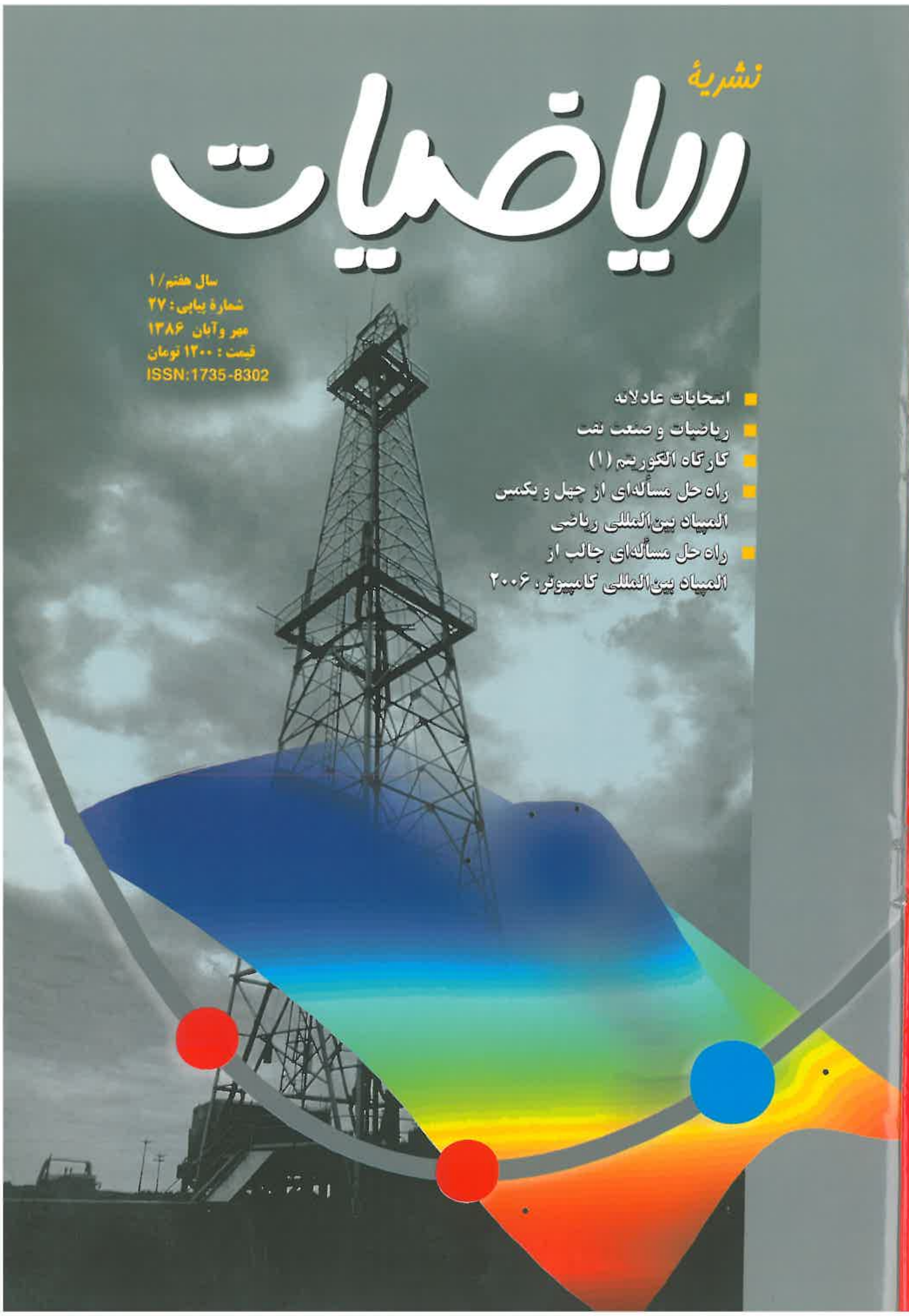

نشریهٔ
ریاضیات
سال هفتم/۱
شمارهٔ پیاپی: ۲۷
مهر و آبان ۱۳۸۶
قیمت: ۱۲۰۰ تومان
ISSN:1735-8302
انتخابات عادلانه
ریاضیات و صنعت نفت
کارگاه الگوریتم (۱)
راه حل مسأله‌ای از چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی
راه حل مسأله‌ای جالب از المپیاد بین‌المللی کامپیوتر، ۲۰۰۶

کتاب‌های کار و راهنمای مطالعه‌ی دانش‌آموز

طرح مشترک با سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی منتشر کرده است:

هدف از تهیه و انتشار کتاب‌های کار و راهنمای مطالعه‌ی دانش‌آموز کمک به توسعه و درک بهتر مفاهیم کتاب‌های درسی و ایجاد مهارت برای پاسخگویی به پرسش‌ها، مسائل و آزمون‌های گوناگون است. کتاب‌های کار و راهنمای مطالعه‌ی دانش‌آموز بر اساس برنامه‌ی درسی دوره‌ی متوسطه و پیش‌دانشگاهی تهیه شده است. در این کتاب‌ها ابتدا بعضی از مفاهیم کتاب‌های درسی با ذکر مصادیق تشریح شده است و بعد از توسعه‌ی آن مفاهیم، مصادیق آن در قالب تمرین‌های طبقه‌بندی شده برای یادگیری عمیق آمده است.

این کتاب‌ها جانشینی برای کتاب‌های درسی نیست، بلکه باید همراه با مطالعه‌ی کتاب‌های درسی مورد استفاده‌ی دانش‌آموزان قرار گیرد.

بسیاری از کتاب‌های این مجموعه، در سومین و پنجمین جشنواره‌ی کتاب‌های آموزشی رشد مورد تقدیر قرار گرفته یا برگزیده شده‌اند.

روی جلد: ریاضیات و صنعت نفت

صاحب امتیاز و مدیر مسؤول: یحیی تابش
ویراستار اجرایی: بهزاد اسلامی مسلّم
هیأت تحریریه: بهزاد اسلامی مسلّم، یحیی تابش، بردیا حسام، محمد صالح زارع‌پور، کسری علیشاهی، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
امور مشترکین: شیوا ثمرانی
وب‌گاه: www.riaziat.ir
نشانی پست الکترونیکی: nashriye@riaziat.ir
ISSN:1735-8302

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
مسؤول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه‌بندی: مریم محمدی، هنگامه صادقی
رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: خاشع
نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹–۱۴۱۴۵
تلفن: ۵–۶۶۴۸۶۵۶۲

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال هفتم/ ۱، شمارهٔ پیاپی: ۲۷، مهر و آبان ۱۳۸۶

فهرست:

۱. در دهۀ ۱۳۴۰، اول هر ماه صبح که به مدرسه می‌رفتیم، مجلۀ **یکان** را هم می‌خریدیم. درست اول هر ماه، یکان در روزنامه‌فروشیها فروخته می‌شد و دانش‌آموزان دبیرستانی انتظار آن را می‌کشیدند. مقداری از جذابیت یکان به دلیل مسأله‌های متنوعی بود که در آن چاپ می‌شد و از آن به‌صورت منبع کمک درسی ـ که در آن زمان کمیاب بود ـ استفاده می‌شد. علاوه بر این، مقالات متنوعی هم داشت که ما را با ایده‌های جدید مواجه می‌کرد. آن مجله تا مدتها جایی برای اظهارنظر پیشکسوتان آن دوره بود. بعدها خاطرۀ یکان برای ما باقی ماند.

با گذشت سالها و توسعۀ امور آموزشی و فرهنگی، هرچند افزایش جمعیت دانش‌آموزان نیازهای متنوعی در سطوح مختلف ایجاد کرده بود، دهک بالای دانش‌آموزان روز به‌روز به دانش و فرهنگ غنی‌تری دست می‌یافت و منابع بیشتری را برای توسعۀ فرهنگ و اندیشۀ ریاضی طلب می‌کرد.

دهۀ ۱۳۶۰ با نگرانی «افت ریاضی» شروع شد: دانش‌آموزان رغبت کمتری به ریاضیات از خود نشان می‌دادند. راه‌اندازی المپیاد ریاضی از چاره‌هایی بود که پیدا شد تا این مشکل را حل کند، و آرام آرام، از نیمۀ دهۀ ۱۳۶۰ رغبتها را به ریاضیات برگرداند و استعدادهای خوبی جذب کرد.

دهۀ ۱۳۷۰ آغاز شکوفاییها بود، سالیانه بیش از صدهزار نفر دانش‌آموز در مرحلۀ اول المپیاد ریاضی شرکت می‌کردند و از بین نفرات برگزیده، عدۀ زیادی برای ادامۀ تحصیلات رشتۀ ریاضی را انتخاب می‌کردند. بنیادهای توسعه به‌خوبی شکل گرفت، هرچند تا شکوفایی کامل راه درازی در پیش است.

۲. خاطرۀ یکان، ارتباط مستقیم با المپیاد ریاضی و فضای دانشکدۀ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف برای من انگیزه‌های راه‌اندازی **نشریۀ ریاضیات** را فراهم کرد. در دانشکدۀ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف فضای ویژه‌ای شکل گرفت: از سویی هرمی خانوادگی ایجاد شد که در آن، همه در حال «یاد گرفتن» و «یاد دادن» بودند و از سوی دیگر، در هر گوشه، محفلی ریاضی شکل گرفته بود که فرهنگ ریاضی را توسعه می‌داد. صدور مجوز انتشار نشریۀ ریاضیات مدتی طول کشید تا اینکه در ۱۳۷۶/۱۲/۲۶ صادر شد ... و عجب روزی بود ۱۳۷۶/۱۲/۲۶! در نخستین ساعات بامداد آن روز، اتوبوس دانشگاه صنعتی شریف که بعضی از بهترین دانشجویان را برای شرکت در کنفرانس و مسابقۀ دانشجویی ریاضی (انجمن ریاضی ایران) به اهواز برده بود، در راه بازگشت در نزدیک اندیمشک به دره سقوط کرد و نور دیدگانم، رضا صادقی، دکتر مجتبی مهرآبادی، آرمان بهرامیان، علیرضا سایبان، فرید کابلی، علی حیدری و مرتضی رضایی از میان

ما رخت بربستند و دل مرا داغدارکردند، دلی که داغدارترین دل دنیاست و هنوز هم ـ پس از یک دهه ـ همچنان داغش تازه است. اما نشریهٔ ریاضیات همیشه به یاد آنها منتشر می‌شود.

۳. نشریهٔ ریاضیات تاکنون دو دوره را پشت سرگذاشته است و اکنون در آستانهٔ دورهٔ سوم است. دورهٔ نخست که با همت امید نقشینه ارجمند و بردیا حسام و با نام «ماهنامهٔ ریاضیات» منتشر می‌شد، دورهٔ شکل‌گیری اولیه بود. پس از این دوره، با حمایت مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی، امکاناتی حرفه‌ای‌تر برای چاپ نشریه فراهم شد و ارشک حمیدی همت تام خود را در نشر نشریهٔ ریاضیات گذاشت. او در ساماندهی حرفه‌ای نشریه نقشی ویژه ایفا کرد. اکنون نشریه در دورهٔ سوم، هم از سامانه‌ای حرفه‌ای برخوردار است و هم هیأت تحریریه‌ای جوان، علاقه‌مند و مستعد دارد.

به مجله بخشی جدید اضافه شده است: «الگوریتم». در این بخش با الگوریتمهای مختلف و راه‌حل بعضی مسائل الگوریتمی آشنا می‌شوید. ضمناً در بخش المپیاد، علاوه بر المپیاد ریاضی، به المپیاد کامپیوتر هم خواهیم پرداخت.

قصد داریم این مجله در آیندهٔ قوام‌یافتگی ریاضیات ایران نقش و جایگاه خود را داشته باشد. امید داریم که تلاشهای دهه‌های ۱۳۶۰ و ۱۳۷۰، در دههٔ ۱۳۸۰ شکوفایی و باروری ریاضیات را به دنبال داشته باشد و نشریهٔ ریاضیات که هنوز هم مخاطب عمده‌اش دانش‌آموزان‌اند در توسعهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی بین نوجوانان و جوانان ایران، پیام‌رسانی ویژه باشد. از همهٔ علاقه‌مندان طلب یاری داریم و دست گرم آنان را که همتی بدرقهٔ این راه کنند، می‌فشاریم.

یحیی تابش
tabesh@sharif.ir

جایزهٔ فیلدز

محسن جمالی

۳۱ مرداد سال گذشته برندگان جایزهٔ فیلدز در مراسم افتتاحیهٔ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان در شهر مادرید معرفی شدند. آنها آندری اُکونکوف[1]، گریگوری پرلمان[2]، ترنسی تاو[3] و وندلین ورنر[4] هستند.

جایزهٔ فیلدز[5] بالاترین جایزه‌ای است که ممکن است ریاضیدانی به آن دست یابد. این جایزه هر چهار سال در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان اعطا می‌شود و از دو جزء نقدی و مدال از جنس طلا تشکیل شده است. روی مدال، تصویری از ارشمیدس همراه با جمله‌ای منسوب به او حک شده است: «از خودت بالا برو تا جهان را بهتر دریابی.»

در پشت مدال این جمله آمده است که «ما ریاضیدانان از سراسر جهان برای بزرگداشت کارهای برجستهٔ ریاضی گردهم آمده‌ایم.» در لبهٔ مدال نام ریاضیدان نیز حک می‌شود.

اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیدانان این جایزه را به ریاضیدانانی اعطا می‌کند که کارهایی برجسته در ریاضیات انجام داده باشند. در اصل، این جایزه مشابه جایزهٔ نوبل در رشته‌های دیگر است. شنیدن این نکته که چرا ریاضیات در فهرست رشته‌هایی که مشمول جایزهٔ نوبل است قرار نگرفته است خالی از لطف نیست.

آلفرد نوبل[6] شیمیدان سوئدی، مخترع دینامیت بود. او کاشف و صنعتگر بود و پول زیادی از این راه به‌دست آورد و از این راه جوایزی به اختراعات و اکتشافاتی که تحولی در زندگی بشر ایجاد کنند اختصاص داد و به ریاضیات و یا علوم نظری چندان علاقه‌مند نبود.

اما ماجرایی که معمولاً از آن صحبت می‌شود ودلیل تاریخی هم برای آن در دست نیست چیز دیگری است. می‌گویند نوبل به‌خاطر خصومتی که با ریاضیدانی معروف و سوئدی به‌نام میتاگ‌ـلفلر[7] بر سر ماجرایی عاشقانه داشت ریاضیات را از فهرست جوایز حذف کرد . . . .

اما از نوبل بگذریم و به سراغ فیلدز برویم!

در هر دوره، جایزهٔ فیلدز به حداقل ۲ و حداکثر ۴ ریاضیدان داده می‌شود. نحوهٔ انتخاب به این شکل است که کمیتهٔ اجرایی اتحادیهٔ بین‌المللی، کمیته‌ای از ریاضیدانان را انتخاب می‌کند و ریاست این کمیته معمولاً برعهدهٔ رئیس اتحادیه است. اسامی برندگان در کنگرهٔ بین‌المللی که گردهمایی‌ای بزرگ از ریاضیدانان سراسر جهان است

1. Andrei Okounkov 2. Grigori Perelman 3. Terence Tao 4. Wendelin Werner 5. Fields
6. Alfred Noble 7. Mittag - Leffler

اعلام می‌شود. سن دریافت‌کنندگان جایزه نباید از چهل بیشتر باشد. اسامی کمیتهٔ انتخاب‌کننده بجز رئیس آن، تا اهدای جایزه مخفی می‌ماند و اگر کاندیدای جایزه دانشجوی دکتری عضوی از کمیته باشد آن عضو حق شرکت در رأی‌گیری نهایی را ندارد.

در کنگرهٔ سال ۱۹۲۴ که در شهر تورنتو کانادا برگزار شد پروفسور جان چارلز فیلدز پیشنهاد اعطای این جایزه را مطرح کرد و این جایزه به افتخار او جایزهٔ فیلدز نامیده شد. این جایزه اولین بار در کنگرهٔ ۱۹۳۶ در شهر اُسلو و به دو ریاضیدان اعطا شده است و جالب است که بدانید کم‌سن‌ترین ریاضیدان برندهٔ جایزه تا به‌حال ژان پیر سِر[1] ایت که در سال ۱۹۵۴ در سن ۲۸ سالگی موفق به دریافت آن شد.

حالا مختصری دربارهٔ برندگان امسال توضیح می‌دهیم.

آندری اُکنکوف در سال ۱۹۶۹ در مسکو به دنیا آمد و در سال ۱۹۹۵ از دانشگاه ایالتی مسکو درجهٔ دکتری ریاضی گرفت. او اکنون پروفسور ریاضیات در دانشگاه پرینستون آمریکاست. او علاوه بر این جایزهٔ مهم، جوایز متعدد دیگری نیز به‌دست آورده است. کار اُکونکوف ایجاد ارتباط میان احتمال، نظریهٔ نمایش و هندسهٔ جبری است که منجر به ظهور بینشهایی جدید در چند مسألهٔ فیزیکی نیز شده است. همچنین این ترکیب باعث ابداع چند روش در مسائلی در هندسهٔ جبری و مکانیک آماری شده است.

گریگوری پرلمان در سال ۱۹۶۶ در اتحاد جماهیر شوروی به‌دنیا آمد و درجهٔ دکتری خود را از دانشگاه ایالتی سنت‌پترزبورگ دریافت کرد. مدتی را تحت عنوان کار تحقیقاتی در دانشگاه برکلی کالیفرنیا و مؤسسهٔ ریاضیات استکلوف در سنت‌پترزبورگ سپری کرد. این جایزه به‌خاطر سهم بسزای او در هندسه و دیدگاه هوشمندانه و جدیدش در ساختار هندسی و تحلیلی شار ریچی[2] به او داده شد. او با این ابزارها موفق به حل حدس قدیمی پوانکاره[3] و حدس هندسه‌سازی ترستون[4] شده است. جالب است بدانید که حدس پوانکاره یکی از هفت مسأله‌ای است که مؤسسهٔ ریاضی کلِی[5] برای حل آن یک میلیون دلار در نظر گرفته است.

پرلمان در حرکتی غیرمنتظره جایزهٔ فیلدز را رد کرد و این ماجرا بسیار خبرساز شده است. گویا او حاضر نشده است کار چندین سالهٔ او که نتیجهٔ کنجکاوی و علاقهٔ ریاضی است تحت نام این جایزه ارزش‌گذاری شود.

پرلمان در دوران دانش‌آموزی در سال ۱۹۸۲ در المپیاد بین‌المللی ریاضی شرکت کرد و مدال طلا با نمرهٔ کامل یعنی ۴۲ گرفت.

ترنسی تاو که اصالتاً چینی است در سال ۱۹۷۵ در شهر آدلاید کشور استرالیا به‌دنیا آمد و دکتری ریاضی خود را در بیست‌ویک سالگی در سال ۱۹۹۶ از دانشگاه پرینستون گرفته است. او اکنون پروفسور ریاضیات در دانشگاه کالیفرنیا در لوس‌آنجلس است و علاوه بر این جایزه، جوایز متعدد دیگری را نیز نصیب خود کرده است. یکی از آنها،

1. Jean - Pierre Serre 2. Ricci 3. Poincare 4. Thurston 5. Clay

جایزهٔ مؤسسهٔ ریاضی کلِی است که دکتر مریم میرزاخانی نیز اخیراً موفق به دریافت آن شده است.

تاو که اکنون سی‌ویک ساله است و بیش از هشتاد مقالهٔ تحقیقی در ریاضی نوشته است. کار تاو ایجاد ارتباط میان معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، ترکیبیات، آنالیز هارمونیک و نظریهٔ جمعی اعداد است. از محصولات این کار اثبات حدسی قدیمی در نظریهٔ اعداد است که بنابر آن، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، تصاعدی حسابی از اعداد اول به‌طول n موجود است.

از نکات جالب دربارهٔ تاو این است که او کم‌سن‌ترین شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی تاکنون است. او در یازده سالگی مدال برنز، در دوازده سالگی مدال نقره و در سیزده سالگی مدال طلا گرفت.

نفر بعدی وندلین ورنر است. او در سال ۱۹۶۸ در آلمان به‌دنیا آمد و اکنون ملیت فرانسوی دارد و دکتری ریاضی خود را در سال ۱۹۹۲ از دانشگاه پاریس ۶ گرفت. او اکنون پروفسور ریاضیات در دانشگاه اکول‌نرمال در پاریس است. ورنر جایزهٔ فیلدز را به‌خاطر کارهایی مهم در گسترش لوِنر[1]، هندسهٔ حرکتهای براونی دوبُعدی و نظریهٔ میدانهای همدیس به‌دست آورد.

