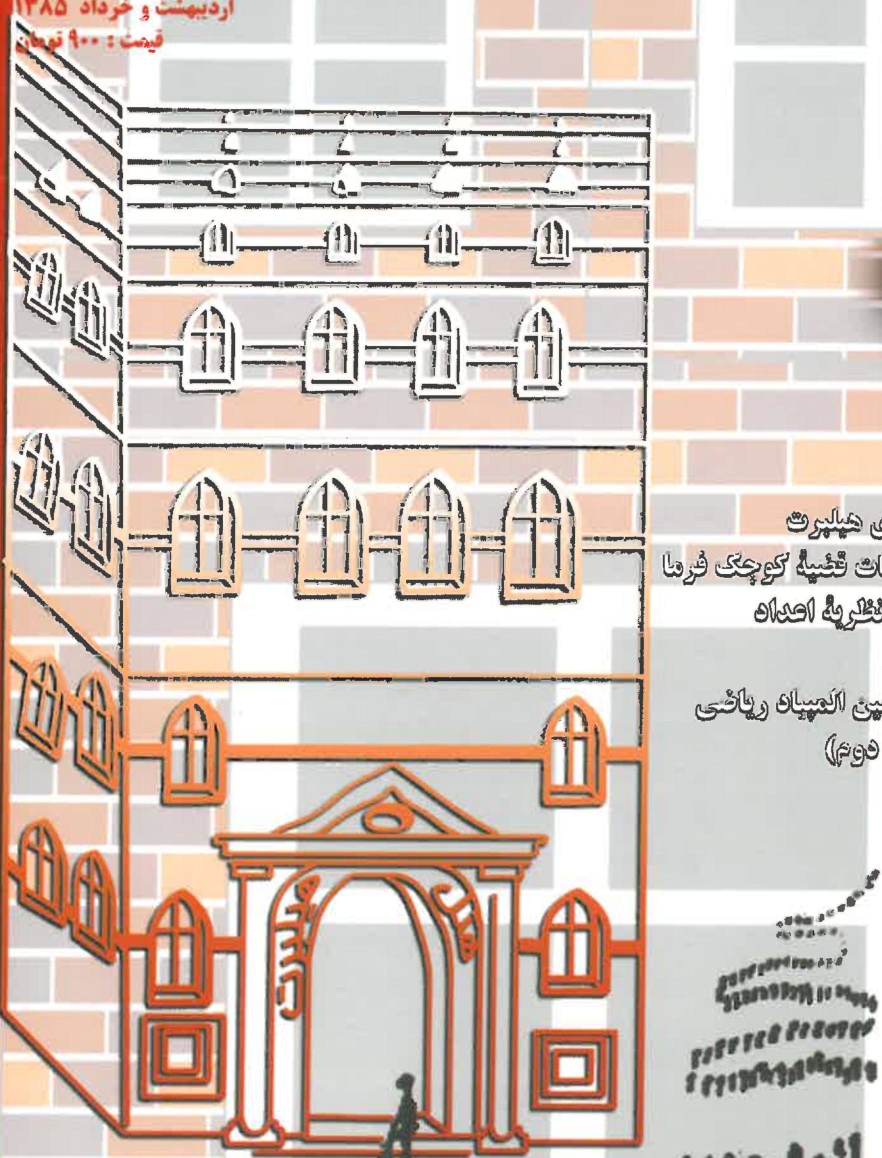
نشریهٔ ریاضیات

سال ششم / ۵
شمارهٔ پیاپی : ۲۵
اردیبهشت و خرداد ۱۳۸۵
قیمت : ۹۰۰ تومان



- هتل‌داری آقای هیلبرت
- چهار روش اثبات قضیهٔ کوچک فرما
- چند مسأله از نظریهٔ اعداد
  دربارهٔ $a^n \pm b^n$
- بیست و چهارمین المپیاد ریاضی
  کشور (مرحلهٔ دوم)

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال ششم/ ۵ ، شمارهٔ پیاپی: ۲۵، اردیبهشت و خرداد ۱۳۸۵

فهرست:

سرمقاله

- دانشوران — خوارزمی — ۲

مقاله‌ها

- هتل‌داری آقای هیلبرت — زارع‌پور — ۳
- دنبالهٔ فیبوناتچی و دنباله‌های دیگر — اسکی — ۱۰
- بازنگری دنبالهٔ فیبوناتچی و دنباله‌های دیگر — بنجامین وکوئین — ۱۶
- چهار روش اثبات قضیهٔ کوچک فرما — اسلامی مسلّم — ۲۵
- عددهای جالب — آندریسکو وسانیچ — ۳۴
- در کلاس درس هندسه — نیوشا — ۳۸

سرگرمی

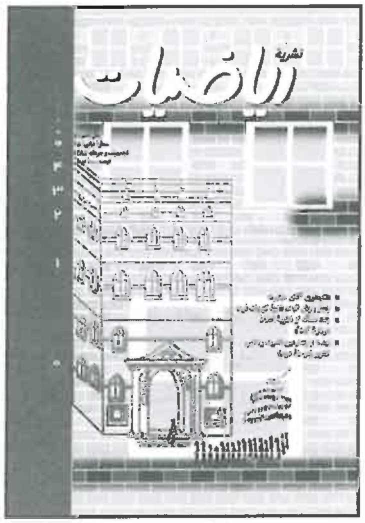
- از باب تفریح — ۴۱

المپیاد

- چند مسأله از نظریهٔ اعداد دربارهٔ $a^n \pm b^n$ — مانهآ — ۴۲
- مرحلهٔ دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور — ۴۹
- پاسخ مرحلهٔ دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور — کریمی — ۵۰
- مسأله‌های المپیادی — حمیدی — ۵۶

راه حل

- راه حلها — ۶۳



روی جلد: هتل‌داری آقای هیلبرت

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش

مشاوران: محمدرضا پورنکی، یحیی تابش، ایرج ضرغام

سردبیر: ارشک حمیدی

هیأت تحریریه: بهزاد اسلامی مسلّم، بردیا حسام، ارشک حمیدی، مهرداد مسافر، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند

مدیر داخلی: مهدی ملک‌زاده

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسؤول فنی: فرید مصلحی

طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان

حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم مهری

رسامی: فاطمه ثقفی

نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: صاحب

چاپ: خاشع

نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹ـ ۱۴۱۴۵

تلفن: ۸۸۹۷۱۵۸۴ـ ۸۸۹۷۱۵۸۳

دانشوران

ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی از بزرگترین دانشمندان اسلامی است. زمینه‌های کارهای علمی او ریاضی، نجوم، جغرافیا و تاریخ بوده‌اند. کتاب معروفش «جبر و مقابله» است. Algebra که در زبانهای اروپایی به‌معنی جبر است از اسم این کتاب گرفته شده است. خوارزمی از بنیانگذاران علم جبر به‌عنوان رشته‌ای متمایز از هندسه به‌شمار می‌رود. کتاب جبر و مقابله قرنها مرجع و مأخذ اروپاییان، و تا زمان ویت (۱۶۰۳ـ ۱۵۴۰) مبنای مطالعات علمی آنان در این رشته بود. در اینجا بخشی از ترجمهٔ مقدمهٔ این کتاب را به ترجمهٔ حسین خدیوجم (انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۸، تهران) می‌آوریم.

دانشمندان روزگاران گذشته، و اندیشمندان ملتهای پیشین پیوسته سرگرم نگارش و تصنیف بوده‌اند، آنان به‌اندازهٔ توانایی و بینش، برای مردم پس از خود، در انواع دانش و گزیده‌های فلسفه کتابها تألیف و تصنیف کرده‌اند، بدان امید که در دیگر سرای پاداشی یابند و در این جهان از آنان نام نیک بر جای ماند، نامی که تمامی ثروتها و پیرایه‌هایی که با زحمت و رنج بسیار به‌دست می‌آید در برابرش هیچ است، و برای رسیدن به آن، زحمت کشف رازهای دانش و دشواری حل مشکلات علمی آسان می‌نماید.

دانشور سه گونه است:

یا دانشی‌مردی است که برای اولین‌بار دانشی را ابداع یا کشف می‌کند، و برای آیندگان به یادگار می‌گذارد.

یا اندیشمندی است که آثار پیشینیان را شرح و تفسیر می‌کند و مطالب مبهم و پیچیدهٔ کتابی را روشن می‌سازد، برای بیان مطلب راه ساده‌تری نشان می‌دهد و نتیجه‌گیری را آسان می‌کند.

یا خردمندی است که در برخی از کتابها به نادرستی و آشفتگی برمی‌خورد، پس نادرستیها را اصلاح می‌کند، و آشفتگیها را سامان می‌بخشد، با خوشبینی به کار مؤلف می‌نگرد، بر او خرده نمی‌گیرد، و از اینکه متوجه خطا و اشتباه دیگران شده به خویشتن نمی‌بالد.

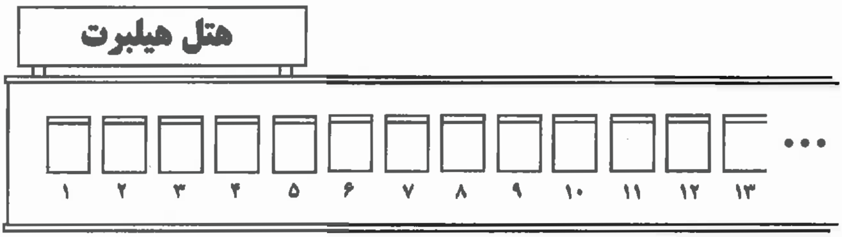
[...] من هم بر سر شوق آمدم. برای روشن ساختن مسائل مبهم و آسان نمودن مشکلات علمی به پا خاستم و کتابی در تعریف حساب و جبر و مقابله تألیف نمودم، کتابی که در عین اختصار شامل مطالب دقیق و با اهمیت «علم حساب» که مورد نیاز همگان است بوده است.

مطالب این کتاب شامل محاسباتی است در ارث و وصیت و مقاسمه (= تقسیم کردن اموال مشترک) و امور دیوانی و تجارت، و نیز در مورد تمام اموری که به حساب و معامله مربوط می‌شود ـ مانند مساحت کردن زمینها و اندازه‌گیری نهرها و هندسه (= نقشه‌کشی) و دیگر مباحث و فنون ریاضی ـ قابل استفاده خواهد بود. این کتاب را با حسن نیتی که به آن دارم تألیف می‌کنم. امید است که اهل دانش و ادب، به مدد نعمتهای بزرگی که خداوند به آنان سپرده، یعنی اندیشه و خرد و آزمون نیک، ارزش و پایه‌اش را نیکو شناسد. توفیق من از خداست.

هتل‌داری آقای هیلبرت

محمدصالح زارع‌پور

پردهٔ اول: آقای هیلبرت صاحب تنها هتل یک شهر گردشگری عجیب بود! شهری که همه‌چیز آن غیرعادی بود؛ درست مثل خود هتل آقای هیلبرت. هتل آقای هیلبرت، هتلی بود که به‌اندازهٔ تمام اعداد طبیعی اتاق داشت. یعنی به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، اتاقی با شمارهٔ n در این هتل وجود داشت.



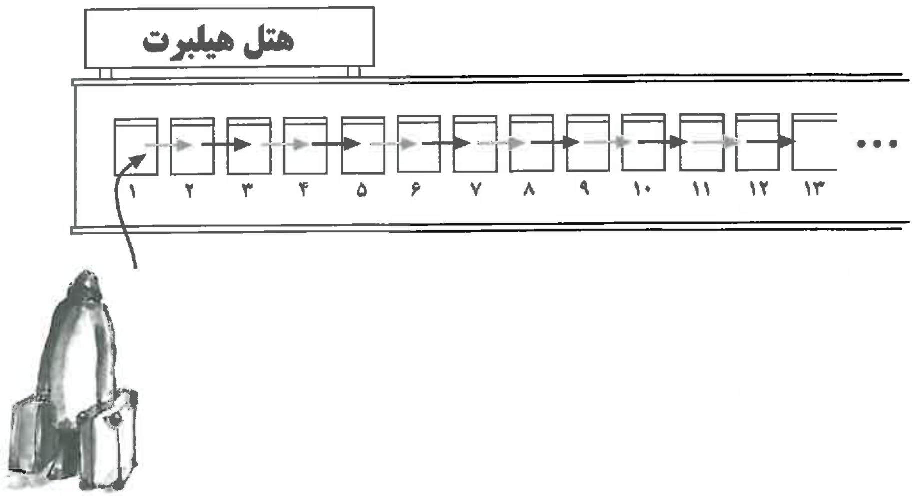
شکل ۱

در میانهٔ تابستان، وقتی که تعداد زیادی از مردم برای بازدید از جاذبه‌های گردشگری این شهر به آنجا آمده بودند، هتل آقای هیلبرت کاملاً پر شد، به‌طوری که در هر اتاق آن دست‌کم یک مسافر ساکن شده بود. ظاهراً همه‌چیز بر وفق مراد آقای هیلبرت بود: مشتریان زیاد و درآمدی قابل توجه. اما این همهٔ ماجرا نبود و پر بودن هتل دردسرهایی به همراه داشت: درست در شرایطی که تمام اتاقهای هتل پر شده بودند، یکی از بازرسان اتحادیهٔ هتل‌داران برای بازرسی از شرایط و امکانات هتل آقای هیلبرت به این هتل رفت! معمول بود که بازرسان چند روزی در هر هتل اقامت می‌کردند و در این چند روز با بررسی همهٔ امکانات هتل گزارش خود را تنظیم می‌کردند. از این رو همهٔ هتل‌داران معمولاً یک اتاق را برای بازرس خالی نگه می‌داشتند؛ اما در اثر سهل‌انگاری مسئول پذیرش هتل آقای هیلبرت، اتاقی که به‌همین منظور خالی نگه داشته می‌شد هم به مسافران اجاره داده شده بود و حتی یک اتاق هم خالی نبود!

آقای هیلبرت و کارکنان هتل مانده بودند که چه کنند، از یک‌سو می‌بایست هر طور که شده اتاقی برای اقامت آقای بازرس فراهم می‌کردند، چرا که در غیر این صورت ممکن بود گزارشی علیه آنها تنظیم کند و از ستاره‌های هتلشان کم شود، و از سوی دیگر همهٔ اتاقها پر بود و نمی‌توانستند عذر هیچ‌یک از مسافران را بخواهند، چون ممکن بود مسافر اخراج‌شده شکایتی علیه آنها بنویسد و براساس این شکایت، اتحادیهٔ هتل‌داران یکی از ستاره‌های هتل آقای هیلبرت را بگیرد. همه مستأصل مانده بودند: آیا راهی وجود دارد که بی‌آنکه هیچ مسافری اخراج شود و فقط با جابه‌جا کردن مسافران بتوان یک اتاق خالی برای آقای بازرس پیدا کرد؟

خوشبختانه بله! می‌توان با جابه‌جا کردن مسافران و بی‌آنکه هیچ‌یک از آنها اخراج شود اتاقی برای آقای بازرس خالی کرد! راه‌حل خیلی ساده است: می‌توان همهٔ مسافران را یک اتاق به جلو فرستاد و به این ترتیب اتاق شمارهٔ ۱ برای آقای بازرس خالی می‌شود!

به نظر شما عجیب نیست؟ در هتلی کاملاً پر، اتاقی خالی پیدا می‌شود، بدون اینکه حتی یک نفر هم از هتل خارج شده باشد!



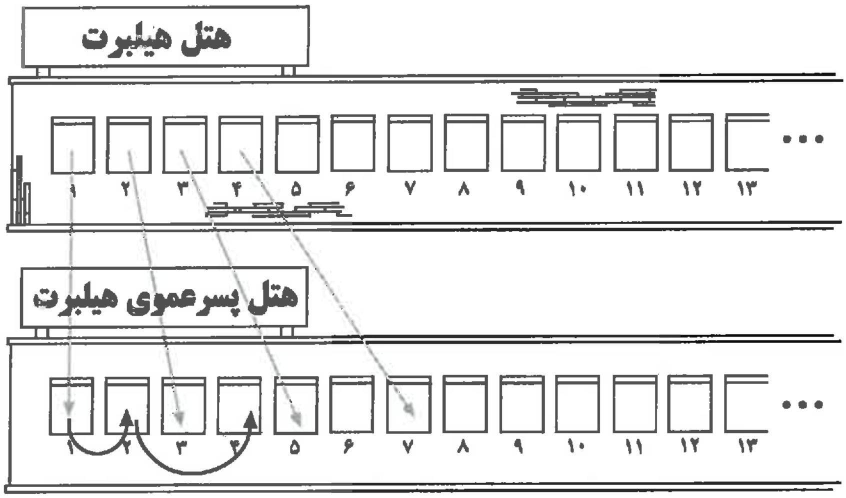
شکل ۲

پردهٔ دوم: تمایل زیاد مردم برای مسافرت به شهرهای گردشگری، هر سرمایه‌داری را وسوسه می‌کند که با احداث هتلی مجلل درآمدی کلان به جیب بزند. این همان وسوسه‌ای بود که در دل پسرعموی آقای هیلبرت افتاد و باعث شد او پس از مدتی صاحب دومین هتل این شهر عجیب شود؛ هتلی که درست مثل هتل آقای هیلبرت، به‌اندازهٔ تمام اعداد طبیعی اتاق داشت. کاروبار هر دو آنها سکه بود و در روزهای تابستان سال بعد هر دو هتل کاملاً پر از مشتری بود، بدون حتی یک اتاق خالی. اما باز هم همهٔ ماجرا این نبود و همه‌چیز آن‌طور که توقع می‌رفت بر وفق مراد نبود، بخصوص برای آقای هیلبرت!

هتل آقای هیلبرت در مقایسه با هتل پسرعمویش بسیار قدیمی بود، هر روز لازم بود قسمتی از هتل تعمیر شود، یک روز لوله‌های آب اتاقها می‌ترکید و دیوارها مرطوب می‌شد، یک روز شیرهای آب خراب بود، یک روز بر اثر پوسیدگی سیمها، تلفنها قطع می‌شد و هزار مشکل کوچک و بزرگ دیگر که هر روز گریبان آقای هیلبرت و هتل کهنه‌اش را می‌گرفت! کم‌کم صدای مسافران هتل هم درآمد. در چند قدمی آنها هتل زیبا و جدیدالتأسیس پسرعموی آقای هیلبرت بود و آنها با دیدن هتل او هر روز بیشتر افسوس می‌خوردند که چرا در هتل آقای هیلبرت اقامت کرده‌اند و درعوض آقای هیلبرت را شماتت می‌کردند. آقای هیلبرت بیچاره واقعاً کلافه شده بود، ازاین‌رو خوب فکر کرد تا بتواند راهی برای خلاصی از این شرایط پیدا کند.

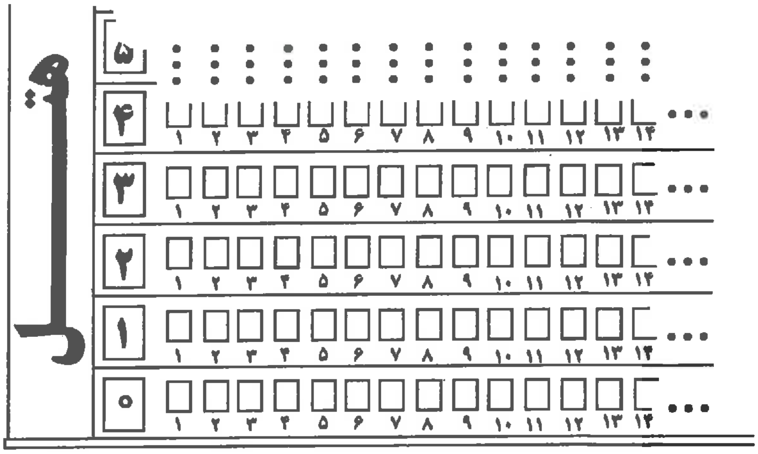
او تصمیم گرفت که همهٔ مسافران هتلش را برای مدتی به هتل پسرعمویش بفرستد و در این مدت دست به‌کار تعمیراتی اساسی برای بازسازی هتل خود شود. اما چگونه؟ چگونه این کار ممکن بود در حالی‌که هم هتل آقای هیلبرت کاملاً پر بود و هم هتل پسرعموی آقای هیلبرت؟

آقای هیلبرت مردی باهوش بود. این مشکل را با راه‌حلی هوشمندانه از پیش رو برداشت تا بی‌آنکه حتی یک مسافر اخراج شود و فقط با جابه‌جا کردن آنها، همهٔ مسافران این دو هتل درکنار هم در اتاقهای هتل پسرعموی آقای هیلبرت اقامت کنند. اما راه‌حل او: آقای هیلبرت از پسرعمویش خواست تا مسافران هتل خود را به اتاقهای زوج منتقل کند. به این ترتیب که با مسافر اتاق شمارهٔ n تماس بگیرد و از او بخواهد که به اتاق شمارهٔ $۲n$ نقل مکان کند. به این ترتیب همهٔ مسافران هتل پسرعموی آقای هیلبرت به اتاقهای زوج منتقل شدند و همهٔ اتاقهای فرد خالی شدند، و بالاخره آقای هیلبرت با مسافر اتاق شمارهٔ m خود تماس گرفت و از او خواست تا به اتاق شمارهٔ $۲m - ۱$ هتل پسرعموی آقای هیلبرت برود! به این ترتیب، همهٔ مسافران هر دو هتل در اتاقهای هتل پسرعموی آقای هیلبرت جا شدند (ساکنان اولیهٔ هتل پسرعموی آقای هیلبرت در اتاقهای زوج و ساکنان اولیهٔ هتل آقای هیلبرت در اتاقهای فرد).



