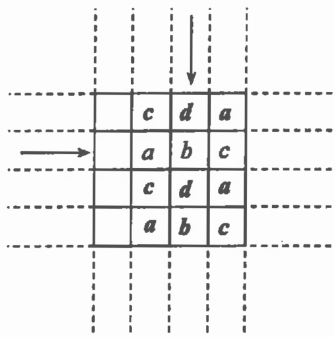
۲۹. گزینهٔ (د). فرض کنید جدول را به‌شکل موردنظر رنگ کرده‌ایم.

لم ۱. اگر یک سطر (ستون) از جدول به‌صورت یکی در میان با دو تا از رنگها رنگ شده باشد. بقیهٔ سطرها (ستونها)ی جدول نیز به‌صورت یکی در میان با دو رنگ رنگ شده‌اند.

برهان. فرض کنید رنگهای موردنظر a، b، c و d باشند و سطری از جدول به‌صورت یکی در میان با رنگهای a و b رنگ شده باشد. در این صورت در سطرهای بالا و پایین این سطر از رنگهای a و b استفاده نشده است. پس این سطرها فقط رنگهای c و d را دارند و چون دو خانهٔ مجاور همرنگ نیستند، پس این سطرها به‌صورت یکی در میان با c و d رنگ شده‌اند. همین استدلال را در مورد سطرهای بالا و پایین این دو سطر می‌توان تکرار کرد. در مورد ستونها نیز وضع به همین منوال است. ■

لم ۲. یا خانه‌های هر سطر یکی در میان رنگ شده‌اند یا خانه‌های هر ستون.

برهان. فرض کنید خانه‌های یکی از سطرها (و درنتیجه، بنابر لم ۱، خانه‌های هیچ سطری) یکی در میان رنگ نشده باشند. در این صورت، سه رنگ متمایز در سه خانهٔ مجاور و در یک سطر قرار دارند. فرض کنید این رنگها a، b و c باشند (شکل زیر را ببینید). در این صورت رنگ خانهٔ پایین b باید d باشد و درنتیجه خانه‌های سمت چپ و سمت راست d باید به‌ترتیب به رنگهای c و a باشند. در سطر بالای سطر abc همین وضعیت تکرار می‌شود. اگر همین‌طور استدلال کنیم معلوم می‌شود که ستون مشخص‌شده، و درنتیجه همهٔ ستونها، یکی در میان رنگ شده‌اند. ∎



اکنون باید تعداد جدولهای ۵ × ۴ رنگ‌آمیزی‌شده با چهار رنگ را بشماریم که یا خانه‌های سطرهای آنها یکی در میان با دو رنگ رنگ شده‌اند یا خانه‌های ستونهایشان. اگر خانه‌های هر سطر یکی در میان رنگ شده باشند، برای سطر اول $2 \times \binom{4}{2}$ یا ۱۲ حالت داریم و برای سطرهای دیگر هم هر سطر دو حالت دارد (برحسب اینکه از دو رنگ استفاده شده در این سطر کدام‌یک اول باشد). پس درکل در مورد سطرها

6×2^4 یا ۹۶ حالت داریم. به همین ترتیب، برای ستونها 6×2^5 یا ۱۹۲ حالت داریم. اما جدولهایی که هم سطرهایشان یکی در میان رنگ شده‌اند هم ستونهایشان را دو بار شمرده‌ایم. این جدولها با تعیین مربع 2×2 گوشهٔ بالا سمت چپ مشخص می‌شوند. پس تعداد آنها ۲۴ تاست. به این ترتیب تعداد کل حالتها برابر است با $24 - 192 + 96$ یا ۲۶۴.

۳۰. گزینهٔ (د). برای حل این سؤال از روش حذف گزینه استفاده می‌کنیم.

اگر در معادلهٔ $x^3 + xy + y^3 = 4$ فرض کنیم $x = 0$، آن‌وقت $y^3 = 4$ که فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد، در حالی‌که شکل موردنظر محورها را در دو نقطه قطع کرده است. بنابراین گزینهٔ (الف) قابل قبول نیست.

اگر در معادلهٔ $\cos x + x^2 + y^2 + y = 2$ فرض کنیم $y = 0$ به‌دست می‌آید $\cos x + x^2 = 2$. اگر α ریشهٔ این معادله باشد، $-\alpha$ هم هست؛ اما شکل موردنظر محور x را در دو نقطهٔ قرینه قطع نکرده است. پس گزینهٔ (ب) هم درست نیست.

نمودار معادلهٔ $x^2y^3 + xy^2 + y = 1$ محور x را قطع نمی‌کند، در حالی‌که شکل موردنظر محور x را قطع کرده است. پس گزینهٔ (ج) هم قابل قبول نیست.

اگر نقطهٔ (x, y) روی نمودار $\sin(x + y) + \sin x + \sin y = 1$ باشد، نقطهٔ (y, x) هم روی این نمودار است. یعنی این نمودار نسبت به نیمساز ربع اول و ربع سوم متقارن است. اما شکل موردنظر چنین نیست. پس گزینهٔ (ه) هم قابل قبول نیست.

بنابراین گزینهٔ (د) درست است!


انتشارات فاطمی
مجموعهٔ پیشگامان علم
مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
منتشر می‌کند:
مجموعهٔ پیشگامان علم، شرح زندگی و تلاش زنان و مردانی است که بهترین دوران عمر خود را وقف اثبات برتری برهان علمی بر تعصب کورکورانه، و گسترش افق اندیشه و تفکر علمی انسان کردند.
در این مجموعه سرگذشت زنان و مردانی را مطالعه می‌کنید که در کارگاه، آزمایشگاه یا کتابخانهٔ خود و در کنار ابزارهایشان، بیش از هر جا و هر زمان، احساس سعادت می‌کردند. سرگذشت آنها فقط شرح آزمایشهای کسالت‌آور علمی نیست، سرگذشت نبوغ شگفت‌آور انسان و تأثیر آن در جهان امروز است.
آلگزاندر فلمینگ
چارلز داروین
آلبرت اینشتین
ماری کوری
بنجامین فرانکلین
گالیلو گالیله
آلگزاندر گراهام بل
گولیلمو مارکونی
جیمز وات
یوهان گوتنبرگ
نیکلاوس کوپرنیک
برادران رایت
آیزاک نیوتون
پیشگامان علم