1. Loewner evolution

انتخابات عادلانه

محمدصالح زارع‌پور

در بسیاری از کشورهای جهان امروز، برخی مسئولان کشوری با تکیه بر نتایج انتخابات منصوب می‌شوند. تاکنون در اکثر کشورهای جهان چندین و چند انتخابات برگزار شده است اما روش برگزاری انتخابات در این کشورها یکسان نیست. در برخی کشورها محدودیتی در تعداد نامزدها وجود دارد؛ در برخی دیگر نه. در بعضی کشورها انتخابات فقط در یک مرحله برگزار می‌شود اما در بعضی دیگر ممکن است به مرحلهٔ دوم کشیده شود و تفاوتهایی دیگر. این تفاوتها در روش برگزاری انتخابات، سؤالات مهمی را پیش روی ما قرار می‌دهد؛ مثلاً «بهترین روش برگزاری انتخابات چیست؟» و یا اینکه «آیا اساساً روش برگزاری انتخابات تأثیری در نتیجهٔ انتخابات دارد؟».

در این مقاله می‌کوشیم ضمن بررسی چهار روش انتخابات، اطلاعاتی دربارهٔ جواب سؤالات بالا به‌دست بیاوریم. پیش از بررسی این چهار روش، لازم است که اصطلاحات و مفاهیمی را که در این مقاله‌ها از آنها استفاده می‌کنیم، تعریف کنیم.

تعریف ۱. فهرستی فرضی که هر یک از رأی‌دهندگان برای خود می‌سازد و در آن نامزدهای موردنظر خود را به ترتیب ترجیحشان برای خود تنظیم می‌کند، فهرست ترجیح آن رأی‌دهنده نام دارد. مثلاً در انتخاباتی که با حضور سه نامزد به نامهای a، b و c برگزار می‌شود، ممکن است که فهرست ترجیح شخصی $a > b > c$ باشد (یعنی a را به b، و b را به c ترجیح دهد) و فهرست ترجیح فردی دیگر $b > a > c$ باشد (یعنی b را به a، و a را به c ترجیح دهد).

در این مقاله برای سادگی کار فرض می‌کنیم که اولاً فهرست ترجیح هر یک از رأی‌دهندگان از ابتدا تا انتهای رأی‌گیری تغییری نکند و ثانیاً در فهرست ترجیح هر یک از رأی‌دهندگان، هیچ دو نامزدی جایگاه برابر نداشته باشند (یعنی در نظر هر یک از رأی‌دهندگان و به ازای هر دو نامزدی که در نظر بگیرید، حتماً یکی از این نامزدها برتر از دیگری است). اگرچه این دو فرض گاهی در دنیای واقعیت برقرار نیستند، در نظر گرفتن آنها خللی در بحث ما ایجاد نمی‌کند.

تعریف ۲. برندهٔ انتخابات نامزدی است که بر اساس روش رأی‌گیری در انتخابات، منتخب مردم اعلام می‌شود.

تعریف ۳. برندهٔ مطلق انتخابات نامزدی است که در مقایسه با هر یک از نامزدهای دیگر، برنده باشد. بر همین اساس بازندهٔ مطلق انتخابات نامزدی است که در مقایسه با هر یک از نامزدهای دیگر بازنده باشد.

دقت کنید که برندهٔ مطلق و بازندهٔ مطلق مستقل از روش رأی‌گیری تعیین می‌شوند، یعنی فقط فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان در تعیین برندهٔ مطلق و بازندهٔ مطلق تأثیر دارد و نه روش رأی‌گیری. در مثالهای بعدی خواهیم دید که

لزومی ندارد برندهٔ مطلق انتخابات، برندهٔ انتخابات باشد! (حتی بدتر از این: گاهی بازندهٔ مطلق انتخابات، برندهٔ انتخابات است.) حالا چهار روش انتخاباتی مختلف را بررسی می‌کنیم.

روش جمع‌بندی[۱]

این روش قدیمی‌ترین، ساده‌ترین و متداول‌ترین روش رأی‌گیری در دنیاست. در این روش پس از معرفی نامزدها، رأی‌دهندگان نام برگزیدهٔ خود را در برگهٔ رأی می‌نویسند و در صندوقهای اخذ رأی می‌اندازند. در نهایت کسی که بیشترین تعداد رأی را کسب کند، برندهٔ انتخابات معرفی می‌شود. حالا باید دید که آیا این روش، روشی مناسب برای انتخابات است؟ بیایید با بررسی مثالی به این سؤال پاسخ دهیم. انتخاباتی با سه نامزد را در نظر بگیرید که در آن فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان به شکل زیر است (اگر می‌خواهید که اعداد به اعداد رأی‌گیریهای واقعی نزدیک باشد کافی است که «نفر»ها را «میلیون نفر» بخوانید):

۱۰ نفر	$a > b > c$
۶ نفر	$b > c > a$
۵ نفر	$c > b > a$

توجه کنید که رأی‌دهندگان فهرستهای ترجیح خود را در صندوق رأی نمی‌اندازند و فقط نام فردی را که برای آنها در اولویت است روی برگه‌ها می‌نویسند. مثلاً، افرادی که در دستهٔ اول‌اند a و افرادی که در دستهٔ سوم‌اند c را در برگه‌های خود می‌نویسند.

پس از شمارش آرا در این انتخابات، a ده رأی، b شش رأی و c پنج رأی می‌آورد و در نهایت بر اساس روش جمع‌بندی، a برندهٔ انتخابات اعلام می‌شود؛ اما نکتهٔ عجیب این است که به نگاه به فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان درمی‌یابیم که $\frac{11}{21}$ رأی‌دهندگان ـ یعنی بیش از نیمی از مردم (همهٔ آنهایی که در دستهٔ دو یا سه هستند) ـ b و c را به a ترجیح می‌دهند. پس می‌بینیم که روش جمع‌بندی در بیان دقیق عقیدهٔ مردم نارساست.

روش حذفی[۲]

از روشهای معمول در برگزاری انتخابات روش حذفی است که مبدع آن فرانسویها هستند. در این روش هر نامزدی که بیش از نیمی از آرا را به‌دست آورد برندهٔ انتخابات است و در صورتی که هیچ‌یک از نامزدها، بیش از پنجاه درصد آرا را به‌دست نیاورد، دو نامزدی که بیشترین تعداد رأی را کسب کرده‌اند به دور دوم می‌روند و سایر نامزدها حذف

1. Plurality 2. Elimination

می‌شوند. در دور دوم، رأی‌گیری منحصراً میان دو نامزده راه‌یافته به دور دوم اجرا می‌شود و در پایان، برندهٔ انتخابات مشخص می‌شود. درکشور ما هم از همین روش انتخابات استفاده می‌شود.

اگر نتایج مثال قبل را با روش حذفی به‌دست بیاوریم، خواهیم دید که b برندهٔ انتخابات خواهد بود، چرا که در مرحلهٔ اول هیچ‌یک از سه نامزد پنجاه درصد آرا را کسب نمی‌کند و بنابراین c از دور رقابت حذف می‌شود و a و b به مرحلهٔ دوم می‌روند و در نهایت b برندهٔ انتخابات می‌شود. بنابراین، در این مثال خاص روش حذفی برای بیان عقیدهٔ مردم رساتر است. اما آیا همیشه چنین است؟ بگذارید مثال دیگری بزنیم:

۱۰ نفر $b > a > c > d$

۶ نفر $c > a > d > b$

۵ نفر $a > d > b > c$

فرض کنید که توزیع فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان در انتخاباتی با چهار نامزد به صورت بالا باشد. اگر این انتخابات با روش حذفی برگزار شود، a و d در مرحلهٔ نخست حذف می‌شوند و در نهایت b با غلبه بر c در دور دوم، برندهٔ انتخابات می‌شود. نکتهٔ عجیب این است که با بررسی فهرست ترجیحهای رأی‌دهندگان خواهیم دید که برندهٔ مطلق انتخابات a است! چرا که a در مقایسه با b، ۱۱ به ۱۰ برنده می‌شود؛ در مقایسه با c، ۱۵ به ۶ و در مقایسه با d، ۲۱ به صفر.

بنابراین، اگر روش برگزاری انتخابات حذفی باشد ممکن است که در شرایط ویژه‌ای (نظیر آنچه در بالا آمد)، برندهٔ مطلق انتخابات، برندهٔ انتخابات نشود! با همین مثال ضعف روش حذفی در بیان دقیق عقیدهٔ مردم به‌خوبی مشخص می‌شود؛ با این همه، ذکر این مثال هم خالی از لطف نیست:

انتخاباتی با سه نامزد را در نظر بگیرید که توزیع فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان در این انتخابات به شکل زیر باشد

۶ نفر $a > b > c$

۵ نفر $c > a > b$

۴ نفر $b > c > a$

۲ نفر $b > a > c$

اگر این انتخابات با روش حذفی برگزار شود، c در دور اول حذف می‌شود و a با غلبه بر b در دور دوم برندهٔ انتخابات می‌شود. حال فرض کنید که مبلغان a با چند سخنرانی انتخاباتی موفق شوند که فهرست ترجیح افراد دستهٔ چهارم در این انتخابات را تغییر دهند و a را به صدر فهرست ترجیحهای آنها بیاورند (لازم نیست که خودشان از

این موفقیت باخبر شوند). بنابراین فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان به این شکل درخواهد آمد

۶ نفر $a > b > c$

۵ نفر $c > a > b$

۴ نفر $b > c > a$

۲ نفر $a > b > c$

با این فهرستهای جدید، b در دور اول روش حذفی حذف می‌شود و c با غلبهٔ ۹ به ۸ بر a پیروز انتخابات می‌شود! یعنی بهبود وضعیت a در نظر تعدادی از رأی‌دهندگان منجر به شکست او با روش حذفی شد، در حالی‌که پیش از این بهبود وضعیت، برندهٔ انتخابات بود! (عجیب نیست؟)

روش بوردا

این روش را فردی فرانسوی به نام جین چارلز دو بوردا[1] (۱۷۹۹ − ۱۷۳۳) معرفی کرده است. در این روش از رأی‌دهندگان خواسته می‌شود که به جای اینکه فقط نام اول در فهرست ترجیح خود را در برگه‌های رأی‌گیری بنویسند، فهرست ترجیح خود را در برگه‌ها ذکر کنند. برای محاسبهٔ نتایج انتخابات در این روش، به کسی که در صدر فهرست ترجیح قرار دارد n امتیاز (که n تعداد نامزدهاست) و به کسی که در رتبهٔ دوم فهرست است $n - ۱$ امتیاز تعلق می‌گیرد. این کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد تا اینکه در نهایت به کسی که در انتهای فهرست قرار دارد یک امتیاز تعلق می‌گیرد. در پایان، مجموع امتیازات کسب شدهٔ هر نامزد از برگه‌های رأی را محاسبه می‌کنند و کسی که بیشترین امتیاز را بیاورد برندهٔ انتخابات خواهد شد. برای مثال، برندهٔ اولین انتخاباتی که در این مقاله از آن صحبت کردیم، با روش بوردا b خواهد بود:

$$\begin{array}{ccccc|l} ۳ & & ۲ & & ۱ & \\ a & > & b & > & c & \text{۱۰ نفر} \\ b & > & c & > & a & \text{۶ نفر} \\ c & > & b & > & a & \text{۵ نفر} \end{array}$$

$$a : (۱۰ \times ۳) + (۶ \times ۱) + (۵ \times ۱) = ۴۱$$

$$b : (۱۰ \times ۲) + (۶ \times ۳) + (۵ \times ۲) = ۴۸$$

$$c : (۱۰ \times ۱) + (۶ \times ۲) + (۵ \times ۳) = ۳۷$$

1. Jean Charles de Borda

این روش (و هر روش دیگری که در آن رأی‌دهندگان فهرستهای ترجیح خود را در برگهٔ رأی بنویسند) از نظر مقدار زمان و امکانات لازم برای محاسبهٔ نتایج بسیار پرهزینه است. علی‌رغم صرف زمان و امکانات فراوان در روش بوردا، با این روش در بعضی شرایط عقیدهٔ مردم بازتاب نمی‌یابد. در مثال بعد خواهیم دید که در بعضی شرایط، برندهٔ مطلق انتخابات با روش بوردا برندهٔ انتخابات نمی‌شود!

روش جفتی[1]

در این روش مانند روش بوردا، رأی‌دهندگان فهرستهای ترجیح خود را در برگه‌های رأی می‌نویسند. برای محاسبهٔ نتایج انتخابات، هر دو نامزد در مقایسهٔ مستقیم با یکدیگر قرار می‌گیرند و نامزد برنده دو امتیاز می‌گیرد. در صورت تساوی آرا به هر یک از دو نامزد یک امتیاز تعلق می‌گیرد. در نهایت با محاسبهٔ مجموع امتیازاتی که هر نامزد در مقایسه‌های مستقیم با سایر نامزدها به‌دست آورده است، برندهٔ انتخابات مشخص می‌شود؛ درست مثل تورنمنتهای ورزشی. در این روش، برندهٔ مطلق انتخابات (در صورت وجود) برندهٔ انتخابات است (چرا؟) اما آیا این امر برای اینکه روش جفتی را روش مطلوب رأی‌گیری بدانیم کافی است؟

متأسفانه پاسخ سؤال بالا منفی است، زیرا در بسیاری از شرایط، انتخابات برندهٔ مطلق ندارد. علاوه بر این، در این روش تساوی امتیازات نامزدها در جدول نهایی بسیار محتمل است. مثلاً اگر تعداد نامزدهای انتخابات هفت نفر و تعداد رأی‌دهندگان به اندازهٔ کافی زیاد باشد، با روش جفتی در حداقل چهل درصد حالتها نمی‌توان کسی را برندهٔ انتخابات دانست، زیرا چند نفر با امتیازات برابر به طور مشترک در صدر جدول قرار می‌گیرند. بیایید در پایان بررسی این چهار روش انتخاباتی، انتخاباتی را بررسی کنیم که برندهٔ آن در هر یک از این چهار روش متمایز از سه روش دیگر باشد:

۸ نفر	$c > b > a > d$
۶ نفر	$d > b > c > a$
۵ نفر	$a > b > c > d$
۴ نفر	$a > c > b > d$
۲ نفر	$d > b > a > c$
۲ نفر	$d > c > b > a$

برندهٔ این انتخابات با روش جمع‌بندی d، با روش حذفی a، با روش بوردا b و با روش جفتی c است! یعنی در این شرایط انتخاباتی، برندهٔ انتخابات با روش رأی‌گیری تعیین می‌شود و نه با رأی مردم! حالا چه باید کرد؟ آیا

1. Pairwise

به‌راستی روشی وجود ندارد که مطمئن باشیم در هر شرایطی بازتاب‌دهندهٔ عقیدهٔ مردم است؟ آیا می‌توان دو روش انتخاباتی را مقایسه کرد و تعیین کرد که کدام بهتر است؟

برای پاسخ به سؤالات بالا باید تعریفی دقیق از بهتر بودن روشی انتخاباتی از روش انتخاباتی دیگر داشته باشیم. شاید بگویید که تعریف بهتر بودن کار ساده‌ای است؛ اما اصلاً چنین نیست. شاید بگویید «انتخاباتی بهتر است که عادلانه‌تر باشد». در این صورت باید تعریف یا معیارهایی برای عادلانه بودن انتخابات پیشنهاد دهید تا بتوان به سؤالات بالا پاسخ داد. بحث بر سر اینکه معیارهای عادلانه بودن انتخابات چیست، بحثی بسیار مهم و پردامنه است. بسته به اینکه چه معیارهایی را برای عادلانه بودن انتخابات در نظر بگیرید جوابهایی متفاوت به این سؤال که «کدام انتخابات عادلانه است؟» داده می‌شود. کنت ارو[1] سه معیار حداقلی زیر را برای انتخابات معرفی کرده است.

الف. ارزش رأی همهٔ رأی‌دهندگان برابر باشد. مثلاً چنین نباشد که اگر a به نامزدی رأی بدهد رأی او پنج امتیاز برای آن نامزد محسوب می‌شود اما اگر b به همان نامزد رأی بدهد، رأی او یک امتیاز برای آن نامزد محسوب شود.

ب. اگر همهٔ رأی‌دهندگان a را به b ترجیح دهند، در نتیجهٔ انتخابات هم a به b ترجیح داده شود. این شرط تضمینی حداقلی برای این است که روش انتخاباتی ما بازتاب‌دهنده‌ی عقیدهٔ مردم باشد.

ج. اگر a و b شرایطی کاملاً یکسان در دو رأی‌گیری متمایز (اما با روش مشترک) داشته باشند، نتیجهٔ انتخابات در مورد هر دوی آنها یکسان باشد. این شرط تضمین می‌کند که همهٔ نامزدها با هم برابرند.

ارو در سال ۱۹۶۱ ثابت کرد که هیچ‌یک از روشهای انتخاباتی با بیش از ۲ نامزد امکان ندارد در هر سه شرط الف، ب و ج صدق کند! یعنی اگر سه شرط الف، ب و ج معیار عادلانه بودن انتخاب باشند، هیچ روش انتخاباتی‌ای با بیش از دو نامزد عادلانه نیست! البته دقت کنید که ارو ثابت نکرده است که هر روش انتخاباتی در هر شرایطی ناعادلانه است، بلکه ثابت کرده است که به‌ازای هر روش انتخاباتی، شرایطی از توزیع فهرستهای ترجیح رأی‌دهندگان را می‌توان در نظر گرفت که در آن شرایط، نتیجه‌ی انتخابات عادلانه نباشد (آن هم در صورتی که «عدالت» در انتخابات را با سه معیار بالا بسنجیم).

منبع

Michel Le Breton, John A. Weymark, "Arrovian Social Choice Theory on Economic Domains", *IDEI Working Paper*, n. 143, 2002, revised September 2003.

1. Kenneth J. Arrow

ریاضیات و صنعت نفت

آرش فهیم

۱. عدد گمشدهٔ دنباله را حدس بزنید!

حتماً مشابه سؤالهای زیر را قبلاً دیده‌اید.

سؤال ۱. در دنبالهٔ

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ?

مقدار «?» را حدس بزنید.

سؤال ۲. در دنبالهٔ

۵, ۶, ۸, ۱۱, ۱۵, ?, ۲۶, ۳۳

مقدار «?» را حدس بزنید.

پیشنهاد می‌کنیم که این دنباله‌ها را به دوستان خود هم نشان دهید و پاسخهای آنها را با هم مقایسه کنید. انتظار می‌رود که پاسخها یکسان باشند. اگر چنین نباشد می‌توان به‌راحتی کسانی را که پاسخ متفاوتی داده‌اند قانع کرد که پاسخشان نادرست است.

اکنون مسأله‌ای مشکلتر پیش روی شما می‌گذاریم.

سؤال ۳. در این دنباله از اعداد، عددهای حذف شده را حدس بزنید:

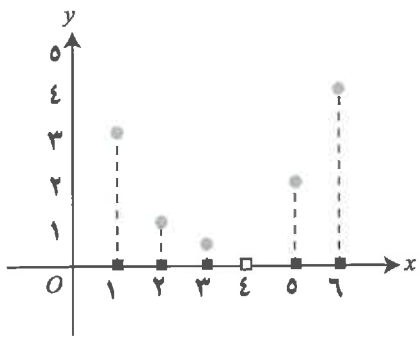
۲, ۴, ?, ۸, ?, ۱۲, ۱۳, ?, ۱۸, ?

اگر این مسأله را به دوستان خود نشان دهید احتمالاً نمی‌توانید در مورد جواب به اتفاق‌نظر برسید. حتی ممکن است یک نفر چند جواب پیشنهاد دهد. مثلاً ممکن است به جای سومین علامت سؤال، کسی ۱۶ و دیگری ۱۵ را پیشنهاد دهد. حتی ممکن است ۱۴ یا ۱۷ را نیز پیشنهاد دهند. با وجود این، دوستان شما بر سر این مسأله توافق دارند که ۵ یا ۱۰ یا ۱۹ را نمی‌توان در آنجا قرار داد.

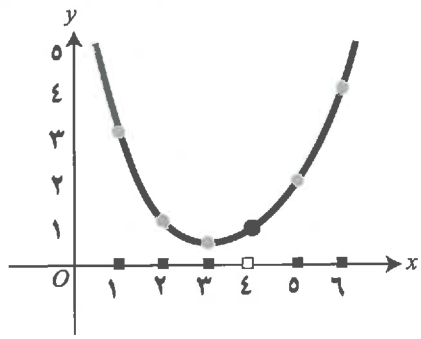
اعداد حقیقی

در بخش قبلی دنباله‌هایی از اعداد طبیعی در نظر گرفتیم. می‌توانستیم در مورد اعداد صحیح نیز همان سؤالها را مطرح کنیم. در این بخش به مسألهٔ مشابه در مورد اعداد حقیقی می‌پردازیم.

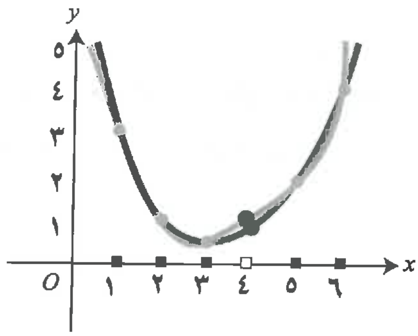
سؤال ۱. در شکل زیر روی محور xها نقاطی با مربع توپر مشخص شده‌اند. متناظر این نقاط، مقادیری داده شده‌است و نقطه‌های متناظر با آن مقادیر در شکل با دایرهٔ توپر علامت‌گذاری شده‌اند. می‌خواهیم تابعی مشخص کنیم که نمودار آن از دایره‌های توپر عبور کند.