شکل ۳

پردهٔ سوم: پس از مدتی کوتاه آقای هیلبرت هتل خود را بازسازی کرد و مسافران او دوباره به هتل خود او بازگشتند. چند سالی گذشت و در این سالها پسرعموها درکنار هم و از قبل جاذبه‌های گردشگری شهرشان پول پارو می‌کردند. هتلهایشان تقریباً همیشه پر بود و همه‌چیز بر وفق مراد. تا اینکه بعد از مدتی تصمیم گرفتند که هتلهایشان را خراب کنند و به‌جای آن دو هتل، یک هتل شراکتی بسیار بسیار مجلل بسازند. نقشهٔ آنها عملی شد و پس از مدتی اندک آنها صاحب هتلی بسیار زیبا و مجهز شدند. هتلی که به‌اندازهٔ دو هتل اول عجیب بود و صد البته پر دردسر! هتلی که درست به‌اندازهٔ تمام اعداد طبیعی در بالای طبقهٔ همکف خود طبقه داشت و در هر طبقه هم درست به‌اندازهٔ



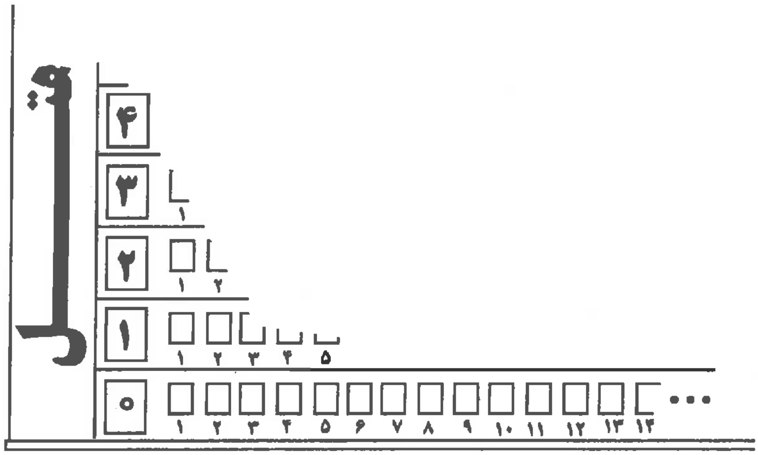
شکل ۴

تمام اعداد طبیعی، اتاق!

کسب و کار پسرعموها در این هتل هم پررونق بود. تقریباً همهٔ طبقات همیشه پر بودند، البته بجز طبقهٔ همکف که آنها برای جلوگیری از وقوع برخی مشکلاتی که قبلاً با آنها برخورد کرده بودند خالی نگهش می‌داشتند. این دوراندیشی آنها بالاخره به کمکشان آمد: در یکی از روزهایی که همهٔ اتاقهای طبقات بالای همکف پر بودند (و تنها همکف خالی بود، آن هم کاملاً)، هتل پسرعموها آتش گرفت. شعله‌ها از همه‌جای هتل زبانه می‌کشیدند، مسافران با فریاد به‌سمت پله‌های اضطراری فرار می‌کردند و خلاصه شرایطی پیش آمده بود به‌شدت هولناک. آقای هیلبرت و پسرعموی آقای هیلبرت فوراً دست به‌کار شدند و بلافاصله آتش‌نشانی و نیروهای امداد را خبر کردند. با تلاش آتش‌نشانان و امدادگران خوشبختانه آتش خیلی سریع خاموش شد و آسیب جانی به کسی نرسید، اما... اما... همهٔ طبقات هتل بجز طبقهٔ همکف در آتش سوخته بودند و غیرقابل سکونت بودند، و حالا این خود غصه‌ای شده بود برای پسرعموها! این همه مسافر را چه کنند؟ آیا می‌توان همهٔ آنها را در طبقهٔ همکف جا داد؟

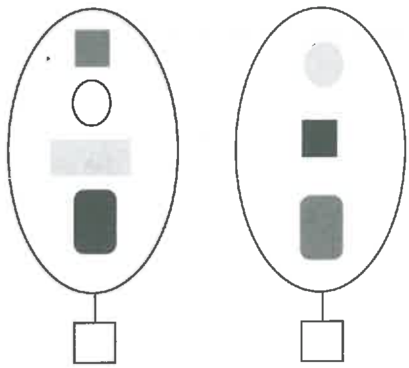
آقای هیلبرت قدری فکر کرد و بعد از مدتی راه‌حلی را با پسرعمویش در میان گذاشت. با اجرای راه‌حل آقای هیلبرت همهٔ مسافران همهٔ طبقات بالایی در طبقهٔ همکف جا شدند! آیا می‌توانید حدس بزنید که راه‌حل او چه بود؟ شاید شکل ابتدای صفحهٔ بعد قدری کمک کند! چطور بود؟ حالا با ما موافقید که این هتلها قدری عجیب‌اند؟ به‌نظر شما آیا هتلهایی که تعداد اتاقهایشان متناهی باشد هم می‌توانند چنین خصوصیاتی داشته باشند؟ آیا مسافران هر هتل با تعدادی نامتناهی اتاق را می‌توان به یک هتل نامتناهی اتاقهٔ دیگر منتقل کرد؟ اگر هنوز حوصله‌ای برایتان مانده است، ادامهٔ مقاله را هم بخوانید تا از ماجرای این هتلها بیشتر سر درآورید.

بیایید قدری به گذشته‌ها بازگردیم؛ اول دبستان! در کتاب ریاضی اول دبستان برای آموزش اینکه ۳ > ۴، دو بیضی کشیده بودند و از ما خواسته بودند که تعداد اشکال داخل هر یک را بشماریم و در مربعهای زیر بیضیها

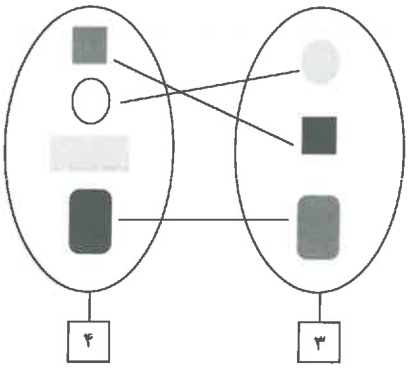


شکل ۵

بنویسیم (شکل ۶ را ببینید). در مرحلهٔ بعد خواسته بودند که اشیای یکجور را به هم وصل کنیم (شکل ۷ را ببینید).



شکل ۶



شکل ۷

درنهایت با این استدلال که در طرف چپ، شیء‌ای اضافی باقی مانده است معلوم می‌شد که ۳ از ۴ کوچکتر است. درحقیقت، ساده‌ترین (و شاید تنها) ایده‌ای که برای تحقیق تساوی (یا نامساوی بودن) تعداد اعضای دو مجموعهٔ متناهی به‌کار می‌آید همین است. با تغییراتی جزئی و جایگزینی «هم‌ارزی دو مجموعه» به‌جای «تساوی تعداد اعضای دو مجموعه»، می‌توان این ایده را به مجموعه‌های نامتناهی نیز گسترش داد.

تعریف ۱. می‌گوییم دو مجموعه (چه متناهی و چه نامتناهی) هم‌ارز (یا هم‌اندازه)اند، به‌شرطی که تابعی یک‌به‌یک و پوشا از یکی به دیگری وجود داشته باشد.

هم‌ارزی دو مجموعه مانند A و B را با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲. می‌گوییم مجموعهٔ A کوچکتر از یا برابر با مجموعهٔ B است، و می‌نویسیم $A \preccurlyeq B$، به‌شرطی که تابعی یک‌به‌یک (و نه لزوماً پوشا) از A به B وجود داشته باشد.

قضیهٔ شرودر-برنشتاین. اگر شرطهای $A \preccurlyeq B$ و $B \preccurlyeq A$ برای دومجموعه مانند A و B برقرار باشند، آنگاه A و B هم‌ارزند.

اکنون با در نظرگرفتن تعاریف و قضیهٔ بالا، نگاهی دوباره به ماجرای این هتلها می‌اندازیم.

پردهٔ اول: مجموعهٔ اتاقهای هتل آقای هیلبرت را با $\mathbb{N}$، یا همان مجموعهٔ اعداد طبیعی، نشان می‌دهیم. به این ترتیب که هر عدد، متناظر با اتاقی است که شمارهٔ آن اتاق، این عدد است. مثلاً، عدد ۳ به معنای اتاق شمارهٔ ۳ است. علاوه‌بر این، مجموعهٔ $\mathbf{W}$ را متناظر با مجموعهٔ مسافران هتل آقای هیلبرت در نظر می‌گیریم، به این ترتیب که عدد ۰ در این مجموعه متناظر با آقای بازرس است و هر عدد دیگر، متناظر با شخصی است که قبل از آمدن آقای بازرس در اتاقی با همان شماره اقامت داشته است. مثلاً، عدد ۵ متناظر با فردی است که پیش از آمدن آقای بازرس در اتاق شمارهٔ ۵ اقامت داشته است.

اکنون تابع $f : \mathbf{W} \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(n) = n + ۱$$

این تابع هر یک از ساکنان اتاقهای هتل آقای هیلبرت (پیش از آمدن آقای بازرس) را یک اتاق به جلو هدایت می‌کند و آقای بازرس را در اتاق اول جای می‌دهد، یعنی همان کاری که در هتل آقای هیلبرت اجرا شد.

به‌سادگی می‌توانیم یک‌به‌یک و پوشا بودن تابع f را ثابت کنیم (چگونه؟) و با توجه به تعریف هم‌ارزی دو مجموعه، نتیجه بگیریم که

$$\mathbf{W} \sim \mathbb{N}$$

تمرین. ثابت کنید که به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی مانند A، $\mathbb{N} \cup A \sim \mathbb{N}$.

پردهٔ دوم: آنچه در این پرده آمده است تعبیری است از هم‌ارزی مجموعهٔ اعداد فرد (که آن را $\mathbf{O}$ می‌نامیم) بامجموعهٔ اعداد طبیعی، زیرا در این پرده همهٔ اتاقهای با شمارهٔ فرد هتل پسرعموی آقای هیلبرت را (که مجموعه‌ای هم‌ارز با $\mathbf{O}$ است) با همهٔ مسافران هتل آقای هیلبرت (که مجموعه‌ای هم‌ارز با $\mathbb{N}$ است) پر کردیم. این عمل تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbf{O}$ را معرفی می‌کند:

$$g(n) = ۲n - ۱$$

با اثبات یک‌به‌یک و پوشا بودن g، به‌سادگی معلوم می‌شود $\mathbf{O} \sim \mathbb{N}$.

تمرین. ثابت کنید $\mathbf{O} \sim \mathbf{E}$. ($\mathbf{E}$ مجموعهٔ اعداد زوج است.)

تمرین. ثابت کنید $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$ (راهنمایی. تابعی چون $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ تعریف کنید که اعداد صحیح نامنفی را به اعداد طبیعی زوج ببرد و اعداد صحیح منفی را به اعداد طبیعی فرد. سپس یک‌به‌یک و پوشا بودن این تابع را ثابت کنید).

پردهٔ سوم: این مرحله قدری دشوارتر از دو مرحلهٔ قبل است! اگر راه‌حل آقای هیلبرت را بپذیریم، درحقیقت تناظری یک‌به‌یک میان $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (حاصلضرب دکارتی $\mathbb{N}$ در خودش) و $\mathbb{N}$ برقرار شده است، یعنی $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. نتیجهٔ بسیار عجیبی که از $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ گرفته می‌شود هم‌ارزی $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}$ است؛ یعنی $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. (حاصلضرب دکارتی دو مجموعه مانند A و B یعنی مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب مثل (a, b) که a عضوی از A و b عضوی از B است.)

اگر همچنان رمقی مانده است و آمادگی یک مارتن نفسگیر را دارید، سطرهای زیر را گام به گام دنبال کنید تا ثابت کنیم $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. در تمام سطرهای زیر، مجموعهٔ اعداد گویا را مجموعهٔ همهٔ کسرهایی در نظر بگیرید که ساده شده‌اند، یعنی صورت و مخرجشان نسبت به هم اول‌اند. مقصود از مجموعه‌های $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{Q}^-$ به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد گویای مثبت و مجموعهٔ اعداد گویای منفی است.

الف) $\mathbb{Q}^+ \preccurlyeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (تابع $\mathbb{Q}^+$ $i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to$ را به‌صورت $i(m, n) = \frac{۲^m}{۳^n}$ تعریف و یک‌به‌یک بودن آن را ثابت کنید).

ب) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Q}^+$ (تابع $j : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را به‌صورت $j\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n)$ تعریف و یک‌به‌یک بودن آن را ثابت کنید. برای اثبات یک‌به‌یک بودن تابع j فرض «نسبت به هم اول بودن صورت و مخرج هر کسر گویا» ضروری است).

ج) از (الف) و (ب) (بنابر قضیهٔ شرودر-برنشتاین) نتیجه می‌گیریم $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^+$ و چون $\mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{Q}^-$ (چرا؟)، پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^-$.

د) حالا چون $\mathbb{Q}^- \sim \mathbb{Q}^+ \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \sim \mathbf{E} \sim \mathbf{O}$، پس می‌توان $\mathbb{Q}^-$ را با $\mathbf{O}$ جایگزین کرد و $\mathbb{Q}^+$ را با $\mathbf{E}$، و نتیجه گرفت

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} - \{۰\}$$

و $\mathbb{Q} - \{۰\}$ همان $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ است. اکنون با همان روش پردهٔ اول به‌راحتی می‌توان ثابت کرد $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

در پایان چند سؤال آورده‌ایم که می‌توانید آنها را در گوشهٔ ذهن خود داشته باشید و هر ازگاهی به سراغشان بروید:

۱. آیا هر دو مجموعهٔ نامتناهی هم‌ارزند؟

۲. آیا مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد که کوچکتر از یا برابر با $\mathbb{N}$ باشد اما هم‌ارز آن نباشد؟

۳. آیا $\mathbb{R}$ با $\mathbb{N}$ هم‌ارز است؟

۴. آیا مجموعه‌ای چون A وجود دارد که با $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ هم‌ارز نباشد اما $A \preccurlyeq \mathbb{R}$ و نیز $\mathbb{N} \preccurlyeq A$؟

دنبالهٔ فیبوناتچی و دنباله‌های دیگر

ریچارد اسکی

معمولاً در دوره‌های آموزشی معلمان ریاضی کلاسی برای برهانهای مختلف وجود دارد که در آن از مسائلی درمورد اتحادهایی برای اعداد فیبوناتچی استفاده می‌شود. در اینجا دربارهٔ روشهایی کلی که در کشف، اثبات و تعمیم این اتحادها به‌کار می‌آیند بحث می‌کنیم.

کار را با تعریف اعداد فیبوناتچی آغاز می‌کنیم:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

چند عدد فیبوناتچی بعدی $F_2 = 1$، $F_3 = 2$، $F_4 = 3$ و $F_5 = 5$ هستند. توصیه می‌کنیم که برای ارجاعات بعدی ضمن خواندن ادامهٔ مقاله، خودتان فهرستی از اعداد فیبوناتچی تا F_{10} تهیه کنید.

توجه کنید که

$$\begin{aligned}
F_2F_0 - F_1^2 &= -1 \\
F_3F_1 - F_2^2 &= 2 - 1 = 1 \\
F_4F_2 - F_3^2 &= 3 - 4 = -1 \\
F_5F_3 - F_4^2 &= 10 - 9 = 1
\end{aligned}$$

از روابط بالا می‌توان حدس زد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \tag{2}$$

راهی برای اثبات حکم (۲) استقرای ریاضی است. چون $F_2F_0 - F_1^2 = -1$، حکم به‌ازای $n = 0$ برقرار است. برای تکمیل برهان باید نشان دهیم که اگر تساوی (۲) به‌ازای n درست باشد، به‌ازای $n + 1$ هم درست است. با

$$F_{n+3}F_{n+1} - F_{n+2}^2$$

چه باید بکنیم؟ وقتی این را به‌عنوان مسأله به دانش‌آموزان می‌دهم، بیشتر آنها تساوی (۱) را برای تک‌تک جمله‌ها به‌کار می‌برند و عبارت زیر را به‌دست می‌آورند:

$$(F_{n+2} + F_{n+1})(F_n + F_{n+1}) - (F_{n+1} + F_n)^2$$

گرچه با این کار می‌توان برهان را پیش برد، ولی محاسبات زیادی لازم است. همچنین توجه کنید که در این

استدلال F_{n-1} تولید می‌شود که آن را نمی‌خواهیم. معمولاً بهتر است تا جایی که ممکن است کمتر تغییرات ایجاد کنیم-باید درصورت امکان صرفه‌جو باشیم. F_{n+3} باید حذف شود، پس تساوی (۱) را فقط برای جایگزین کردن F_{n+3} به‌کار می‌گیریم:

$$\begin{aligned} F_{n+3}F_{n+1} - F_{n+2}^2 &= (F_{n+2} + F_{n+1})F_{n+1} - F_{n+2}^2 \\ &= F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 \end{aligned}$$

جملهٔ F_{n+1}^2 جمله‌ای است که می‌خواهیم. دو جملهٔ دیگر را می‌توان ترکیب کرد و نتیجه گرفت

$$F_{n+2}(F_{n+1} - F_{n+2}) + F_{n+1}^2 = F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n$$

و بنابراین،

$$\begin{aligned} F_{n+3}F_{n+1} - F_{n+2}^2 &= -[F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2] \\ &= -[(-1)^{n+1}] \\ &= (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

که استقرا را تکمیل می‌کند، زیرا قبلاً نشان داده‌ایم که نتیجهٔ اولیه به‌ازای $n = 0$ برقرار است. از تساوی (۲) نتیجه‌های جالبی به‌دست می‌آید. مثلاً، به‌ازای $n = 5$،

$$(13 \times 5) - 8^2 = 1$$

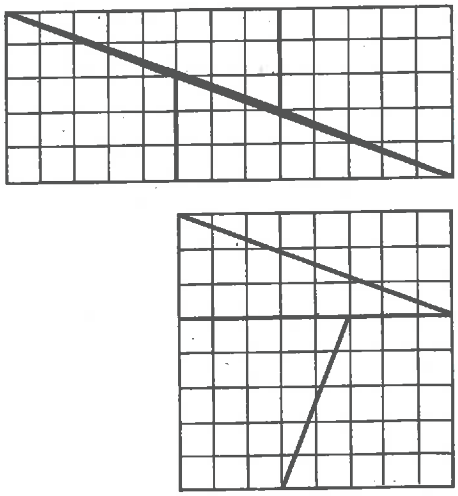
این نتیجه اساس معمای هندسی جالبی است:

شکلهای زیر را روی کاغذ شطرنجی رسم کنید. اول مربعی به رأسهای (۰,۰)، (۸,۰)، (۰,۸) و (۸,۸) رسم کنید. سپس نقطه‌های (۰,۵) و (۸,۵)، (۳,۰) و (۵,۵)، و (۰,۸) و (۸,۵) را به هم وصل کنید. بعد مستطیلی به رأسهای (۰,۰)، (۱۳,۰)، (۰,۵) و (۱۳,۵) رسم کنید.

اکنون قطعات مربع را آن‌گونه که در قسمت بالای شکل ۱ نشان داده شده است مرتب می‌کنیم. به‌نظر می‌رسد که این قطعات هم مربع و هم مستطیل را کاملاً می‌پوشانند. اما مساحت مستطیل ۶۵ و مساحت مربع ۶۴ است. اگر توجه کنید که چهار نقطه‌ای که به‌نظر می‌رسد روی قطر مستطیل قرار دارند هم‌خط نیستند و درواقع، دو نقطهٔ داخلی اصلاً روی قطر قرار ندارند، این تناقض ظاهری حل می‌شود. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n می‌توان شکل مشابهی رسم کرد.

چندین حکم شبیه تساوی (۲) وجود دارد. مثلاً به‌جای انتقال به‌اندازهٔ ۱ می‌توانیم به‌اندازهٔ ۲ انتقال دهیم. به‌کمک چند مثال می‌توان حدس زد که

$$F_{n+4}F_n - F_{n+2}^2 = (-1)^{n+1} \qquad (3)$$



شکل ۱ تناقض ظاهری

می‌توانیم تساوی (۱) را برای F_{n+4} به‌کار بگیریم و نتیجه بگیریم

$$\begin{aligned}F_{n+4}F_n - F_{n+2}^2 &= (F_{n+3} + F_{n+2})F_n - F_{n+2}^2\\ &= F_{n+3}F_n + F_{n+2}F_n - F_{n+2}^2\\ &= F_{n+3}F_n + F_{n+2}(-F_{n+1})\\ &= F_{n+3}F_n - F_{n+2}F_{n+1}\end{aligned}$$

بنابراین، وقتی و فقط وقتی تساوی (۳) درست است که

$$F_{n+3}F_n - F_{n+2}F_{n+1} = (-1)^{n+1} \qquad (4)$$

برهانی برای درستی تساوی (۴) چنین است:

$$\begin{aligned}F_{n+3}F_n - F_{n+2}F_{n+1} &= (F_{n+2} + F_{n+1})F_n - F_{n+2}F_{n+1}\\ &= F_{n+2}F_n + F_{n+1}(F_n - F_{n+2})\\ &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2\end{aligned}$$

و بنابراین، تساوی (۴) از تساوی (۲) نتیجه می‌شود.

در هر یک از تساویهای (۲)، (۳) و (۴) مجموع اندیسهای هر دو حاصل‌ضرب، عددی یکسان است. این عدد ثابت $2n + 2$ برای تساوی (۲)، $2n + 4$ برای تساوی (۳) و $2n + 3$ برای تساوی (۴) است. با استفاده از این نتیجه می‌توان اتحادهای دیگری به‌دست آورد. اما در اینجا به‌جای این کار، با نگاهی متفاوت به تساوی (۱) از اول

شروع می‌کنیم که با این نگاه تساویهای (۲)، (۴) و تساویهای دیگری نتیجه شوند. راهی برای این کار چنین است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{j+1} \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j+1} + F_j \\ F_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j+2} \\ F_{j+1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

با تکرار این تساوی به‌دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_{j+1} \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+j+1} \\ F_{n+j} \end{bmatrix} \tag{6}$$

سپس با استفاده از (۶) برای دو ستون به‌دست می‌آوریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} F_{j+1} & F_1 \\ F_j & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+j+1} & F_{n+1} \\ F_{n+j} & F_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

دترمینان حاصل‌ضرب ماتریسهای مربعی هم‌اندازه برابر است با حاصل‌ضرب دترمینانها. پس از تساوی (۷) نتیجه می‌شود

$$(-1)^n(0 - F_j) = (-1)^{n+1}F_j = F_{n+j+1}F_n - F_{n+j}F_{n+1} \tag{8}$$

وقتی $j = 1$، آخرین تساوی سمت راست همان (۲) است و به‌ازای $j = 2$ نیز تساوی (۴) به‌دست می‌آید.