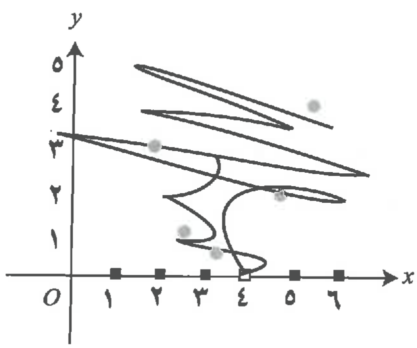
برای شروع از دوستان خود بخواهید که نمودار تابعی را رسم کنند که از نقاط مشخص‌شده بگذرد. مقدار تابع موردنظر در نقطه‌ای که با مربع سفید مشخص شده است، مقداری است که دوستان شما حدس زده‌اند. شاید شکل یکی از دوستان شما شبیه به این باشد:



دایرهٔ سیاه مشخص‌شده در بالای نقطهٔ سفید، مقداری را که با استفاده از نمودارِ رسم‌شده حدس می‌زنیم نشان می‌دهد. اما این کار اندکی مشکل ایجاد می‌کند. اگر فردا از دوست خود دوباره بخواهید که همین مسأله را حل کند، ممکن است به نتیجه‌ای دیگر برسد. یعنی دقیقاً همین تابع را نکشد و تابعی دیگر مشابه آن بکشد. وضعیت تا حدی مشابه سؤال ۳ در بخش قبل است.



بنابراین، گرچه دوست شما جوابی «عقلانی» به مسأله داده است، جواب او در روزهای مختلف، یکسان نیست. به‌علاوه شاید دوست شما هر روز وقت پاسخگویی به سؤالات شما را نداشته باشد و روزی از دست شما خسته شود و برای شما شکلی نظیر این رسم کند!



اگر بخواهیم هر روز به این نوع سؤالات پاسخ دهیم (همانند آنچه در علوم مهندسی پیش می‌آید) باید چاره‌ای دیگر بیابیم. به نظر می‌رسد که اگر از ربات یا رایانه بخواهیم این کار را بکند دیگر مشکلات ذکرشده پیش نخواهد آمد، چون ربات و رایانه را می‌توان طوری برنامه‌ریزی کرد که در زمانهای مختلف به مسألهٔ یکسان، پاسخ یکسان بدهد. همچنین ربات و رایانه، برخلاف انسان می‌تواند با سرعت مناسب، به تعداد زیادی از مسائل ما پاسخ بدهد.
بنابراین مسألهٔ اصلی ایجاد برنامه‌ای رایانه‌ای برای این کار است و یک قدم پیشتر ایجاد الگوریتمی است که از نقاط مشخص شده، تابعی عبور دهد. چنین الگوریتمی «درون‌یاب» نامیده می‌شود. آیا می‌دانید چرا؟

درون‌یابی

در بخش قبل مسألهٔ درون‌یابی را تشریح کردیم. فرض کنید در نقاطی مانند x_1، ... و x_N که اعدادی حقیقی‌اند به‌ترتیب مقادیری مانند y_1، ... و y_N داده شده باشند. می‌خواهیم تابعی مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ طوری بیابیم که

$y_1 = f(x_1)$، . . . و $y_N = f(x_N)$. اما تعداد توابعی مانند f که جواب مسألهٔ درون‌یابی باشند، خیلی‌خیلی زیاد است، حتی اگر تابع f را «پیوسته» انتخاب کنیم. در بخش قبل گفتیم که هدف ما یافتن الگوریتمی رایانه‌ای برای درون‌یابی است. با وجود این، نمی‌خواهیم که نتیجهٔ الگوریتم درون‌یابی معقول نباشد. یعنی مثلاً اگر آن را به دوستان خود نشان دهیم بگویند چه جواب نامعقولی؛ مثل شکل قبل!

مسألهٔ درون‌یابی: در نقاطی مانند x_1، . . . و x_N به‌ترتیب مقادیری مانند y_1، . . . و y_N داده شده است. **تابعی پیوسته** مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بیابید که

$$f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_N) = y_N$$

الگوریتم درون‌یابی: الگوریتمی بیابید که به‌ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ مانند N و هر مجموعه از نقاط مانند x_1، . . . و x_N و مقادیری مانند y_1، . . . و y_N **تابعی پیوسته** مانند $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشخص کند که

$$f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_N) = y_N$$

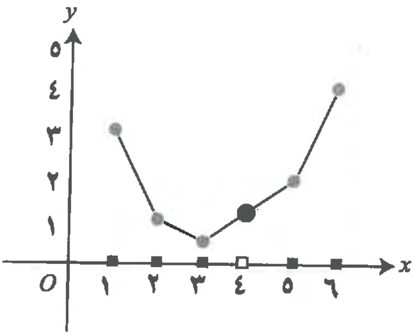
عدد N در عبارت بالا دلخواه است، زیرا الگوریتم دلخواه ما نباید طوری باشد که فقط مثلاً برای ۳ داده ($N = 3$) کارکند. الگوریتم باید به‌ازای هر تعداد داده پاسخی بدهد. البته الگوریتمها به‌ازای $N = 1$ جوابی نمی‌دهند.

۲. روشهای درون‌یابی

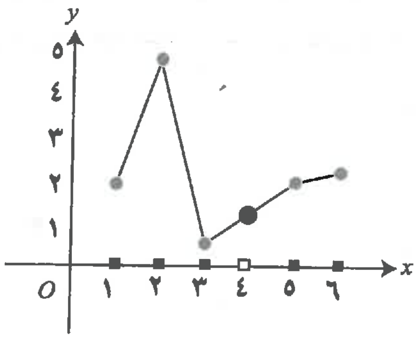
اینکه موجودی ذی‌شعور نمودار تابعی را که هم نموداری هموار و تمیز داشته باشد و هم این نمودار از چند نقطهٔ مشخص‌شده بگذرد، رسم کند، با تفهیم روشی به رایانه برای این کار بسیار متفاوت است، زیرا رایانه بسیار احمق است! فقط بسیار سریع کار می‌کند، بدون اینکه خسته شود. بنابراین بهتر است کمی از روش انسانی خود دست برداریم.

درون‌یابی خطی

بیایید روشی بیابیم که مسیری ناهموار از این نقاط عبور دهد. اولین پیشنهاد این است که نقاط متوالی را با پاره‌خط به هم وصل کنیم. نام این روش «درون‌یابی خطی» است. درون‌یابی خطی به نقطهٔ سفید مقداری می‌دهد که از روی پاره‌خط واصل دو نقطهٔ اطراف آن مشخص می‌شود.



اگر در نقاط دیگر مقدار داده‌ها را تغییر دهیم، مقدار داده‌شده به نقطهٔ سفید عوض نمی‌شود، این خاصیت را موضعی بودن روش درون‌یابی می‌نامیم.

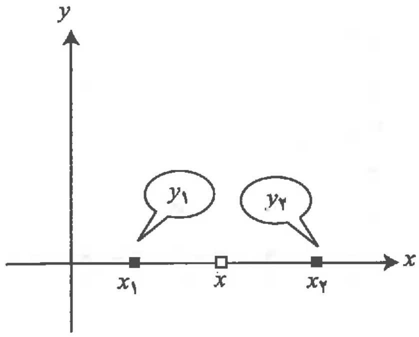


نقطهٔ x بین $x_۱$ و $x_۲$ که در $x_۱$ و $x_۲$، مقدار به‌ترتیب برابر $y_۱$ و $y_۲$ است، واقع است. می‌خواهیم ببینیم که درون‌یاب خطی به x چه مقداری می‌دهد. با توجه به معادلهٔ خط گذرنده از $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$، درون‌یاب خطی به x مقدار $y_۱ + (x - x_۱)\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ را می‌دهد. می‌توان به‌راحتی فهمید که درون‌یاب خطی به نقاط $x_۱$ و $x_۲$ همان مقادیر $y_۱$ و $y_۲$ را می‌دهد، یعنی

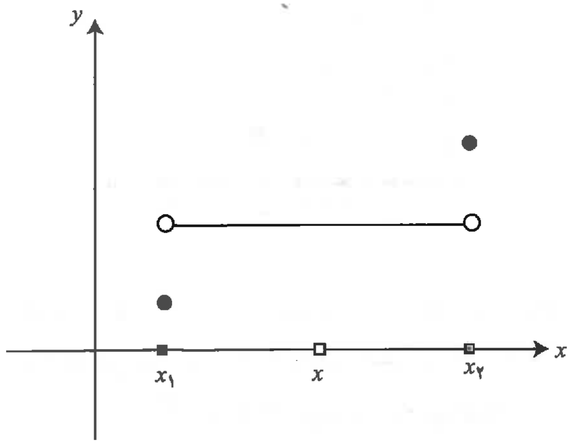
$$f(x_۱) = y_۱ \quad , \quad f(x_۲) = y_۲$$

اکنون می‌خواهیم تصور جالبی از این درون‌یابی ارائه دهیم که در ادامهٔ کار راهگشا خواهد بود. اگر معادلهٔ خط گذرنده از $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ را به‌صورت $f(x) = \frac{x - x_۱}{x_۲ - x_۱}y_۲ + \frac{x_۲ - x}{x_۲ - x_۱}y_۱$ بنویسیم، مقدار $f(x)$ «میانگین وزن‌دار» از دو مقدار $y_۱$ و $y_۲$ است. با توجه به این مطلب می‌توان تصوری جالبتر از این درون‌یاب ارائه داد:

هر یک از دو نقطهٔ اطراف نقطهٔ x، به x پیشنهاد می‌دهند که مقدار آن را بگیرد. نقطهٔ x تصمیم می‌گیرد برای اینکه دو همسایهٔ خود را نرنجاند، پیشنهاد هر دوی آنها را در مقدار انتخابی خود لحاظ کند. بنابراین مجبور می‌شود «میانگینی وزن‌دار» از این دو یعنی $f(x) = \frac{\alpha_۱}{\alpha_۱ + \alpha_۲}y_۱ + \frac{\alpha_۲}{\alpha_۱ + \alpha_۲}y_۲$ را انتخاب کند.



α_1 و α_2 به‌ترتیب وزنهای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هستند. چرا این میانگین باید وزن‌دار باشد و این وزنها بر چه اساسی باید انتخاب شوند؟ برای روشن شدن پاسخ این سؤال توجه کنید که اگر همهٔ نقاط بین x_1 و x_2 وزنهایی یکسان برای x_1 و x_2 در میانگین وزن‌دار خود انتخاب کنند، این اتفاق بد رخ می‌دهد:



این وزن‌دهی عادلانه نیست. بهتر است سهم همسایهٔ نزدیکتر در میانگین وزن‌دار بیشتر باشد. درون‌یاب خطی سهم x_1 را $\alpha_1 = x_2 - x$ و سهم x_2 را $\alpha_2 = x - x_1$ تعیین می‌کند.

درون‌یابی معکوس فاصله

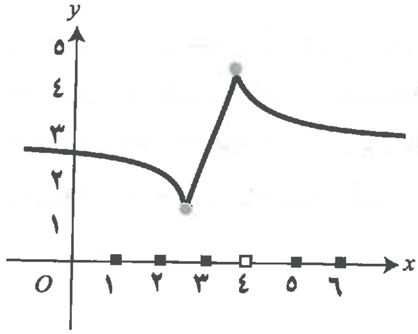
بر اساس آنچه گفتیم می‌توان وزنهای دیگری نیز معرفی کرد: «هرچه فاصله تا همسایه کمتر، وزن آن همسایه بیشتر». مثلاً می‌توان وزنهای

$$\alpha_1 = \frac{1}{|x - x_1|}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{|x - x_2|}$$

را در نظر گرفت. این وزنها معکوس فاصلهٔ نقطهٔ x تا دادهٔ موردنظر هستند. نتیجهٔ حاصل را در شکل زیر می‌بینید. به‌طور کلی و به‌ازای عدد طبیعی‌ای مانند n می‌توان α_1 و α_2 را به‌صورت

$$\alpha_1 = \frac{1}{|x-x_1|^n}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{|x-x_2|^n}$$

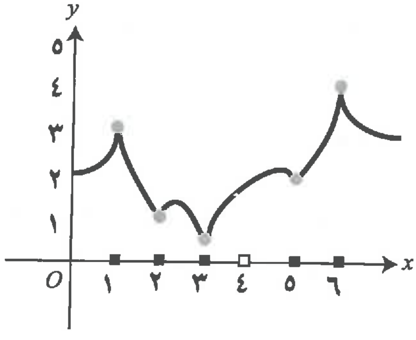
تعیین کرد.



همهٔ این درون‌یابها بر اساس معکوس فاصله هستند. همچنین دارای خاصیت موضعی هستند. از اشکالهای خاصیت موضعی این است که در نمودار درون‌یابی‌شده شکستگی به‌وجود می‌آورد. این شکستگیها را می‌توان در شکل بالا دید. این عیب را می‌توان با رها کردن خاصیت موضعی برطرف کرد. می‌توان به جای نظرخواهی از همسایه‌ها، از بقیه داده‌ها هم نظر خواست. نتیجهٔ این کار این است که به‌ازای نقطه‌ای مانند x، مقدار

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_N} y_1 + \cdots + \frac{\alpha_N}{\alpha_1+\cdots+\alpha_N} y_N$$

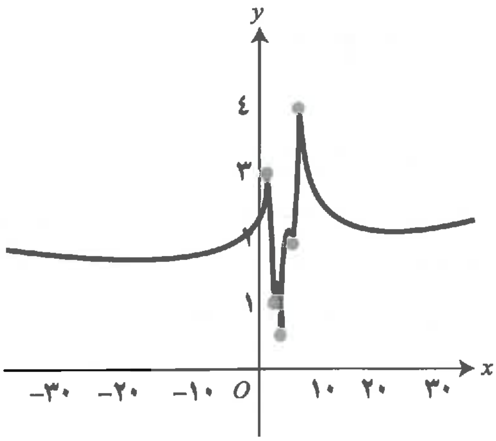
مشخص می‌شود که در آن (x_1, y_1)، ... و (x_N, y_N) تمام نقاط داده‌ای‌اند و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند i که $1 \leq i \leq N$، $\alpha_i = \frac{1}{|x-x_i|^n}$ این درون‌یابها را «درون‌یاب معکوس فاصله» می‌نامند. برای مثال، به این شکل توجه کنید:

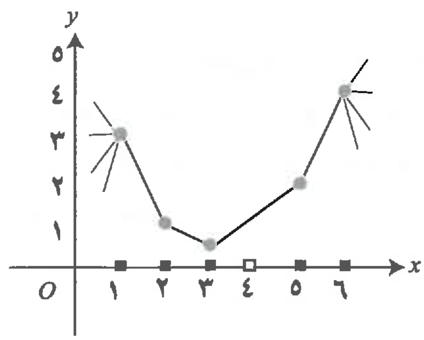


نکته: دانستن این نکته ضروری است که ضرب عددی ناصفر در همهٔ وزنها، تأثیری در میانگین وزن‌دار ندارد. تقسیم وزنها بر مجموع آنها به این منظور است که جمع ضریبهای مقادیر داده‌ها برابر ۱ شود. در غیر این صورت درون‌یاب به خود نقاط داده‌ای مقادیر داده‌ها را نسبت نمی‌دهد.

مقایسهٔ درون‌یابی خطی و درون‌یابی معکوس فاصله

برون‌یابی یعنی مشخص کردن مقداری مناسب به‌ازای نقطه‌ای که «خارج» نقاط داده‌ای است. خاصیت مفیدی که برخی درون‌یابها دارند، برون‌یابی است. درون‌یاب خطی برخلاف درون‌یاب معکوس فاصله این خاصیت را ندارد. در درون‌یابی که خاصیت برون‌یابی دارد نیازی نیست که نقطهٔ x در میان داده‌ها باشد تا بتوان مقداری به آن نسبت داد؛ بلکه هر نقطه‌ای از محور xها را می‌توان با استفاده از آن درون‌یابی کرد.





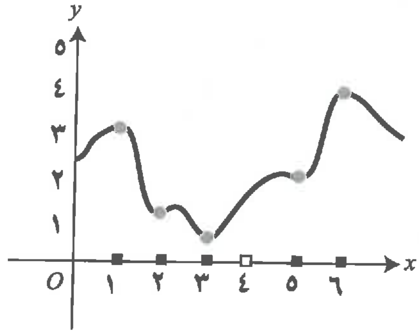
به شکل بالا، سمت چپ توجه کنید. در این شکل درون‌یاب معکوس فاصله با ۵ نقطه را می‌بینید. وقتی از x_5 به سمت مثبت محور xها دور می‌شویم، $f(x)$ به میانگین حسابی y_1، . . . و y_5 نزدیک می‌شود. اگر با حد آشنا باشید می‌توانید ثابت کنید که

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{y_1 + \cdots + y_5}{5}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{y_1 + \cdots + y_5}{5}$$

خاصیت مفید دیگر درون‌یابی معکوس فاصله این است که نموداری هموارتر و بدون شکستگی به‌دست می‌دهد. اگر در وزنها (یعنی $\alpha_i = \frac{1}{|x-x_i|^n}$ که $1 \le i \le N$)، $n \ge 2$ آن‌گاه در نمودار شکستگی دیده نمی‌شود، مانند شکل صفحهٔ بعد.



درون‌یابی چندجمله‌ای

درون‌یاب چندجمله‌ای بر این خاصیت متکی است که از هر N نقطه دقیقاً یک چندجمله‌ای از درجهٔ $N-1$ می‌گذرد. با توجه با این خاصیت فرض کنید که می‌خواهیم از نقاط (x_1, y_1)، ... و (x_N, y_N) چندجمله‌ایی به شکل $f(x) = a_{N-1}x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ عبور دهیم، به‌طوری که $f(x_i) = y_i$ که در اینجا، $1 \leq i \leq N$ بر همین اساس می‌توان ضرایب a_1، ... و a_N را یافت.

$$\begin{cases} a_{N-1}x_1^{N-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \vdots \\ a_{N-1}x_N^{N-1} + \cdots + a_1 x_N + a_0 = y_N \end{cases}$$

با استفاده از هر روش مناسبی برای حل این دستگاه می‌توان ضرایب a_0، ... و a_N را به‌دست آورد.

نکته: در اینجا روشی که برای حل دستگاه بالا به کار می‌بریم اهمیت پیدا می‌کند. برخی از روشها سریعتر از بعضی روشهای دیگر عمل می‌کنند. در بخش شمارش عملیات به این مطلب می‌پردازیم. در بخش بعدی روشی برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای بدون استفاده از حل دستگاه معرفی می‌کنیم.

روش لاگرانژ

در این روش از ایدهٔ میانگین وزن‌دار استفاده می‌شود. البته می‌خواهیم که درون‌یاب حاصل، چندجمله‌ای باشد. فرض کنید که $f(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i L_i(x)$ درون‌یاب ما باشد که در آن L_iها چندجمله‌ایهایی بر حسب x از درجهٔ $N-1$اند. می‌خواهیم که L_i در همهٔ نقاط داده‌ای بجز x_i، مقدار ۰ و در x_i مقدار ۱ را اتخاذ کند. چون درجهٔ L_i

برابر $N-1$ است تعداد ریشه‌های آن حداکثر $N-1$ است. پس ریشه‌های L_i دقیقاً x_1، ...، x_{i-1}، x_{i+1}، ... و x_N هستند. بنابراین می‌توانیم L_i را تجزیه کنیم و بنویسیم

$$L_i(x) = k\prod_{j\neq i}(x-x_j)$$

که نماد $\prod$ به معنای حاصلضرب است. برای مثال، $\prod_{i=1}^{10} i = 1\times 2\times\cdots\times 10$ و $\prod_{i=1}^{3}(x-x_i)$ برابر است با $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ و در عبارت بالا، $\prod\limits_{i\neq j}(x-x_i)$ برابر است با حاصلضرب همهٔ $(x-x_i)$ها، بجز $x-x_j$. در دستور بالا، k عددی ثابت است و چون $L_i(x_i)=1$، k برابر $\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)$ به‌دست می‌آید. حاصل کار چنین است

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\prod\limits_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

که نماد $\sum$ به معنای جمع بستن است. مثلاً $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

شمارش عملیات

پیش از ادامهٔ بحث درون‌یابی چندجمله‌ای، مطلبی را دربارهٔ مقایسهٔ روشهایی که رایانه اجرا می‌کند، توضیح می‌دهیم. در اینجا می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌توان فهمید که الگوریتمی از الگوریتمی دیگر سریعتر است. فقط به الگوریتمهایی توجه می‌کنیم که از عبارات جبری تشکیل شده‌اند. الگوریتمهای درون‌یابی از این نوع‌اند.