تعمیمی دیگر نیز برای تساوی (۸) وجود دارد. من نتوانستم آن را با استفاده از ماتریسها ثابت کنم، ولی توانستم برهانی به روشی کاملاً متفاوت پیدا کنم. این تعمیم چنین است:

$$F_{n+j+k}F_n - F_{n+j}F_{n+k} = (-1)^{n+1}F_jF_k \tag{9}$$

به خواننده توصیه می‌کنم که این نتیجه را مثلاً به روش استقرا ثابت کند.

اتحادهای زیاد دیگری برای اعداد فیبوناتچی وجود دارند. یکی که به‌آسانی به‌دست می‌آید این است:

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_{n+1} - F_n)(F_{n+1} + F_n) = (F_{n-1})(F_{n+2}) \tag{10}$$

اگر به‌جای تفاضل مربعها مجموع آنها را حساب کنیم، نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آید:

n	$F_{n+1}^2 + F_n^2$
۰	۱
۱	۲
۲	۵
۳	۱۳

ستون دوم شامل اعداد فیبوناتچی است، ولی فقط نیمی از آنها. می‌توان حدس زد که

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \tag{11}$$

این حکم را می‌توان با استفاده از تساوی (۹) (که البته هنوز آن را ثابت نکرده‌ایم) به دو روش کاملاً متفاوت به‌دست آورد. روش آسانتر این است که تساوی زیر را در نظر بگیریم:

$$F_{2n+1} - F_{n+1}^2 = F_{2n+1}F_1 - F_{n+1}^2$$

سپس کمی در تساوی (۹) جایگذاری می‌کنیم. ابتدا به‌جای n مقدار ۱ را می‌گذاریم و سپس n را به‌جای j و k می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$F_{2n+1}F_1 - F_{n+1}^2 = F_n^2$$

بنابراین،

$$F_{2n+1} - F_{n+1}^2 = F_n^2$$

یعنی

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$$

روشی جالبتر برای اثبات تساوی (۱۱) این است که از سمت چپ تساوی شروع کنیم. ابتدا باید تعریف اعداد فیبوناتچی را به مقادیر منفی برای n تعمیم دهیم.

راهی برای این کار این است که مقادیر منفی n را به تعریف (۱)، یعنی

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

راه دهیم. به‌ازای $n = 0$، $F_1 = F_0 + F_{-1}$، یعنی $F_{-1} + 0 = 1$ که از این نتیجه می‌شود $F_{-1} = 1$. سپس با جایگذاری -1 برای n در تساوی (۱) نتیجه می‌شود $F_0 = F_{-1} + F_{-2}$، یا $1 + F_{-2} = 0$، و درنتیجه، $F_{-2} = -1$. سپس فرض می‌کنیم $n = -2$ و به‌دست می‌آوریم $F_{-1} = F_{-2} + F_{-3}$، یعنی $-1 + F_{-3} = 1$ و درنتیجه، $F_{-3} = 2$. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، به‌نظر می‌رسد که

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

تعمیم تساوی (۱) به همهٔ اعداد صحیح منفی است. این نتیجه درست است و می‌توان به‌استقرا ثابتش کرد.

با استفاده از تعریف (۱۲) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 + F_n^2 &= (-1)^{n+2}F_{n+1}F_{-n-1} + (-1)^{n+1}F_nF_{-n} \\ &= (-1)^{n+1}(F_{-n}F_n - F_{n+1}F_{-n-1}) \end{aligned}$$

سپس تساوی (۹) را به‌ازای $j = ۱$ و $k = -۲n - ۱$ به‌کار می‌گیریم که از آن نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F_{n+۱}^{۲} + F_n^{۲} &= (-۱)^{n+۱}(-۱)^{n+۱}F_۱F_{-۲n-۱} \\ &= F_۱F_{۲n+۱} \\ &= F_{۲n+۱} \end{aligned}$$

در اینجا تساوی (۹) را به‌ازای اعدادی صحیح و منفی مانند k به‌کار برده‌ایم. خواننده باید تحقیق کند که مجاز به این کار هستیم.

دنباله‌ای دیگر از اعداد که با اعداد فیبوناتچی ارتباط دارد دنبالهٔ اعداد لوکاست. عددهای لوکا را با L_n نمایش می‌دهیم؛ این عددها در تساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$L_۰ = ۲, \quad L_۱ = ۱, \quad L_{n+۱} = L_n + L_{n-۱}, \quad n = ۱, ۲, \ldots \tag{۱۳}$$

همهٔ نتایجی که به‌دست آورده‌ایم، معادلهایی هم برای اعداد لوکا دارند. پنج تساوی متناظر با تساوی (۹) شامل اعداد لوکا و اعداد فیبوناتچی وجود دارد. خواننده خود می‌تواند این نتایج را به‌دست آورد و ثابت کند. به‌عنوان راهنمایی، توجه کنید که تساوی (۲) را می‌توان طوری بسط داد که شامل

$$L_{n+۲}L_n - ۵F_{n+۱}^{۲}$$

باشد.

• ترجمهٔ مهران اخباریفر

Richard A. Askey, Fibonacci and Related Sequences, *Mathematics Teacher*, Vol. 97, No. 2, Feb. 2004, pp. 116-118.

بازنگری دنبالهٔ فیبوناتچی و دنباله‌های دیگر

آرتور بنجامین و جنیفر کوئین

ما کاملاً با ریچارد اسکی (مقالهٔ قبل در همین شماره را ببینید) هم‌عقیده‌ایم. کشف و اثبات اتحادهایی برای اعداد فیبوناتچی ممکن است هم برای دانش‌آموزان و هم برای معلمان جالب باشد. ریچارد اسکی در مقاله‌اش روشهای مختلفی شامل استقرای ریاضی، جبر خطی و عملیات جبری مفصل را برای به‌دست آوردن چندین اتحاد جالب به‌کار برده است. اما با روشی واحد می‌توان همهٔ این اتحادها را منسجمتر به‌دست آورد و به درک و شهودی عمیقتر دست یافت. منظور ما روش برهان ترکیبیاتی است.

برهان ترکیبیاتی با شمردن تعداد اعضای یک مجموعه به دو روش مختلف یا با شمردن تعداد اعضای دو مجموعه و برقرار کردن تناظری بین اعضای این دو مجموعه اتحادها را توجیه می‌کند. برای به‌کار بردن این روش باید بدانیم که با اعداد فیبوناتچی چه چیزی شمرده می‌شود. اعداد فیبوناتچی را با $f_۰ = ۱$، $f_۱ = ۱$، و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq ۲$، با

$$f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}$$

تعریف می‌کنیم. nاُمین عدد فیبوناتچی تعداد راههای فرش کردن سطحی $n \times ۱$ با کاشیهایی به‌شکل مربعهای ۱×۱ و دومینوهای ۲×۱ است. هر یک از این راهها را پوشش می‌نامیم. فرض کنید s یک کاشی مربعی به‌طول ۱ و d یک دومینو به‌طول ۲ باشد. در این صورت، $f_۳$، که برابر ۳ است، تعداد پوششهای مختلف برای سطح ۳×۱ است. این پوششها در سطح زیر مشخص شده‌اند.

$$sss,\ sd,\ ds$$

$f_۴$، که برابر ۵ است، تعداد پوششهای مختلف برای سطح ۴×۱ است. این پوششها را در سطر زیر می‌بینید.

$$ssss,\ ssd,\ dss,\ sds,\ dd$$

هر پوشش به‌طول ۵ (یا ۵ـپوشش) را می‌توان با افزودن یک مربع به یک ۴ـپوشش یا با افزودن یک دومینو به یک ۳ـپوشش ایجاد کرد. بنابراین تعداد ۵ـپوششها برابر است با

$$f_۵ = f_۴ + f_۳ = ۸$$

به‌طور کلی، هر nـپوشش را می‌توان با افزودن یک مربع به یک $(n-۱)$ـپوشش یا با افزودن یک دومینو به یک $(n-۲)$ـپوشش به‌دست آورد. بنابراین، با بزرگ شدن n تعداد پوششها مانند اعداد فیبوناتچی رشد می‌کند. اکنون

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
f_n	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹
$f_n^۲$	۱	۱	۴	۹	۲۵	۶۴	۱۶۹	۴۴۱	۱۱۵۶	۳۰۲۵	۷۹۲۱

جدول ۱

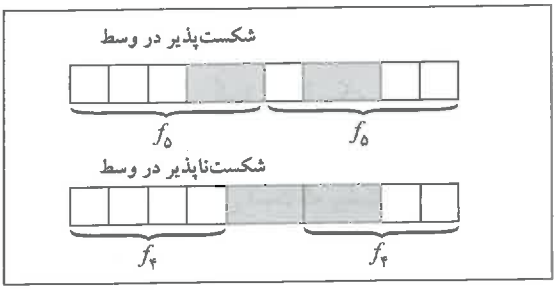
اعداد فیبوناتچی و مربع اعداد فیبوناتچی را که در جدول ۱ داده شده است در نظر بگیرید. جالب است که مجموع مربعهای دو عدد فیبوناتچی متوالی خودش عددی فیبوناتچی است. با آزمایش بیشتر می‌توان حدس زد که

$$f_{n-۱}^۲ + f_n^۲ = f_{۲n} \qquad (۱)$$

درستی این اتحاد را می‌توان مستقیماً با استدلالی ترکیبیاتی که در آن مجموعهٔ پوششهای به‌طول $۲n$ را به دو روش مختلف می‌شماریم تحقیق کرد. از یک طرف، تعداد این پوششها $f_{۲n}$ است. از طرف دیگر، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، هر $۲n$ـ‌پوشش یا در وسط شکست‌پذیر است، یا نیست. هر پوشش شکست‌پذیر را به $f_n^۲$ طریق می‌توان ایجاد کرد. هر پوشش شکست‌ناپذیر را به $f_{n-۱}^۲$ طریق می‌توان ایجاد کرد. بنابراین، تعداد $۲n$ـ‌پوششها را با

$$f_n^۲ + f_{n-۱}^۲$$

نیز می‌توان بیان کرد.



شکل ۱ ۱۰ـ‌پوششی را که در وسط شکست‌پذیر باشد می‌توان به دو پوشش با طول ۵ شکست. ۱۰ـ‌پوششی که در وسط شکست‌ناپذیر باشد باید یک دومینو در خانه‌های ۵ و ۶ داشته باشد. چنین پوششی را می‌توان به یک ۴ـ‌پوشش، یک دومینو و یک ۴ـ‌پوشش دیگر شکست.

اما چرا فقط شکست‌پذیری در وسط سطحی به طول زوج را در نظر بگیریم؟ می‌توانیم این ایده را بسط دهیم و شکست‌پذیری بعد از هر خانه‌ای را بررسی کنیم. این بار، پوششهای به‌طول $m+n$ را به دو روش مختلف می‌شماریم. تعداد این پوششها f_{m+n} است. اما اکنون دربارهٔ هر پوشش دلخواه از خود می‌پرسیم که آیا این پوشش

بعد از خانهٔ m شکست‌پذیر است یا نه. هر پوشش شکست‌پذیر را به $f_m f_n$ طریق می‌توان ایجاد کرد. هر پوشش شکست‌ناپذیر دومینویی دارد که خانه‌های m و $m+۱$ را پوشانده است. درنتیجه هر پوشش شکست‌ناپذیر را به $f_{m-۱} f_{n-۱}$ طریق می‌توان ایجاد کرد. بنابراین

$$f_{m+n} = f_m f_n + f_{m-۱} f_{n-۱} \tag{۲}$$

که تعمیمی از الگوی تساوی (۱) برای اعداد فیبوناتچی است.

اکنون مجموعهای جزئی مربعهای اعداد فیبوناتچی را در نظر بگیرید. مثلاً

$$\begin{aligned} ۱^۲ + ۱^۲ &= ۲ = ۱ \times ۲ \\ ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲ &= ۶ = ۲ \times ۳ \\ ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ &= ۱۵ = ۳ \times ۵ \\ ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ &= ۴۰ = ۵ \times ۸ \end{aligned}$$

با استفاده از این الگو می‌توان حدس زد که

$$f_۰^۲ + f_۱^۲ + \cdots + f_n^۲ = f_n \times f_{n+۱}$$

برای «فهمیدن» اینکه چرا رابطهٔ بالا درست است، راههای مختلف فرش کردن سطحی به‌طول n، یا nـ سطح، و سطح دیگری به‌طول $n+۱$، یا $(n+۱)$ـ سطح، را می‌شماریم. طبیعتاً $f_n f_{n+۱}$ راه برای این کار وجود دارد. اگر پوششی برای nـ سطح و پوششی برای mـ سطح هر دو در خانهٔ k شکست‌پذیر باشند، می‌گوییم این دو پوشش در خانهٔ k گسل مشترک دارند. در چند تا از $f_n f_{n+۱}$ پوشش بالا آخرین گسل مشترک در خانهٔ k است؟ از شکل ۲ می‌بینیم که پاسخ $f_k^۲$ است، زیرا بعد از آخرین گسل، فقط یک راه برای فرش کردن دو سطح به‌صورت بدون گسل وجود دارد. اندیس k می‌تواند تا ۰ کوچک شود، چون هر دو پوشش دلخواه یک گسل مشترک قبل از اولین خانه دارند، و می‌تواند تا n بزرگ شود، و این درصورتی است که پوشش $(n+۱)$ـ سطح به یک مربع ختم شود. با مجموعیابی روی همهٔ مقادیر k نتیجه می‌شود که

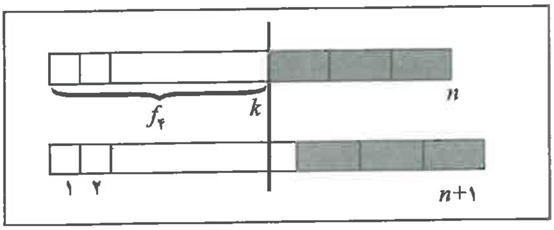
$$\sum_{k=۰}^{n} f_k^۲$$

پوشش وجود دارد که همان نتیجهٔ مطلوب است.

به خواننده توصیه می‌کنیم که برای تمرین ثابت کند

$$f_۰ + f_۱ + \cdots + f_n = f_{n+۲} - ۱$$

برای این کار می‌توانید پوششهای سطحی به‌طول $n+۲$ را که دست‌کم یک دومینو داشته باشند، با در نظرگرفتن محل آخرین دومینو بشمارید. علاوه‌بر این، با فرش‌کردن سطوحی به‌طول $۲n$ یا $۲n+۱$ و درنظرگرفتن محل



شکل ۲ برای nـسطح و $(n+1)$ـسطح f_k^2 پوشش وجود دارد که آخرین گسل مشترکشان در خانهٔ k روی می‌دهد.

آخرین مربع می‌توانید روابط زیر را به‌دست آورید:

$$f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1}$$

و

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n} - 1$$

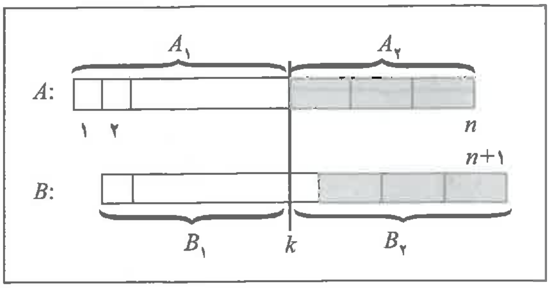
دوباره به جدول ۱ توجه کنید. می‌بینید که مربع هر عدد فیبوناتچی همیشه یک واحد با حاصل‌ضرب دو عدد فیبوناتچی مجاور آن عدد اختلاف دارد. مثلاً $1 = (8 \times 3) - 5^2$ و $-1 = (13 \times 5) - 8^2$؛ و به‌طور کلی،

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n \tag{3}$$

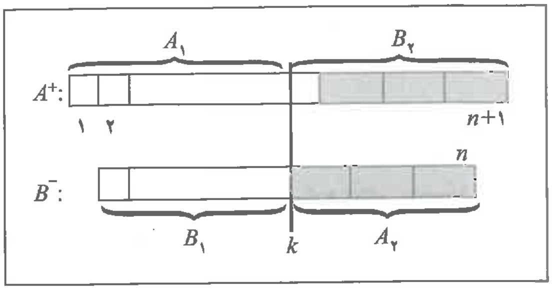
برای درک این اتحاد، ثابت می‌کنیم که هر جفت nـپوشش را به‌آسانی می‌توان به دو پوشش به طولهای $n+1$ و $n-1$ تبدیل کرد.

فرض کنید A و B دو nـپوشش باشند به‌طوری که، مانند شکل ۳، A خانه‌های ۱ تا n و B خانه‌های ۲ تا $n+1$ را بپوشاند. فرض کنید آخرین گسل A و B در خانهٔ k باشد. در این صورت، A را می‌توان به یک kـپوشش مانند A_1 و یک $(n-k)$ـپوشش مانند A_2 تجزیه کرد. به‌همین ترتیب، B را می‌توان به یک $(k-1)$ـپوشش مانند B_1 و یک $(n-k+1)$ـپوشش مانند B_2 تجزیه کرد. اکنون مانند شکل ۴، جای A_2 و B_2 را با هم عوض می‌کنیم (این کار را تعویض دُم می‌نامیم) و پوششهای A^+، یعنی A_1B_2، و B^-، یعنی B_1A_2، را به‌ترتیب به طول $n+1$ و $n-1$ به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که اگر تعویض دُم را روی پوششهای A^+ و B^- در شکل ۴ اجرا کنیم، دوباره به A و B می‌رسیم. بنابراین، تعداد جفت پوششهای (A, B) که طول A و طول B، n است، تقریباً برابر است با تعداد جفت پوششهایی مانند (C, D) که طول C برابر $n+1$ و طول D برابر $n-1$ است. می‌گوییم تقریباً چون پوششی که فقط شامل دومینو باشد، تنها پوشش بدون گسل است (یعنی اگر A و B با شرایط بالا چنین پوششی باشند، گسل مشترک ندارند). چون (A, B) فقط وقتی که n زوج باشد ممکن است بدون گسل مشترک باشد و (C, D) فقط وقتی که n فرد باشد ممکن است بدون گسل مشترک باشد، متوجه می‌شویم که چرا

$$f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^n$$



شکل ۳ دو nـپوشش A و B که به‌اندازهٔ یک خانه نسبت به هم جابه‌جا هستند و آخرین گسل مشترکشان در خانهٔ k روی می‌دهد.



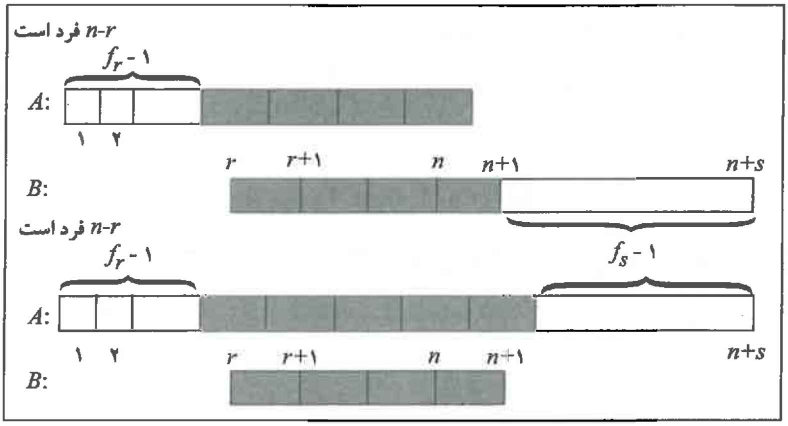
شکل ۴ تعویض دمهای دو nـپوشش شکل ۳، یعنی A_2 و B_2، یک $(n+1)$ـپوشش A^+ و یک $(n-1)$ـپوشش B^- تولید می‌کند. به این ترتیب تناظری دوطرفه بین جفت پوششهایی که نسبت به هم جابه‌جا هستند به‌دست می‌آید

با بررسی عمیقتر فن تعویض دُم می‌توانیم اتحادهای کلیتری را کشف و ثابت کنیم. مثلاً اگر A و B دو nـپوشش با جابه‌جایی r خانه (به‌جای ۱ خانه) باشند، تعویض دم، پوششهای A^+ و B^- را به‌ترتیب به طولهای $n+r$ و $n-r$ تولید می‌کند. بنابراین، f_n^2 تقریباً برابر است با $f_{n-r}f_{n+r}$ که برابر است با تعداد جفت پوششهایی مانند (C,D) که طول C برابر $n+r$ و طول D برابر $n-r$ است. اختلاف این دو مقدار تعداد پوششهای بدون گسل است. جفت (C,D) فقط وقتی می‌تواند بدون گسل باشد که $n-r$ زوج باشد، D فقط شامل دومینو باشد و همهٔ دومینوهای C در خانه‌های r تا $n+1$ باشند. خانه‌های دیگر C (۱ تا $r-1$ و $n+2$ تا $n+r$) را می‌توان به f_{r-1}^2 طریق فرش کرد. از طرف دیگر، (A,B) فقط وقتی که $n-r$ فرد باشد، دقیقاً f_{r-1}^2 پوشش بدون گسل دارد. آیا می‌توانید این پوششها را بیابید؟ درنتیجه،

$$f_n^2 - f_{n-r}f_{n+r} = (-1)^{n+1-r}f_{r-1}^2$$

اگر تصویر را کمی تغییر دهیم تا، مانند شکل ۵، جابه‌جاییهای نامتقارن مجاز باشند، به‌آسانی می‌توانیم به اتحاد زیر (از مقالهٔ اسکی) «برسیم»:

$$f_{n+s}f_{n-r} - f_nf_{n+s-r} = (-1)^{n-r}f_{r-1}f_{s-1}$$



شکل ۵ با اجرای تعویض دم روی n-پوشش و $(n+s-r)$-پوشش با جابه‌جایی نامتقارن می‌توان اتحاد $f_{n+s}f_{n-r} - f_n f_{n+s-r} = (-1)^{n-r} f_{r-1} f_{s-1}$ را ثابت کرد. در اینجا پوششهایی که قابل تعویض نیستند نشان داده شده‌اند.