برای روشن‌شدن مطلب، فرض کنید که رایانه باید حاصل $ac+bc$ را بیابد، که در اینجا a، b و c اعدادی حقیقی‌اند. در این صورت، رایانه ۲ عمل ضرب و یک عمل جمع اجرا می‌کند. گاهی اوقات می‌توانیم عبارات را به‌شکلی بنویسیم که مساوی شکل قبلی است، اما عملیات کمتری برای محاسبهٔ حاصل نیاز است. مثلاً اگر $ac+bc$ را به‌شکل $(a+b)c$ بنویسیم، رایانه باید یک ضرب و یک جمع اجرا کند.

اکنون فرض کنید در مسألهٔ درون‌یابی‌ای، N داده موجود باشد. اگر بخواهیم مقدار را در نقطه‌ای مانند x درون‌یابی کنیم، تعداد عملیاتی که باید اجرا شود چند است؟

برای محاسبهٔ تعداد عملیات در درون‌یاب معکوس فاصله، تعداد عملیات جبری در دستور زیر را می‌یابیم

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}y_1+\cdots+\frac{\alpha_N}{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}y_N$$

که در اینجا، اگر $1\leq i\leq N$،

$$\alpha_i = \frac{1}{|x-x_i|^2} \qquad (1)$$

می‌توانیم برای کم شدن تعداد عملیات، دستور را به‌صورت $f(x) = \frac{\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_N y_N}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}$ بنویسیم. برای به‌دست آوردن هر یک از α_1، ... و α_N در دستور (۱)، یک عمل جمع و یک عمل ضرب و یک عمل تقسیم لازم است، که تقسیم را نیز ضرب به حساب می‌آوریم. بنابراین، برای به‌دست آوردن همهٔ α_iها، به N عمل جمع و $2N$ عمل ضرب احتیاج داریم. در صورت کسری که برابر $f(x)$ است، N عمل ضرب و $N-1$ عمل جمع وجود دارد. در مخرج کسر، چون α_iها قبلاً حساب شده‌اند، فقط $N-1$ عمل جمع داریم. آخرین عمل هم ضرب است (تقسیم صورت کسر بر مخرج آن). پس در کل، $3N+1$ عمل ضرب و $3N-2$ عمل جمع اجرا می‌شود.

اکنون در مورد درون‌یاب چندجمله‌ای در روش لاگرانژ همین کار را می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که درون‌یاب چندجمله‌ای به روش لاگرانژ این‌گونه محاسبه می‌شود

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} \tag{۲}$$

برای کم شدن عملیات، یک بار برای همیشه، حاصل $(x-x_1)\times\ldots\times(x-x_N)$ را با N عمل جمع و $N-1$ عمل ضرب حساب می‌کنیم. پس در هر بار محاسبهٔ صورت کسر در (۲) فقط یک عمل ضرب (تقسیم بر $(x-x_i)$) نیاز است. برای محاسبهٔ مخرج هر کسر $N-1$ عمل جمع و $N-2$ عمل ضرب اجرا می‌شود. پس برای محاسبهٔ هر کسر، $N-1$ جمع و N ضرب اجرا می‌شود.

بنابراین، برای محاسبهٔ $f(x)$، ابتدا $N + N(N-1)$ عمل جمع و $(N-1) + N^2$ عمل ضرب و سپس N عمل ضرب و $N-1$ عمل جمع داریم، یعنی باید مجموعاً N^2+N-1 جمع و N^2+2N-1 ضرب اجرا شود.

بنابراین، هم تعداد عملیات جمع و هم تعداد عملیات ضرب، در درون‌یاب معکوس فاصله کمتر از درون‌یاب لاگرانژ است، یعنی الگوریتم درون‌یاب معکوس فاصله سریعتر است.

می‌دانیم که می‌توان با استفاده از درون‌یاب چندجمله‌ایی، از N نقطهٔ داده چندجمله‌ایی از درجهٔ حداکثر $N-1$ گذراند. این چندجمله‌ای یکتاست. در روش اول ضرایب این چندجمله‌ای با حل دستگاه خطی به‌دست می‌آید درحالی‌که در روش دوم (لاگرانژ) این چندجمله‌ای به شکلی دیگر معرفی می‌شود. اگر روشی برای حل دستگاه انتخاب کنیم، مثلاً روش سطری ـ پلکانی، تعداد عملیات این روش حل دستگاه برابر تعداد عملیات موردنیاز برای محاسبهٔ درون‌یاب است. روشهای معمول حل دستگاه $\frac{1}{6}N^3$ عملیات ضرب دارند و عملیات جمع آنها در برابر ضرب قابل صرف‌نظر است. اما در روش لاگرانژ تقریباً N^2 عملیات ضرب داریم که اگر N بزرگ باشد بسیار کمتر است. تصور کنید که چندجمله‌ای درون‌یاب را به صورت $f(x) = a_{N-1}x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ نوشته باشیم. در این صورت برای محاسبهٔ آن تعداد $\frac{(N-1)(N+2)}{2}$ عملیات نیاز است (چرا؟). اما اگر این عبارت

را به‌صورت $f(x) = (\ldots(a_{N-1}x + a_{N-2})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0$ بنویسیم، تعداد عملیات ضرب آن به $N-1$ کاهش پیدا می‌کند. از این روش می‌توانیم پس از اینکه با استفاده از حل دستگاه ضرایب را بدست آوردیم برای محاسبهٔ درون‌یاب استفاده کنیم. اما در روش لاگرانژ نمی‌توان از این ابتکار بهره برد.

تفاضلات مُنقَسِم

اکنون بیایید فرض کنیم که درون‌یاب چندجمله‌ای را به‌صورت

$$f(x) = a_N(x-x_1)\ldots(x-x_{N-1}) + \cdots + a_2(x-x_1) + a_1$$

نوشته باشیم. می‌خواهیم a_iها را به‌دست آوریم. واضح است که $f(x_1) = a_1$. با قرار دادن x_2 در درون‌یاب می‌توانیم بنویسیم

$$f(x_2) = a_2(x_2 - x_1) + f(x_1)$$

و در نتیجه

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

برای راحتی a_1 را با $f[x_1]$ و a_2 را با $f[x_1, x_2]$ نشان می‌دهیم. به استقراء ثابت می‌شود که

$$a_i = f[x_1, \ldots, x_i]$$

که در آن $f[x_1, \ldots, x_i]$ از دستور $\frac{f[x_2,\ldots,x_i] - f[x_1,\ldots,x_{i-1}]}{x_i - x_1}$ به‌دست می‌آید.

در نمودار زیر روش این محاسبه نشان داده شده است. در ستون اول مقادیر داده‌ها زیر هم قرار دارند. ستون دوم از «تفاضل منقسم» داده‌های متوالی به‌دست می‌آید و به‌طور کلی ستون بعدی از تفاضل منقسم ستون قبلی به‌دست می‌آید. به بیان روشنتر $\frac{f[x_{j+1},\ldots,x_i] - f[x_j,\ldots,x_{i-1}]}{x_i - x_j}$ تفاضل منقسم $f[x_{j+1}, \ldots, x_i]$ و $f[x_j, \ldots, x_{i-1}]$ است که آن را با $f[x_j, \ldots, x_i]$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{array}{ccccc}
f[x_1] & & & & \\
 & f[x_1, x_2] & & & \\
f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
 & f[x_2, x_3] & & \ddots & \\
f[x_3] & & f[x_2, x_3, x_4] & & f[x_1, \ldots, x_N] \\
 & f[x_3, x_4] & & & \\
f[x_4] & & \vdots & \therefore & \\
 & \vdots & & & \\
\vdots & & f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N] & & \\
 & f[x_{N-1}, x_N] & & & \\
f[x_N] & & & &
\end{array}$$

نکته‌ی حائز اهمیت این است که در روش تفاضلات منقسم تنها مقادیر ظاهرشده در بالای هر ستون در چندجمله‌ای ظاهر می‌شود ولی برای محاسبه آنها تا به انتها باید تمام مقادیر ظاهرشده در نمودار بالا را به‌دست آورد.

عملیات ضرب مربوط به هر درایهٔ نمودار، فقط تقسیمهای مربوط به تفاضل منقسم‌اند. بنابراین در ستون iام تنها $N - i + ۱$ عملیات ضرب داریم، به استثنای ستون اول که نیاز به هیچ عملیاتی ندارد. تعداد کل عملیات $\frac{(N-۱)(N-۲)}{۲}$ است. در انتها پس از به‌دست آوردن ضرایب می‌توان از ابتکار ذکر شده در بخش قبل استفاده کرد و با نوشتن حاصل نهایی به‌شکل

$$f(x) = (\dots(a_N(x - x_{N-۱}) + a_{N-۱})(x - x_{N-۲}) + \dots + a_۳)(x - x_۲) + a_۲)(x - x_۱) + a_۱$$

تعداد ضرب‌ها را به $N - ۱$ کم کرد.

اما مزیت بسیار مهم روش تفاضلات منقسم در این است که اگر داده‌ای به مجموعهٔ داده‌ها افزوده شود (مثلاً $x_{N+۱}$) می‌توان بدون این‌که محاسبات را از نو اجرا کرد، درون‌یاب چندجمله‌ای را تغییر داد. زیرا کافی است در نمودار بالا یک سطر اضافه شود:

$$\begin{array}{ccccc}
f[x_۱] & & & & \\
& f[x_۱, x_۲] & & & \\
f[x_۲] & & f[x_۱, x_۲, x_۳] & & \\
& f[x_۲, x_۳] & & & \\
f[x_۳] & & f[x_۲, x_۳, x_۴] & & \\
& f[x_۳, x_۴] & & \ddots & \\
f[x_۴] & & \vdots & & f[x_۱, \dots, x_{N+۱}] \\
& \vdots & & \ddots & \\
\vdots & & f[x_{N-۲}, x_{N-۱}, x_N] & & \\
& f[x_{N-۱}, x_N] & & & \\
f[x_N] & & f[x_{N-۱}, x_N, x_{N+۱}] & & \\
& f[x_N, x_{N+۱}] & & & \\
f[x_{N+۱}] & & & &
\end{array}$$

از آنچه گفته شد برمی‌آید که برای محاسبهٔ درون‌یاب چندجمله‌ای روش تفاضلات منقسم روشی بهتر است.

۳. درون‌یابی و نفت

در کشور ما منابع نفتی فراوان‌اند. مجموعهٔ فنونی که در اکتشاف، استخراج و تولید نفت به‌کار می‌رود بسیار زیاد است. می‌خواهیم شما را با کاربرد درون‌یابی در بخشی از این صنعت آشنا کنیم. شاید شما که به ریاضیات علاقه‌مندید با خواندن این مطلب از اینکه زمینهٔ علمی محبوب شما در صنعت اول مملکت کاربرد دارد، خشنود شوید. البته درون‌یابی‌ای که در نفت استفاده می‌شود درون‌یابی در ابعاد بالا (بعدهای ۲ و ۳) است. این درون‌یابی تا حدی با درون‌یابی یک‌بعدی که تاکنون با آن آشنا شده‌اید تفاوت دارد ولی این تفاوت اندک است.

مخزنهای نفت چگونه‌اند؟

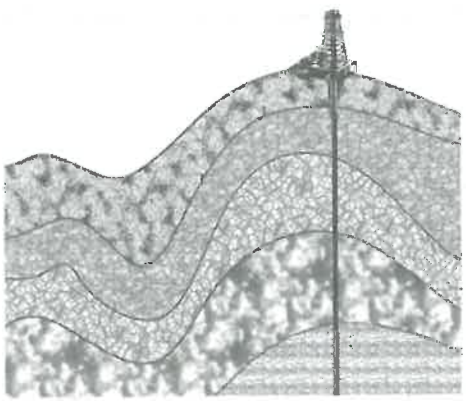
شاید تصویر مخزن نفت در کتاب‌های علوم را به یاد داشته باشید. با این تصویر به‌نظر می‌رسد که نفت در حفره یا مکانی خالی در درون زمین ذخیره شده است، در دریایی سیاه. اما این تصویر دور از واقعیت است. برای اینکه تصویر بهتری به شما دهیم، از شما می‌خواهیم که تکه‌ای اسفنج در نظر بگیرید. این اسفنج را در سطلی از آب فرو برید. اسفنج خیس می‌شود. آیا فقط سطح اسفنج خیس شده است؟ نه، درون آن نیز خیس شده است. در واقع اسفنج جسمی متخلخل است و آب در حفره‌های آن‌ها ذخیره شده است.

نفت چگونه استخراج می‌شود؟

اگر از شما بخواهند که آب داخل اسفنج را تخلیه کنید چه می‌کنید؟ حتماً آن را فشار می‌دهید و می‌چلانید. آیا در مورد نفت هم باید سنگ متخلخل را بچلانید؟ شاید دقیقاً این‌طور نباشد، اما تا حدی همین شکل است. چگونه سنگها چلانده می‌شوند؟ این عمل با ایجاد فشار در مخزن صورت می‌گیرد. در برخی مخازن همراه نفت مقداری گاز وجود دارد. فشار گاز موجود باعث می‌شود با ایجاد منفذی در مخزن نفت از آن بیرون بیاید، اما توجه کنید که به دلیل سختی سنگ این فشار باید بسیار بسیار زیاد باشد. هرچه فشار بیشتر باشد نفت با سرعت بیشتری از مخزن خارج می‌شود. در برخی مخازن فشار طبیعی گاز وجود ندارد یا اینکه آن‌قدر از آن مخرج نفت برداشت شده که فشار بسیار کم شده است. در چنین مواردی با ایجاد چاه تزریق، آب یا گاز به درون مخزن تزریق می‌کنند تا با ایجاد فشار مصنوعی نفت بیرون بیاید. پس به محاسباتی نیاز داریم تا بدانیم از کجا و با چه فشاری به مخزن تزریق کنیم تا به میزان نیاز خود نفت برداشت کنیم.

محاسبات مربوط به استخراج نفت

در معادلات حاکم بر مخازن نفت کمیتهایی مختلف دخیل‌اند. از جملهٔ این کمیتها خواص فیزیکی سنگ مانند



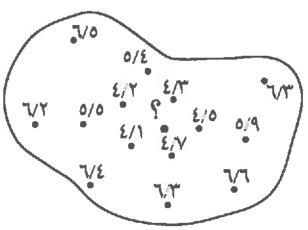
تخلخل و گذردهی و هندسهٔ کلی مخزن است. منظور از هندسهٔ مخزن، شکل و موقعیت لایه‌های مختلف زیر زمین در مخزن و نزدیکهای آن است. اگر این اطلاعات را در مورد مخزن داشته باشیم تا حد خوبی می‌توانیم چگونگی حرکت نفت، گاز و آب را در مخزن پیشبینی کنیم. در این صورت خواهیم توانست از مخزن بیشتر و کم‌هزینه‌تر برداشت کنیم.

درون مخزن چه خبر است؟

حفر چاه از مهمترین راههای کسب اطلاعات از مخزن است. با این کار می‌توانیم عمق و نوع لایه‌های مختلف زمین و خصوصیات فیزیکی آنها را بفهمیم. اما تمام این اطلاعات محدود به نقاطی است که در آنها چاهی وجود دارد و این نقاط کسر بسیار کوچکی از کل مخزن‌اند زیرا هزینه حفر چاه بسیار زیاد است و به‌علاوه اگر در همهٔ نقاط چاه حفر کنیم دیگر مخزنی باقی نخواهد ماند! باید به دنبال چاره‌ای دیگر باشیم.

درون‌یابی مخزن

راه‌حلی برای تخمین کمیتهای موردنظر، درون‌یابی است. فرض کنید تنها در چند نقطه از مخزن کمیتهای مطلوب را با حفر چاه و بیرون آوردن سنگها، اندازه گرفته باشیم. مخزن نفت ناحیه‌ای سه‌بعدی درون زمین است و به مسألهٔ درون‌یابی سه‌بعدی‌ای منجر می‌شود. شکل زیر مسألهٔ درون‌یابی دوبعدی‌ای را نشان می‌دهد.



در این شکل ناحیهٔ مشخص‌شده نمایندهٔ مخزن است و نقاط سیاه نقاطی‌اند که در آنها کمیتی اندازه‌گیری شده است. در سایر نقاط مخزن از جمله نقطهٔ سفید می‌خواهیم مقدار کمیت را «درون‌یابی» کنیم.

در این مقاله درون‌یابی یک‌بعدی را بررسی کردیم. برای درون‌یابی دوبعدی و سه‌بعدی به دانستن اطلاعاتی دربارهٔ توابع دوبعدی و سه‌بعدی نیاز داریم که بخشی از ریاضیات پایهٔ دانشگاهی است. اگر شما با توابع چندمتغیره آشنا باشید، می‌توانید مسألهٔ درون‌یابی را در ابعاد بالاتر صورت‌بندی کنید. همچنین می‌توانید درون‌یاب معکوس فاصله را نیز به ابعاد بالاتر تعمیم دهید. اما باید بدانید که درون‌یاب چندجمله‌ای را نمی‌توان در ابعاد بالا به شکلی مناسب تعمیم داد! آیا می‌دانید چرا؟

در کلاس درس هندسه

مثلثات در خدمت هندسه

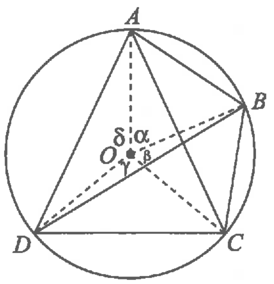
جعفر نیوشا

از قضیه‌های معروف هندسه، قضیهٔ زیر است

قضیه. در هر چهار ضلعی محدب محاطی، حاصل‌ضرب طولهای دو قطر برابر است با مجموع حاصل‌ضربهای طولهای ضلعهای روبه‌رو.

این قضیه، قضیهٔ بطلمیوس نام دارد و آن را می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی اثبات کرد:

اثبات. چهارضلعی صورت قضیه را $ABCD$ بنامید و فرض کنید مرکز دایرهٔ محیطی آن O و شعاع این دایره R باشد. زاویه‌های α، β، γ و δ را مانند شکل زیر در نظر بگیرید.



تساوی‌های زیر برقرارند

$$AB = ۲R\sin\frac{\alpha}{۲}, \qquad BC = ۲R\sin\frac{\beta}{۲}$$

$$CD = ۲R\sin\frac{\gamma}{۲}, \qquad AD = ۲R\sin\frac{\delta}{۲}$$

$$AC = ۲R\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}, \qquad BD = ۲R\sin\frac{\beta+\gamma}{۲}$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم

$$AC.BD = ۴R^۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\beta+\gamma}{۲}$$

$$(AB.CD)+(BC.AD) = ۴R^۲\left(\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}+\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\delta}{۲}\right) \qquad (*)$$

با تبدیل حاصل‌ضربها به حاصل‌جمع در تساوی (*)، به تساویهای زیر می‌رسیم

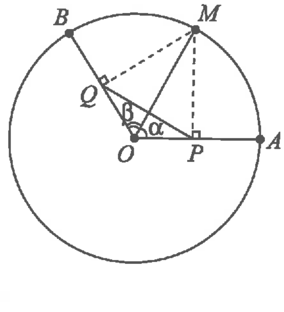
$$\begin{aligned}
(AB.CD)+(BC.AD) &= ۲R^۲\left(\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{۲}-\cos\frac{\alpha+\gamma}{۲}\right)+\left(\cos\frac{\beta-\delta}{۲}-\cos\frac{\beta+\delta}{۲}\right)\right)\\
&= ۲R^۲\left(\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{۲}+\cos\frac{\beta-\delta}{۲}\right)-\left(\cos\frac{\alpha+\gamma}{۲}+\cos\frac{\beta+\delta}{۲}\right)\right)\\
&= ۲R^۲\left(۲\cos\frac{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}{۴}\cos\frac{\alpha+\delta-(\gamma+\beta)}{۴}\right.\\
&\qquad\left.-\,۲\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{۴}\cos\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\delta)}{۴}\right)\\
&= ۴R^۲\left(\cos\left(۹۰^\circ-\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)\cos\left(۹۰^\circ-\frac{\beta+\gamma}{۲}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\cos ۹۰^\circ\cos\frac{\alpha+\gamma-(\beta+\delta)}{۲}\right)\\
&= ۴R^۲\cos\left(۹۰^\circ-\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)\cos\left(۹۰^\circ-\frac{\beta+\gamma}{۲}\right)\\
&= ۴R^۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\beta+\gamma}{۲}=AC.BD
\end{aligned}$$

■

اکنون با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس، مسأله‌ای حل می‌کنیم.

مسأله. روی محیط دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R، دو نقطهٔ ثابت مانند A' و B قرار دارند و نقطهٔ M روی کمان AB حرکت می‌کند. تصویر M روی OA را P و تصویر M روی OB را Q می‌نامیم. ثابت کنید طول پاره‌خط PQ همواره مقداری ثابت است.

راه‌حل. به شکل زیر توجه کنید.