البته تعجبی ندارد که برای اتحادهای شامل ضرایب دوجمله‌ای بتوان برهانهای ترکیبیاتی پیدا کرد. مثلاً، اتحاد «مجموع قطری مثلث پاسکال»،

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_n$$

با محاسبهٔ تعداد n-پوششها از طریق شمردن تعداد دومینوهای به‌کار رفته به‌دست می‌آید. پوششی به‌طول n با k دومینو باید $n-2k$ مربع داشته باشد و بنابراین، کلاً $k+(n-2k)=n-k$ قطعه (مربع یا دومینو) در این پوشش به‌کار رفته است که آنها را به‌ترتیب از چپ به راست، قطعهٔ ۱، قطعهٔ ۲، ...، قطعهٔ $n-k$ می‌نامیم. چون

$$\binom{n-k}{k}$$

راه برای انتخاب k قطعه‌ای که باید دومینو باشند وجود دارد، اتحاد ثابت می‌شود.

اما ممکن است تعجب کنید که اتحادهای فیبوناتچی دیگری هم به همین روش ثابت می‌شوند. الگوریتم اقلیدسی را برای یافتن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد به‌خاطر آورید. اساس این الگوریتم این است که اگر $n = qm + r$، آنگاه $\gcd(n,m) = \gcd(m,r)$ (که در آن $\gcd(a,b)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است)، چون $\gcd(n,m)$ با کم کردن مضربهای m از n تغییر نمی‌کند. مثلاً، اگر همیشه q را بزرگترین مقدار ممکن در نظر بگیریم، می‌توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم:

$$\gcd(۹۷۸, ۹۶) = \gcd(۹۶, ۱۸) = \gcd(۱۸, ۶) = \gcd(۶, ۰) = ۶$$

یکی از ویژگیهای جالب اعداد فیبوناتچی را که بسیار به آن علاقه داریم می‌توان با تعریف سنتی اعداد فیبوناتچی توضیح داد، یعنی $F_0 = 0$، $F_1 = 1$، و به‌طور کلی، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $F_n = f_{n-1}$. در این صورت، اتحاد زیر برقرار است:

$$\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)} \tag{۴}$$

قبلاً حالتهای خاصی از این تساوی را دیده‌ایم. مثلاً، از تساوی (۳) معلوم می‌شود که اعداد فیبوناتچی متوالی نسبت به هم اول‌اند، چون هر عددی که F_n و F_m را بشمارد، باید ± 1 را هم بشمارد. (این را به‌استقرا هم می‌توان ثابت کرد.) بنابراین،

$$\gcd(F_{n+1}, F_n) = 1 = F_1 = F_{\gcd(n+1,n)}$$

همچنین ملاحظه کنید که اگر n مضرب m باشد، مثلاً $n = qm$، آنگاه بنابر تساوی (۲)،

$$\begin{aligned} F_n = F_{qm} = f_{qm-1} &= f_{(m-1)+(q-1)m} \\ &= f_{m-1}f_{(q-1)m} + f_{m-2}f_{(q-1)m-1} \\ &= F_mF_{(q-1)m+1} + F_{m-1}F_{(q-1)m} \end{aligned}$$

پس اگر $F_{(q-1)m}$ مضرب F_m باشد، F_{qm} هم چنین است. درنتیجه به‌استقرا روی q نتیجه می‌گیریم که F_n (یعنی F_{qm}) مضرب F_m است. بنابراین اگر $n = qm$، آنگاه

$$\gcd(F_n, F_m) = \gcd(F_{qm}, F_m) = F_m = F_{\gcd(n,m)}$$

اکنون فرض کنید که $n = qm + r$ که $r > 0$. در این صورت، بنابر تساوی (۲)،

$$\begin{aligned} \gcd(F_n, F_m) = \gcd(F_m, F_{qm+r}) &= \gcd(F_m, f_{qm-1+r}) \\ &= \gcd(F_m, f_{qm-1}f_r + f_{qm-2}f_{r-1}) \\ &= \gcd(F_m, F_{qm}F_{r+1} + F_{qm-1}F_r) \\ &= \gcd(F_m, F_{qm-1}F_r) \end{aligned}$$

که در آخرین مرحله از اینکه F_{qm} مضرب F_m است و بنابراین، $F_{qm}F_{r+1}$ را هنگام محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک با F_m می‌توان نادیده گرفت استفاده کرده‌ایم. همچنین، می‌دانیم که F_m هیچ عامل مشترکی با F_{qm-1} ندارد (چون F_m، F_{qm} را که نسبت به F_{qm-1} اول است می‌شمارد) و بنابراین

$$\gcd(F_n, F_m) = \gcd(F_m, F_r)$$

ولی صبر کنید. رابطهٔ بالا همان الگوریتم اقلیدسی است که در آن یک F به اول هر چیز اضافه شده است. عجالتاً این را الگوریتم Fاقلیدسی می‌نامیم.

درنتیجه، مثلاً برای یافتن $\gcd(F_{۹۷۸}, F_{۹۶})$ از الگوریتم اقلیدسی استفاده می‌کنیم:

$$\gcd(F_{۹۷۸}, F_{۹۶}) = \gcd(F_{۹۶}, F_{۱۸}) = \gcd(F_{۱۸}, F_{۶})$$
$$= \gcd(F_{۶}, F_{۰}) = F_{۶}$$

زیرا $F_{۰} = ۰$. به‌طور کلی، اگر $g = \gcd(n, m)$، الگوریتم اقلیدسی با $\gcd(n, m)$ شروع می‌شود و آن را به $\gcd(g, ۰)$، یعنی g، تبدیل می‌کند. همین‌طور، الگوریتم اقلیدسی با $\gcd(F_n, F_m)$ شروع می‌شود و آن را به $\gcd(F_g, F_{۰})$، یعنی F_g، تبدیل می‌کند. پس همان‌طور که گفته بودیم، به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند n و m، $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}$.

تا اینجا فقط کمی به آنچه می‌توان با برهانهای ترکیبیاتی انجام داد پرداخته‌ایم. اگر کمی پیشتر برویم و $c_۱$ رنگ برای مربعها و $c_۲$ رنگ برای دومینوها در نظر بگیریم، می‌توانیم اتحادهای تعریف‌شده با شرایط اولیهٔ $u_j = ۰$ به‌ازای هر عدد صحیح منفی مانند j، $u_{۰} = ۱$ و با رابطهٔ بازگشتی $u_n = c_۱u_{n-۱} + c_۲u_{n-۲}$ به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geq ۱$ را با برهان ترکیبیاتی توجیه کنیم. اتحادهای مربوط به روابط بازگشتی از مرتبهٔ k به‌صورت

$$u_n = c_۱u_{n-۱} + \cdots + c_ku_{n-k}$$

با همان شرایط اولیه را هم به‌آسانی می‌توان با در نظرگرفتن کاشیهای رنگی با طول حداکثر k توضیح داد. روابط بازگشتی با شرایط اولیهٔ دیگر را نیز می‌توان با همین نوع مسائل فرش کردن مدل‌سازی کرد، اما باید محدودیتهایی بر اولین کاشی گذاشت. سرانجام، با در نظرگرفتن فرش کردن تصادفی، حتی برای اتحادهای شامل نسبت طلایی، یعنی

$$\phi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$$

مانند فرمول بینه، یعنی

$$F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\phi^n - (-۱/\phi)^n\right]$$

می‌توان برهان ترکیبیاتی پیدا کرد.

این مقاله را با نقل‌قولی از ریچارد اسکی به پایان می‌بریم:

> اگر چیزی زیباست، حتماً دلیلی برای این زیبایی وجود دارد، و اگر دست‌کم یک دلیل برای این خوش‌اقبالی سراغ ندارید، هنوز کار پیشِ رو دارید.

بنابراین، امیدواریم دفعهٔ بعد که اتحادی زیبا مانند

$$\sum_{i\geq ۰}\sum_{j\geq ۰}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i} = f_{۲n+۱}$$

یا

$$\sum_{k=\circ}^{n}(n-k)f_k = f_{n+۳} - (n+۳)$$

دیدید، از خود بپرسید «چه توجیه ترکیبیاتی‌ای برای این اتحاد وجود دارد؟»
دست‌کم، این چیزی است که ما به آن چشم امید داریم.

• ترجمهٔ مهران اخباریفر

Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn, Revisiting Fibonacci and Related Sequences, *Mathematics Teacher*, Vol. 99. No. 5, Dec. 2005/Jan. 2006, pp. 357-361.

چهار روش اثبات قضیهٔ کوچک فرما

بهزاد اسلامی مسلّم

مقدمه

پیر دو فرما (۱۶۶۵ـ۱۶۰۱) در فرانسه به دنیا آمد. فرما در اوقات فراغت به ریاضی می‌پرداخت، با این حال کارهای ریاضی او چنان کیفیتی دارند که اکنون یکی از بزرگترین ریاضیدانان همهٔ دورانها شمرده می‌شود. فرما عادت داشت به‌جای اینکه دستاوردهایش را منتشر کند، آنها را در حاشیهٔ کتابها یا در نامه‌هایی به دوستانش بنویسد. مثلاً، در حاشیهٔ کتابی از دیوفانت یادداشت کرده بود که ثابت کرده است اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۲ باشد، معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب غیربدیهی ندارد (جواب غیربدیهی جوابی است که $xyz \neq 0$). او نوشته بود: «من اثباتی واقعاً جالب پیدا کرده‌ام، اما حاشیهٔ کتاب کوچکتر از آن است که این اثبات جا شود». این حکم، به قضیهٔ آخر فرما معروف شد، زیرا آخرین حکمی از فرما بود که بدون اثبات مانده بود و تمام تلاشها برای اثباتش بی‌نتیجه بودند تا اینکه در ۱۹۹۵ اندرو وایلز موفق شد آن را ثابت کند. به‌نظر می‌رسد فرما واقعاً اثباتی داشته است، ولی مانند بعضی اثباتهایی که بعدها منتشر شدند، اشتباه بوده است.

فرما هندسهٔ تحلیلی را مستقل از دکارت کشف کرد. فرما و پاسکال را از بنیانگذاران نظریهٔ احتمال می‌دانند. فرما اصل کمترین زمان (در حرکت نور) را کشف کرد، مسائلی بنیادی در حسابان را حل کرد و نقش مهمی در پیشرفت نظریهٔ اعداد و نورشناسی داشته است.

یکی از قضیه‌های مشهور فرما قضیهٔ کوچک اوست. صورت این قضیه چنین است:

قضیهٔ کوچک فرما. اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد، $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است.

به نظر می‌رسد فرما این قضیه را ثابت کرده است، ولی بنابر عادت همیشگی‌اش اثباتش را آشکار نکرده است.

در این مقاله چند اثبات برای قضیهٔ کوچک فرما آورده‌ایم. پیش از هر چیز، مفهوم همنهشتی و چند حکم را که از آنها در اثباتها استفاده می‌کنیم یادآوری می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید m عددی طبیعی باشد و a و b اعدادی صحیح باشند. می‌گوییم a و b به‌پیمانهٔ m همنهشت‌اند، به‌شرطی که $a - b$ بر m بخش‌پذیر باشد، یعنی باقیماندهٔ a در تقسیم بر m با باقیماندهٔ b در تقسیم بر m برابر باشد. اگر a و b به‌پیمانهٔ m همنهشت باشند، می‌نویسیم $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m).

گزارهٔ ۱. فرض کنید m عددی طبیعی باشد و a، b، c و d اعدادی صحیح باشند و $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و $c \equiv d$ (به‌پیمانهٔ m). در این صورت $a + c \equiv b + d$ (به‌پیمانهٔ m).

تمرین. گزارهٔ ۱ را ثابت کنید.

گزارهٔ ۲. فرض کنید m عددی طبیعی باشد و a، b، c و d اعدادی صحیح باشند و $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و $c \equiv d$ (به‌پیمانهٔ m). در این صورت $ac \equiv bd$ (به‌پیمانهٔ m).

اثبات این حکم آسان است. چون $ac - bd = a(c-d) + d(a-b)$ و بنابر فرض $a-b$ و $c-d$ بر m بخش‌پذیرند، پس $ac - bd$ هم بر m بخش‌پذیر است، یعنی $ac \equiv bd$ (به‌پیمانهٔ m).

از این گزاره نتیجه می‌گیریم که اگر $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$a^n \equiv b^n \ (\text{به‌پیمانهٔ } m)$$

گزارهٔ ۳. فرض کنید p عددی اول باشد و a، b و c اعدادی صحیح باشند که $ac \equiv bc$ (به‌پیمانهٔ p). در این صورت $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ p) یا $c \equiv 0$ (به‌پیمانهٔ p).

برای اثبات این حکم، توجه کنید که اگر p عددی اول باشد و a، b و c اعدادی صحیح باشند که

$$ac \equiv bc \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

بنابر تعریف همنهشتی، $(a-b)c$ بر p بخش‌پذیر است. چون p اول است، پس $a-b$ بر p بخش‌پذیر است یا c بر p بخش‌پذیر است. در حالت اول $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ p) و در حالت دوم $c \equiv 0$ (به‌پیمانهٔ p).

گزارهٔ ۴ (قضیهٔ بزو). اگر a و b اعدادی صحیح باشند و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b برابر با d باشد، اعدادی صحیح مانند r و s وجود دارند که $d = ra + sb$.

از این گزاره نتیجه می‌گیریم اگر p عددی اول باشد و k عددی صحیح باشد که $1 < k < p$، آنگاه اعدادی صحیح مانند r و s وجود دارند که $rk + sp = 1$ (چرا؟)

اثباتها

روش اول (به استقرا)

ابتدا توجه کنید که اگر $a = 0$، حکم درست است و اگر حکم را وقتی که a عددی طبیعی است ثابت کنیم، می‌توان درستی حکم را وقتی که a منفی است هم نتیجه بگیریم. درحقیقت، فرض کنید حکم به‌ازای عدد طبیعی a درست باشد. در مورد $p = 2$، توجه کنید که

$$(-a)^2 \equiv a^2 \equiv a \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2)$$

و چون $-1 \equiv 1$ (به‌پیمانهٔ ۲)، پس

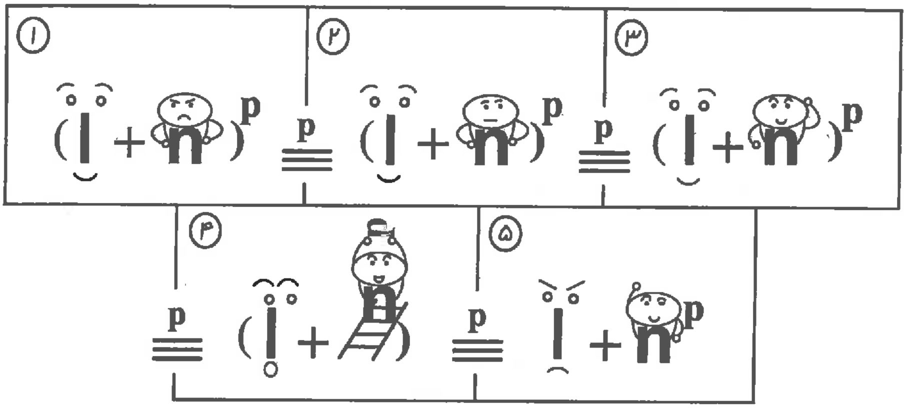
$$(-a)^2 \equiv -a \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2)$$

همچنین، اگر p عددی اول و فرد باشد،

$$(-a)^p \equiv -a^p \equiv -a \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

حکم را به‌استقرا روی a ثابت می‌کنیم. اگر $a = ۱$، حکم درست است، زیرا $۱^p \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n^p \equiv n \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$. توجه کنید که کافی است ثابت کنیم

$$(n+۱)^p \equiv n^p + ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$



لم. اگر x و y اعدادی صحیح باشند و p عددی اول باشد، آنگاه

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

برهان. بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای،

$$(x+y)^p = x^p + \binom{p}{۱}x^{p-۱}y + \binom{p}{۲}x^{p-۲}y^۲ + \cdots + \binom{p}{p-۲}x^۲y^{p-۲} + \binom{p}{p-۱}xy^{p-۱} + y^p$$

اما هر یک از اعداد $\binom{p}{۱}$، $\binom{p}{۲}$، ...، $\binom{p}{p-۲}$ و $\binom{p}{p-۱}$ به‌پیمانهٔ p صفر است. درحقیقت، اگر k عددی طبیعی باشد و $۱ < k < p$، $p!$ بر p بخش‌پذیر است، اما چون p اول است، $(p-k)!$ و $k!$ بر p بخش‌پذیر نیستند. پس $\binom{p}{k}$ که برابر است با $\frac{p!}{k!(p-k)!}$، بر p بخش‌پذیر است. درنتیجه، بنابر گزارهٔ ۱،

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

از لم بالا نتیجه می‌گیریم

$$(n+۱)^p \equiv n^p + ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

تمرین. مثالی بیاورید که اگر در لم بالا p عددی اول نباشد حکم درست نباشد.

روش دوم (با همنهشتیها)

فرض کنید p عددی اول باشد. کافی است حکم را وقتی که a عددی طبیعی است و $۱ \leq a \leq p - ۱$ ثابت کنیم. توجه کنید که $۰^p \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ p). فرض کنید b عددی صحیح باشد که به‌پیمانهٔ p صفر نباشد. در این صورت b با یکی از اعداد ۱، ۲، . . . و $p - ۱$ به‌پیمانهٔ p همنهشت است؛ این عدد را a بنامید. اگر حکم را در مورد اعداد ۱، ۲، . . . و $p - ۱$ ثابت کرده باشیم، آنگاه

$$b^p \equiv a^p \equiv a \equiv b \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

پس حکم به‌ازای b نیز درست است.

فرض کنید a یکی از اعداد ۱، ۲، . . . و $p - ۱$ باشد. هیچ دوتا از اعداد a، $۲a$، . . . و $(p-۱)a$ به‌پیمانهٔ p همنهشت نیستند، زیرا اگر m و n اعدادی طبیعی باشند که $۱ \leq m, n \leq p - ۱$ و $ma \equiv na$ (به‌پیمانهٔ p)، آنگاه چون a به‌پیمانهٔ p صفر نیست، از گزارهٔ ۳ و اینکه $۱ \leq m, n \leq p - ۱$ نتیجه می‌گیریم $m = n$.

بنابراین، هر یک از اعداد a، $۲a$، . . . و $(p-۱)a$ با دقیقاً یکی از اعداد ۱، ۲، . . . و $p - ۱$ به‌پیمانهٔ p همنهشت است. درنتیجه، بنابر گزارهٔ ۲،

$$a \times ۲a \times \cdots \times (p-۱)a \equiv ۱ \times ۲ \times \cdots \times (p-۱) \ (\text{به‌پیمانهٔ } p) \qquad (*)$$

حاصل‌ضرب اعداد ۱، ۲، . . . و $p - ۱$ بجز a را A بنامید. در این صورت همنهشتی $(*)$ به‌شکل

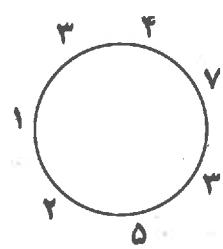
$$a^p A \equiv aA \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

درمی‌آید. اما A به‌پیمانهٔ p صفر نیست (چرا؟). درنتیجه، بنابر گزارهٔ ۳،

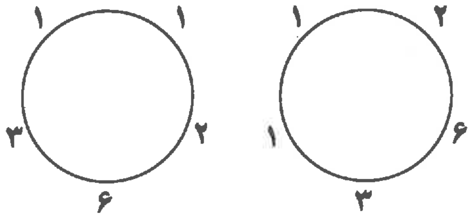
$$a^p \equiv a \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

روش سوم (ترکیبیاتی)

همان‌طور که در ابتدای روش اول گفتیم، کافی است حکم را وقتی که a عددی طبیعی است ثابت کنیم. پس فرض کنید a عددی طبیعی و p عددی اول باشد. می‌خواهیم دور دایره‌ای با فاصله‌های مساوی p عدد قرار دهیم که هر یک از آنها یکی از اعداد ۱، ۲، . . . و a است (البته تکرار مجاز است). مثلاً یکی از حالتها، اگر $p = ۷$ و $a = ۸$، به این شکل است:



تعداد کل راههایی که می‌توانیم این کار را بکنیم برابر با a^p است. اگر بخواهیم فقط از یکی از اعداد استفاده کنیم، a راه مختلف داریم. فرض کنید از حداقل دو عدد مختلف استفاده کرده باشیم. در این صورت، تعداد راههای موردنظر $a^p - a$ است. بعضی از آرایشها با دوران به هم تبدیل می‌شوند. چنین آرایشهایی را مشابه می‌نامیم. مثلاً اگر $p = ۵$ و $a = ۶$، آرایشهای زیر مشابه‌اند:



اگر بخواهیم تعداد آرایشهای نامشابه را بشماریم، باید آرایشهایی را که با دوران یک حالت به‌دست می‌آیند در شمارش محسوب نکنیم. هر یک از $a^p - a$ آرایش را می‌توان با زاویه‌های $\frac{۱}{p}۳۶۰^\circ$، $\frac{۲}{p}۳۶۰^\circ$، ... و $\frac{p-۱}{p}۳۶۰^\circ$ دوران داد. آیا هر دوتای این p آرایش (آرایش اصلی به‌همراه دوران‌یافته‌هایش) متمایزند؟ فرض کنید آرایشی وجود داشته باشد که دورانش به‌اندازهٔ $\frac{m}{p}۳۶۰^\circ$ و دورانش به‌اندازهٔ $\frac{n}{p}۳۶۰^\circ$ یکسان باشند، که در اینجا m و n اعدادی طبیعی‌اند و $۱ \le m < n \le p - ۱$. در این صورت، آرایشی وجود دارد که با دوران به‌اندازهٔ $\frac{n-m}{p}۳۶۰^\circ$ به خودش تبدیل می‌شود (چه آرایشی؟). اما $p > n - m > ۱$، پس با استفاده از نتیجه‌ای که از گزارهٔ ۴ گرفتیم، اعدادی صحیح مانند r و s وجود دارند که

$$r(n-m) + sp = ۱$$

درنتیجه

$$\frac{r(n-m)}{p}۳۶۰^\circ + s۳۶۰^\circ = \frac{۱}{p}۳۶۰^\circ$$

یعنی اگر دوران با ضریب مثبت به‌معنی دوران در جهت مثلثاتی و دوران با ضریب منفی به‌معنی دوران در خلاف جهت مثلثاتی باشد، آرایش موردنظر با r بار دوران به‌اندازهٔ $\frac{n-m}{p}۳۶۰^\circ$ و s بار دوران کامل، درواقع به‌اندازهٔ $\frac{۱}{p}۳۶۰^\circ$ دوران یافته است. اما هم دوران با زاویهٔ $\frac{n-m}{p}۳۶۰^\circ$ و هم دوران کامل، آرایش موردنظر را به خودش تبدیل می‌کند. پس نتیجه می‌گیریم که آرایش موردنظر با دوران به‌اندازهٔ $\frac{۱}{p}۳۶۰^\circ$ به خودش تبدیل می‌شود. اما در این صورت روی دایره فقط از یک عدد استفاده کرده‌ایم (چرا؟)، اما فرض کرده بودیم چنین نیست. پس هیچ دوتا از آرایشهای حاصل از دوران یک آرایش با هم یکی نیستند. به این ترتیب، از هر آرایش دقیقاً p آرایش (مختلف) با دوران ایجاد می‌شود. درنتیجه، مجموعهٔ $a^p - a$ آرایش موردنظر به مجموعه‌هایی p عضوی افراز می‌شود که اعضای هر مجموعه با دوران به هم تبدیل می‌شوند. درنتیجه، $a^p - a$ بر p بخش‌پذیر است.

تمرین. بررسی کنید که چرا در این اثبات اول بودن p ضروری است.

روش چهارم (با استفاده از روشهای سیستمهای دینامیکی)

اگر r عددی حقیقی باشد، $r - [r]$ را بخش کسری r می‌نامند و با $\{r\}$ نشان می‌دهند. مثلاً

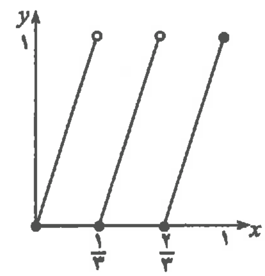
$$\{-۱\} = \{۰\} = \{۱\} = ۰, \qquad \{-۲/۷\} = \{۱/۳\} = \{۰/۳\} = ۰/۳$$

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. تابع $T_n : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را به‌صورت

$$T_n(x) = \begin{cases} \{nx\} & x \neq ۱ \\ ۱ & x = ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

مثلاً، نمودار تابع $T_۳$ به این شکل است:



پس نمودار $T_۳$ از سه پاره‌خط تشکیل شده است. در حالت کلی اگر n عددی طبیعی باشد، T_n از n پاره‌خط تشکیل شده است.

از دید دیگر، T_n دستوری است که هر نقطه از بازهٔ $[۰, ۱]$ مانند x را به نقطهٔ $T_n(x)$ در همین بازه می‌نگارد. یعنی اگر قورباغه‌ای روی نقطهٔ x نشسته باشد، بعد از یک ثانیه به نقطهٔ $T_n(x)$ می‌پرد. این قورباغه بعد از ثانیه‌ای دیگر به نقطهٔ $T_n(T_n(x))$ می‌پرد، و بعد از k ثانیه به نقطهٔ $T_n(T_n(\cdots(T_n(T_n(x))\cdots))$ (تعداد T_nها k تاست). تابع $T_n \circ T_n \circ \cdots \circ T_n$ را (که در آن T_n، k بار تکرار شده است) با نماد T_n^k نشان می‌دهیم. بعضی نقطه‌ها هستند که اگر قورباغه روی یکی از آنها قرار داشته باشد، همیشه در همان‌جا می‌ماند؛ این نقاط، نقاطی مانند xاند که $T_n(x) = x$. هر یک از این نقطه‌ها را نقطه‌ای ثابت برای T_n می‌نامیم. بعضی نقاط هستند که اگر قورباغه روی یکی از آنها قرار داشته باشد، در ثانیهٔ kام هم در همان نقطه است (ممکن است همیشه هم آنجا بوده، یا از آن نقطه رفته و بعداً بازگشته باشد، یا...)؛ این نقاط، نقاطی مانند xاند که $T_n^k(x) = x$. هر یک از این نقطه‌ها را نقطه‌ای تناوبی برای T_n می‌نامیم. می‌گوییم k دورهٔ تناوب x برای T_n است، به‌شرطی که k کوچکترین عدد طبیعی‌ای باشد که $T_n^k(x) = x$.

تمرین. $T_۳$ چند نقطهٔ ثابت دارد؟ آیا می‌توانید پاسخ را با استفاده از نمودار $T_۳$ پیدا کنید؟

تمرین. نمودارهای $T_۴$ و $T_۵$ را رسم کنید. هر یک از آنها چند نقطهٔ ثابت دارد؟ اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، T_n چند نقطهٔ ثابت دارد؟ (راهنمایی. نمودار T_n از n پاره‌خط تشکیل شده است. دو سر این پاره‌خطها کجاها هستند؟ توجه کنید که نقاط ثابت T_n مؤلفه‌های اول نقاط برخورد نمودار آن با نمودار تابع $y = x$ هستند.)

لم ۱ . اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، T_n دقیقاً n نقطهٔ ثابت دارد.

برهان. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد. هر یک از اعداد

$$۰, \frac{۱}{n-۱}, \frac{۲}{n-۱}, \ldots, \frac{n-۲}{n-۱}, ۱ \qquad (*)$$

نقطه‌ای ثابت برای T_n است (چرا؟). اکنون فرض کنید x عددی حقیقی باشد، $۰ \leq x < ۱$ و $T_n(x) = x$. در این صورت $\{nx\} = x$؛ درنتیجه، عددی صحیح و نامنفی مانند k وجود دارد که $nx = k + x$، یعنی $x = \frac{k}{n-۱}$. چون $۰ \leq x < ۱$، پس $۰ \leq k \leq n-۲$. بنابراین T_n دقیقاً n نقطهٔ ثابت دارد، که همان اعداد $(*)$اند.

تمرین. $T_۳(T_۲(\frac{۳}{۴}))$ و $T_۶(\frac{۳}{۴})$ را حساب کنید. چه رابطه‌ای می‌بینید؟ آیا به‌ازای هر x که $۰ \leq x \leq ۱$ تساوی $T_۳(T_۲(x)) = T_۶(x)$ درست است؟

لم ۲ . اگر a و b اعدادی طبیعی باشند،

$$T_a(T_b(x)) = T_{ab}(x), \qquad ۰ \leq x \leq ۱$$

تمرین. سعی کنید این حکم را به‌طور هندسی برای خود توجیه کنید. (راهنمایی. T_b بازهٔ $[۰, ۱]$ را به b قسمت به طول $\frac{۱}{b}$ تقسیم می‌کند و هر قسمت را به بازهٔ $[۰, ۱]$ می‌نگارد. T_a نیز بازهٔ $[۰, ۱]$ را به a قسمت به طول $\frac{۱}{a}$ تقسیم می‌کند و هر قسمت را به بازهٔ $[۰, ۱]$ می‌نگارد. ترکیب این دو تابع چه عملی انجام می‌دهد؟ T_{ab} چه عملی انجام می‌دهد؟)

برهان لم ۲. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند. در این صورت

$$T_a(T_b(۱)) = T_a(۱) = ۱ = T_{ab}(۱)$$

فرض کنید $۰ \leq x < ۱$. در این صورت $T_b(x) = \{bx\}$؛ درنتیجه، عددی صحیح و نامنفی مانند k وجود دارد که $T_b(x) + k = bx$، یعنی $T_b(x) = bx - k$. اما چون $x \neq ۱$، پس $T_b(x) \neq ۱$. بنابراین

$$T_a(T_b(x)) = \{aT_b(x)\} = \{a(bx-k)\} = \{abx\} = T_{ab}(x)$$

نتیجه. اگر n و m اعدادی طبیعی باشند، $T_{n^m} = T_n^m$.

اکنون با استفاده از لم ۱ و لم ۲ قضیهٔ کوچک فرما را ثابت می‌کنیم. حکم به‌ازای $a = 1$ درست است. فرض کنید p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و بزرگتر از یک. بنابر آنچه در روش اول گفتیم، اگر حکم را در مورد اعدادی طبیعی مانند a ثابت کنیم، درستی حکم در مورد اعداد صحیح و منفی نیز به‌دست می‌آید.
بنابر لم ۱، T_a، a نقطهٔ ثابت و T_{a^p}، a^p نقطهٔ ثابت دارد. نقاط ثابت T_a (بنابر نتیجهٔ لم ۲) نقاط ثابت T_{a^p} نیز هستند. پس $a^p - a$ تا از نقاط ثابت T_{a^p} نقطهٔ ثابت T_a نیستند، اما (باز هم بنابر نتیجهٔ لم ۲)، هر یک از این $a^p - a$ نقطه، نقطه‌ای تناوبی برای T_a است.

ادعا. دورهٔ تناوب هر یک از این $a^p - a$ نقطه برای T_a برابر p است.

آیا می‌توانید حدس بزنید اگر ادعا درست باشد، قضیهٔ کوچک فرما چگونه ثابت می‌شود؟ فرض کنید ادعا ثابت شده باشد. در این صورت اگر x نقطه‌ای تناوبی برای T_a و نقطه‌ای ثابت برای T_{a^p} باشد، هیچ دوتا از عددهای x، $T_a(x)$، ... و $T_a^{p-1}(x)$ برابر نیستند (می‌توانید اثبات این حکم را در انتهای این قسمت با عنوان لم ۳ ببینید). درنتیجه، مجموعهٔ $a^p - a$ نقطهٔ ذکر شده به مجموعه‌های p عضوی افراز می‌شود، که در هر مجموعه هر دو عضوی که در نظر بگیریم، با چند بار اثر دادن T_a روی یکی، دیگری به‌دست می‌آید. درنتیجه، $a^p - a$ مضرب p است.

اثبات ادعا. فرض کنید x عددی حقیقی باشد، $0 \leq x \leq 1$، $T_{a^p}(x) = x$ و $T_a(x) \neq x$. در این صورت دورهٔ تناوب x برای T_a عددی مانند k است که $2 \leq k \leq p$ (چرا k نمی‌تواند برابر یک باشد؟). درنتیجه $T_{a^k}(x) = T_a^k(x) = x$ اکنون فرض کنید $k < p$. در این صورت p را بر k تقسیم کنید و خارج قسمت را q و باقیمانده را r بنامید

$$p = kq + r$$

که در آن $1 \leq r \leq k - 1$ (چرا r نمی‌تواند صفر باشد؟) و q مثبت است. توجه کنید که

$$x = T_{a^p}(x) = T_{a^{kq+r}}(x) = T_{a^r}(T_{a^{kq}}(x)) = T_{a^r}(T_{a^k}^q(x)) = T_{a^r}(x) = T_a^r(x)$$

بنابراین دورهٔ تناوب x برای T_a حداکثر r است. اما $r < k$ و فرض کرده بودیم دورهٔ تناوب x برای T_a برابر k است. یعنی فرض $k < p$ به تناقض انجامید. اما $2 \leq k \leq p$، پس $k = p$. یعنی ادعا ثابت شده است.

لم ۳ . اگر x نقطه‌ای تناوبی برای T_a و نقطه‌ای ثابت برای T_{a^p} باشد، هیچ دوتا از اعداد x، $T_a(x)$، $T_a^2(x)$، ... و $T_a^{p-1}(x)$ برابر نیستند.

اثبات. فرض کنید x نقطه‌ای تناوبی برای T_a و نقطه‌ای ثابت برای T_{a^p} باشد. بنابر ادعایی که ثابت شد، دورهٔ تناوب x برای T_a برابر p است. پس x با هیچ‌یک از اعداد $Ta(x)$، $T_a^2(x)$، ... و $T_a^{p-1}(x)$ برابر نیست. اکنون فرض

کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $1 \leq m < n \leq p-1$ و $T_a^n(x) = T_a^m(x)$. در این صورت

$$T_a^{n-m}(T_a^m(x)) = T_a^n(x) = T_a^m(x)$$

پس $T_a^m(x)$ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب حداکثر برابر $n-m$ برای T_a است و $1 \leq n-m \leq p-1$.
از طرف دیگر، چون بنابر نتیجهٔ لم ۲ $T_a^m(x) = T_{a^m}(x)$، پس

$$T_{a^p}(T_a^m(x)) = T_{a^p}(T_{a^m}(x)) = T_{a^{m+p}}(x) = T_{a^m}(T_{a^p}(x)) = T_{a^m}(x) = T_a^m(x)$$

یعنی $T_a^m(x)$ نقطه‌ای ثابت برای T_{a^p} است؛ کمی قبلتر نتیجه گرفتیم $T_a^m(x)$ نقطه‌ای تناوبی برای T_a است. پس طبق ادعایی که ثابت شد، دورهٔ تناوب $T_a^m(x)$ برابر p است، که با نتیجه‌ای که قبلاً گرفتیم (که $T_a^n(x)$ نقطه‌ای تناوبی با دورهٔ تناوب حداکثر برابر $n-m$ برای T_a است) تناقض دارد. به این ترتیب، اگر m و n دو عدد طبیعی باشند که $1 \leq m < n \leq p-1$، آن‌وقت $T_a^n(x) \neq T_a^m(x)$ که نتیجهٔ دلخواه ماست.

سخن آخر

لئونهارت اویلر، ریاضیدان مشهور، اثباتی استقرایی را، مشابه اثباتی که در اینجا آوردیم، در مقاله‌ای در ۱۷۳۶ منتشر کرد. خواندن این مقاله خالی از لطف نیست. ترجمهٔ این مقاله را می‌توانید در نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۱۱، ببینید.

می‌توانید در مقالهٔ «رمزنگاری با کلید همگانی» در نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۲۲، با کاربردی از قضیهٔ کوچک فرما آشنا شوید.

اگر می‌خواهید دربارهٔ قضیهٔ آخر فرما بیشتر بدانید، به مقالهٔ «از فرما تا وایلز» در نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ ۲۰ مراجعه کنید.

منبع

Kevin Iga, A Dynamical Systems Proof of Fermat's Little Theorem, *Mathematics Magazine*, Vol. 76, No. 1, Feb. 2003, pp. 48-51.

عددهای جالب

تیتو آندریسکو و زوران سانیچ

از روزگاران قدیم نوشتن عددهای گویا به‌شکل مجموعهای وارونهای اعداد طبیعی متداول بوده است. بخصوص از آنجایی که این امر در میان مصریان باستان بسیار رایج بود، وارونهای اعداد طبیعی به کسرهای مصری معروف شده‌اند. در سال ۱۲۰۲ میلادی پیزانو ثابت کرد که هر عدد گویا را می‌توان به‌شکل مجموعی از کسرهای مصری متمایز نوشت، یعنی اگر r عدد گویای مثبتی باشد، آن‌وقت

$$r = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_k}, \quad ۱ \leq a_۱ < a_۲ < \cdots < a_k$$

به‌ویژه هر عدد طبیعی را می‌توان به این شکل نوشت. در ادامه، نمایشهای عدد یک به‌شکل

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_k} = ۱, \quad ۱ \leq a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_k$$

را در نظر می‌گیریم که در آنها لازم نیست جملات متمایز باشند. مثلاً

$$\frac{۱}{۱} = ۱$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} = ۱$$

فهمیدن اینکه در نمایشهایی از این دست مجموع مخرجها، یعنی مجموع عددهای $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k، عددهایی مانند ۲، ۳ یا ۵ نمی‌شود چندان دشوار نیست (چرا؟). همچنین واضح است که حاصل $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$ عددهایی مانند ۱، ۴ یا ۱۱ می‌شود.

عددی طبیعی مانند n را در صورتی جالب می‌نامند که بتوان آن را به‌صورت

$$k = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$$

نوشت که در آن $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k عددهایی طبیعی‌اند (که لازم نیست متمایز باشند) و

$$\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_k} = ۱$$

اکنون می‌خواهیم بفهمیم که عددهای جالب کدام‌اند.

به‌طور قطع می‌توانید بدون راهنمایی هم راهی برای حل تمرین زیر پیدا کنید.

تمرین ۱. ثابت کنید که هر عدد مربع کامل عددی جالب است.

توجه کنید که اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_k جمعوندهای نمایش عددی جالب باشند، آن‌وقت

$$\frac{۱}{۲a_۱}+\frac{۱}{۲a_۲}+\cdots+\frac{۱}{۲a_k}=\frac{۱}{۲}$$

با استفاده از این مطلب دو تمرین زیر را حل کنید.

تمرین ۲. ثابت کنید اگر n عددی جالب باشد، آن‌وقت $۲n+۲$ هم چنین است.

تمرین ۳. ثابت کنید ۱۰، ۲۰، ۲۲، ۲۴ و ۳۴ عددهایی جالب‌اند.

اکنون با توجه به اینکه $\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}$ دو تمرین زیر را حل کنید.

تمرین ۴. ثابت کنید ۱۷ و ۱۸ عددهایی جالب‌اند.

تمرین ۵. ثابت کنید اگر n عددی جالب باشد، آن‌وقت $۲n+۸$ و $۲n+۹$ هم چنین‌اند.

تمرین ۶. با استفاده از تمرین قبلی ثابت کنید که ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰ و ۳۱ هم عددهایی جالب‌اند.

با استفاده از نکته‌ای شبیه آنچه که پیش از تمرین ۲ آمد و اینکه

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}$$

تمرینهای زیر را حل کنید.

تمرین ۷. ثابت کنید اگر n عددی جالب باشد، آن‌وقت $۳n+۶$ و $۳n+۸$ هم چنین‌اند.

تمرین ۸. ثابت کنید ۳۳، ۳۵ و ۳۹ هم عددهایی جالب‌اند.

حتماً تا کنون متوجه این حقیقت شده‌اید که نوشتن $\frac{۱}{k}$ به‌شکل $\frac{۱}{y}+\frac{۱}{x}$ که در آن x و y اعدادی طبیعی‌اند، به‌ویژه در حالتی که عدد k کوچک باشد، بسیار مفید است.

تمرین ۹. در حالتی که $k=۲,۳,۴$ همهٔ راههای ممکن نوشتن $\frac{۱}{k}$ به‌صورت مجموعی از دو کسر مصری، یعنی به‌شکل

$$\frac{۱}{k}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$$

را پیدا کنید که در آن $x\leq y$.

راهنمایی. از تساوی بالا به‌دست می‌آید $xy = k(x+y)$، و این تساوی هم معادل

$$(x-k)(y-k) = k^{۲}$$

است. آخر سر باید نمایشهای زیر را به‌دست آورید

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}$$
$$\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲}$$
$$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۲۰}$$

تمرین ۱۰. ثابت کنید همهٔ نمایشهای ممکن $\frac{۱}{۶}$ به‌صورت مجموعی از دو کسر مصری عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۸} = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲۴} = \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۴۲}$$

تمرین ۱۱. با استفاده از نمایشهای تمرین ۱۰ و نمایشهایی که پیش از این به‌دست آمد، ثابت کنید که ۳۲، ۳۷، ۴۷، ۵۱ و ۵۵ عددهایی جالب‌اند.

تمرین ۱۲. ثابت کنید که همهٔ اعداد ۲۴، ۲۵، ... و ۵۵ جالب‌اند (برای اثبات جالب بودن اعدادی که پیش از این در تمرینهای قبلی نیامده‌اند از تمرینهای ۲ و ۵ استفاده کنید).

اکنون حکم زیر را در نظر بگیرید:

$S(n)$: همهٔ اعداد طبیعی n، $n+۱$، $n+۲$، ... و $۲n+۷$ جالب‌اند.

در تمرین ۱۲ ثابت شد که حکم $S(۲۴)$ درست است.

تمرین ۱۳. با استفاده از درستی $S(۲۴)$ و تمرین ۵ به استقرا ثابت کنید که همهٔ اعداد طبیعی مانند n که $n \geq ۲۴$ جالب‌اند.

اکنون فقط مانده است که معلوم کنید کدام اعداد طبیعی مانند n، که $n \leq ۲۳$، را می‌توان به‌شکل $n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$ نوشت که در اینجا $۱ = \frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_k}$. اگر یادتان باشد، بنابر نابرابری میان میانگین حسابی و میانگین همساز k عدد حقیقی مثبت،

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k}{k} \geq \frac{k}{\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_k}} \qquad (۱)$$

اما چون در اینجا $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k \leq ۲۳$ و $\frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \cdots + \frac{۱}{a_k} = ۱$ پس $k^{۲} \leq ۲۳$ و یا $k \leq ۴$.

حالتی که $k = ۱$ بدیهی است. اگر $k = ۲$، از $۱ = \frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۱}$ به‌دست می‌آید که $a_۱ = a_۲ = ۲$. تا اینجا فقط عددهای جالب ۱ و ۴ را به‌دست آورده‌اید.

اگر $k = ۳$، از معادلهٔ $۱ = \frac{۱}{a_۳} + \frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۱}$ که در آن $a_۱ \leq a_۲ \leq a_۳$، نتیجه می‌شود که یا $a_۱ = a_۲ = a_۳ = ۳$ یا $a_۱ = ۲$. در حالت دوم مسأله‌مان به حل معادلهٔ $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{a_۳} + \frac{۱}{a_۲}$ منجر می‌شود که جوابهای این معادله هم در تمرین ۹ به‌دست آمدند. بنابراین $a_۱ = a_۲ = a_۳ = ۳$ یا $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۴$، $a_۳ = ۴$ و یا $a_۱ = ۲$، $a_۲ = ۳$، $a_۳ = ۶$ و درنتیجه، در حالتی که $k = ۳$ تنها عددهای جالب ۹، ۱۰ و ۱۱ اند.

تمرین ۱۴. ثابت کنید در حالتی که $k = ۴$ تنها عددهای جالب مانند n، که $n \leq ۲۳$، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰ و ۲۲ هستند.

بالاخره ثابت کردید که عددهای جالب ۱، ۴، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۲ و همهٔ عددهای طبیعی بزرگتر از ۲۴ یا برابر با آن هستند.

می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر عدد ثابت مانند k فقط تعدادی متناهی عدد جالب مانند n وجود دارند که می‌توان آنها را به‌شکل $n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$ نوشت که در اینجا $۱ = \frac{۱}{a_k} + \cdots + \frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۱}$. بنابر نابرابری (۱)، کوچکترین مقدار n از این دست $k^۲$ است. یافتن بزرگترین عدد طبیعی n با این ویژگی به‌مراتب دشوارتر است.