α و β را مانند شکل بالا فرض کنید. بنابر قضیهٔ بطلمیوس،

$$OM.PQ = MP.OQ + MQ.OP$$

از طرف دیگر، $MP = R\sin\alpha$، $OQ = R\cos\beta$، $MQ = R\sin\beta$ و $OP = R\cos\alpha$. بنابراین،

$$R.PQ = R^{۲}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = R^{۲}\sin(\alpha+\beta) = R^{۲}\sin(\angle AOB)$$

در نتیجه، $$PQ = R\sin(\angle AOB)$$ ■

کارگاه الگوریتم (۱)

یحیی تابش

امروزه، کامپیوتر علاوه بر اینکه ابزار محاسبه و پردازشگر اطلاعات است، نقشی مهم به‌عنوان ابزار ارتباطی پیدا کرده است و با کامپیوتر به همراه شبکه‌های کامپیوتری به‌ویژه شبکهٔ اینترنت امکان دسترسی به اطلاعات به گونه‌ای معجزه‌آسا فراهم می‌شود. در حقیقت، وارد عصر جدیدی شده‌ایم که به «عصر اطلاعات» موسوم است و جنبه‌های مختلف زندگی، مانند جنبه‌های اقتصادی و فرهنگی، متحول شده‌اند. برای استفاده از سیستمهای کامپیوتری، چه در نقش ابزار ارتباطی بر روی شبکه و چه در نقش ابزار محاسباتی و پردازشگر اطلاعات، به ساختارهایی ویژه نیاز داریم که اطلاعات لازم را به‌عنوان «ورودی» به کامپیوتر وارد کنند و نتیجهٔ اطلاعات پردازش‌شده را به‌عنوان «خروجی» در اختیار کاربر قرار دهند. روشی که برای پردازش اطلاعات مانند امور علمی و محاسباتی و جستجو و دستیابی به اطلاعات تدوین می‌شود «الگوریتم» نام دارد و در حقیقت، با استفاده از الگوریتمها امکان استفاده و به‌کارگیری کامپیوترها برایمان فراهم می‌شود و تحولات عصر اطلاعات سامان می‌یابند. در این بخش با مفهوم الگوریتم آشنا می‌شویم و پس از بررسی مقدمات اولیه و شناخت مفاهیم لازم، به تجربهٔ جنبه‌های مختلف مانند جنبه‌های کاربردی و مسائل دشوار و خلاقانه می‌پردازیم.

الگوریتم چیست؟

«الگوریتم» به معنای شیوه و روشی است که برای روالهای محاسباتی کامپیوتری و یا پردازش اطلاعات با استفاده از کامپیوتر به کار گرفته می‌شود. هر الگوریتم مقدار یا مجموعه‌ای از مقادیر را به عنوان ورودی می‌گیرد و با شیوه‌ای مشخص آنها را پردازش می‌کند و نتیجه را به عنوان خروجی مشخص می‌کند.

الگوریتم از نام محمدبن موسی خوارزمی ریاضیدان ایرانی و بنیانگذار علم جبر گرفته شده است. او به الخوارزمی مشهور بود که به لاتین Al Khawarizmi نوشته می‌شود و از نام او کلمهٔ Algorithm به معنای شیوه و روش محاسبه گرفته شد.

خوارزمی در قرن سوم هجری می‌زیست و کتاب مشهور او «الجبر و المقابله» است که حدود سال ۸۳۰ میلادی تألیف شده است و شاخه‌ای از ریاضیات که «جبر» نامیده می‌شود اولین بار در این کتاب مطرح شده است. در این کتاب خوارزمی شیوه‌هایی برای حل مسائل کاربردی با استفاده از معادلات ارائه کرده است و همین امر سبب شد که شیوه‌های محاسبه و پردازش اطلاعات نیز به «الگوریتم» مشهور شوند.

تاکنون با الگوریتمهای محاسباتی متعددی آشنا شده‌ایم اما شاید آنها را به جای با کامپیوتر، با مداد و کاغذ اجرا کرده‌ایم. یکی از این الگوریتمهای معروف، روش محاسبهٔ ریشه‌های معادله‌های درجهٔ دوم به صورت $ax^{۲} + bx + c = ۰$ است که $a \neq ۰$ و می‌دانیم که ریشه‌های چنین معادله‌ای از دستورهای

$$x_{۱} = \frac{-b + \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a} \quad \text{و} \quad x_{۲} = \frac{-b - \sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a}$$

محاسبه می‌شوند. اگر a، b و c مشخص باشند، با استفاده از دستورهای بالا متوجه می‌شویم که چگونه و با چه ترتیبی باید محاسبه کنیم تا جواب معادله به‌عنوان خروجی مشخص شود.

مسائل گوناگون دیگری وجود دارند که با الگوریتمهای مناسب حل می‌شوند. برای طراحی الگوریتمها روشهای مختلفی وجود دارند که کم‌کم با آنها آشنا می‌شویم اما قبل از اینکه به این تکنیکها بپردازیم، چند مثال را بررسی می‌کنیم.

خرد کردن پول

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. می‌خواهیم n تومان را با سکه‌های یک، ۲ و ۵ تومانی خرد کنیم، به‌طوری که مجموع تعداد سکه‌ها کمترین تعداد ممکن باشد (فرض کنید از این سکه‌ها به هر تعدادی که لازم داریم، در اختیار داشته باشیم).

الگوریتم به این صورت است

گام ۱: هر قدر که بتوانیم سکه‌های ۵ تومانی برمی‌داریم تا مقدار باقی‌مانده از ۵ تومان کمتر شود.

گام ۲: از سکه‌های باقی‌مانده در گام ۱ آن قدر سکهٔ ۲ تومانی برمی‌داریم تا باقی‌مانده از ۲ تومان کمتر شود.

گام ۳: به مقدار باقی‌مانده در گام ۲ سکهٔ یک تومانی برمی‌داریم.

الگوریتم بالا الگوریتمی جالب است اما بیان الگوریتمها به صورت جملات و عبارات تا حدودی دشوار است.

روش مناسب این کار استفاده از دستورالعمل‌های «شِبهِکُد» است. در مثالهای بعدی، الگوریتمها را با استفاده از شبه‌کدها بیان می‌کنیم و بعداً دربارهٔ شبه‌کدها نیز توضیحات بیشتری خواهیم داد.

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک

فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند، که $m > n$. می‌خواهیم الگوریتمی برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد طراحی کنیم. از روشی که به روش اقلیدس معروف است استفاده می‌کنیم. الگوریتم اقلیدس بر این نکته استوار است که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $m - n$ و n با هم برابرند. بنابراین، m را بر n تقسیم می‌کنیم و همین کار را با n و باقیماندهٔ تقسیم ادامه می‌دهیم تا باقیمانده صفر شود و ب.م.م را بیابیم. این الگوریتم را به صورت شبه‌کُد به صورت زیر می‌نویسیم

```
GCD (m, n)
Input : m, n
Output : gcd (m, n)
begin
    a := max(m, n)
    b := min(m, n)
    r := 1
    while r > 0 do        (r is the reminder)*
        r := a mod b
        a := b
        b := r
   gcd (m, n) := a
end
```

به‌ازای $m = ۱۸$ و $n = ۱۲$ الگوریتم بالا را بررسی می‌کنیم. الگوریتم یک حلقهٔ تکرارشوندهٔ اصلی دارد که با **while** مشخص شده است و معنایش این است که تا وقتی $r > ۰$، دستورهای زیر while ادامه پیدا می‌کند. در این مثال $a = ۱۸$ و $b = ۱۲$، پس دستور $r := a \bmod b$ باقیماندهٔ تقسیم a بر b را حساب می‌کند، پس $r := ۶$، سپس $a := ۱۲$ و $b := ۶$ و حلقه دوباره تکرار می‌شود، یعنی ۱۲ را بر ۶ تقسیم می‌کنیم. باقیمانده برابر صفر است ($r = ۰$). اکنون a برابر ۶ است و چون r برابر صفر است، دیگر شرط ادامهٔ حلقهٔ while برقرار نیست، پس به مرحلهٔ بعد می‌رویم، $\gcd(۱۸, ۱۲) := ۶$ و کار تمام می‌شود.

*. ترجمه: r باقیمانده است.

مرتب‌سازی حُبابی

مرتب‌سازی از مسأله‌های اساسی و مهم است و الگوریتمهای متعددی برای آن وجود دارد. مقصود از مرتب‌سازی این است که مجموعه‌ای از اعداد را مثلاً از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. مثلاً مجموعهٔ اعداد

$$۷, ۳, ۵, ۲, ۱۱, ۸$$

پس از مرتب شدن به این صورت درمی‌آید

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۸, ۱۱$$

در حالت کلی، دنباله‌ای از n عدد مانند a_1، a_2، ... و a_n در نظر می‌گیریم. مقصود از مرتب‌سازی آنها پیدا کردن جایگشتی از آنهاست که اعداد در این جایگشت به شکل صعودی مرتب شده باشند، یعنی

$$a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$$

می‌خواهیم الگوریتم **مرتب‌سازی حُبابی** را بررسی و آن را به صورت شبکه‌کد بیان کنیم. در الگوریتم مرتب‌سازی حبابی هر عضو را با عضوهای بعدی مقایسه می‌کنیم و در هر مقایسه، عضو بزرگتر را جابه‌جا می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم تا مجموعه مرتب شود. مثال بالا را بررسی می‌کنیم:

۷	۳	۵	۲	۱۱	۸
۳	۷	۵	۲	۱۱	۸
۳	۵	۷	۲	۱۱	۸
۳	۵	۲	۷	۱۱	۸
۳	۵	۲	۷	۱۱	۸
۳	۵	۲	۷	۸	۱۱
۳	۵	۲	۷	۸	۱۱
۳	۲	۵	۷	۸	۱۱
۳	۲	۵	۷	۸	۱۱
۳	۲	۵	۷	۸	۱۱
۲	۳	۵	۷	۸	۱۱
۲	۳	۵	۷	۸	۱۱
۲	۳	۵	۷	۸	۱۱
۲	۳	۵	۷	۸	۱۱
۲	۳	۵	۷	۸	۱۱

الگوریتم به‌صورت زیر است

```
Bubble - Sort (n, A[1], A[2], ..., A[n])
begin
    for i := n − 1 downto 1 do
        for j := 1 to i do
            if A[j] > A[j + 1] then
                exchange A[j] and A[j + 1]
end
```

همان‌طورکه می‌بینید، این الگوریتم شامل تعداد زیادی مقایسه است و در عمل بسیار وقت‌گیر و طولانی است. به همین دلیل، تدوین الگوریتمهایی برای مرتب‌سازی که این کار را سریعتر به انجام رسانند بسیار مفید است. در بحثهای بعدی روشهای دیگر مرتب‌سازی را بررسی می‌کنیم.

کارگاه

الگوریتمی بنویسید تا از بین n عدد مانند $A[۱]$، $A[۲]$، ... و $A[n]$ بزرگترین آنها را پیدا کند.

منابع

۱. محمدبن موسی خوارزمی، جبر و مقاله، ترجمهٔ حسین خدیو جم، انتشارات خوارزمی، ۱۳۴۸.

2. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2001.

مسائل ریاضی المپیادی

امید حاتمی ورزنه

۱. همهٔ اعداد طبیعی مانند x و n را بیابید به‌طوری که $x^n + ۲^n + ۱$ مقسوم‌علیهی از $x^{n+۱} + ۲^{n+۱} + ۱$ باشد.

۲. در مثلث ABC، $\angle A = ۹۰^\circ$ و دایرهٔ محاطی در E و F بر AB و AC مماس است و M و N وسطهای AB و AC هستند. MN دایرهٔ محیطی را در P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید E و F و P و Q روی یک دایره قرار دارند.

۳. n و k اعدادی طبیعی‌اند که $k \geq ۱$ و $n \geq ۲k + ۱$. فرض کنید n نقطه روی دایره داده شده باشند. $nk + ۱$ وتر دلخواه از بین وترهایی که این نقاط را به هم متصل می‌کنند، رسم می‌کنیم. ثابت کنید $k + ۱$ وتر وجود دارند که هیچ دوتایی از آنها نقطه‌ی مشترکی ندارند.

۴. کلیهٔ توابع مانند f، $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ را بیابید به‌طوری که

$$۲f(f(x)) = f(۲x)$$
$$f(x) + f(\frac{۱}{x}) = ۱$$

۵. فرض کنید همهٔ زوایای هشت‌ضلعی‌ای با یکدیگر برابر باشند و طولهای اضلاع آن، گویا باشند. ثابت کنید که این هشت‌ضلعی مرکز تقارن دارد.

۶. فرض کنید G گرافی باشد که اگر e تعداد یالها و v تعداد رأسهای آن باشد، $e \geq \frac{v^۲}{۴} + ۱$. ثابت کنید G دو مثلث دارد که دقیقاً در یک رأس مشترک‌اند.

راه‌حل مسأله‌ای از چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

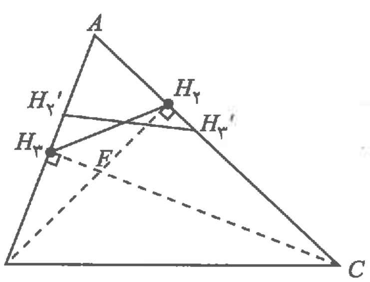
چهل و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در روزهای ۱۹ و ۲۰ جولای ۲۰۰۰ در کرهٔ جنوبی برگزار شد. در این المپیاد، مانند سالهای قبل، هر روز سه مسأله برای حل به شرکت‌کنندگان در المپیاد داده می‌شد و فرصت حل این مسأله‌ها، در هر یک از روزها ۴ ساعت و ۳۰ دقیقه بود. به‌طور سنتی، مسألهٔ شمارهٔ ۶ در المپیادها سخت‌ترین مسألهٔ المپیاد است و همهٔ شرکت‌کنندگان برجسته در رقابتی همه‌جانبه به این مسأله حمله می‌کنند. در سال ۲۰۰۰ مسألهٔ شمارهٔ ۶ مسأله‌ای در هندسه بود. در این المپیاد، امین امین‌زاده گوهری ـ از اعضای تیم ایران ـ این مسأله را به روشی جالب حل کرد. راه‌حل او آمیخته‌ای از روشهای هندسهٔ مسطحهٔ کلاسیک، هندسهٔ برداری و هندسهٔ تحلیلی بود و از مفاهیمی دیگر نیز در آن استفاده شده بود. امین‌زاده در این المپیاد مدال طلا گرفت.

در ادامه، صورت این مسأله و راه‌حل امین‌زاده را می‌بینیم.

مسألهٔ ۶. فرض کنید AH_1، BH_2 و CH_3 ارتفاعهای مثلثی حاده مانند ABC باشند. دایرهٔ محاطی مثلث ABC به‌ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB در T_1، T_2 و T_3 مماس است. فرض کنید L_1، L_2 و L_3 به‌ترتیب قرینه‌های H_2H_3، H_3H_1 و H_1H_2 نسبت به خطهای T_2T_3، T_3T_1 و T_1T_2 باشند.

ثابت کنید L_1، L_2 و L_3 مثلثی را مشخص می‌کنند که رأسهای آن روی دایرهٔ محاطی مثلث ABC قرار می‌گیرند.

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که $BC \parallel L_1$. برای اثبات این موضوع دقت کنید که $\angle B = \angle AH_2H_3$. قرینهٔ H_2H_3 نسبت به T_2T_3 با قرینهٔ H_2H_3 نسبت به نیمساز زاویهٔ A موازی است، زیرا نیمساز A بر T_2T_3 عمود است. اکنون اگر H_2' و H_3' قرینه‌های H_2 و H_3 نسبت به نیمساز A باشند، آن‌وقت $\angle AH_2'H_3' = \angle AH_2H_3 = \angle B$. در نتیجه، $BC \parallel H_2'H_3'$. از طرفی $L_1 \parallel H_2'H_3'$. پس $BC \parallel L_1$.



به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که $AC \parallel L_2$ و$BA \parallel L_3$. پس مثلثی که L_1، L_2 و L_3 تشیکل می‌دهند با مثلث ABC متجانس است. در نتیجه اگر M_1، M_2 و M_3 به‌ترتیب وسطهای اضلاع BC، CA و AB باشند، مثلث مذکور متجانس با مثلث $M_1M_2M_3$ هم هست. با توجه به اینکه دایرهٔ نُه‌نقطهٔ مثلث ABC از نقاط M_1، M_2 و M_3 می‌گذرد، اگر بخواهیم مثلث مذکور در دایرهٔ محاطی محاط باشد، باید تجانسی که دایرهٔ محاطی را به دایرهٔ نه‌نقطه می‌بَرَد L_1 و L_2 و L_3 را به‌ترتیب به اضلاع M_2M_3، M_3M_1 و M_1M_2 ببرد.[1] با این ایده به اثبات مسأله می‌پردازیم. ■

لم ۱ . تجانس مستقیمی که دایرهٔ محاطی را به دایرهٔ نه‌نقطه می‌برد، L_1 را به ضلع M_2M_3 می‌برد.[2]

لم ۱ را بعداً ثابت می‌کنیم. با سه بار استفاده از لم ۱ نتیجه می‌شود که M_2M_3، M_3M_1 و M_1M_2 به‌ترتیب تجانس یافته‌های L_1، L_2 و L_3اند. پس تجانسی که دایرهٔ محاطی را به دایرهٔ نه‌نقطه می‌برد، مثلثی را که L_1، L_2 و L_3 تشکیل می‌دهند به مثلث میانک مثلث ABC یعنی $M_1M_2M_3$ می‌برد. با توجه به اینکه مثلث میانک محاط در دایرهٔ نه‌نقطه است، نتیجه می‌گیریم که مثلثی که L_1، L_2 و L_3 تشکیل می‌دهند محاط در دایرهٔ محاطی است. پس حکم ثابت می‌شود.

اثبات لم ۱. فرض کنید W مرکز این تجانس باشد.[3] نسبت تجانس برابر با نسبت شعاعهای دو دایره یعنی $\frac{R}{2r}$ است. پس به‌ازای هر نقطه مانند P، اگر P' تجانس یافتهٔ P باشد، با توجه به مستقیم بودن تجانس می‌توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{WP'} = \frac{R}{2r}.\overrightarrow{WP} \qquad (1)$$

حالا فرض کنید $\{X\} = H_2H_3 \cap T_2T_3$ و X' تجانس یافتهٔ X باشد. X روی L_1 است. می‌خواهیم ثابت کنیم X' روی M_2M_3 است. برای این کار تعریف کنید

$$f(P) = \text{فاصلهٔ نقطهٔ } P \text{ از ضلع } BC$$

برای ادامهٔ اثبات لم ۱، لمی دیگر را ثابت می‌کنیم:

لم ۲ . تابع f که در بالا تعریف شد، تابعی خطی است (یعنی اگر P_1 و P_2 دو نقطهٔ دلخواه باشند و λ عددی

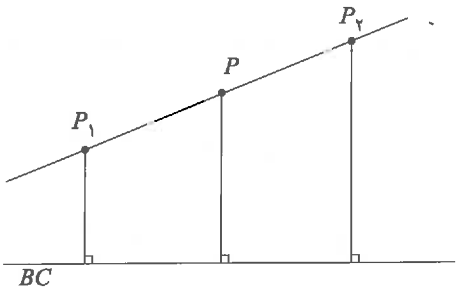
۱. می‌توانیم به‌جای این کار، تجانس بین دایرهٔ محاطی و دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر بگیریم. در این صورت بعضی محاسبات تغییر می‌کنند.

۲. برای حدس زدن اینکه باید تجانس مستقیم را در نظر بگیریم و نه معکوس، حالتی را درنظر بگیرید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد. در راه‌حل اصلی آقای امین‌زاده، به اشتباه تجانس معکوس در نظر گرفته شده بود و چون دوبار این اشتباه صورت گرفته‌بود، راه‌حل در نهایت به جواب درست می‌رسید. در اینجا راه‌حل اصلاح شده را آورده‌ایم.

۳. W همان نقطهٔ فوئرباخ، یعنی نقطهٔ تماس دو دایرهٔ محاطی و نه‌نقطه است.

حقیقی باشد، $(f(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2) = \lambda f(P_1) + (1-\lambda)f(P_2)$[1]

اثبات لم ۲. $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ نقطه‌ای روی خط P_1P_2 است. در شکل زیر با دو بار استفاده از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود $\frac{f(P)-f(P_1)}{P_1P} = \frac{f(P_2)-f(P_1)}{P_1P_2}$، پس $f(P) = \frac{P_1P}{P_1P_2}(f(P_2)-f(P_1)) + f(P_1)$. با توجه به اینکه $P = \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ نتیجه می‌گیریم $(\overrightarrow{P}_2 - \overrightarrow{P}_1)\frac{1-\lambda}{\lambda} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{P}_1$ یعنی $\frac{PP_1}{P_1P_2} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$، با جایگذاری در تساوی قبل حکم لم ۲ نتیجه می‌شود. اثبات در حالتی که P_1 و P_2 در دو طرف BC باشند و یا λ خارج از بازهٔ $[0, 1]$ باشد، مشابه است.