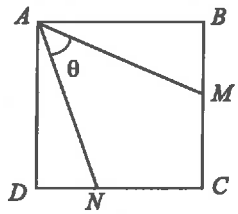
• ترجمهٔ مهرداد مسافر

Titu Andreescu and Zoran Šunić, Nice numbers, *Mathematical Reflections*, 2, 2006.

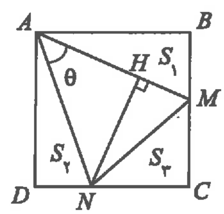
در کلاس درس هندسه

جعفر نیوشا

مسأله. در شکل زیر $ABCD$ مربعی به طول ضلع a و M وسط ضلع BC است و $CN = ۲DN$. فرض کنید $\theta = \angle MAN$. θ را بیابید.



راه‌حل اول. مطابق شکل زیر مساحت مثلثهای AMN، ABM، ADN و CMN را به‌ترتیب با S، $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ نشان می‌دهیم.



در این صورت

$$S = a^۲ - (S_۱ + S_۲ + S_۳) = a^۲ - \left(\frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۶} + \frac{a^۲}{۶}\right) = \frac{۵a^۲}{۱۲} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، اگر NH ارتفاع وارد بر AM در مثلث AMN باشد،

$$S = \frac{۱}{۲}AM \times NH = \frac{\sqrt{۵}a}{۴} \times NH \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $NH = \frac{\sqrt{۵}}{۳}a$. درنتیجه

$$\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}a}{\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس $\theta = ۴۵^\circ$.

راه‌حل دوم. مساحت مثلث AMN را با S نشان می‌دهیم. در راه‌حل اول نتیجه گرفتیم $S = \frac{۵a^۲}{۱۲}$. می‌دانیم که

$$S = \frac{۱}{۲}AM \times AN \times \sin\theta$$

درنتیجه

$$\frac{۵a^۲}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۵}a}{۲} \times \frac{\sqrt{۱۰}a}{۳} \times \sin\theta$$

بنابراین $\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و درنتیجه $\theta = ۴۵^\circ$.

راه‌حل سوم. می‌دانیم که

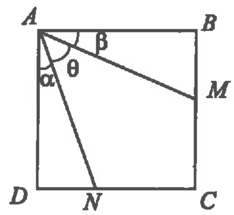
$$MN^۲ = AM^۲ + AN^۲ - ۲AM \times AN \times \cos\theta$$

درنتیجه

$$\frac{۲۵a^۲}{۳۶} = \frac{۵a^۲}{۴} + \frac{۱۰a^۲}{۹} - ۲ \times \frac{\sqrt{۵}}{۲}a \times \frac{\sqrt{۱۰}}{۳}a \times \cos\theta$$

بنابراین $\cos\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و درنتیجه $\theta = ۴۵^\circ$.

راه‌حل چهارم. فرض کنید $\alpha = \angle DAN$ و $\beta = \angle BAM$. می‌دانیم که $\alpha + \theta + \beta = ۹۰^\circ$، پس $\alpha + \beta = ۹۰^\circ - \theta$.



درنتیجه

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(۹۰ - \theta) = \cot\theta$$
$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = \cot\theta$$
$$\frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۶}} = \cot\theta$$

بنابراین $\cot\theta = ۱$ و درنتیجه $\theta = ۴۵^\circ$.

راه‌حل پنجم. (راه‌حل برداری) توجه کنید که

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \qquad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DN} \\ &= ۰ + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{۳} + \frac{\overrightarrow{AD}}{۳} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AD}}{۲} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{۳} \\ &= \frac{AB^۲}{۳} + \frac{AD^۲}{۲} + ۰ = \frac{a^۲}{۳} + \frac{a^۲}{۲} = \frac{۵a^۲}{۶}\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = |\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AN}| \sin\theta$$

پس

$$\frac{۵a^۲}{۶} = \frac{\sqrt{۵}a}{۲} \times \frac{\sqrt{۱۰}a}{۳} \times \sin\theta$$

بنابراین $\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و درنتیجه $\theta = ۴۵^\circ$.

راه‌حل ششم. (راه‌حل مختصاتی) مختصات نقاط A، B، D، M و N به این صورت است: $A(۰,۰)$، $B(a,۰)$، $D(۰,-a)$، $M(a,-\frac{a}{۲})$ و $N(\frac{a}{۳},-a)$. شیب خط AM را $m_۱$ و شیب خط AN را $m_۲$ بنامید. به این ترتیب،

$$m_۱ = \frac{-\frac{a}{۲} - ۰}{a - ۰} = -\frac{۱}{۲}, \qquad m_۲ = \frac{-a - ۰}{\frac{a}{۳} - ۰} = -۳$$

اما $\tan\theta = \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲}$، پس

$$\tan\theta = \frac{-\frac{۱}{۲} + ۳}{۱ + \frac{۳}{۲}} = ۱$$

درنتیجه $\theta = ۴۵^\circ$.

از باب تفریح

۱. ۲۵ نفر در خانه‌های جدولی ۵ × ۵ ایستاده‌اند. این افراد خیلی حسودند و هر یک از آنها فکر می‌کند خانه‌های همسایه‌اش از خانه‌ای که در آن ایستاده است وضع بهتری دارند (دو خانه وقتی همسایه‌اند که ضلعی مشترک داشته باشند). آیا این افراد می‌توانند همزمان جاهایشان را طوری عوض کنند که در آخر کار هرکس راضی باشد (هرکس باید جایش را دقیقاً یک بار عوض کند)؟

۲. پنج عدد را دوبه‌دو با هم جمع کرده‌ایم و عددهای

۱۲, ۳۰, ۴۴, ۴۷, ۶۱, ۷۹, ۸۳, ۹۷, ۱۱۵, ۱۳۲

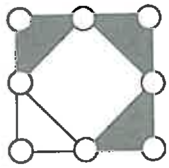
را به‌دست آورده‌ایم. می‌توانید این عددها را پیدا کنید؟

۳. در جمع زیر هر حرف یک رقم است، حروف یکسان نظیر رقمهای برابرند و حروف متمایز نظیر رقمهای مختلف. این رقمها را پیدا کنید.

$$\begin{array}{r} BIR \\ BIR \\ BIR \\ +\,BIR \\ \hline DORD \end{array}$$

۴. در چهار نقطه از صفحه نورافکنهایی قرار داده‌ایم که هر یک از آنها می‌تواند ناحیهٔ درون زاویه‌ای قائمه را روشن کند. ضلعهای این زاویه‌ها باید در امتداد شمال، جنوب، شرق و غرب باشند. ثابت کنید می‌توان نورافکنها را طوری کارگذاشت که تمام صفحه را روشن کند.

۵. عددهای ۱ تا ۸ را در دایره‌های شکل زیر طوری بنویسید که مجموع عددهای نوشته‌شده در رأسهای هریک از مثلثهای سایه‌دار ۱۲ باشد و مجموع عددهای نوشته‌شده در رأسهای مثلث سفید و نیز مربع سفید ۱۱.



(راه‌حل در صفحهٔ ۶۳)

چند مسأله از نظریهٔ اعداد دربارهٔ $a^n \pm b^n$

میهای مانهآ

مسألههایی دربارهٔ عددهای بهشکل $a^n \pm b^n$ بهکرات در مسابقههای ریاضی میآیند. در این مقاله روشی برای حل کردن مسألههایی از این دست معرفی میکنیم که در عمل بسیار مؤثر و مفید است. روشمان مبتنی بر دو حکم مربوط به هم است که معمولاً بیآنکه بهوضوح گفته شوند در راهحل مستترند. پوشیده ماندن حکمهای کلی در کاربردهای خاص منجر به راهحلهایی میشود که در نگاه کسی که از پس ماجرا خبر ندارد بسیار تصنعی بهنظر میرسد.

روش. ابتدا چند نمادگذاری را معرفی میکنیم: اگر p عددی اول و x عددی صحیح و غیرصفر باشد، نمای p در x، یعنی بزرگترین عدد صحیح مانند k را که $p^k \mid x$، با $e_p(x)$ نشان میدهیم. اگر a و b دو عدد صحیح و هر دو غیرصفر باشند، بزرگترین مقسومعلیه مشترک آنها را با (a,b) نشان میدهیم.

حکم اول دستوری زیبا برای نمای عددهای اولی که $a \pm b$ را در عددهایی بهشکل $a^n \pm b^n$ میشمارند دربر دارد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید a و b دو عدد صحیح متمایز باشند و p عددی اول باشد که ab را نمیشمارد و n عددی طبیعی باشد. در این صورت

الف) اگر $p \neq ۲$ و $p \mid a-b$، آنوقت

$$e_p(a^n - b^n) = e_p(n) + e_p(a-b)$$

ب) اگر n فرد باشد، $a+b \neq ۰$ و $p \mid a+b$، آنوقت

$$e_p(a^n + b^n) = e_p(n) + e_p(a+b)$$

اثبات. حکم (الف) را به استقرا روی n ثابت میکنیم. درستی پایه، وقتی که $n = ۱$، بهروشنی معلوم است. فرض کنید که حکم را بهازای همهٔ عددهای طبیعی مانند k که $k < n$ ثابت کردهایم. ثابت میکنیم که حکم در مورد n هم درست است.

دو حالت وجود دارد:

حالت ۱. $p \nmid n$.

فرض کنید $d = a - b$. میتوان نوشت

$$a^n - b^n = (b+d)^n - b^n = d\left(nb^{n-۱} + d\sum_{i=۲}^{n}\binom{n}{i}d^{i-۲}b^{n-i}\right)$$

چون p، d را می‌شمارد، اما n یا b را نمی‌شمارد، پس

$$p \nmid nb^{n-1} + d\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}d^{i-2}b^{n-i}$$

بنابراین نمای p در $a^n - b^n$ همان نمای p در d است. چون $e_p(n) = 0$، پس

$$e_p(a^n - b^n) = e_p(a-b) + e_p(n)$$

و در این حالت کار تمام است.

حالت ۲. $p \mid n$.

فرض کنید $m = \frac{n}{p}$، $d = a^m - b^m$ و $c = b^m$. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a^m)^p - (b^m)^p = (d+c)^p - c^p \\ &= pdc^{p-1} + d^p + \sum_{i=2}^{p-1}\binom{p}{i}d^i c^{p-1} \end{aligned}$$

اما

$$pd^2 \mid \sum_{i=2}^{p-1}\binom{p}{i}d^i c^{p-i}$$

زیرا به‌ازای هر i، $2 \le i \le p-1$، $p \mid \binom{p}{i}$ و $d^2 \mid d^i$.

چون $p \mid a-b$ و $a-b \mid a^m - b^m$، پس $p \mid d$. چون $p \ge 3$، پس $pd^2 \mid d^p$. بنابراین عددی صحیح مانند k وجود دارد که

$$d^p + \sum_{i=2}^{p-1}\binom{p}{i}d^i c^{p-1} = kpd^2$$

به این ترتیب، $a^n - b^n = pd(c^{p-1} + kd)$. چون p، c را نمی‌شمارد و p، d را می‌شمارد، پس p، $c^{p-1} + kd$ را نمی‌شمارد، و درنتیجه

$$e_p(a^n - b^n) = e_p(pd)$$

به‌یاد آورید که $m = \frac{n}{p} < n$ و $d = a^m - b^m$. بنابر فرض استقرا،

$$e_p(a^m - b^m) = e_p(a-b) + e_p(m)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} e_p(a^n - b^n) &= e_p(pd) = 1 + e_p(a^m - b^m) \\ &= 1 + e_p(m) + e_p(a-b) = e_p(n) + e_p(a-b) \end{aligned}$$

و استقرا کامل شده است.

در مورد حکم (ب)، توجه کنید که اگر $p \neq ۲$، حکم از قسمت (الف) در مورد عددهای a و $-b$ به‌دست می‌آید.

اگر $p = ۲$، باید ثابت کنید

$$e_۲(a^n + b^n) = e_۲(n) + e_۲(a + b)$$

که در آن a، b و n فردند. این تساوی هم درست است. توجه کنید که

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + \cdots - ab^{n-۲} + b^{n-۱})$$

عامل دوم در سمت راست تساوی بالا مجموع n عدد فرد است؛ بنابراین، چون n فرد است،

$$e_۲(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + \cdots - ab^{n-۲} + b^{n-۱}) = ۰$$

بنابراین

$$\begin{aligned} e_۲(a^n + b^n) &= e_۲(a + b) + e_۲(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + \cdots - ab^{n-۲} + b^{n-۱}) \\ &= e_۲(a + b) = e_۲(a + b) + e_۲(n) \end{aligned}$$

همان چیزی که می‌خواستیم. ■

حکم دوم در مورد ویژگیهای بخش‌پذیری دنباله‌هایی از نوع $\{x_n = a^n - b^n\}_{n\geq ۱}$ است.

قضیهٔ ۲. اگر a و b دو عدد طبیعی متمایز و نسبت به هم اول باشند، دنبالهٔ

$$\{x_n = a^n - b^n\}_{n\geq ۱}$$

دنباله‌ای مرسنی است، یعنی به‌ازای هر m و n،

$$(x_n, x_m) = x_{(n,m)}$$

اثبات. حکم را به استقرا روی $n + m$ ثابت می‌کنیم. درستی حکم در حالت پایه، وقتی که $m + n = ۲$ یا $m = n = ۱$، معلوم است.

فرض کنید که حکم را به‌ازای همهٔ زوجها از عددهای طبیعی مانند (n, m) که $m + n < k$ ثابت کرده‌ایم. حکم را در مورد زوجی مانند (n, m) که $n + m = k$ ثابت می‌کنیم. اگر $n = m$، درستی حکم معلوم است. بدون اینکه از کلی بودن اثبات چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $m < n$.

چون

$$a^n - b^n - a^{n-m}(a^m - b^m) = b^m(a^{n-m} - b^{n-m})$$

و b^m نسبت به $a^m - b^m$ اول است، پس

$$(a^n - b^n, a^m - b^m) = (a^{n-m} - b^{n-m}, a^m - b^m)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(x_n, x_m) &= (a^n - b^n, a^m - b^m) = (a^{n-m} - b^{n-m}, a^m - b^m)\\ &= (x_{n-m}, x_m) = x_{(n-m,m)} = x_{(n,m)}\end{aligned}$$

که در اینجا تساوی یکی مانده به آخر از فرض استقرا به‌دست آمده است (زیرا $(n-m)+m < n+m$) و تساوی آخر از تساوی $(n-m,m) = (n,m)$. ∎

کاربردها. در این قسمت کارایی روشمان را با حل کردن چند مسألهٔ نسبتاً دشوار نشان می‌دهیم.

مسألهٔ ۱ . k عددی طبیعی است. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $۳^k \mid ۲^n - ۱$.

راه‌حل. فرض کنید عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد. چون $k \geq ۱$، پس n عددی زوج است. فرض کنید $n = ۲m$. چون ۳، ۱ و ۴ را نمی‌شمارد، اما $۳ \mid ۴ - ۱$، می‌توانیم از قسمت (الف) قضیهٔ ۱ استفاده کنیم و نتیجه بگیریم

$$\begin{aligned}e_۳(۲^n - ۱) &= e_۳(۴^m - ۱)\\ &= e_۳(۴ - ۱) + e_۳(m)\\ &= ۱ + e_۳(m)\end{aligned}$$

بنابراین وقتی و فقط وقتی $۳^k \mid ۲^n - ۱$ که عددی صحیح مانند m وجود داشته باشد که $n = ۲m$ و $۱ + e_۳(m) \geq k$، یا وقتی و فقط وقتی $۳^k \mid ۲^n - ۱$ که $۲ \times ۳^{k-۱} \mid n$.

مسألهٔ ۲ . فرض کنید n و a عددهایی طبیعی باشند، $n \geq ۱$، و p عددی اول و فرد باشد که

$$a^p \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p^n)$$

ثابت کنید $a \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } a^{p-۱})$. (مسابقهٔ یونسکو، ۱۹۹۵)

راه‌حل. بنابر فرض، $a^p \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p^n)$ و بنابر قضیهٔ کوچک فرما $a^p \equiv a \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$. بنابراین

$$a^p \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

اکنون از قسمت (الف) قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}e_p(a^p - ۱) &= e_p(a - ۱) + e_p(p)\\ &= e_p(a - ۱) + ۱\end{aligned}$$

چون $a^p \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p^n)$، پس $e_p(a^p - ۱) \geq n$ یا $e_p(a - ۱) + ۱ \geq n$، یعنی $p^{n-۱} \mid a - ۱$ و کار تمام است.

مسألهٔ ۳ . ثابت کنید اگر به‌ازای عددی طبیعی مانند n، $3^n - 2^n$ توانی از عددی اول باشد، آن‌وقت خود n هم عددی اول است. (المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵)

راه‌حل. فرض کنید $3^n - 2^n = p^e$، که در آن p عددی اول (و فرد) است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که ممکن نیست n دو مقسوم‌علیه اول متمایز داشته باشد. فرض کنید چنین نباشد و q_1 و q_2 دو عدد اول متمایز باشند که n را می‌شمارند. چون دنبالهٔ $\{3^n - 2^n\}$ مرسنی است و $(q_1, q_2) = 1$، از قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود

$$(3^{q_1} - 2^{q_1}, 3^{q_2} - 2^{q_2}) = 3^{(q_1,q_2)} - 2^{(q_1,q_2)} = 3 - 2 = 1$$

اما $q_1 \mid n$ و $q_2 \mid n$، و درنتیجه $3^{q_i} - 2^{q_i} \mid 3^n - 2^n = p^e$، $i = 1, 2$؛ یعنی، $3^{q_i} - 2^{q_i}$ $(i = 1, 2)$ توانی از عددی اول است. چون این دو عدد باید نسبت به هم اول باشند، دست‌کم یکی از آنها برابر با ۱ است. یعنی یکی از عددهای q_1 یا q_2 برابر با ۱ است، که تناقض است. بنابراین n حداکثر یک مقسوم‌علیه اول دارد، و چون $n \neq 1$، پس عددی اول مانند q و عددی طبیعی مانند l وجود دارد که $n = q^l$.

اکنون فرض کنید $l \geq 2$. در این صورت

$$3^q - 2^q \mid 3^{q^2} - 2^{q^2} \mid 3^n - 2^n = p^e$$

و درنتیجه $3^q - 2^q$ و $3^{q^2} - 2^{q^2}$ توانهایی از pاند. چون $q > 1$، پس $p \mid 3^q - 2^q$.

همچنین، $p \neq 2, 3$ و درنتیجه بنابر قسمت (الف) قضیهٔ ۱،

$$e_p(3^{q^2} - 2^{q^2}) = e_p(3^q - 2^q) + e_p(q)$$

اما $3^q - 2^q$ و $3^{q^2} - 2^{q^2}$ توانهایی متمایز از pاند و درنتیجه $e_p(3^{q^2} - 2^{q^2}) \neq e_p(3^q - 2^q)$. چون $e_p(q) \in \{0, 1\}$، از این نابرابری نتیجه می‌شود $e_p(q) = 1$، یعنی $p = q$. به این ترتیب

$$3^{q^2} - 2^{q^2} = q(3^q - 2^q)$$

اگر فرض کنیم $s = 3^q$ و $t = 2^q$، نتیجه می‌شود

$$s^q - t^q = q(s - t)$$

یا معادل آن

$$\sum_{i=0}^{q-1} s^i t^{q-1-i} = q$$

اما همهٔ جمله‌های مجموع بالا از ۱ بزرگ‌ترند، که منجر به تناقض می‌شود. بنابراین، فرضمان، یعنی $l \geq 2$، غلط است. به این ترتیب $l = 1$، و درنتیجه n عددی اول است.

مسألهٔ ۴ . فرض کنید x، y، p، n و k عددهایی طبیعی باشند و $x^n + y^n = p^k$. ثابت کنید که اگر n فرد و p عددی اول و فرد باشد، آن‌وقت n توانی از p است. (المپیاد ریاضی روسیه، ۱۹۹۶)

راه‌حل. ابتدا به‌سادگی معلوم می‌شود که بنابر فرض $e_p(x) = e_p(y)$. این دو مقدار برابر را e بنامید. فرض کنید $a = \frac{x}{p^e}$ و $b = \frac{y}{p^e}$. دراین صورت $e_p(a) = e_p(b) = ۰$. می‌توان نوشت $a^n + b^n = e^{k-en}$ (البته، $k > en$).

فرض کنید n توانی از عددی اول نباشد. فرض کنید q عددی اول و متمایز از p باشد که n را می‌شمارد. چون n فرد است،

$$a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}} \mid a^n + b^n = p^{k-en}$$

درنتیجه $a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}}$ توانی از p است. چون $۱ < a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}}$، از قسمت (ب) قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود

$$e_p(a^n + b^n) = e_p(a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}}) + e_p(q) = e_p(a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}})$$

توجه کنید که $e_p(q) = ۰$، زیرا $p \neq q$.

چون $a^n + b^n$ و $a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}}$ توانهایی از pاند، پس $a^n + b^n = a^{\frac{n}{q}} + b^{\frac{n}{q}}$. چون $a^n \geq a^{\frac{n}{q}}$ و $b^n \geq b^{\frac{n}{q}}$، این وضعیت فقط وقتی پیش می‌آید که $a^n = a^{\frac{n}{q}}$ و $b^n = b^{\frac{n}{q}}$. چون $q > ۱$، پس باید $a = b = ۱$، اما در این وضعیت، $p = ۲$، که با فرض مسأله تناقض دارد؛ پس فرض اینکه n مقسوم‌علیه اولی بجز p دارد غلط است. بنابراین n توانی از p است.

چند مسألهٔ دیگر. از خواننده می‌خواهیم کارایی روش گفته‌شده برای مسأله حل کردن را با آزمودن آن برای حل کردن مسأله‌های المپیادی دشوارتر زیر بیازماید.