■

به ادامهٔ اثبات لم ۱ برمی‌گردیم. می‌خواهیم $f(X')$ را محاسبه کنیم. با توجه به تساوی (۱) دو تساوی زیر را به‌دست می‌آوریم (توجه کنید که تحت تجانس، I، مرکز دایرهٔ محاطی به N، مرکز دایرهٔ نه‌نقطه می‌رود.)

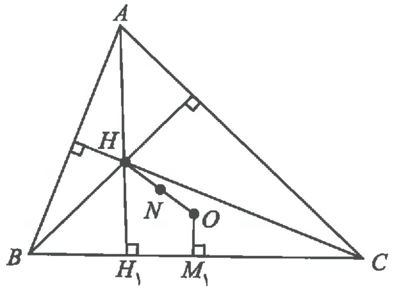
$$\begin{cases} \overrightarrow{X'} = -\frac{R-2r}{2r}\overrightarrow{W} + \frac{R}{2r}\overrightarrow{X} \\ \overrightarrow{W} = \frac{R}{R-2r}\overrightarrow{I} - \frac{2r}{R-2r}\overrightarrow{N} \end{cases} \qquad (2)$$

که در اینجا، r شعاع دایرهٔ محاطی و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. اگر مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC را به‌ترتیب با O و H نشان دهیم، $\overrightarrow{N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O} + \frac{1}{2}\overrightarrow{H}$، پس $f(N) = \frac{1}{2}(f(O)+f(H))$. با توجه به اینکه $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM_1}$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(N) &= \frac{1}{2}(f(O)+f(H)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AH + HH_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}AH_1 + \frac{1}{2}HH_1) \\ &= \frac{1}{4}h_a(1 + \frac{HH_1}{BH_1}\cdot\frac{BH_1}{h_a}) = \frac{1}{4}h_a(1 + \cot\angle C \cdot \cot\angle B) \end{aligned}$$

که در اینجا، $h_a = AH_1$.

۱. فاصله را باید فاصلهٔ جهتدار در نظر گرفت. یعنی فاصلهٔ نقاطی را که در طرف دیگر BCاند، منفی تعریف می‌کنیم.

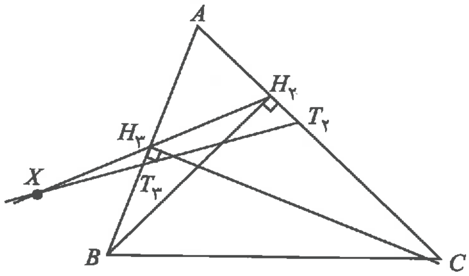


از طرفی $f(I)=r$ پس با توجه به تساویهای (۲) به‌دست می‌آوریم

$$f(W)=\frac{Rr}{R-۲r}-\frac{rh_a}{۲(R-۲r)}(۱+\cot\angle B\cot\angle C) \qquad (۳)$$

برای محاسبهٔ $f(X)$، در مثلث $AT_۲T_۳$ رابطه‌ی منلائوس را می‌نویسیم[۱]

$$\frac{\overrightarrow{T_۳X}}{\overrightarrow{XT_۲}}\cdot\frac{\overrightarrow{T_۲H_۲}}{\overrightarrow{H_۲A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AH_۳}}{\overrightarrow{H_۳T_۳}}=-۱$$



فرض کنید $a=BC$، $b=AC$ و $c=AB$. چون $\triangle AH_۲H_۳\sim\triangle ABC$ پس $\frac{AH_۲}{AH_۳}=\frac{c}{b}$، پس از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\overrightarrow{T_۳X}}{\overrightarrow{XT_۲}}=-\frac{\overrightarrow{AH_۲}}{\overrightarrow{H_۲T_۲}}\cdot\frac{\overrightarrow{H_۳T_۳}}{\overrightarrow{AH_۳}}$$

۱. در اینجا نماد بردار فقط برای درنظرگرفتن جهت آورده شده است.

در نتیجه، اگر تعریف کنیم $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$\frac{\overrightarrow{T_3X}}{\overrightarrow{XT_2}} = -\frac{AH_2 \cdot ((p-a) - AH_3)}{((p-a) - AH_2) \cdot AH_3}$$
$$= \frac{c\,((p-a) - b\cos\angle A)}{-b\,((p-a) - c\cos\angle A)}$$

می‌توانیم بنویسیم $\overrightarrow{X} = \frac{\overrightarrow{T_3X}}{\overrightarrow{T_3T_2}} \cdot \overrightarrow{T_2} + \frac{\overrightarrow{XT_2}}{\overrightarrow{T_3T_2}} \cdot \overrightarrow{T_3}$. بنابراین

$$\overrightarrow{X} = \frac{(c(p-a) - bc\cos\angle A)\,\overrightarrow{T_2} - (b(p-a) - bc\cos\angle A)\,\overrightarrow{T_3}}{(c(p-a) - bc\cos\angle A) - (b(p-a) - bc\cos\angle A)}$$

$$\overrightarrow{T_2} = \frac{p-a}{b}\overrightarrow{C} + \frac{p-c}{b}\overrightarrow{A}$$

در نتیجه

$$f(\overrightarrow{T_2}) = \frac{p-a}{b} f(\overrightarrow{C}) + \frac{p-c}{b} f(\overrightarrow{A}) = \frac{(p-c)h_a}{b}$$
$$= \frac{(p-c)AH_1}{AC} = (p-c)\sin\angle C$$

$$\overrightarrow{T_3} = \frac{p-a}{c}\overrightarrow{B} + \frac{p-b}{c}\overrightarrow{A}$$

در نتیجه

$$f(\overrightarrow{T_3}) = \frac{p-a}{c} f(\overrightarrow{B}) + \frac{p-b}{c} f(\overrightarrow{A}) = \frac{(p-b)h_a}{c}$$
$$= \frac{(p-b)AH_1}{AB} = (p-b)\sin\angle B$$

با جایگذاری این دو مقدار، مقدار $f(X)$ را به‌دست می‌آوریم

$$f(X) = \frac{\big(c(p-a) - bc\cos\angle A\big)f(T_2) - \big(b(p-a) - bc\cos\angle A\big)f(T_3)}{(c-b)(p-a)}$$
$$= \frac{\big(c(p-a) - bc\cos\angle A\big)(p-c)\sin\angle C - \big(b(p-a) - bc\cos\angle A\big)(p-b)\sin\angle B}{(c-b)(p-a)}$$
$$= \frac{1}{2R(c-b)(p-a)}\Big[\big(c(p-a) - bc\cos\angle A\big)(p-c)c - \big(b(p-a) - bc\cos\angle A\big)(p-b)b\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2R(c-b)(p-a)}\left[(p-a)\left(c^2(p-c)-b^2(p-b)\right)-bc\cos\angle A\left(c(p-c)-b(p-b)\right)\right]\\
&= \frac{1}{2R(c-b)(p-a)}\Big[(p-a)\left(p(c-b)(c+b)-(c-b)(b^2+bc+c^2)\right)\\
&\qquad\qquad -(bc\cos\angle A)\left(p(c-b)-(c-b)(c+b)\right)\Big]\\
&= \frac{1}{2R(p-a)}\left[(p-a)\left(p(c+b)-(b^2+bc+c^2)\right)-(bc\cos\angle A)\left(p-(b+c)\right)\right]\\
&= \frac{1}{2R}\left[p(c+b)-(b^2+bc+c^2)+bc\cos\angle A\right]\\
&= \frac{1}{2R}\left[\left(\frac{a+b+c}{2}\right)(c+b)-(b^2+bc+c^2)+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)\right]\\
&= \frac{a(p-a)}{2R}
\end{aligned}
$$

بنابراین،

$$
f(X)=\frac{a(p-a)}{2R} \qquad (۴)
$$

حالا مقدار $f(X)$ و $f(W)$ را می‌دانیم. با جایگذاری تساویهای (۳) و (۴) در تساوی (۲) به‌دست می‌آوریم

$$
\overrightarrow{X'}=-\frac{R-2r}{2r}\overrightarrow{W}+\frac{R}{2r}\overrightarrow{X}
$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
f(X') &= -\frac{R-2r}{2r}f(W)+\frac{R}{2r}f(X)\\
f(X') &= -\frac{R}{2}+\frac{h_a}{4}(1+\cot\angle B\cot\angle C)+\frac{a(p-a)}{4r}\\
f(X')-\frac{h_a}{2} &= -\frac{R}{2}+\frac{h_a}{4}(\cot\angle B\cot\angle C-1)+\frac{a(p-a)}{4r}\\
&= \frac{-R}{2}+\frac{h_a}{4}\left(\frac{-\sin\angle B\sin\angle C+\cos\angle B\cos\angle C}{\sin\angle B\sin\angle C}\right)+\frac{a(p-a)}{4r}\\
&= -\frac{R}{2}-\frac{R^2h_a\cos\angle A}{bc}+\frac{a(p-a)}{4r}=-\frac{R}{2}(1+\cos\angle A)+\frac{a(p-a)}{4r}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{R}{۲}(۱+\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}) - \frac{a(p-a)}{۴\times\frac{s}{p}}$$
$$= -\frac{R}{۲}(\frac{(b+c)^۲-a^۲}{۲bc}) + \frac{ap(p-a)}{۴s}$$
$$= -\frac{R}{۲}\left(\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{۲bc}\right) + \frac{ap(p-a)}{۴s}$$
$$= -\frac{Rp(p-a)}{bc} + \frac{ap(p-a)}{۴s}$$
$$= p(p-a)(\frac{a}{۴s} - \frac{Ra}{abc}) = p(p-a)(\frac{a}{۴s} - \frac{Ra}{۴Rs}) = ۰$$

در نتیجه

$$f(X') = \frac{h_a}{۲}$$

در نتیجه فاصلهٔ X' از BC برابر $\frac{h_a}{۲}$ است. پس X' روی $M_۲M_۳$ است. $M_۲M_۳ \parallel L_۱$ و $L_۱$ از X می‌گذرد و $M_۲M_۳$ از تجانس‌یافتهٔ X یعنی X' می‌گذرد. در نتیجه $M_۲M_۳$ تجانس‌یافتهٔ $L_۱$ است. در نتیجه حکم لم ۱ ثابت شده است و مسأله به‌طور کامل حل شده است. ■

● بازنویسی و افزودن توضیحات: علی خزلی

راه‌حل بعضی از سؤالهای المپیاد کامپیوتر ایران
مرحلهٔ اول، ۱۳۸۴

نیما احمدی‌پور اناری

۱. محمدحسین می‌خواهد نمایشگاه وسایل خانگی‌ای را برقکشی کند. متأسفانه در کل این نمایشگاه تنها یک پریز برق وجود دارد. البته محمدحسین فکر اینجا را کرده و با خود تعداد زیادی n راهی آورده است. به هر n راهی می‌توان nتا دو شاخهٔ برق وصل کرد و هر n راهی، یک دو شاخه دارد که باید به طریقی (مستقیم به پریز یا با n راهیهای دیگر) به برق وصل شود تا دوشاخه‌هایی را که به آن وصل‌اند برقدار کند. اگر محمدحسین ده‌تا ۱۰ راهی، هفت‌تا ۷ راهی، پنج‌تا ۴ راهی، چهارتا ۲ راهی و صدتا یک‌راهی داشته باشد، حداکثر چند وسیلهٔ خانگی را می‌تواند به برق متصل کند؟

الف) ۱۲۷ ب) ۱۵۰ ج) ۱۵۲ ✓ د) ۱۲۶ ه) هیچکدام

راه‌حل. فرض کنید به‌ترتیب n راهیها را سرجایشان قرار بدهیم. اگر تعداد دوشاخه‌های آزاد در هر مرحله m باشد با وصل کردن یک n راهی، یک دوشاخهٔ آزاد از بین می‌رود و n دوشاخهٔ آزاد به‌وجود می‌آیند. پس بعد از اضافه کردن n راهی، $m+n-1$ دو شاخهٔ آزاد به‌وجود می‌آیند. پس در نهایت بعد از اضافه کردن همهٔ n راهیها تعداد

$$1 + 10 \times (10 - 1) + 7 \times (7 - 1) + 5 \times (4 - 1) + 4 \times (2 - 1) + 100 \times (1 - 1) = 152$$

دوشاخهٔ آزاد داریم. ∎

۲. در دبیرستان «هجرت نو» آزمونی هماهنگ بین تمامی دانش‌آموزان برگزار شده است. این آزمون شامل دو درس فیزیک و ریاضی است و رتبهٔ کل هر داوطلب، با توجه به حاصل جمع نمرهٔ ریاضی و نمرهٔ فیزیک او نسبت به سایر دانش‌آموزان محاسبه می‌شود. اگر امین در درس ریاضی رتبهٔ هفتم و در درس فیزیک رتبهٔ یازدهم را کسب کند، بدترین رتبهٔ کلی که ممکن است داشته باشد کدام است؟ (در هر درسی، هیچ دو نفری وجود ندارند که نمرهٔ مساوی گرفته باشند.)

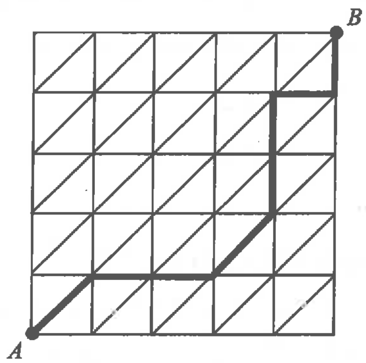
الف) نوزدهم ب) هفدهم ✓ ج) یازدهم د) هجدهم ه) شانزدهم

راه‌حل. هر فردی که رتبهٔ کلش از امین بالاتر شود باید حداقل در یک درس رتبه‌اش از او بهتر شود. تعداد افرادی که در فیزیک رتبه‌شان از امین بالاتر شده است ۶ و تعداد آنهایی که در ریاضی رتبه‌شان از امین بالاتر

شده است، ۱۰ است. پس حداکثر ۱۶ نفر رتبهٔ کلشان از امین بیشتر شده است. پس رتبهٔ امین حداکثر ۱۷ است. اگر در آزمون فیزیک نمرهٔ امین و ۶ نفر اول ریاضی خیلی کم شده باشد (مثلاً کمتر از ۵) و نمرهٔ ۱۰ نفر اول فیزیک خیلی زیاد (مثلاً بالای ۱۵) شده باشد و در آزمون ریاضی، نمرهٔ امین و ۱۰ نفر اول فیزیک خیلی کم شده باشد (کمتر از ۵) و نمرهٔ ۶ نفر اول ریاضی بالا (مثلاً بالای ۱۵) آن وقت نمرهٔ کل این ۱۶ نفر حداقل ۱۵ و نمرهٔ کل امین حداکثر ۱۰ است. پس امین ۱۷ام شده است. ■

۳. در شکل زیر اگر از هر نقطه بتوان به نقطهٔ بالایی، راستی و بالاراستی رفت، چند مسیر با ۸ بار جابه‌جایی از A به B وجود دارد؟ مسیری از A به B در شکل نشان داده شده است.

الف) ۵۶۰ ✓ ب) ۳۱۵۰ ج) ۲۰۰ د) ۲۱۰ هـ) ۲۳۰



راه‌حل. دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که مبدأ آن A، محور x آن منطبق بر ضلع پایین مربع و محور y آن منطبق بر ضلع چپ مربع است. حرکات را با سه نماد $\rightarrow$، $\nearrow$ و $\uparrow$ نشان می‌دهیم. $\rightarrow$ مختصهٔ x را یکی زیاد می‌کند. $\nearrow$ هریک از مختصه‌های x و y را یکی زیاد می‌کند و $\uparrow$ مختصهٔ y را یکی زیاد می‌کند. پس به دنبال رشته‌های ۸تایی از $\rightarrow$، $\nearrow$ و $\uparrow$ هستیم که ما را از $(۰,۰)$ به $(۵,۵)$ می‌رسانند. در هر حرکت به $x+y$ توجه کنید. هر یک از $\rightarrow$ و $\uparrow$، $x+y$ را یکی زیاد می‌کند و $\nearrow$ آن را دوتا زیاد می‌کند. پس اگر a حرکت $\rightarrow$ و b حرکت $\uparrow$ و c حرکت $\nearrow$ کرده باشیم می‌توانیم بنویسیم

$$(۵+۵) = (۰+۰) + (۱\times a) + (۱\times b) + (۲\times c) \quad \text{و} \quad a+b+c = ۸$$

از دو معادلهٔ بالا به‌دست می‌آید که $(۵+۵) = (۰+۰) + (a+b+c) + c = ۸ + c$ در نتیجه $c = ۲$.

پس در کل ۲ حرکت $\nearrow$ داریم. حالا مختصات x را در نظر بگیرید. حرکات $\nearrow$ و $\rightarrow$ آن را یک واحد زیاد می‌کنند و $\uparrow$ تأثیری روی آن ندارد. پس $a + c = ۵$ و در نتیجه، $a = ۳$.

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $b = ۳$. از طرف دیگر، اگر طوری حرکت کنیم که ۳ بار $\rightarrow$ و ۳ بار $\uparrow$ و ۲ بار $\nearrow$ رفته باشیم هم مختصات x و هم مختصات y، ۵ تا زیاد می‌شود و از A به B می‌رسیم. پس به‌دنبال رشته‌هایی از $\rightarrow$، $\nearrow$ و $\uparrow$ هستیم که دقیقاً ۳ تا $\rightarrow$ و ۳ تا $\uparrow$ و ۲ تا $\nearrow$ دارند. این ۸ حرکت را به !۸ طریق می‌توان کنار هم چید، اما خود $\rightarrow$ها !۳ و $\uparrow$ها !۳ و $\nearrow$ها !۲ طریق مختلف بین خودشان جابه‌جا می‌شوند که ما آنها را تکراری می‌شمردیم. پس تعداد چنین رشته‌هایی برابر است با $\frac{۸!}{۳! \times ۳! \times ۲!}$ یعنی ۵۶۰. ■

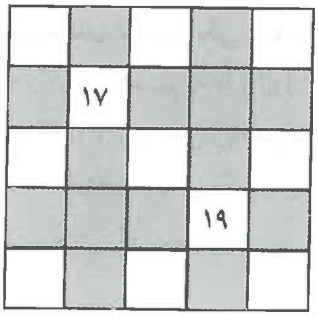
۴. وقتی و فقط وقتی جدولی ۵×۵ را منظم می‌نامیم که در هر خانه‌اش یک عدد نوشته شده باشد و در ۲۵ خانه‌اش همهٔ اعداد ۱ تا ۲۵ آمده باشند. جدولی ۵×۵ را وقتی خوش‌سطر می‌نامیم که حاصل‌ضرب ۵ عدد واقع در هر سطرش نه بر ۳۴ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳۸. به همین صورت جدولی ۵×۵ را وقتی خوش‌ستون می‌نامیم که حاصل‌ضرب ۵ عدد هر ستون آن نه بر ۳۴ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳۸. چند جدول مختلف ۵×۵ منظم وجود دارد که هم خوش‌سطر باشد و هم خوش‌ستون؟

الف) !۲۵ ب) ۱۰

ج) !۵ د) $۱۱! \times ۱۲! \times ۲۰۰$ ✓

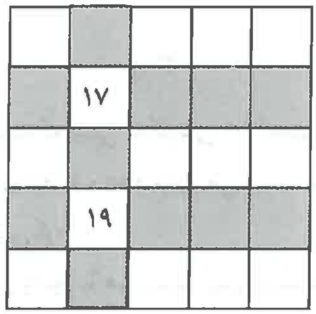
هـ) $۱۳! \times ۱۰! \times ۱۲!$

راه‌حل. $۱۷ \times ۲ = ۳۴$ و $۱۹ \times ۲ = ۳۸$. پس وقتی و فقط وقتی جدولی منظم خوش‌سطر است که نه ۱۷ و یک عدد زوج در یک سطر آمده باشند و نه ۱۹ و یک عدد زوج. پس جداول منظمی که هم خوش‌سطر و هم خوش‌ستون هستند آنهایی‌اند که هیچ عدد زوجی با ۱۹ و ۱۷ هم‌سطر یا هم‌ستون نباشد. اگر ۱۹ و ۱۷ هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند، تعداد خانه‌هایی که هر یک با حداقل یکی از ۱۹ و ۱۷ هم‌سطر یا هم‌ستون است، ۱۴ تاست (مانند شکل).



اما تعداد اعداد فرد باقی‌مانده ۱۱ تاست، پس همهٔ خانه‌های مشخص‌شده نمی‌توانند اعداد فرد داشته‌باشند. در نتیجه، این حالت امکان‌پذیر نیست. یعنی باید ۱۹ و ۱۷ هم‌سطر یا هم‌ستون باشند. در این حالت تعداد خانه‌هایی که هر یک با حداقل یکی از ۱۹ و ۱۷ هم‌سطر یا هم‌ستون است ۱۱ تاست (مانند

شکل). پس ۱۱ عدد فرد باقی‌مانده دقیقاً در این خانه‌ها می‌آیند و در ۱۲ خانهٔ دیگر دقیقاً ۱۲ عدد زوج می‌آیند. پس با انتخاب محل ۱۹ و ۱۷، بقیهٔ جدول به $12! \times 11!$ طریق پر می‌شود. برای ۱۷، یکی از ۲۵ خانهٔ جدول و برای ۱۹ یکی از ۸ خانهٔ هم‌سطر یا هم‌ستون با ۱۷ باید انتخاب شود. پس جواب کل برابر است با $25 \times 8 \times 11! \times 12!$ که برابر $200 \times 11! \times 12!$ است.



■

۵. عدد x را به‌صورت $x = x_0 + 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5$ در نظر بگیرید که در آن هر یک از x_0، ... و x_5 صفر یا یک است. معین کنید که برای چند مقدار مختلف مانند x، بیش از یک ۶تایی مانند $(x_0, \ldots, x_5)$ وجود دارد که در معادلهٔ بالا صدق می‌کند.

الف) ۳۴ ب) ۱۶ ج) ۲۴ د) ۳۰ ✓ ه) ۳۲

راه‌حل. معادلهٔ بالا معادل است با $x - 2x_1 = x_0 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5$. سمت راست معادله بسط مبنای ۲ عددی با حداکثر ۵ رقم است. هر عدد بین ۰ تا ۳۱ را دقیقاً به یک صورت می‌توان به شکل سمت راست معادله نوشت و حاصل سمت راست نامنفی و کمتر از ۳۲ است. پس برای اینکه دو ۶تایی در معادلهٔ موردنظر صدق کنند باید هم $x - (2 \times 0)$ و هم $x - (2 \times 1)$ به‌صورت سمت راست نمایش داده شوند یعنی هم $0 \le x \le 31$ و هم $0 \le x - 2 \le 31$. از این دو نابرابری نتیجه می‌گیریم که $2 \le x \le 31$. تعداد چنین xهایی ۳۰تاست. ■

۶. بازی سه نفرهٔ «عددسازی» به این صورت است: ۳ نفر دور میزی گرد می‌نشینند و به هر یک از آنها یک کارت داده می‌شود که روی آن ۰۱ یا ۱۰ نوشته شده است. در ابتدا، بازیکنی که از دیگران بزرگتر است یکی از رقمهای ۰ یا ۱ را روی میزی می‌نویسد و سپس به ترتیب ساعتگرد نوبت عوض می‌شود. هرکس در نوبت خود آخرین رقمی را که روی میز نوشته شده است بررسی می‌کند: اگر این رقم ۰ بود رقم سمت راست کارتش را روی میز می‌نویسد و اگر ۱ بود رقم سمت چپ کارتش را روی میز می‌نویسد (همواره در سمت

راست آخرین عدد نوشته شده عدد خود را می‌نویسد). بازی آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا کوچکترین بازیکن خسته شود. چندتا از اعداد زیر در بازی عددسازی ممکن است تولید شود؟

$$۰۰۰۰۱۱۱۱۰۰۰۰۰,\ ۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰,\ ۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱۰۰,\ ۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰,\ ۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰$$

الف) ۴ ب) ۱ ج) ۳ د) ۵ ه) ۲ ✓

راه‌حل. با کمی دقت می‌توان فهمید که کسی که کارتش ۱۰ است همواره عددی مساوی عدد قبلی و کسی که کارتش ۰۱ است همواره عددی مخالف عدد قبلی می‌نویسد. پس از روی ۴ رقم اول می‌توان نوع کارتها را فهمید و بعد بقیهٔ بازی را پیشبینی کرد.

۰۰۰۰۱۱۱۱۰۰۰۰۰: رقمهای اول و دوم با هم برابرند. پس کارت نفر اول ۱۰ است. رقمهای دوم و سوم نیز با هم برابرند. پس کارت نفر دوم هم ۱۰ است. رقمهای سوم و چهارم با هم برابرند. پس کارت نفر سوم هم ۱۰ است. پس عدد تولید شده باید ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ باشد. پس ممکن نیست که این عدد تولید شود.

۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰: کارتها به ترتیب ۰۱ و ۱۰ و ۱۰ هستند و اگر بازی را با این سه کارت ادامه دهیم همین نتیجه تولید می‌شود. پس این عدد ممکن است تولید شود.

۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱۰۰: کارتها به ترتیب ۱۰ و ۰۱ و ۱۰ هستند و اگر بازی با این سه کارت ادامه دهیم عدد ۰۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰۰ به‌دست می‌آمد. پس ممکن نیست که این تولید شود.

۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰: مانند عدد قبلی کارتها ۱۰ و ۰۱ و ۱۰ بوده‌اند و عدد ۰۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰۰ به‌دست می‌آمده است نه ۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰. پس ممکن نیست که این عدد تولید شود.

۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰: کارتها به ترتیب ۱۰ و ۰۱ و ۰۱ بوده‌اند و اگر بازی را با این سه کارت ادامه دهیم همین نتیجه به‌دست می‌آید.

پس درکل ۲ تا از این اعداد ممکن است تولید شوند. ■

۷. فرض کنید $x_۰ + ۴x_۱ + ۱۶x_۲ + ۶۴x_۳ = ۱۰۰$. اگر هر یک از $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ از مجموعهٔ $\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ انتخاب شود، کمینهٔ مقدار $x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳$ کدام است؟

الف) ۱− ب) ۲ ج) ۱ ✓ د) ۰ ه) ۵

راه‌حل. می‌توانیم بنویسیم

$$۱۰۰ - x_۰ = ۴(x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳)$$

یعنی $x_۰ - ۱۰۰$ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس $x_۰ = ۰$. اکنون می‌نویسیم

$$۱۰۰ = ۴(x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳)$$
$$۲۵ = x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳$$
$$۲۵ - x_۱ = ۴(x_۲ + ۴x_۳)$$

یعنی $x_۱ - ۲۵$ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس $x_۱ = ۱$. حالا می‌نویسیم

$$۲۴ = ۴(x_۲ + ۴x_۳)$$
$$۶ = x_۲ + ۴x_۳$$
$$۶ - x_۲ = ۴x_۳$$

یعنی $x_۲ - ۶$ بر ۴ بخش‌پذیر است. پس $x_۲ = -۲$ یا $x_۲ = ۲$ و در این دو حالت $x_۳$ به‌ترتیب ۲ و ۱ می‌شود. پس دو جواب مختلف داریم:

$$\begin{cases} x_۰ = ۰ \\ x_۱ = ۱ \\ x_۲ = -۲ \\ x_۳ = ۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} x_۰ = ۰ \\ x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۲ \\ x_۳ = ۱ \end{cases}$$

که در حالت اول $x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ و در حالت دوم $x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$. پس جواب ۱ است. ■

۸. بهروز، سیامک و علی هر یک مالک یک دستگاه خودرو است. مدل این خودروها پراید، پژو و دوو است. رنگ یکی از این ماشینها سیاه، دیگری سفید و سومی طوسی است. می‌دانیم که ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است، دوو طوسی رنگ است و نیز ماشین سیامک سیاه نیست. نوع و رنگ ماشین متعلق به هر یک از این افراد چگونه است؟

الف) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، دوو طوسی)، (سیامک، پژو سفید) ✓
ب) (بهروز، پژو سفید)، (علی، پژو سیاه)، (سیامک، دوو طوسی)
ج) (بهروز، پراید سفید)، (علی، پژو سیاه)، (سیامک، دوو طوسی)

د) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، پژو طوسی)، (سیامک، دوو سفید)

ه) (بهروز، پژو سیاه)، (علی، دوو طوسی)، (سیامک، پراید سفید)

راه‌حل. دوو ماشین علی است چون در غیر این‌صورت یا پراید است یا ماشینی که پشت پراید پارک شده‌است (ماشین علی جلوی پراید است) اما دوو پراید نیست و ماشین پشت پراید هم سفید است در حالی‌که دوو طوسی است. پس ماشین علی، دوو طوسی است. ماشین پراید سیاه است چون ماشین سفید پشت آن است و ماشین طوسی (متعلق به علی) جلوی آن. پس پراید سیاه است و در نتیجه ماشین سیامک نیست. پس ماشین سیامک ماشین عقبی است که سفید است و چون نه پراید است و نه دوو پس پژو است. در نتیجه ماشین وسط (پراید) هم متعلق به بهروز است. پس جواب چنین است:

(علی، دوو طوسی)، (بهروز، پراید سیاه)، (سیامک، پژو سفید)

■

۹. جدولی ۸ × ۸ داریم که ۳۲ خانهٔ ۴ ستون اولش سیاه و ۳۲ خانهٔ دیگرش سفیدند. در هر حرکت می‌توانیم رنگ دو خانهٔ مجاور را با هم عوض کنیم (در صورتی که همرنگ باشند تغییری در رنگشان رخ نمی‌دهد). وقتی دو خانه مجاورند که ضلعی مشترک داشته باشند. کمترین تعداد حرکت لازم برای شطرنجی کردن جدول چند است؟ جدولی شطرنجی است که رنگ هیچ دو خانهٔ مجاور در آن یکی نباشد.

الف) ۴۸ ب) ۶۴ ✓ ج) ۱۲۸ د) ۳۲ ه) ۱۰۰

راه‌حل. حاصل‌جمع شماره‌های ستونهای خانه‌های سیاه را در هر مرحله در نظر بگیرید. اگر رنگ دو خانهٔ مجاور را عوض کنیم، یا این دو به‌طور عمودی مجاورند که در حاصل‌جمع یاد شده تغییری رخ نمی‌دهد و یا افقی مجاورند. اگر افقی مجاور باشند و رنگشان مساوی باشد باز هم تغییری در حاصل‌جمع رخ نمی‌دهد. اگر هم رنگشان مختلف باشد، حاصل‌جمع یا به‌علاوهٔ ۱ می‌شود و یا منهای ۱. در نتیجه، تعداد حرکات لازم حداقل مقدار حاصل‌جمع آخر منهای حاصل‌جمع اولیه است و که برابر است با

$$(4\times(1+3+5+7)+4\times(2+4+6+8))-8\times(1+2+3+4)=64$$

از طرفی می‌توان طوری این حرکات را اجرا کرد که در هر مرحله حاصل‌جمع یکی زیاد شود. برای مثال در هر سطر ابتدا آخرین سیاه را مدام با سمت راستیش جابه‌جا کنید تا به خانهٔ سیاه آخر در حالت شطرنجی برسد. بعد این کار را با خانهٔ سیاه یکی‌مانده به آخر بکنید و . . . . ■

۱۰. جدولی ۳ × ۳ به‌شکل صفحهٔ بعد داده شده است. در هر حرکت می‌توانیم جای دو سطر یا دو ستون از این جدول را با هم عوض کنیم. با این حرکات به چند جدول مختلف می‌توان رسید؟

الف) ۸۴   ب) ۶ ✓   ج) ۴۲   د) ۳۶   هـ) ۱۲

۱	۱	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۱

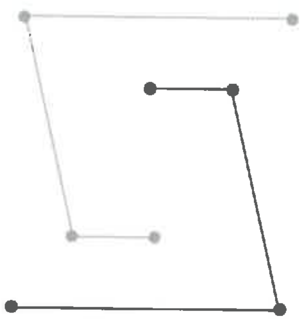
راه‌حل. اگر جای دو سطر را عوض کنیم تعداد ۰های ستونها تغییری نمی‌کند. چون، این کار مانند این است که در هر ستون جای دو خانه را عوض کرده باشیم. تعداد ۰های هر سطر هم عوض نمی‌شود، چون هر سطر یک ۰ دارد. به‌طور مشابه اگر جای دو ستون را هم عوض کنیم تعداد ۰های هر سطر و هر ستون یک باقی می‌ماند. پس اگر بعد از تعدادی حرکت به جدولی برسیم، هر سطر و هر ستون آن دقیقاً یک ۰ دارد. اما در کل ۶ تا از این جدولها بیشتر وجود ندارد. ۳ انتخاب برای محل ۰ ستون اول داریم. دو انتخاب برای محل ۰ ستون دوم (چون سطر آن نباید با سطر دارای ۰ ستون اول یکی شود) و یک انتخاب هم برای ۰ ستون سوم، یعنی $۶ = ۱ \times ۲ \times ۳$ حالت. به تمام این ۶ حالت هم می‌توان فقط با جابه‌جا کردن ستونها رسید. مثلاً اگر قرار است به جدولی برسیم که ۰ ستون اول آن در سطر a و ۰ ستون دوم در سطر b و ۰ ستون سوم در c است، ابتدا جای ستون اول را با ستونی که ۰ آن در سطر a است عوض کنید. بعد جای ستون دوم را با ستونی که ۰ آن در سطر b است عوض کنید و بعد جدول ساخته می‌شود. ∎

راه‌حل مسأله‌ای جالب از المپیاد بین‌المللی کامپیوتر، ۲۰۰۶

نیما احمدی‌پور اناری

در المپیاد بین‌المللی کامپیوتر سال گذشته سؤالی مطرح شد که برای حل آن به اطلاعات برنامه‌نویسی چندان زیادی نیاز نیست. در اینجا این مسأله را بیان می‌کنیم و کمی در مورد راه‌حل آن توضیح می‌دهیم.

مسأله. چهار رأس مربعی در صفحه را در نظر بگیرید. فرض کنید دو تا از آنها خاکستری و دو تا سیاه باشند به‌گونه‌ای‌که دو خاکستری دو رأس مجاور در مربع‌اند. تعدادی نقطهٔ سیاه و خاکستری هم داخل مربع قرار دارند. برای سادگی صورت مسأله فرض کنید هیچ سه‌نقطه‌ای از این نقاط روی یک خط نباشند. می‌خواهیم تعدادی پاره‌خط رسم کنیم که اولاً هیچ دو پاره‌خطی همدیگر را قطع نکنند، ثانیاً هر دو سر پاره‌خط دو تا از نقاط همرنگ باشند و ثالثاً از هر نقطه به تمام نقاط دیگر همرنگش مسیری یکتا با پاره‌خطها وجود داشته باشد. مثلاً در شکل زیر حالتی خاص از مسأله و جواب آن نشان داده شده است.



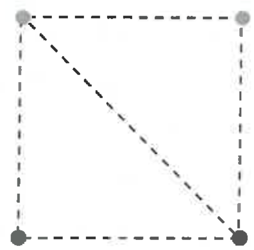
اولاً دقت کنید که شرط یکتا بودن مسیر لازم نیست و می‌توان به جای آن فقط شرط وجود یک مسیر را گذاشت. زیرا اگر دو مسیر مختلف از رأسی به رأسی دیگر وجود داشته باشد، یالی از یکی از این دو مسیر را به دلخواه حذف کنید و باز هم شرایط مسأله برقرارند. می‌توان این کار را ادامه داد تا زمانی که بیش از یک مسیر بین دو رأس وجود نداشته باشد.

جالب است بدانید که این مسأله را فقط یک نفر از بین بیش از دویست شرکت‌کننده در زمان امتحان توانست به‌طور کامل حل کند. شاید به خودتان بگویید که لابد مسألهٔ خیلی سختی است! اما در حقیقت تمام سختی مسأله

در دیدن حالت کلی آن است. پس اگر خودتان می‌خواهید روی مسأله فکر کنید به حالت کلیتر زیر فکر کنید.

* سه نقطه در صفحه مشخص شده‌اند که دو تا از آنها خاکستری‌اند و دیگری سیاه است (یا بالعکس)، و تعدادی نقطهٔ خاکستری و سیاه درون مثلث متشکل از این سه نقطه وجود دارند. تعدادی پاره‌خط بین نقاط همرنگ رسم کنید که هیچ دوتایی از آنها یکدیگر را قطع نکنند و بین هر دو نقطهٔ همرنگ دقیقاً یک مسیر با پاره‌خطها وجود داشته باشد.

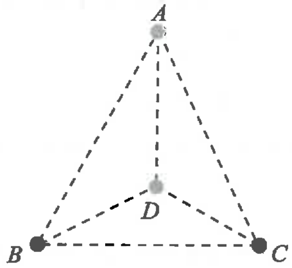
اولاً دقت کنید که مسألهٔ بالا حالت کلیتر مسألهٔ اول است: برای یک لحظه، فرض کنید مسألهٔ بالا حل شده‌است. می‌توان مربع اصلی را به دو مثلث مجزا مانند شکل تقسیم کرد و مسأله را در مورد هر یک حل کرد.



حالا به حل مسألهٔ جدید می‌پردازیم. راه‌حل ما با استفاده از روش **تقسیم و حل** است. اگر اسم این روش را نشنیده‌اید نترسید، چون این روش هیچ نکتهٔ پیچیده‌ای ندارد و فقط اسم آن ممکن است برای شما جدید باشد. ما هم از اسم آن استفادهٔ خاصی نمی‌کنیم!

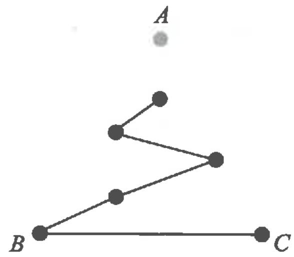
مثلثی با شرایط مسأله در نظر بگیرید و فرض کنید یک رأس آن خاکستری (رأس A) باشد و دو رأس دیگر سیاه باشند (رئوس C و B).

اگر از بین نقاط درون مثلث نقطهٔ خاکستری‌ای مانند D وجود داشته باشد، سه مثلث ABD و BCD و CAD را در نظر بگیرید. هر یک از این مثلثها دو رأس همرنگ و رأس سومی با رنگ مخالف دارند. پس می‌توان مسأله را در مورد هر یک از آنها حل کرد.

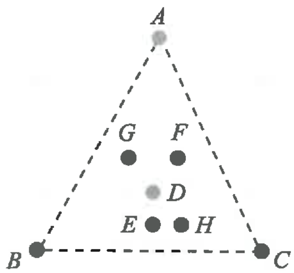


(اگر بگویید که ما هنوز راه‌حلی برای مسأله نداده‌ایم که در مورد مثلثهای جدید مسأله را حل کنیم، باید بگوییم که منظور از حل مسأله در مورد هر یک این است که دوباره به خط اول این روش حل برگردید و در مورد آن مثلثها این روش را اجرا کنید. اگر هنوز قانع نشده‌اید کمی صبر کنید!)

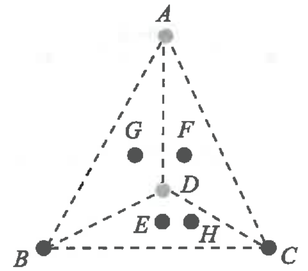
اما ممکن است هیچ نقطهٔ خاکستری‌ای درون مثلث ABC وجود نداشته باشد. در این صورت، همهٔ نقاط سیاه را بر اساس فاصله‌شان از BC مرتب کنید و هر نقطه را به نقطهٔ بعدی وصل کنید و در آخر B را به C وصل کنید و نزدیکترین نقطه به BC را هم به B وصل کنید. در این صورت می‌توان فهمید که هیچ دو پاره‌خطی همدیگر را قطع نمی‌کنند و بین هر دو نقطهٔ همرنگ مسیری یکتا با پاره‌خطها وجود دارد. اگر هم هیچ نقطه‌ای داخل مثلث نباشد، کافی است B را به C وصل کنید.



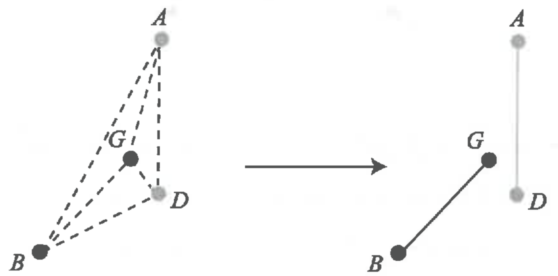
برای کسانی که صبر کرده‌اند: حل مسأله را در مورد نمونهٔ زیر نشان می‌دهیم.



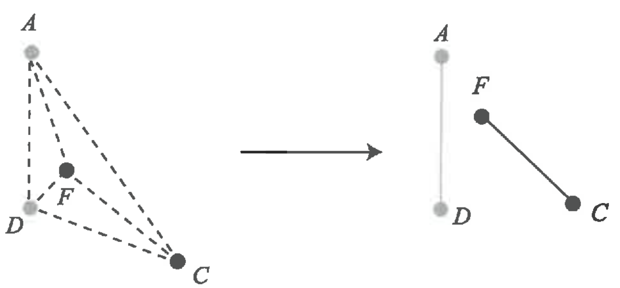
درون مثلث نقطه‌ای خاکستری وجود دارد. پس مثلث را به سه مثلث کوچکتر تقسیم می‌کنیم.



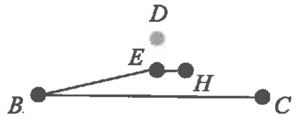
مثلث ABD: درون این مثلث نقطه‌ای سیاه وجود دارد. پس باز هم به سه مثلث تجزیه می‌شود. هیچ‌یک از این مثلثها نقطهٔ داخلی ندارند. پس کافی است دو رأس همرنگ آنها را به هم وصل کنیم.



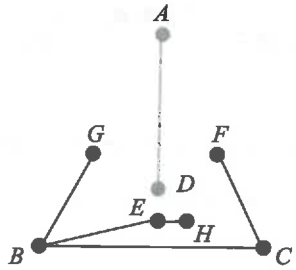
مثلث ACD: درون این مثلث نقطه‌ای سیاه وجود دارد. پس به سه مثلث تجزیه می‌شود که چون هیچ‌یک، نقطهٔ داخلی ندارد کافی است دو رأس همرنگ آنها را به‌هم وصل کنیم.



مثلث BCD: در این مثلث هیچ نقطهٔ خاکستری‌ای وجود ندارد. اگر نقاط سیاه را به ترتیب فاصله‌شان از BC مرتب کنیم اول به E می‌رسیم و بعد به H. سپس E را به نقطهٔ بعدی آن یعنی H وصل می‌کنیم و بعد E را که نزدیکترین به BC است به B وصل می‌کنیم و بعد B را به C وصل می‌کنیم.



پس اگر پاره‌خطهای کشیده شده را رسم کنیم، به نتیجهٔ دلخواه می‌رسیم:



در حقیقت، کاری که می‌کنیم مانند استقرای ریاضی است، یعنی فرض می‌کنیم مسأله را در مورد تعداد کمتر نقاط بتوانیم حل کنیم و مسألهٔ حاضر را به چند مسألهٔ کوچکتر خرد می‌کنیم که هر یک از آنها طبق فرض استقرا حل‌شدنی‌اند. اگر هنوز متوجه نشده‌اید، سعی کنید روش را روی چند مثلث دیگر امتحان کنید. اگر خواستید مطلبی دربارهٔ این روش و مسأله‌هایی که با این روش حل می‌شوند مطالعه کنید، به‌خاطر داشته باشید که نام فارسی آن روش **تقسیم و حل** و نام انگلیسی آن **divide and conquer** است.

استفاده از مثلثات در حل مسائل هندسه (۱)

احسان کریمی

در این مقاله با روش مثلثاتی حل مسائل هندسه آشنا می‌شوید. در این روش با انتخاب زاویه‌های مناسب مسأله را با روابط مثلثاتی حل می‌کنیم. با این روش می‌توان برخی از قضیه‌های سنتی هندسهٔ مسطحه (مانند قضیه‌های مورلی، فوئرباخ و اویلر) را ثابت کرد.

قبل از طرح و حل مسائل، روابط مثلثاتی لازم را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید α و β اعدادی حقیقی باشند. در این صورت

۱. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

و در نتیجه $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha$

۲. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

و در نتیجه $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$

۳. $\sin\alpha+\sin\beta=۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$

۴. $\cos\alpha+\cos\beta=۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$

۵. $\cos\alpha-\cos\beta=-۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$

۶. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$

۷. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$

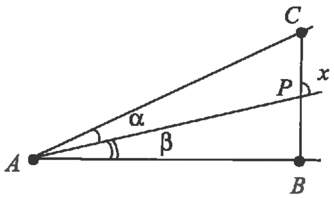
۸. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۲}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$

۹. قضیهٔ سینوسها: اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد و تعریف کنیم $a=BC$، $b=AC$ و $c=AB$، آن‌گاه

$$\frac{\sin(\angle A)}{a}=\frac{\sin(\angle B)}{b}=\frac{\sin(\angle C)}{c}=۲R$$

مسألهٔ ۱ . نقطهٔ P درون زاویهٔ A قرار دارد. از نقطهٔ P خطی رسم کنید که دو ضلع زاویهٔ A را در نقطه‌های B و C قطع کند و $\frac{۱}{BP}+\frac{۱}{CP}$ بیشینه باشد (المپیاد ۱۹۷۹ آمریکا، مسألهٔ ۴).

راه حل. فرض کنید خطی از P گذشته و ضلعهای زاویهٔ P را در نقطه‌های B و C قطع کرده است. α، β و x را طبق شکل زیر در نظر بگیرید.



طبق قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ABP و ACP

$$\frac{۱}{BP}=\frac{\sin\left(۱۸۰-(x+\beta)\right)}{AP\sin\beta}=\frac{\sin(x+\beta)}{AP\sin\beta} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{CP}=\frac{\sin(x-\alpha)}{AP\sin\alpha}$$

در نتیجه

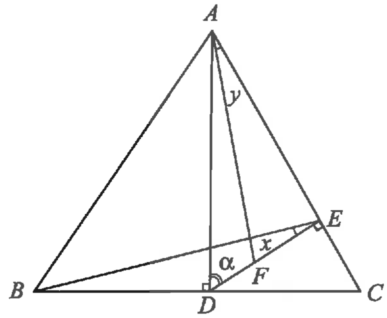
$$\begin{aligned}
\frac{۱}{CP}+\frac{۱}{BP}&=\frac{۱}{AP}\left(\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\sin(x+\beta)}{\sin\beta}\right)\\
&=\frac{۱}{AP}\left(\frac{\sin x\cos\alpha-\sin\alpha\cos x}{\sin\alpha}+\frac{\sin x\cos\beta+\sin\beta\cos x}{\sin\beta}\right)\\
&=\frac{۱}{AP}(\sin x\cot\alpha-\cos x+\sin x\cot\beta+\cos x)\\
&=\frac{۱}{AP}(\cot\alpha+\cot\beta)\sin x
\end{aligned}$$

در آخرین عبارت، تنها متغیر، x است و بقیهٔ مقادیر ثابت‌اند. بیشینهٔ این عبارت وقتی است که $x=۹۰^\circ$. بنابراین اگر خط را بر AP عمود رسم کنیم، $\frac{۱}{BP}+\frac{۱}{CP}$ بیشینه است. (برای دو راه حل دیگر به [۱] صفحهٔ ۱۰۸ و [۲] صفحهٔ ۶۰ مسألهٔ ۲۸۱ مراجعه کنید.) ■

مسألهٔ ۲ . در مثلث ABC، $AB=AC$ و D پای ارتفاع وارد بر BC است. از D بر AC عمود رسم می‌کنیم و پای عمود را E می‌نامیم. ثابت کنید اگر F وسط DE باشد آن‌گاه $AF\perp BE$ (دومین المپیاد سراسری روسیه، ۱۹۶۲، مسألهٔ ۲۲).

راه حل. x، y و α را مطابق شکل صفحهٔ بعد در نظر بگیرید و فرض کنید $a=BD$. برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم $x=y$ (چرا؟). بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای BED و BEC

$$\frac{a}{\sin x}=\frac{BE}{\sin(۹۰+\alpha)}=\frac{BE}{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad \frac{BE}{\sin\alpha}=\frac{۲a}{\sin(۹۰+x)}=\frac{۲a}{\cos x}$$



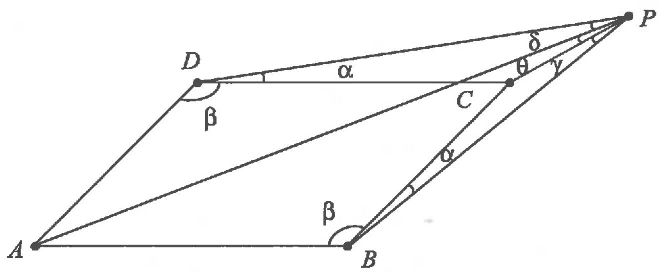
از دو تساوی قبل، BE را به‌دست می‌آوریم و به تساوی $\cot x = ۲\tan\alpha$ می‌رسیم. اما

$$۲\tan\alpha = \frac{۲AE}{DE} = \frac{AE}{EF} = \cot y$$

و درنتیجه $\cot x = \cot y$. اما $۰^\circ < x, y < ۹۰^\circ$، بنابراین $x = y$. (برای راه‌حلی دیگر به شماره‌های ۲۴ و ۲۷ نشریهٔ راه المپیاد یا [۴] صفحهٔ ۲۵ و [۵] صفحهٔ ۲۷۹ یا [۶] یا [۷] یا [۸] مسألهٔ ۱۱ بخش ۲ یا [۹] یا [۱۰] صفحهٔ ۲۶ مسألهٔ ۲۹ مراجعه کنید. این مسأله به کمک اعداد مختلط دست‌کم به دو روش حل می‌شود.) ■

مسألهٔ ۳ . نقطهٔ P خارج از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ طوری واقع است که $\angle CDP = \angle CBP$. ثابت کنید $\angle APD = \angle BPC$ (دوازدهمین المپیاد ریاضی شوروی سابق، ۱۹۷۸، مسألهٔ دوم).

راه‌حل. α، β، γ، δ و θ را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید.



بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای BCP و DCP

$$\frac{CP}{BC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{و} \quad \frac{CD}{CP} = \frac{\sin(\delta+\theta)}{\sin\alpha}$$

در نتیجه

$$\frac{CD}{BC} = \frac{\sin(\delta+\theta)}{\sin\gamma} \qquad (۱)$$

بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ABP و ADP

$$\frac{AP}{AD} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\delta} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AP} = \frac{\sin(\gamma+\theta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

و در نتیجه

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sin(\gamma+\theta)}{\sin\delta} \tag{۲}$$

اما $AB = CD$ و $AD = BC$. بنابراین، از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$\sin\gamma\sin(\gamma+\theta) = \sin\delta\sin(\delta+\theta)$$
$$\cos\theta - \cos(۲\gamma+\theta) = \cos\theta - \cos(۲\delta+\theta)$$
$$\cos(۲\gamma+\theta) = \cos(۲\delta+\theta)$$
$$\sin(\gamma-\delta)\sin(\gamma+\delta+\theta) = ۰$$

اما $\gamma+\delta+\theta \neq ۰^\circ$. در نتیجه $\sin(\gamma+\delta+\theta) \neq ۰$ (توجه کنید که $۰^\circ < \gamma+\delta+\theta < ۱۸۰^\circ$ (چرا؟)). بنابراین، $\sin(\gamma-\delta) = ۰$ و چون $-۱۸۰^\circ < \gamma-\delta < ۱۸۰^\circ$، نتیجه می‌گیریم $\gamma = \delta$ که همان حکم خواسته شده است. (حل هندسی را می‌توانید در [۷] ببینید.) ∎

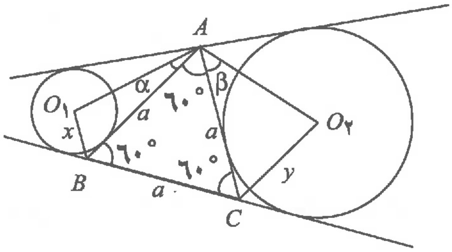
مسألهٔ ۴ . مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. خط d را طوری رسم می‌کنیم که از A بگذرد و مثلث را فقط در این نقطه قطع کند. $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دو دایره‌اند که هر یک بر d و دو تا از ضلعها [یا امتداد ضلعها]ی مثلث ABC مماس است و دایره‌ها بیرون ABC واقع شده‌اند. ثابت کنید $O_۱B + O_۲C$ مقداری ثابت است.

راه‌حل. x، y، a، α و β را مانند شکل صفحهٔ بعد در نظر بگیرید. دشوار نیست که ثابت کنیم $O_۱B$ نیمساز زاویهٔ مکمل زاویهٔ ABC است و نیز $O_۲C$ نیمساز زاویهٔ مکمل زاویهٔ ACB. پس $\angle O_۱BA = \angle O_۲CA = ۶۰^\circ$ و در نتیجه، بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای $AO_۱B$ و $AO_۲C$

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(۱۸۰ - (۶۰+\alpha))} = \frac{a}{\sin(۶۰+\alpha)}$$

و

$$\frac{y}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(۱۸۰ - (۶۰+\beta))} = \frac{a}{\sin(۶۰+\beta)}$$



از طرفی می‌توان نوشت $۱۸۰^\circ = ۶۰^\circ + ۲\beta + ۲\alpha$ (چرا؟). در نتیجه $۶۰^\circ + \alpha = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + \beta)$.
بنابراین $\sin(۶۰ + \alpha) = \sin(۶۰ + \beta)$ و در نتیجه

$$x + y = a\Big(\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(۶۰ + \alpha)}\Big) = \frac{۲a\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}{\sin(۶۰ + \alpha)} = \frac{a\cos(۳۰ - \alpha)}{\sin(۶۰ + \alpha)} = a$$

در محاسبهٔ بالا از اینکه $\alpha + \beta = ۶۰^\circ$ استفاده کرده‌ایم. اما از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم که مقدار $x + y$ فقط به طول ضلع مثلث بستگی دارد. (حل هندسی در [۱۳] آمده است.) ■

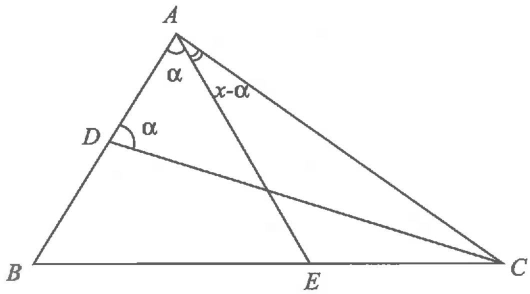
مسألهٔ ۵ . D وسط ضلع AB از مثلث ABC است و E نقطه‌ای است روی ضلع BC به‌طوری که $\frac{CE}{BE} = \frac{۱}{۲}$ و $\angle ADC = \angle BAE$. اندازهٔ زاویهٔ BAC چند درجه است؟

راه‌حل. فرض کنید $x = \angle BAC$ و α را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ABE و ACE

$$\frac{BE}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin(\angle ABC)} \quad \text{و} \quad \frac{CE}{\sin(x-\alpha)} = \frac{AE}{\sin(\angle ACB)}$$

در نتیجه

$$\frac{CE}{BE}\frac{\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)} = \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)}$$



اما طبق فرض مسأله، $\frac{CE}{BE} = \frac{۱}{۲}$ و در نتیجه

$$\frac{۱}{۲}\frac{\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)} = \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)}$$

فرض کنید R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد. از طرفی بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلث ACD

$$\frac{CD}{\sin x} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

و چون $AC = ۲R\sin(\angle ABC)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{CD}{\sin x} = \frac{۲R\sin(\angle ABC)}{\sin\alpha} \qquad (۳)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلث ACD

$$\frac{CD}{\sin x} = \frac{AD}{\sin(۱۸۰ - (x+\alpha))} = \frac{AD}{\sin(x+\alpha)}$$

و چون

$$AD = \frac{AB}{۲} = \frac{۲R\sin(\angle ACB)}{۲} = R\sin(\angle ACB)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{CD}{\sin x} = \frac{R\sin(\angle ACB)}{\sin(x+\alpha)} \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)} = \frac{\sin\alpha}{۲\sin(x+\alpha)}$$

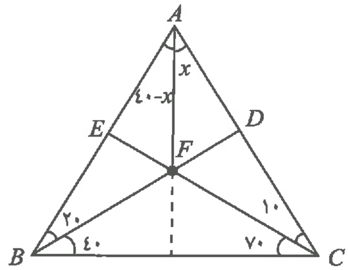
و در نتیجه

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(x-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(x+\alpha)}$$

یعنی $\sin(x-\alpha) = \sin(x+\alpha)$ و در نتیجه $۲\sin\frac{-۲\alpha}{۲}\cos\frac{۲x}{۲} = ۰$ و چون $۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $۰^\circ < x < ۱۸۰^\circ$ پس $\angle BAC = x = ۹۰^\circ$ (در [۱۴] می‌توانید دو راه‌حل هندسی بیابید.) ∎

مسألهٔ ۶ . در مثلث ABC، $\angle BAC = ۴۰^\circ$، $\angle ABC = ۶۰^\circ$ و D و E نقاطی به‌ترتیب روی ضعلهای AC و ABاند که $\angle CBD = ۴۰^\circ$، $\angle BCE = ۷۰^\circ$. F نقطهٔ برخورد BD و CE است. ثابت کنید $AF \perp BC$ (المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۹۸، مسألهٔ ۴).

راه‌حل. به شکل زیر دقت کنید.



این مسأله را با استفاده از صورت سینوسی قضیهٔ سوا می‌توان حل کرد: G را پای ارتفاع وارد بر BC از A فرض کنید. در نتیجه $\angle BAG = 30^\circ$ و $\angle CAG = 10^\circ$. فرض کنید

$$\Delta = \frac{\sin(\angle BAG)\sin(\angle ACE)\sin(\angle CBD)}{\sin(\angle CAG)\sin(\angle BCE)\sin(\angle ABD)}$$

اگر ثابت کنیم $\Delta = 1$، حکم ثابت شده است (چرا؟)، اما

$$\Delta = \frac{\sin 30 \sin 10 \sin 40}{\sin 10 \sin 70 \sin 20} = \frac{\cos 20}{\sin 70} = \frac{\sin 70}{\sin 70} = 1$$

اکنون حکم را بدون استفاده از صورت سینوسی قضیهٔ سوا ثابت می‌کنیم.

بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ACF، ABF و BCF می‌توان نوشت

$$\frac{FC}{FA} = \frac{\sin x}{\sin 10} \quad \text{و} \quad \frac{FB}{FA} = \frac{\sin(40 - x)}{\sin 20} \quad \text{و} \quad \frac{FC}{FB} = \frac{\sin 40}{\sin 70}$$

در نتیجه

$$\frac{\sin x \sin 20}{\sin 10 \sin(40 - x)} = \frac{\sin 40}{\sin 70}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 10 \sin(40 - x)\frac{\sin 40}{\sin 70 \sin 20}\\ &= \sin 10 \sin(40 - x)\frac{2 \sin 20 \cos 20}{\cos 20 \sin 20}\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin 10 \sin(40 - x)\\ \sin x &= \cos(30 - x) - \cos(50 - x)\\ \cos(50 - x) &= \cos(30 - x) - \sin x = \cos(30 - x) - \cos(90 - x)\\ &= 2 \sin 30 \sin(60 - x) = \sin(60 - x)\end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned}\cos(50 - x) - \sin(60 - x) &= 0\\ \cos(50 - x) - \cos(30 + x) &= 0\\ 2 \sin(10 - x) \sin(40) &= 0\end{aligned}$$

بنابراین، $\sin(10 - x) = 0$ و چون $0^\circ < x < 40^\circ$، نتیجه می‌گیریم $x = 10^\circ$، که یعنی $AF \perp BC$.
(حل هندسی را در [۱۵] صفحهٔ ۴۴ می‌توانید ببینید.) ∎

بقیهٔ مقاله و فهرست منابع در شمارهٔ بعدی به چاپ خواهد رسید.

آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر: دکتر یحیی تابش / دکتر امیدعلی کرمزاده

انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی منتشر کرده است :

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید، بلکه حاصل ساعت ها تلاش فکری است. بدیهی است که اگر این تلاش‌ها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو انتشارات فاطمی به انتشار کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است.

این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتاب‌های زرد)
شامل کتاب‌هایی مقدماتی
با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتاب‌های نارنجی)
شامل کتاب‌های میانه و مجموعهٔ مسائل و کتاب‌های کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است.

دستهٔ سوم (کتاب‌های قرمز) شامل کتاب‌های پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

منتشر می‌شود

کتاب‌های آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات، زیبا شناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوری‌های ذهنی تلاش می‌کنند.
مطالعهٔ کتاب‌های این مجموعه به دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقاتی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان توصیه می‌شود.

انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی منتشر کرده است:

کتاب **۱۰۰ دانشمند که جهان را تغییر دادند** دربرگیرندهٔ زندگینامهٔ ۱۰۰ نفر از دانشمندانی است که بر جامعه و جهان علم تأثیر مهمی داشته‌اند. این زنان و مردان شامل پزشک، طبیعیدان، ریاضیدان، فیزیکدان، شیمیدان، و افراد مشخصی در رشته‌های دیگرند. زندگینامه‌ها به‌ترتیب زمانی منظم شده‌اند و از عصر یونان باستان تا زمان حاضر را دربر می‌گیرند.

کتاب **۱۰۰ اختراع که جهان را تغییر دادند** چشم‌اندازی فشرده از بعضی از مهمترین اختراعها در تاریخ فناوری است. در این کتاب از سطح شیبدار، گوِه و اهرم، چرخ، قرقره و پیچ که به‌عنوان ماشینهایِ ساده برای سهولت کار و امور روزمره به‌کار می‌روند تا ماشینهای بسیار پیچیدهٔ امروزی شرحی به‌میان آمده است.

منتشر می‌شود

تورنمنت شهرها مسابقه‌ای ریاضی برای دانش‌آموزان دبیرستانی است که شهرتی جهانی دارد. این مسابقه که در سال ۱۹۸۰ در اتحاد جماهیر شوروی پایه‌گذاری شده است. در حال حاضر به مسابقه‌ای بین‌المللی تبدیل شده است. هر سال، دهها شهر کوچک و بزرگ از سراسر جهان در این مسابقه شرکت می‌کنند و در بسیاری از این شهرها، برگزاری این مسابقه سهم بسزایی در گسترش تواناییهای دانش‌آموزان در مسئله حل کردن داشته و باعث بیشتر شدن علاقهٔ آنها به ریاضیات شده است.

مطالعهٔ این کتاب‌ها برای دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌های ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.

۱۰۰ دانشمند ... ۱۰۰ اختراع ... تورنمنت شهرها