مسألهٔ ۵ . فرض کنید p عددی اول و m عددی طبیعی باشد و $m \geq ۲$. ثابت کنید اگر x و y عددهایی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشند و

$$\frac{x^p + y^p}{۲} = \left(\frac{x+y}{۲}\right)^m$$

آن‌وقت $m = p$. (المپیاد ریاضی بالکان، ۱۹۹۳)

مسألهٔ ۶ . فرض کنید p عددی اول باشد و a و n عددهایی طبیعی باشند. ثابت کنید اگر $۲^p + ۳^p = a^n$، آن‌وقت $n = ۱$. (المپیاد ایرلند، ۱۹۹۶)

مسألهٔ ۷ . بزرگترین kای را پیدا کنید که

$$۱۹۹۱^k \mid ۱۹۹۰^{۱۹۹۱^{۱۹۹۲}} + ۱۹۹۲^{۱۹۹۱^{۱۹۹۰}}$$

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۱)

مسألهٔ ۸ . همهٔ عددهای طبیعی مانند x و y را پیدا کنید که $p^x - y^p = 1$، که در آن p عددی اول و فرد است. (مسابقهٔ چک‌ـاسلواک، ۱۹۹۶)

مسألهٔ ۹ . ثابت کنید اگر n عددی طبیعی و خالی از مربع باشد، عددهایی طبیعی و نسبت به هم اول مانند x و y وجود ندارند که $(x+y)^3$، $x^n + y^n$ را بشمارد. (انتخاب تیم رومانی برای المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۴)

مسألهٔ ۱۰ . ثابت کنید معادلهٔ $x^n + y^n = (x+y)^m$ در مجموعهٔ عددهای صحیحی که $x > y$، $1 < x$ و $m > 1$ و $n > 1$ جواب یکتا دارد (انتخاب تیم رومانی برای المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۳)

مسألهٔ ۱۱ . فرض کنید b، m و n عددهایی طبیعی باشند که $b > 1$ و $m \neq n$. ثابت کنید که اگر مقسوم‌علیه‌های اول عددهای $b^m - 1$ و $b^n - 1$ یکسان باشند، $b + 1$ توانی از ۲ است. (مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۷)

مسألهٔ ۱۲ . ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد و $n \mid 2^n + 1$، آن‌وقت یا $n = 3$ یا $9 \mid n$.

مسألهٔ ۱۳ . ثابت کنید عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $n = p_1^2 p_2 p_3 \cdots p_{2000}$، که در آن p_1، p_2، p_3، … و p_{2000} عددهایی اول و متمایزند و $n \mid 2^n + 1$. (حالتی کلیتر از مسألهٔ ۵ المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۰)

مسألهٔ ۱۴ . فرض کنید n عددی طبیعی و زوج باشد. فرض کنید S مجموعهٔ عددهای صحیح مانند a باشد که $1 < a < n$ و $n \mid a^{a-1} - 1$. ثابت کنید اگر $S = \{n-1\}$، آن‌وقت $n = 2p$، که در آن p عددی اول است. (انتخاب تیم رومانی برای المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۲)

• ترجمهٔ ارشک حمیدی

Mihai Manea, Some $a^n \pm b^n$ Problems in Number Theory, *Mathematics Magazine*, Vol. 79, No. 2, April 2006, pp. 140-145.

مرحلهٔ دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

۳۰ و ۳۱ فروردین، ۱۳۸۵

۱. فرض کنید دایرهٔ C_2 از مرکز دایرهٔ C_1 گذشته و آن را در نقاط M و N قطع کرده است. نشان دهید اگر نقاط A و B دو سر قطر دلخواهی از C_1 و A' و B' محل تقاطع خطهای AM و BN با دایرهٔ C_2 باشند، $A'B'$ برابر شعاع دایرهٔ C_1 است.

۲. همهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی $P(x,y)$ را بیابید که برای هر x و y داشته باشیم

$$P(x+y, x-y) = 2P(x,y)$$

۳. در طول شب، ستاره‌های آسمان، در بازه‌های زمانی مختلف، قابل رؤیت هستند. فرض کنید از بین هر k ستاره ($k > 1$)، دست‌کم دوتایشان را می‌توان در یک لحظه در آسمان دید. نشان دهید می‌توانیم $k-1$ عکس در لحظات مختلف از سرتاسر آسمان بگیریم که هرکدام از آن ستاره‌ها، دست‌کم در یکی از عکسها دیده شود. (تعداد ستاره‌ها متناهی است. لحظاتی را که ستارهٔ iام در آسمان دیده می‌شود بازهٔ بستهٔ $[a_i, b_i]$ بنامید که در آن $a_i < b_i$).

۴. الف) عدد طبیعی m بزرگتر از یک است. ثابت کنید تنها متناهی عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $mn+1$ بر $m+n$ بخش‌پذیر است.

ب) برای اعداد طبیعی متمایز $m, n > 2$ ثابت کنید دنبالهٔ $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ از اعداد طبیعی بزرگتر از ۲ موجود است که $a_0 = m$ و $a_k = n$ و برای هر $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ داریم $a_i + a_{i+1} \mid a_i a_{i+1} + 1$.

۵. نقاط A، B، C و D، با همین ترتیب، روی دایره‌ای قرار دارند. نشان دهید تعداد نقطه‌های روی دایره، مانند M، که $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$ چهارتاست و به‌علاوه قطرهای چهارضلعی حاصل از آن نقطه‌ها بر هم عمودند.

۶. تعدادی کتاب روی هم قرار گرفته‌اند. فردی ابتدا کتاب بالایی را پشت‌ورو می‌کند، سپس دو کتاب بالایی را هم‌زمان پشت‌ورو می‌کند، بعد سه کتاب بالایی را هم‌زمان پشت‌ورو می‌کند و الی‌آخر. پس از اینکه به آخرین کتاب رسید همان کار را از ابتدا شروع می‌کند. ثابت کنید پس از تعدادی جابه‌جایی، کتابها دقیقاً به همان وضع اول برمی‌گردند.

(راه‌حل در صفحهٔ ۵۰)

پاسخ سؤالهای مرحلهٔ دوم بیست و چهارمین المپیاد ریاضی کشور

نصیر کریمی

۱. راه‌حل اول. B' را به M و $O_۱$ وصل کنید. چون

$$\angle MB'B = \angle MB'N = \frac{\widehat{MO_۱M}}{۲}$$
$$\angle MO_۲O_۱ = \widehat{MO_۱} = \frac{\widehat{MO_۱M}}{۲}$$

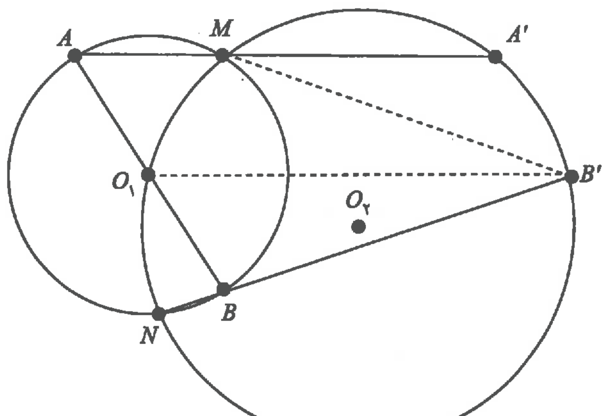
پس $\angle MO_۲O_۱ = \angle MB'B$. به همین ترتیب،

$$\angle MBB' = \frac{\widehat{MBN}}{۲}, \qquad \angle MO_۱O_۲ = \frac{\widehat{MBN}}{۲}$$

و درنتیجه $\angle MBB' = \angle MO_۱O_۲$. بنابراین دو مثلث MBB' و $MO_۱O_۲$ متشابه‌اند و چون $MO_۲ = O_۲O_۱$، پس $B'M = B'B$؛ بنابراین، B' روی عمودمنصف BM قرار دارد.

از طرف دیگر، $O_۱M = O_۱B$، درنتیجه، $O_۱$ روی عمودمنصف BM قرار دارد. بنابراین $O_۱B'$ بر BM عمود است.

اکنون توجه کنید که چون AB قطری از دایرهٔ $C_۱$ است، پس $\angle AMB = ۹۰^\circ$ و درنتیجه AM بر BM عمود است. بنابراین $O_۱B'$ با AM موازی است؛ یعنی، $O_۱B'$ با MA' موازی است. به این ترتیب، $\widehat{O_۱M} = \widehat{A'B'}$ و درنتیجه $A'B' = O_۱M$؛ یعنی، $A'B'$ برابر با شعاع دایرهٔ $C_۱$ است.



راه‌حل دوم. چون

$$\angle AMN = \frac{\widehat{AN}}{۲} = \angle ABN, \qquad \angle AMN = \angle A'B'N$$

پس $\angle ABN = \angle A'B'N$. درنتیجه، AB با $A'B'$ موازی است. بنابراین $\angle B'O_۱B = \angle A'AO_۱$. اما

$$\angle A'AO_۱ = \angle MAB = \frac{\widehat{MB}}{۲} = \frac{۱}{۲}\angle MO_۱B$$

و

$$\angle MO_۱B = \angle B_۱O_۱B + \angle B'O_۱M$$

بنابراین $\angle MO_۱B' = \angle MAO_۱$. از طرف دیگر، چون $O_۱A = O_۱M$، پس $\angle MAO_۱ = \angle AMO_۱$ و درنتیجه $\angle AMO_۱ = \angle MO_۱B'$. بنابراین $O_۱B'$ با AA' موازی است؛ یعنی، $O_۱B'$ با MA' موازی است. درنتیجه $A'B' = O_۱M$؛ یعنی، $A'B'$ برابر با شعاع دایرهٔ $C_۱$ است.

۲. فرض کنید چندجمله‌ای $P(x,y)$ ویژگی موردنظر را داشته باشد و مثلاً

$$P(x,y) = \sum_{۰\leq i+j\leq d} c_{ij}x^iy^j$$

چون به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x و y،

$$\begin{aligned} P(۲x,۲y) &= P((x+y)+(x-y),(x+y)-(x-y)) \\ &= ۲P(x+y,x-y) = ۴P(x,y) \end{aligned}$$

پس $P(۲x,۲y) - ۴P(x,y) \equiv ۰$. اما

$$\begin{aligned} P(۲x,۲y) &= \sum_{۰\leq i+j\leq d} ۲^{i+j}c_{ij}x^iy^j \\ ۴P(x,y) &= \sum_{۰\leq i+j\leq d} ۴c_{ij}x^iy^j \end{aligned}$$

و درنتیجه

$$۰ \equiv P(۲x,۲y) - ۴P(x,y) = \sum_{۰\leq i+j\leq d} (۲^{i+j}-۴)c_{ij}x^iy^j$$

اکنون توجه کنید که اگر چندجمله‌ایی چندمتغیره متحد با صفر باشد، همهٔ ضریبهای آن صفرند. بنابراین به‌ازای هر i و j که $۰ \leq i+j \leq d$،

$$(۲^{i+j}-۴)c_{ij} = ۰$$

اما اگر $i+j \neq ۲$، آن‌وقت $۲^{i+j} - ۴ \neq ۰$، درنتیجه $c_{ij} = ۰$. بنابراین عددهایی حقیقی مانند a، b و c

وجود دارند که

$$P(x,y) = ax^۲ + bxy + cy^۲$$

درنتیجه

$$P(x+y, x-y) = a(x+y)^۲ + b(x+y)(x-y) + c(x-y)^۲$$
$$= (a+b+c)x^۲ + (۲a - ۲c)xy + (a-b+c)y^۲$$

و

$$۲P(x,y) = ۲ax^۲ + ۲bxy + ۲cy^۲$$

به این ترتیب،

$$\begin{cases} a+b+c = ۲a \\ ۲a - ۲c = ۲b \\ a-b+c = ۲c \end{cases}$$

درنتیجه $a = b + c$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که همهٔ چندجمله‌ایهای به‌شکل

$$(b+c)x^۲ + bxy + cy^۲$$

ویژگی موردنظر را دارند.

۳. فرض کنید تعداد ستاره‌ها n باشد. اگر $k > n$، درستی حکم معلوم است. فرض کنید $k \geq n$. حکم را به استقرا روی $n + k$ ثابت می‌کنیم.

اگر $n + k = ۴$، آن‌وقت $n = k = ۲$؛ یعنی، دو بازه داریم که اشتراک دارند. در این صورت، اگر عکسی از اشتراک آنها بگیریم، خواستهٔ مسأله محقق می‌شود.

فرض کنید حکم را وقتی که $n + k < d$ ثابت کرده‌ایم. ثابت می‌کنیم وقتی که $n + k = d$ باز هم حکم درست است. اگر دو بازه مانند $[a_i, b_i]$ و $[a_j, b_j]$ وجود داشته باشند که $b_j \leq b_i$ و $a_j \geq a_i$، می‌توانیم از بازهٔ $[a_i, b_i]$ صرفنظر کنیم و درنتیجه $n - ۱$ بازه باقی می‌ماند. بنابر فرض، از هر k بازه دست‌کم دو تا اشتراک دارند. درنتیجه، بنابر فرض استقرا، $k - ۱$ نقطه وجود دارند که هر بازه دست‌کم یکی از آنها را دربر دارد. بنابراین بازهٔ $[a_j, b_j]$ دست‌کم یکی از این نقطه‌ها را دربر دارد و چون $[a_j, b_j] \subseteq [a_i, b_i]$، پس بازهٔ $[a_i, b_i]$ نیز همین نقطه را دربر دارد. بنابراین در این حالت حکم درست است.

فرض کنید هیچ بازه‌ای زیرمجموعهٔ بازه‌ای دیگر نباشد. می‌توانیم فرض کنیم $a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots \leq a_n$. بازهٔ $[a_۱, b_۱]$ را در نظر بگیرید و بقیهٔ بازه‌ها را به دو دسته تقسیم کنید: دستهٔ اول آن بازه‌هایی که با $[a_۱, b_۱]$ اشتراک دارند و دستهٔ دوم آن بازه‌هایی که با $[a_۱, b_۱]$ اشتراک ندارند. فرض کنید $[a_i, b_i]$ عضوی از دستهٔ اول باشد. در این صورت $a_۱ \leq a_i \leq b_۱$ و چون $[a_i, b_i]$ زیرمجموعهٔ $[a_۱, b_۱]$ نیست، پس $b_i > b_۱$ و

درنتیجه $b_1 \in [a_i, b_i]$. به این ترتیب، b_1 در همهٔ بازه‌هایی که با $[a_1, b_1]$ اشتراک دارند قرار دارد. در مورد دستهٔ دوم ادعا می‌کنیم که از هر $k-1$ بازه از این دسته دو تا با هم اشتراک دارند. درحقیقت، $k-1$ بازه از این دسته و بازهٔ $[a_1, b_1]$، k بازه‌اند، و درنتیجه، بنابر فرض، حتماً دو تا از آنها اشتراک دارند. اما $[a_1, b_1]$ با هیچ‌یک از این $k-1$ بازه اشتراک ندارد. بنابراین دو تا از این $k-1$ بازه اشتراک دارند. از طرف دیگر،

$$\text{تعداد بازه‌های دستهٔ دوم} + k - 1 < n + k = d$$

درنتیجه، بنابر فرض استقرا، $k-2$ نقطه وجود دارند که هر بازه از دستهٔ دوم دست‌کم یکی از آنها را دربر دارد. بنابراین، اگر در این $k-2$ نقطه و در b_1 عکس بگیریم، همهٔ ستاره‌ها در یکی از عکسها دیده می‌شوند، زیرا هر بازه دست‌کم یکی از این نقطه را دربر دارد.

۴. الف) فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $m + n \mid mn + m^۲$. در این صورت $m + n \mid m^۲ - ۱$. اما $m > ۱$، و درنتیجه $m^۲ - ۱$ عددی طبیعی است، پس تعداد مقسوم‌علیه‌هایش متناهی است. بنابراین تعداد nها نیز متناهی است.

ب) رابطهٔ «$\sim$» را روی مجموعهٔ عددهای طبیعی این‌طور تعریف می‌کنیم: «$r \sim s$ اگر و فقط اگر $s + r \mid sr + ۱$». فرض کنید t عددی فرد باشد. در این صورت، چون $t + ۱ \mid ۲$، پس $۲(t+۱) \mid (t+۱)^۲$ و درنتیجه

$$t + (t+۲) \mid t(t+۲) + ۱$$

یعنی اگر t عددی فرد باشد، $t \sim t + ۲$. به این ترتیب، به‌ازای هر دو عدد فرد مانند m و n که $m > n$،

$$n \sim (n+۲) \sim (n+۴) \sim \cdots \sim m$$

فرض کنید m عددی زوج باشد و مثلاً $m = ۲a$. در این صورت

$$m(۴a^۲ - ۲a - ۱) + ۱ = ۸a^۳ - ۴a^۲ - ۲a + ۱ = (۴a^۲ - ۱)(۲a - ۱)$$
$$= (m + ۴a^۲ - ۲a - ۱)(۲a - ۱)$$

بنابراین $m + ۴a^۲ - ۲a - ۱ \mid m(۴a^۲ - ۲a - ۱) + ۱$ و درنتیجه $m \sim (۴a^۲ - ۲a - ۱)$. به این ترتیب، هر عدد زوج با عددی فرد در رابطهٔ «$\sim$» است. فرض کنید $m = ۲a$ و $n = ۲b + ۱$. در این صورت، چون هر دو عدد فرد از طریق دنباله‌ای با هم رابطه دارند، پس

$$m \sim (۴a^۲ - ۲a - ۱) \sim \cdots \sim (۲b + ۱)$$

همچنین، اگر $m = ۲a$ و $n = ۲b$، چون هر دو عدد فرد از طریق دنباله‌ای با هم رابطه دارند، پس

$$m \sim (۴a^۲ - ۲a - ۱) \sim \cdots \sim (۴b^۲ - ۲b - ۱) \sim n$$

۵. اگر $\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC}$، آن‌وقت $MA \times MC = MB \times MD$ و درنتیجه

$$\frac{MA \times MC \sin \angle AMC}{MB \times MD \sin \angle BMD} = \frac{\sin \angle AMC}{\sin \angle BMD}$$

بنابراین

$$\frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{\sin \angle AMC}{\sin \angle BMD}$$

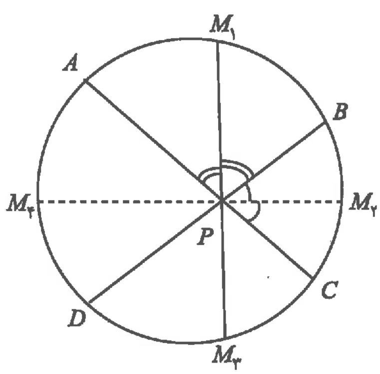
پس

$$\frac{S_{AMC}}{S_{BMD}} = \frac{AC \times (\text{فاصلهٔ } M \text{ از } AC)}{BD \times (\text{فاصلهٔ } M \text{ از } BD)} = \frac{\sin \angle AMC}{\sin \angle BMD} = \frac{\frac{AC}{۲R}}{\frac{BD}{۲R}} = \frac{AC}{BD}$$

(R شعاع دایره است.) و درنتیجه

$$\text{فاصلهٔ } M \text{ از } AC = \text{فاصلهٔ } M \text{ از } BD$$

بنابراین باید نقطه‌هایی از دایره را بیابیم که فاصلهٔ آنها از AC و BD برابر باشد. یعنی، اگر P محل برخورد AC و BD باشد، باید نقطه‌هایی از دایره را بیابیم که روی نیمسازهای داخلی یا خارجی زاویهٔ APB باشند. به این ترتیب، چهار نقطهٔ $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$ و $M_۴$ به‌دست می‌آیند که چون $M_۳M_۱$ و $M_۴M_۲$ (شکل را ببینید) به‌ترتیب نیمساز داخلی و نیمساز خارجی زاویهٔ APBاند، پس بر هم عمودند.



۶. راه‌حل اول. فرض کنید پس از چند بار پشت‌ورو کردن کتابها به جایگشتی از کتابها که هر یک به پشت یا به روست رسیده‌ایم. به این جایگشت $(۲n + ۱)$ تایی مرتبی مانند $(a_۱, b_۱, a_۲, b_۲, \dots, a_n, b_n, k)$ نسبت می‌دهیم، که در آن a_i شمارهٔ کتابی که در جای iام قرار دارد، b_i صفر است، به‌شرطی که کتابی که در جای iام قرار دارد به رو باشد و یک است، به‌شرطی که کتابی که در جای iام قرار دارد به پشت باشد، k نیز تعداد کتابهایی است که در مرحلهٔ بعد می‌خواهیم آنها را پشت‌ورو کنیم. مثلاً، اگر تعداد کتابها n باشد، در

ابتدا $(2n+1)$تایی مرتب ما $(1, 0, 2, 0, \ldots, n, 0, 1)$ است، بعد می‌شود $(2, 0, \ldots, n, 0, 2, 1, 1)$، سپس می‌شود $(3, 0, \ldots, n, 0, 1, 1, 2)$، و همین‌طور تا آخر.

تعداد چنین $(2n+1)$تاییهایی برابر $n \times 2^n \times n!$ است. بنابراین، پس از $1 + n \times 2^n \times n!$ بار پشت‌ورو کردن کتابها دو دنبالهٔ یکسان از $(2n+1)$تاییها تولید می‌شود. بنابراین، مثلاً، دنباله‌ای که پس از i حرکت به‌دست آمده است، همان دنباله‌ای است که پس از j حرکت به‌دست آمده است $(j > i)$. به این ترتیب، k برای آنها یکسان است و درنتیجه، در مرحلهٔ قبل $k - 1$ کتاب جابه‌جا شده بودند. توجه کنید اگر $k = 1$، آنگاه در مرحلهٔ قبل n کتاب جابه‌جا شده‌اند. پس دنباله‌ای که در مرحلهٔ $(i - 1)$ام به‌دست می‌آید دقیقاً همان دنباله‌ای است که در مرحلهٔ $(j - 1)$ام به‌دست می‌آید. اگر همین روند را ادامه دهیم معلوم می‌شود که دنباله‌ای که در مرحلهٔ اول داشته‌ایم همان دنباله‌ای است که در مرحلهٔ $(j - i + 1)$ام به آن رسیده‌ایم.

راه‌حل دوم. فرض کنید تعداد کتابها nتاست. وقتی فرد کتاب بالایی را پشت‌ورو می‌کند، بعد دوکتاب بالایی را همزمان پشت‌ورو می‌کند، ... و در آخر n کتاب را همزمان پشت‌ورو می‌کند می‌گوییم یک حرکت انجام داده است. توجه کنید که هر حرکت برگشت‌پذیر است، زیرا اگر جایگشتی از کتابها که هر یک به پشت یا به رو هستند داشته باشیم، فرد ابتدا n کتاب را همزمان پشت‌ورو می‌کند، بعد $n - 1$ کتاب بالایی را پشت‌ورو می‌کند، ... و در آخر کتاب بالایی را پشت‌ورو می‌کند و به جایگشت اولیه می‌رسد. اما می‌دانیم تعداد حالتهایی که می‌توان کتابها را روی هم گذاشت $2^n \times n!$ است. درنتیجه، پس از $2^n \times n! + 1$ حرکت یک حالت تکراری به‌وجود می‌آید. یعنی i و jای وجود دارند که $j > i$ و جایگشتی از کتابها که پس از i حرکت به آن رسیده‌ایم دقیقاً همان جایگشتی است که پس از j حرکت به آن رسیده‌ایم. چون حرکتها برگشت‌پذیرند، پس جایگشتی که پس از $i - 1$ حرکت به آن رسیده‌ایم همان جایگشتی است که پس از $j - 1$ حرکت به آن رسیده‌ایم،... و جایشگت اولیه همان جایگشتی است که پس از $j - i$ حرکت به آن رسیده‌ایم.

مسأله‌های المپیادی

ارشک حمیدی

مسأله‌های این بخش برای کسانی جمع‌آوری شده‌اند که به گسترش توانایی‌شان در حل کردن مسأله‌های پیکارجو و نامتعارف علاقه‌مندند. می‌توانید راه‌حلهای خودتان را برای این مسأله‌ها حداکثر تا تاریخ اول آبان‌ماه ۱۳۸۵ به آدرس دفتر مجله بفرستید.

مسأله‌ها

۲۰۱. همهٔ عددهای طبیعی مانند a و b را پیدا کنید که $a^2 + a + 1$ بر b بخش‌پذیر باشد و $b^2 + b + 1$ بر a.

۲۰۲. الف) همهٔ عددهای طبیعی مانند k، $k \geq 3$، را طوری پیدا کنید که k عدد طبیعی وجود داشته باشند که هیچ دو تایی از آنها نسبت به هم اول نباشند، اما هر سه تا از آنها نسبت به هم اول باشند.

ب) آیا می‌توان بی‌نهایت عدد طبیعی پیدا کرد که هیچ دو تایی از آنها نسبت به هم اول نباشند، اما هر سه تا از آنها نسبت به هم اول باشند؟

۲۰۳. m و n عددهایی طبیعی‌اند و $m + n$ فرد است. ثابت کنید هیچ زیرمجموعه‌ای از عددهای طبیعی مانند A وجود ندارد که به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند x و y، اگر $|m - y| = m$ آن‌وقت $x \in A$ یا $y \in A$ و اگر $|x - y| = n$ آن‌وقت $x \notin A$ یا $y \notin A$.

۲۰۴. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای صحیح a، b و c برابر با ۱ است. در هر حرکت می‌توان به یکی از عضوهای سه‌تایی (a, b, c) مضربی از یکی از دو عضو دیگر را اضافه کرد یا مضربی از یکی از دو عضو دیگر را از آن کم کرد. آیا درست است که می‌توان پس از حداکثر ۵ حرکت به سه‌تایی $(1, 0, 0)$ رسید؟

۲۰۵. آیا عددی طبیعی مانند n وجود دارد که هر عدد گویا بین ۰ و ۱ را بتوان به‌شکل مجموعی از وارونهای n عدد طبیعی نوشت؟

۲۰۶. k عددی طبیعی است و $k > 1$. ثابت کنید توانی از ۲ وجود دارد که در میان k رقم آخر آن تعداد نه‌ها از نصف کمتر نیست.

۲۰۷. a، b و c عددهایی صحیح‌اند و دست‌کم یکی از آنها صفر نیست. ثابت کنید

$$|\sqrt[3]{4}a+\sqrt[3]{2}b+c| \geq \frac{1}{4a^2+3b^2+2c^2}$$

۲۰۸. a، b و c عددهایی حقیقی و غیرمنفی‌اند و $a^2+b^2+c^2=1$. ثابت کنید

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

۲۰۹. تابع $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{Q}$ این‌طور تعریف شده است: $f(0)=0$ و

$$f(3n+k)=-\frac{3f(n)}{2}+k, \qquad k=0,1,2$$

ثابت کنید f یک به‌یک است و برد آن را پیدا کنید.

۲۱۰. همهٔ چندجمله‌ایها مانند $P(x,y)$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر چهار عدد حقیقی مانند a، b، c و d،

$$P(a,b)P(c,d)=P(ac+bd,ad+bc)$$

۲۱۱. مجموع عددهای حقیقی a_1، a_2، ... و a_n برابر با ۰ است و یکی از آنها برابر با ۱ است. ثابت کنید بزرگترین عدد در میان عددهای

$$|a_1-a_2|,\ |a_2-a_3|,\ldots,\ |a_{n-1}-a_n|,\ |a_n-a_1|$$

از $\frac{4}{n}$ کمتر نیست.

۲۱۲. مثلثی متساوی‌الاضلاع را به n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت تقسیم کرده‌ایم. عنکبوتی روی یکی از رأسها نشسته است و حشره‌ای روی رأسی دیگر. این دو یکی درمیان به یکی از رأسهای مجاورشان می‌روند. ثابت کنید عنکبوت همواره می‌تواند حشره را به چنگ آورد.

۲۱۳. شاهی را در خانه گوشهٔ سمت چپ بالا صفحهٔ شطرنجی $m\times n$ گذاشته‌ایم. دو نفر یکی درمیان شاه را حرکت می‌دهند، با این شرط که نمی‌توانند شاه را به خانه‌ای ببرند که قبلاً در آن بوده است. کسی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

۲۱۴. به مرکز هر نقطه‌ای در صفحهٔ مختصات که مختصاتش عددهایی صحیح‌اند دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{14}$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید هر دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ دست‌کم یکی از این دایره‌ها را قطع می‌کند.

۲۱۵. طول هر ضلع چندضلعی‌ای محدب عددی طبیعی است و محیطش عددی فرد است. ثابت کنید مساحت این چندضلعی دست‌کم $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است.

۲۱۶. ثابت کنید در هر لحظه نقطه‌ای روی سطح خورشید (که آن را کره فرض می‌کنیم) وجود دارد که حداکثر سه سیاره (از نه سیاره) را می‌توان از این نقطه دید.

۲۱۷. کشوری به‌شکل مربعی به طول ضلع ۱۰۰۰ کیلومتر است و ۵۱ شهر دارد. دولت این کشور برای احداث کلاً ۱۱۰۰۰ کیلومتر راه بودجه دارد. آیا این بودجه برای احداث شبکه‌ای از راهها که همهٔ شهرها را به هم متصل کند کفایت می‌کند؟

۲۱۸. فرض کنید $P_i(x_i, y_i)$، $۱ \leq i \leq ۶$، نقطه‌هایی در صفحه باشند که

$$x_i, y_i = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \qquad ۱ \leq i \leq ۶$$

علاوه‌بر این، هیچ سه نقطه‌ای از این شش نقطه روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید مثلثی مانند $P_iP_jP_k$، $۱ \leq i < j < k \leq ۶$، وجود دارد که مساحتش حداکثر ۲ است.

۲۱۹. نقطهٔ Q درون مثلث ABC قرار دارد. فرض کنید M، N و P نقطه‌هایی به‌ترتیب روی ضلعهای BC، CA و AB باشند که

$$MN \parallel AQ, \quad NP \parallel BQ, \quad P \parallel CQ$$

ثابت کنید $S_{MNP} \leq \frac{۱}{۳} S_{ABC}$.

۲۲۰. روی ضلعهای BC، AC و AB مثلث ABC به‌ترتیب نقطه‌های M، N و P را طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \lambda$$

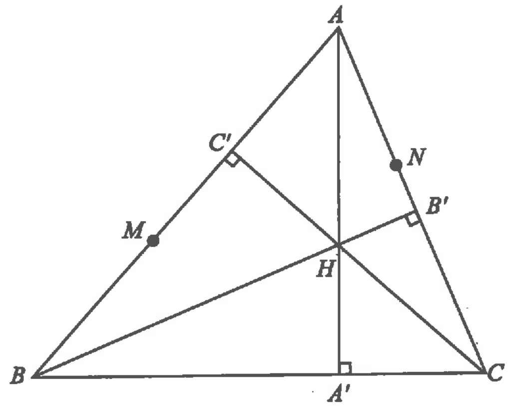
همهٔ مقدارهای λ را طوری پیدا کنید که دایرهٔ به قطر AC مثلث محدود به خطهای راست AM، BN و CP را بپوشاند.

راه‌حلها

۱۵۷. نقطه‌های M و N را به‌ترتیب روی ضلعهای AB و AC مثلث حادهٔ ABC انتخاب کرده‌ایم. دایرهٔ به قطر BN و دایرهٔ به قطر CM یکدیگر را در نقطه‌های P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید نقطه‌های P و Q و محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

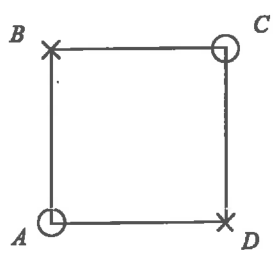
راه‌حل از شایان دشمیز، دبیرستان علامه حلی، منطقهٔ ۱۱، تهران؛ هلاکو رحمانیان، دبیرستان علامه طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران؛ سینا کیهانیان، دبیرستان سلام، منطقهٔ ۱، تهران. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای

مثلث ABC باشد. چون PQ محور اصلی دو دایره به قطرهای BN و CM است، پس کافی است ثابت کنیم قوت H نسبت به این دو دایره برابر است. اگر BB' و CC' در مثلث ABC ارتفاع باشند، دو دایره به قطرهای BN و CM به‌ترتیب از B' و C' می‌گذرند. بنابراین قوت H نسبت به این دو دایره $HC \times HC'$ و $HB \times HB'$ است. اکنون توجه کنید که چهارضلعی $BC'B'C$ محاطی است و درنتیجه $HB \times HB' = HC \times HC'$؛ همان چیزی که می‌خواستیم.



۱۵۸. بارون مونهاوزن باغش را با درختهای سیب و گلابی پوشانده است. درضمن، روی هر دایره‌ای به مرکز هر درخت سیب و به شعاع ۱۰ متر دقیقاً ۱۰ درخت گلابی کاشته است. بارون معتقد است که در باغش تعداد درختان سیب از تعداد درختان گلابی بیشتر است. آیا چنین چیزی ممکن است؟

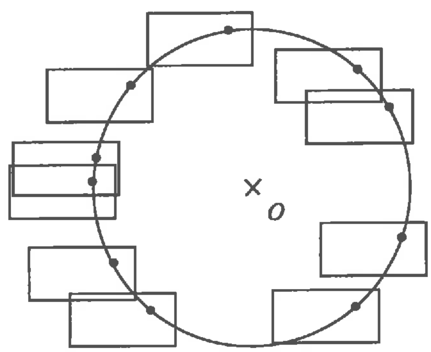
راه‌حل. بله، ممکن است. به‌طور استقرایی راهی برای درختکاری باغ با ویژگیهای موردنظر نشان می‌دهیم. ابتدا فرض کنید طول واحد ۱۰ متر باشد. فرض کنید $F(۲)$ باغی باشد که از دو درخت سیب و دو درخت گلابی که در رأسهای مربع واحد $ABCD$ کاشته شده‌اند تشکیل شده است ـ درختان گلابی در A و C و درختان سیب در B و D (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱

با داشتن $F(n)$، آرایش $F(n+1)$ را از اجتماع $F(n)$ و $F(n)+\mathrm{e}$ به‌دست می‌آوریم، که در اینجا e برداری واحد در «جهت دلخواه» است؛ یعنی، باید e را طوری انتخاب کنیم که وضعی پیش نیاید که روی دایره‌ای به مرکز درختی سیب بیش از $n+1$ درخت گلابی قرار داشته باشد. مثلاً، در مورد $F(3)$ باید e را طوری انتخاب نکنیم که $B+\mathrm{e}$، B، و C روی رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع قرار داشته باشند. خوشبختانه، تعداد چنین «وضعیتهای بدی» متناهی است و درنتیجه می‌توانیم کاری کنیم که چنین وضعیتی پیش نیاید. در این صورت، تنها کاری که می‌ماند این است که در $F(n)+\mathrm{e}$ نوع درختها را عوض کنیم، یعنی درختان سیب را گلابی کنیم و درختان گلابی را سیب.

معلوم است که $F(10)$ شرط اول را دارد. بنابراین می‌توانیم آرایش نهایی را به‌طریق زیر به‌دست بیاوریم: دایرهٔ واحد به مرکز O را رسم کنید و روی این دایره ده نقطه مانند M_0، M_1، ... و M_9 طوری انتخاب کنید که M_0 پای درختی گلابی در $F(10)$ باشد. بعد $F(10)$ را به‌اندازهٔ بردارهای M_0M_1، M_0M_2، ... و M_0M_9 منتقل می‌کنیم و در نقطهٔ O یک درخت سیب می‌کاریم (شکل ۲ را ببینید). به این ترتیب، باغی داریم که $10 \times 1024 + 1$ درخت دارد که $10 \times 512 + 1$ تا از آنها درخت سیب‌اند.



شکل ۲

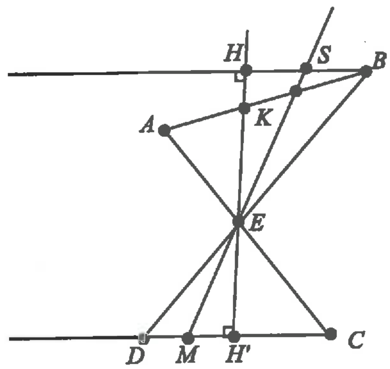
۱۵۹. پاره‌خطهای AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند. نقطه‌های K و M به‌ترتیب روی AB و CD قرار دارند و KM از نقطهٔ E گذشته است. ثابت کنید $KM \le \max\{AC, BD\}$.

راه‌حل از شایان دشمین، دبیرستان علامه حلی، منطقهٔ ۱۱، تهران. می‌توانیم فرض کنیم فاصلهٔ B از CD از فاصلهٔ A از CD بیشتر است (شکل صفحهٔ بعد را ببینید). از B نیمخط Bx را موازی CD رسم کنید. فرض کنید H و H' به‌ترتیب پای عمودهای وارد از E بر Bx و CD باشند و MK، Bx را در نقطهٔ S قطع کند. در این صورت

$$MK \le MS = \frac{HH'}{\cos\angle SEH} \le \frac{HH'}{\cos\angle BEH} = BD$$

(توجه کنید $\angle SEH < \angle BEH < 90^\circ$). بنابراین

$$MK \le BD \le \max\{AC, BD\}$$



راه‌حل رسیده: هلاکو رحمانیان، دبیرستان علامه طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران.

۱۶۰. چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. نقطه‌های E و F به‌ترتیب پای عمودهایی‌اند که از نقطهٔ برخورد قطرهای این چهارضلعی بر AB و CD رسم شده‌اند. ثابت کنید EF بر خطی که از وسطهای AD و BC می‌گذرد عمود است.

راه‌حل از شایان دشمیز، دبیرستان علامه حلی، منطقهٔ ۱۱، تهران؛ هلاکو رحمانیان، دبیرستان علامه طباطبایی، منطقهٔ ۵، تهران؛ سینا کیهانیان، دبیرستان سلام، منطقهٔ ۱، تهران. فرض کنید M و N به‌ترتیب وسطهای BC و DA باشند. ثابت می‌کنیم $EM = FM$ و $EN = FN$، که از آنها نتیجه می‌شود E و F قرینهٔ هم نسبت به خط MNاند، و به‌ویژه EF بر MN عمود است.

فرض کنید P محل برخورد AC و BD باشد و Q و R به‌ترتیب وسط BP و CP باشند. در این صورت $EQ = PQ$، زیرا EQ میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ PEB است، و $PQ = RM$، زیرا $PQMR$ متوازی‌الاضلاع است. به همین ترتیب معلوم می‌شود $FR = PR = QM$. علاوه‌بر این،

$$\begin{aligned}\angle EQM &= \angle EQP + \angle PQM\\ &= 2\angle EBP + \angle PQM\\ &= \angle MRP + 2\angle PCF\\ &= \angle MRP + \angle PRF\\ &= \angle MRF\end{aligned}$$

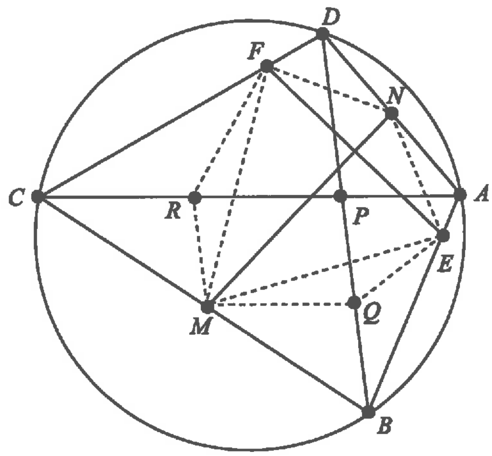
که در اینجا از اینکه $\angle ABD = \angle ACD$ (زیرا چهارضلعی $ABCD$ محاطی است) و

$$\angle PQM = \angle MRQ$$

(زیرا $PQMR$ متوازی‌الاضلاع است) استفاده کرده‌ایم.

به این ترتیب، معلوم می‌شود که مثلثهای EQM و MRF همنهشت‌اند و درنتیجه $EM = FM$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $EN = FN$.



راه‌حلها

از باب تفریح

۱. خیر، نمی‌توانند. جدول را مانند صفحهٔ شطرنج با رنگهای سیاه و سفید رنگ کنید. توجه کنید که در جابه‌جایی، هر کس به خانه‌ای می‌رود که رنگش با رنگ خانه‌ای که در آن ایستاده بوده است فرق دارد. چون تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های سفید برابر نیست، پس جابه‌جایی به‌شکل موردنظر ممکن نیست.

۲. چون مجموعها متمایزند، پس عددها هم متمایزند. فرض کنید عددهای موردنظر a، b، c، d و e باشند و $a < b < c < d < e$. مجموعهای دوبه‌دو عددها

$$a + b, a + c, b + c, a + d, b + d, a + e, b + e, c + d, c + e, d + e$$

هستند، که لزوماً از کوچک به بزرگ به این ترتیب نیستند. البته، کوچکترین این مجموعها $a + b$ و بزرگترین آنها $d + e$ است. بنابراین $a + b = ۱۲$ و $d + e = ۱۳۲$. مجموع پنج عدد موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e &= \frac{۱}{۴}(۱۲ + ۳۰ + ۴۴ + ۴۷ + ۶۱ + ۷۹ + ۸۳ + ۹۷ + ۱۱۵ + ۱۳۲) \\ &= ۱۷۵ \end{aligned}$$

بنابراین $c = ۳۱$. چون $a + c$ از لحاظ کوچکی دومین عدد در میان مجموعهاست، پس

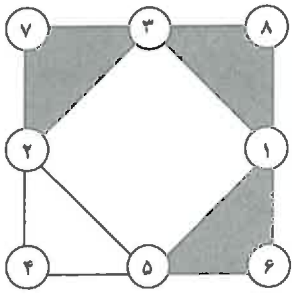
$$a = a + c - c = ۳۰ - ۳۱ = -۱$$

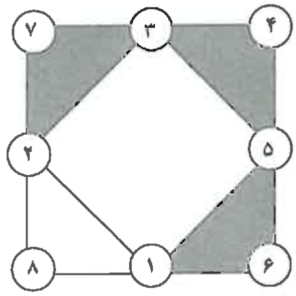
درنتیجه $b = ۱۲ - (-۱) = ۱۳$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $e = ۸۴$ و $d = ۴۸$.

۳. توجه کنید که $D \leq ۳$ و D زوج است. بنابراین $D = ۲$. در این صورت، R یا ۳ است یا ۸. اما ممکن نیست R برابر با ۸ باشد، زیرا اگر $R = ۸$، $۴I$ باید به ۵ ختم شود که ممکن نیست. بنابراین $R = ۳$. به این ترتیب $I = ۸$ و درنتیجه $B = ۶$ و $O = ۷$.

۴. در میان نقطه‌های موردنظر دو نقطه‌ای را که بالاترین‌اند انتخاب کنید (اگر بیش از دو نقطه این ویژگی را داشتند، دو تا از آنها را به‌دلخواه انتخاب کنید). یکی از ضلعهای زاویه‌های قائمه با رأس این نقطه‌ها باید به‌سمت جنوب باشد و ضلعهای دیگر آنها رو به هم. در این صورت تمام ناحیهٔ زیر این دو نقطه روشن می‌شود. به کمک دو نورافکن دیگر هم می‌توان بقیهٔ صفحه را روشن کرد.

۵. دو راه‌حل در شکلهای زیر نشان داده شده است.





انتشارات فاطمی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

منتشر کرده است:

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر: دکتر یحیی تابش / دکتر امیدعلی کرمزاده

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل ساعت‌ها تلاش فکری است. بدیهی است که اگر این تلاش‌ها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسهٔ انتشارات فاطمی به انتشار کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است.

این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتاب‌های زرد) شامل کتاب‌هایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتاب‌های نارنجی) شامل کتاب‌های میانه و مجموعهٔ مسائل و کتاب‌های کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است.

دستهٔ سوم (کتاب‌های قرمز) شامل کتاب‌های پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات، زیبا شناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوری‌های ذهنی تلاش می‌کنند. مطالعهٔ کتاب‌های این مجموعه به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

فنون مسأله حل کردن

پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو

۱۰۱ مسألهٔ جبر

جدید

هندسه

جدید

نظریهٔ اعداد

اردوش تا کی‌یف

۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات

هندسهٔ مسطحه

ترکیبیات

المپیادهای ریاضی چین

برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز

حل مسأله از طریق مسأله

محافل ریاضی

آشنایی با ترکیبیات

منتشر می‌کند: