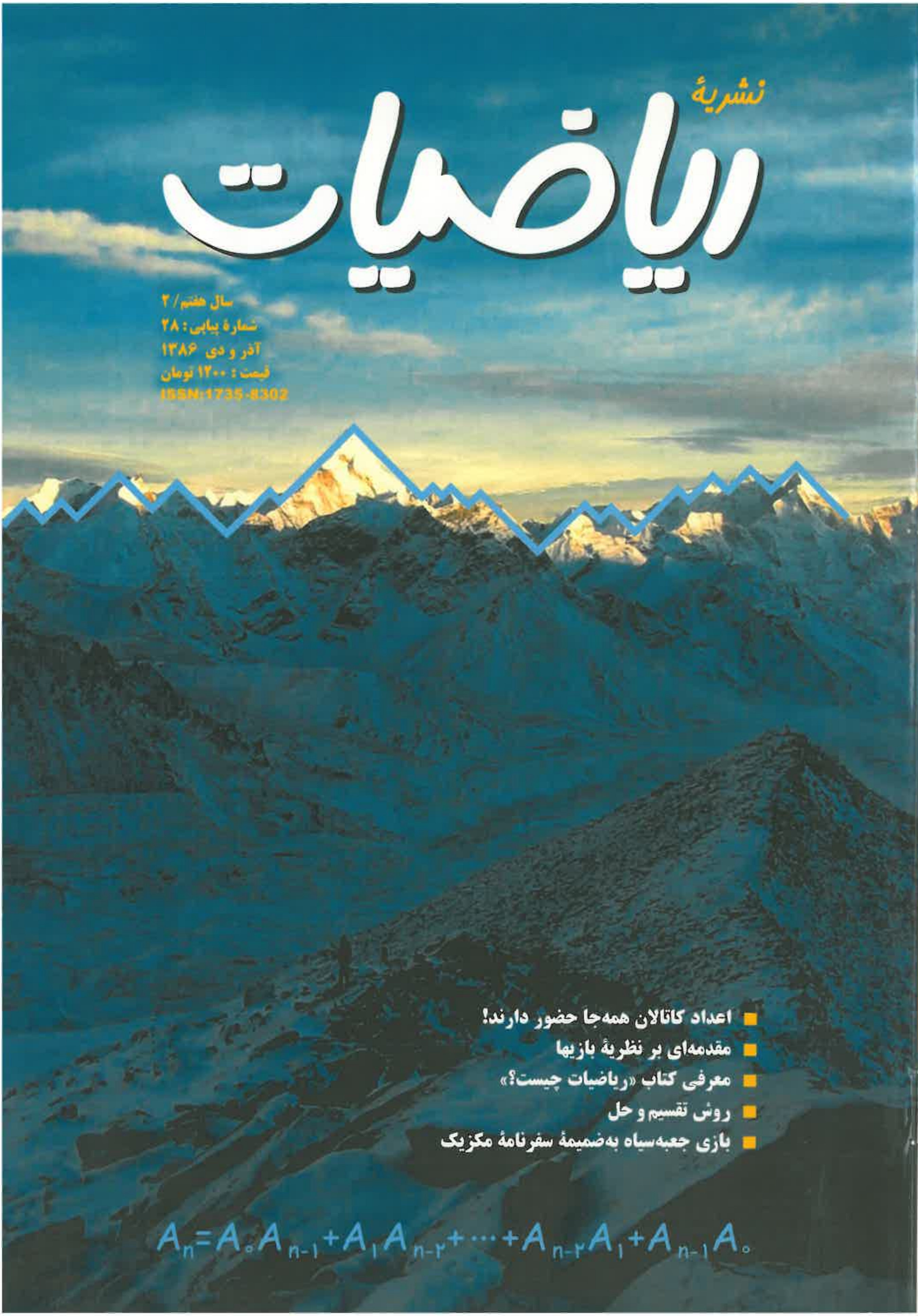
نشریهٔ

ریاضیات

سال هفتم/ ۲
شمارهٔ پیاپی: ۲۸
آذر و دی ۱۳۸۶
قیمت: ۱۲۰۰ تومان
ISSN:1735-8302



- اعداد کاتالان همه‌جا حضور دارند!
- مقدمه‌ای بر نظریهٔ بازیها
- معرفی کتاب «ریاضیات چیست؟»
- روش تقسیم و حل
- بازی جعبه‌سیاه به‌ضمیمهٔ سفرنامهٔ مکزیک

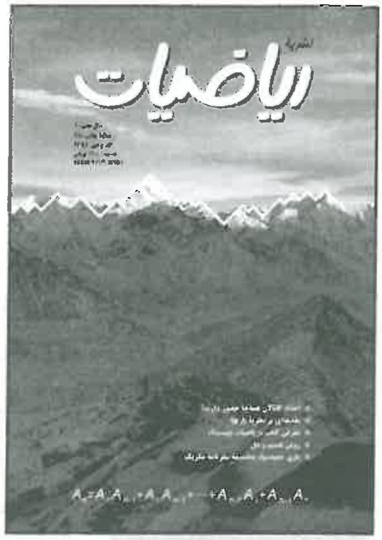
$$A_n=A_0A_{n-1}+A_1A_{n-2}+\cdots+A_{n-2}A_1+A_{n-1}A_0$$

به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال هفتم/۲ ● شمارهٔ پیاپی: ۲۸● آذر و دی ۱۳۸۶

فهرست:



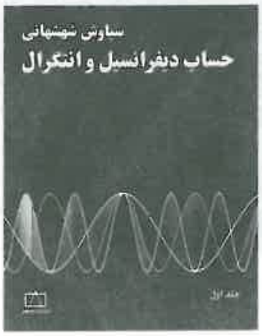
روی جلد: اعداد کاتالان همه‌جا حضور دارند!

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: یحیی تابش
ویراستار اجرایی: بهزاد اسلامی مسلّم
هیئت تحریریه: بهزاد اسلامی مسلّم، یحیی تابش، بردیا حسام، محمد صالح زارع‌پور، کسری علیشاهی، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
همکاران این شماره: میرامید حاجی‌میرصادقی، میثم عقیقی
امور مشترکین: شیوا ثمرانی
وب‌گاه: www.riaziat.ir
نشانی پست الکترونیکی: nashriye@riaziat.ir
ISSN:1735-8302

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسئول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه‌بندی: اعظم توکلی
رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: خاشع
نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹-۱۴۱۴۵
تلفن: ۵-۶۶۴۸۶۵۶۲

حساب دیفرانسیل و انتگرال



۱. بسیاری از پدیده‌های طبیعی و اجتماعی با تحول و تغییر ذاتی همراه‌اند. این پدیده‌ها معمولاً با توابع ریاضی مدل می‌شوند و شناخت رفتار آنها با مطالعهٔ آن توابع و به کمک حساب دیفرانسیل‌وانتگرال ممکن می‌شود. ازاین‌رو، حساب دیفرانسیل و انتگرال در سال آخر دبیرستان و دورهٔ پیش‌دانشگاهی و در سال اول دانشگاه در رشته‌های علوم و مهندسی مبحثی مهم محسوب می‌شود و به نوعی مدخل آموزش عالی است.

۲. در درس حساب دیفرانسیل‌وانتگرال دانشگاهی عمدتاً ازکتابهایی که در آمریکای شمالی تألیف شده‌اند استفاده می‌شود. کتابهایی که در سالهای اخیر منتشر شده‌اند عموماً ترجمه و چاپ مناسبی دارند، اما از جهات گوناگون با شرایط آموزشی کشور ما هماهنگ نیستند. مثلاً بعضی مطالبی که درکتابهای دبیرستان و پیش‌دانشگاهی آموزش داده می‌شوند در این کتابها مجدداً مطرح می‌شوند. ازاین‌رو، تألیف کتابی متناسب با برنامهٔ آموزشی دروس ریاضی عمومی سال اول دانشگاه که از سطح کیفی مناسبی به لحاظ نشر برخوردار باشد، همیشه از آرزوهای علاقه‌مندان به توسعهٔ پایگاههای علمی در کشور بوده است. خوشبختانه با انتشار کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، تألیف دکتر سیاوش شهشهانی (استاد پیشکسوت دانشگاه صنعتی شریف) در انتشارات فاطمی، این آرزو به حقیقت پیوسته است. این کتاب متناسب با نیازهای آموزشی دروس ریاضیات عمومی در سال اول دانشگاه تدوین شده است. ناشر نیز با رعایت استانداردهای نشر، کتاب را با حروف‌چینی، طراحی و صفحه‌آرایی مناسبی منتشر کرده‌است. همهٔ اینها نوید می‌دهند که دورهٔ جدیدی از نشر کتابهای علمی درکشور آغاز شده است.

۳. در سالهای اخیر، درکشور ما در دبیرستان درس حسابان، در دورهٔ پیش‌دانشگاهی درس حساب دیفرانسیل و انتگرال و در سال اول دانشگاه دروس ریاضی عمومی ۱ و ۲ در دو نیم‌سال درس داده می‌شوند. سه درس از چهار درس (به‌جز ریاضی عمومی ۲) مشترکات زیادی دارند. شاید وقت آن رسیده باشد که این دروس در برنامه‌ای جامع بازنگری و بررسی شوند تا هماهنگی لازم بین آنها فراهم شود.

هیئت تحریریهٔ نشریهٔ ریاضیات

اعداد کاتالان همه‌جا حضور دارند!

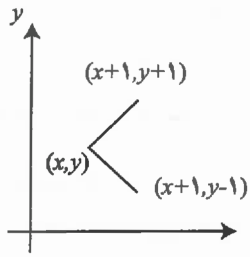
زهره هاشمی سهی

در این مقاله با دنباله‌ای از اعداد به نام اعداد کاتالان آشنا می‌شوید. این دنباله مانند دنباله‌های فیبوناتچی و لوکا، منبعی بزرگ از سرگرمی و هیجان برای مبتدیان و حرفه‌ایهاست. با مسئله‌هایی که در ادامه خواهید دید، اعداد کاتالان را خواهید شناخت.

مسئلهٔ ۱ (رشته کوهها). تعداد رشته کوههایی را بیابید که می‌توان آنها را با n حرکت به سمت بالا و n حرکت به سمت پایین رسم کرد (در اینجا n عددی طبیعی است). به‌بیان دیگر، تعداد مسیرهایی را مشخص کنید که از مبدأ شروع و به نقطهٔ $(2n, 0)$ در صفحهٔ مختصات ختم می‌شوند، و در هر دوی این دو شرط صدق می‌کنند:

الف) اشکالی ندارد که مسیر به نیمهٔ مثبت محور xها برخورد کند، اما نباید از آن عبور کند.

ب) مسیر در هر نقطه مانند (x, y) همان‌طور که در شکل ۱ مشخص شده است، به سمت بالا به نقطهٔ $(x + 1, y + 1)$ یا به سمت پایین به نقطهٔ $(x + 1, y - 1)$ می‌رود.

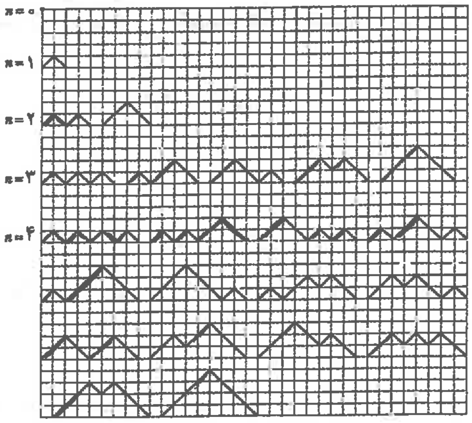


شکل ۱

در شکل ۲ حالتهای ممکن به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ مشخص شده است. دقت کنید که بعضی از رشته کوهها از انعکاس بعضی دیگر نسبت به محورهایی موازی محور yها حاصل می‌شوند. با توجه به شکل ۲، جواب مسئلهٔ ۱ به‌ازای $n = 2$ برابر ۲، و به‌ازای $n = 3$ برابر ۵ است.

در مسئلهٔ بعدی از مفهومی به نام مجموعهای جزئی استفاده می‌کنیم. اگر n عدد مانند a_1، a_2، ... و a_n داشته باشیم و فرض کنیم S برابر حاصل‌جمع آنها باشد، هر یک از a_1، $a_1 + a_2$، $a_1 + a_2 + a_3$، ... و $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ را مجموعی جزئی از S می‌نامیم.

مسئلهٔ ۲ (مجموعهای نامنفی). فرض کنید n عددی طبیعی باشد. nتا عدد ۱ و nتا عدد ۱− را به چند طریق



شکل ۲

می‌توان در یک ردیف به‌دنبال هم گذاشت، به‌طوری که هر مجموع جزئی عددی نامنفی باشد.

دقت کنید که چون هر مجموع جزئی باید عددی نامنفی باشد، ردیف اعداد باید با عدد ۱ شروع شود. جواب به‌ازای $n = ۲$ برابر ۲ و به‌ازای $n = ۳$ برابر ۵ است. آیا می‌توانید همهٔ حالات را بیابید؟

این مسئله به مسئلهٔ ۱ شبیه است: هر عدد ۱+ در مسئلهٔ ۲ متناظر با حرکت از (x, y) به $(x + ۱, y + ۱)$، و هر عدد ۱− متناظر با حرکت از (x, y) به $(x + ۱, y - ۱)$ در مسئلهٔ ۱ است. اینکه مجموعهای جزئی باید نامنفی باشند، متناظر با این است که مسیر نباید از محور xها عبور کند.

مسئلهٔ ۳ (مسئلهٔ انتخابات برتراند[1]). فرض کنید دو نامزد انتخابات ریاست‌جمهوی به نامهای الف و ب با هم رقابت می‌کنند و تعداد رأیهایی که به نفع هر یک داده شده‌اند برابر n است که n عددی طبیعی است. به چند طریق می‌توان این $۲n$ رأی را شمرد، به‌طوری که در هر لحظه، تعداد رأیهای به نفع الف در بین رأیهای شمارش‌شده بیشتر از یا مساوی با تعداد رأیهای شمارش‌شده به نفع ب باشد.

آیا می‌توانید شباهت این مسئله را با مسئلهٔ ۲ دریابید؟ هر رأی به نفع الف را با ۱ و هر رأی به نفع ب را با ۱− مشخص کنید. در این‌صورت، شرط نامنفی بودن مجموعهای جزئی معادل است با اینکه در هر لحظه، رأیهای به نفع الف در بین رأیهای شمارش‌شده بیشتر از یا مساوی با رأیهای به نفع ب در بین رأیهای شمارش‌شده باشد.

وقتی ضرب $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$ را حساب می‌کنیم، می‌توانیم ابتدا ۲×۱ را حساب کنیم، بعد حاصل را در ۳ ضرب کنیم، و عدد به‌دست آمده را در ۴ ضرب کنیم. این ترتیب را با $۴ \times (۳ \times (۲ \times ۱))$ نمایش می‌دهیم. اما می‌توانیم کار دیگری هم بکنیم: ابتدا ۲×۱ را حساب کنیم. بعد ۴×۳ را و سپس حاصلهای دو ضرب را در

1. Bertrand

یکدیگر ضرب می‌کنیم. این ترتیب را به‌صورت $(۴ \times ۳) \times (۲ \times ۱)$ نمایش می‌دهیم. البته حاصل همان است، ولی ترتیب کارها تفاوت می‌کند. توجه کنید که در این نمایشها، در هیچ مرحله‌ای از ضرب، تعداد پرانتزهای بسته از تعداد پرانتزهای باز بیشتر نیست. اکنون به مسئلهٔ ۴ توجه کنید:

مسئلهٔ ۴ (پرانتزگذاری). به چند طریق می‌توان ضرب $n \times \cdots \times ۲ \times ۱$ را مانند توضیحات بالا با $n-۲$ پرانتز باز و $n-۲$ پرانتز بسته، پرانتزگذاری کرد، به‌طوری که در هیچ مرحله‌ای از ضرب، تعداد پرانتزهای بسته از تعداد پرانتزهای باز بیشتر نباشد؟ این مسئله را اولین بار کاتالان بررسی کرد. آن را حل می‌کنیم.

راه‌حل. ابتدا فرض کنید در ضرب لازم نباشد اعداد از چپ به راست، از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند، مثلاً $(۴ \times ۱) \times (۲ \times ۳)$ را با $(۴ \times ۳) \times (۲ \times ۱)$ یکسان ندانید. می‌خواهیم رابطه‌ای بازگشتی از تعداد چنین پرانتزگذاریهایی بیابیم. اگر این عدد را وقتی اعدادمان ۱ تا nاند، R_n بنامیم، جواب مسئلهٔ ۴ برابر است با $\frac{R_n}{n!}$، زیرا تعداد جای‌گشتهای n عدد برابر است با $n!$ و در مسئلهٔ ۴، جای‌گشت اعداد در پرانتزگذاری مهم نیست.

هر پرانتزگذاری از ضرب ۱، ۲، ...، n و $n+۱$ (با توجه به جای‌گشت) را می‌توان به‌صورت پرانتزگذاری‌ای از ضرب ۱، ۲، ... و n به‌دست آورد. برعکس، از هر پرانتزگذاری از ضرب ۱، ۲، ... و n با $n-۲$ پرانتز می‌توان پرانتزگذاریهایی از ضرب ۱، ۲، ...، n و $n+۱$ با $n-۱$ پرانتز به‌دست آورد. برای اینکه جملهٔ اخیر واضح‌تر شود، ضرب پرانتزگذاری شده‌ای از ۱، ۲، ... و n را در نظر بگیرید، که شامل $n-۱$ بار ضرب است. فرض کنید یکی از ضربها به‌صورت $A \times B$ باشد، که A شامل بعضی از اعداد ۱ تا n و B شامل بقیه است. برای راحتی عدد $n+۱$ را با $\square$ نمایش دهید. می‌توانیم $\square$ را قبل از A، در انتهای A قبل از "$\times$"، در ابتدای B و در انتهای B قراردهیم و ضربهای پرانتزگذاری‌شدهٔ $(\square \times A) \times B$، $(A \times \square) \times B$، $A \times (\square \times B)$ و $A \times (B \times \square)$ را به‌دست بیاوریم. این چهار حالت را به‌ازای هر یک از $n-۱$ علامت ضرب در ضرب موردنظر می‌توان ایجاد کرد. ضمناً اگر ضرب ابتدای کار را P بنامیم، ضربهای $\square \times (P)$ و $(P) \times \square$ را نیز می‌توان به‌دست آورد. پس از هر ضرب پرانتزگذاری‌شده از n عدد، $۴(n-۱)+۲$ یعنی $۴n-۲$ ضرب پرانتزگذاری‌شده از $n+۱$ عدد به‌دست می‌آید. حالتهای تکراری نیز به‌وجود نمی‌آیند. بنابراین

$$R_{n+۱} = (۴n-۲)R_n, \qquad n \geqslant ۲$$

و چون $R_۲ = ۲$، می‌توانیم R_n را به‌ازای هر n محاسبه کنیم:

$$R_۳ = R_{۲+۱} = (۴ \times ۲ - ۲)R_۲ = ۶R_۲ = ۶ \times ۲$$
$$R_۴ = R_{۳+۱} = (۴ \times ۳ - ۲)R_۳ = ۱۰ \times ۶ \times ۲$$
$$R_۵ = R_{۴+۱} = (۴ \times ۴ - ۲)R_۴ = ۱۴ \times ۱۰ \times ۶ \times ۲$$

و به همین ترتیب می‌توان ادامه داد، و نتیجه گرفت که

$$R_n = ۲ \times ۶ \times ۱۰ \times ۱۴ \times \cdots \times (۴n - ۶), \quad n \geqslant ۳$$

جواب مسئلهٔ ۴ را با C_n نمایش می‌دهیم و آن را nامین عدد کاتالان می‌نامیم. بنابراین

$$C_n = \frac{R_n}{n!} = \frac{۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \cdots \times (۴n - ۶)}{n!}, \quad n \geqslant ۳$$

■

به این مسئله به شکلی دیگر هم می‌توان نگریست. می‌خواهیم ضرب $n \times \cdots \times ۲ \times ۱$ را که در آن ترتیب اعداد مشخص است، پرانتزگذاری کنیم. هر پرانتزگذاری به‌صورت $(\ ) \times (\ )$ است. حالتهای ممکن این است که

(۱). پرانتز دوم شامل $n - ۱$ عامل باشد.

(۲). پرانتز اول شامل دو عامل و پرانتز دوم شامل $n - ۲$ عامل باشد.

...

(r). پرانتز اول شامل r عامل و پرانتز دوم شامل $n - r$ عامل باشد.

...

($n - ۱$). پرانتز اول شامل $n - ۱$ عامل باشد.

تعداد حالتهای (۱) برابر است با $C_۱C_{n-۱}$. تعداد حالتهای (۲) برابر است با $C_۲C_{n-۲}$. در حالت کلی، اگر $۱ \leqslant r \leqslant n - ۱$، تعداد حالتهای ($r$) برابر است با C_rC_{n-r}. بنابراین رابطهٔ بازگشتی

$$C_۱ = C_۲ = ۱, \quad C_n = C_۱C_{n-۱} + C_۲C_{n-۲} + \cdots + C_{n-۲}C_۲ + C_{n-۱}C_۱, \quad n \geqslant ۳ \qquad (*)$$

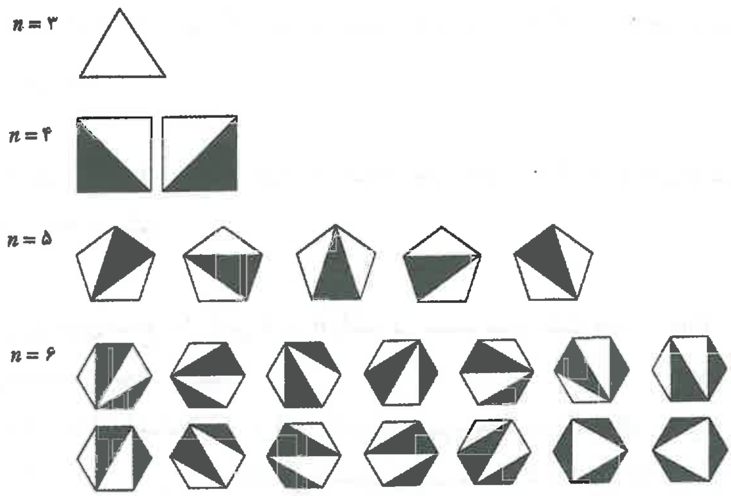
در مورد اعداد کاتالان به‌دست می‌آید.

با توجه به راه‌حل مسئلهٔ ۴، اگر دنباله‌ای در شرایط $(*)$ صدق کند، جملهٔ nامش با

$$\frac{۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \cdots \times (۴n - ۶)}{n!}$$

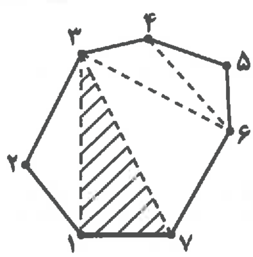
برابر است.

مسئلهٔ ۵ (مثلث‌بندی). می‌توانیم با رسم قطرهایی که یکدیگر را قطع نمی‌کنند، هر چندضلعی محدب را مثلث‌بندی کنیم، یعنی آن را به تعدادی مثلث تقسیم کنیم. اگر n عددی طبیعی باشد، به چند طریق می‌توانیم nضلعی محدبی را مثلث‌بندی کنیم؟ برای مثال، به شکل ۳ توجه کنید که در آن جواب این مسئله به‌ازای $n = ۳, ۴, ۵, ۶$ مشخص شده است.



شکل ۳

راه‌حل. رأسها را با شماره‌های ۱، ۲، . . . و n شماره‌گذاری کنید. ضلع با نقاط انتهایی ۱ و n را در نظر بگیرید. در هر مثلث‌بندی nضلعی، این ضلع، ضلعی از دقیقاً یک مثلث است. رأس مقابل این رأس یکی از رأسهای ۲، ۳، . . . و $n - ۱$ است. در شکل ۴ فرض کرده‌ایم $n = ۷$، و رأس مقابل ضلع ۱۷، رأس ۴ است.



شکل ۴

در شکل ۴، در سمت چپ مثلث ۱۳۷، ۳ضلعی ۱۲۳ و در سمت راستش، ۵ضلعی ۳۴۵۶۷ ($(۷ + ۱)-۳$ضلعی ۳۴۵۶۷) ایجاد شده است. اگر رأس مقابل، رأس ۴ می‌بود، در سمت چپ مثلث ۱۳۴، ۴ضلعی ۱۲۳۴ و در سمت راستش، ۴ضلعی ۴۵۶۷ ($(۷ + ۱)-۴$ضلعی ۴۵۶۷) ایجاد می‌شد.

به حالت nضلعی برمی‌گردیم. از مثال بالا می‌توانیم کمک بگیریم و چنین بگوییم که

(۲). اگر رأس روبه‌روی ضلع ۱n، رأس ۲ باشد، در سمت چپ مثلث ۱۲n، دوضلعی (بنابر قرارداد) و در سمت راستش، $n - ۱$ضلعی ایجاد می‌شود.

(۳). اگر رأس روبه‌روی ضلع $1n$، رأس ۳ باشد، در سمت چپ مثلث $13n$، سه‌ضلعی و در سمت راستش، $n-2$ضلعی ایجاد می‌شود.

...

(r). اگر رأس روبه‌روی ضلع $1n$، رأس r باشد، در سمت چپ مثلث $1rn$، r ضلعی و در سمت راستش، $(n+1)-r$ضلعی ایجاد می‌شود.

...

($n-1$). اگر رأس روبه‌روی ضلع $1n$، رأس $n-1$ باشد، در سمت چپ مثلث $1(n-1)n$، $(n-2)$ضلعی و در سمت راستش، دوضلعی ایجاد می‌شود.

اگر جواب مسئلهٔ ۵ را به‌ازای اعداد ۲، ... و $n-1$ می‌دانستیم و به‌ترتیب E_2، E_3، ... و E_{n-1} می‌نامیدیم، با توجه به حالتهای (۲)، (۳)، ... و ($n-1$) می‌توانستیم جواب مسئلهٔ ۵ را به‌ازای n (که آن را با E_n نمایش می‌دهیم) حساب کنیم. اگر قرارداد کنیم که $E_2 = 1$، می‌توانیم با توجه به حالتهای (۲)، (۳)، ... و ($n-1$) در بالا بنویسیم

$$E_2 = E_3 = 1, \quad E_n = E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \cdots + E_{n-1}E_2, \quad n \geqslant 4$$

این رابطه را یوهان آندراس فون سگنر[1] در ۱۷۵۹ به‌دست آورد.

بنابراین با توجه به آنچه قبل از مسئلهٔ ۵ گفته شد،

$$E_n = C_{n-1}, \qquad n \geqslant 2$$

پس جواب مسئلهٔ ۵ برابر است با

$$E_n = \frac{2 \times 6 \times 10 \times \cdots \times (4n-10)}{(n-1)!}, \quad n \geqslant 4$$

■

تمرین ۱. جواب مسئله‌های ۱، ۲ و ۳ چه رابطه‌ای با C_n دارد؟ با یافتن این رابطه، جواب مسئله‌ها را به‌طور صریح (مانند آنچه در مورد E_n و C_n به‌دست آوردیم) بنویسید.

تمرین ۲. ثابت کنید $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. (راهنمایی: به نسبت دو جملهٔ متوالی اعداد کاتالان و نیز نسبت $\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}$ به $\frac{1}{k-1}\binom{2(k-1)-2}{(k-1)-1}$ توجه کنید.)

1. Johann Andreas von Segner

منابع

1. Thomas Koshy, “Delving Deeper: The Ubiquitous Catalan Numbers”, *Mathematics Teacher,* Vol. 100, No. 3,October 2006, pp. 184-188.
2. Heinrich Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover Publications, 1965.

مقدمه‌ای بر نظریهٔ بازیها

پویا رونق

در این مقاله به الفبای نظریهٔ بازیها خواهیم پرداخت. شما را با مفاهیم اولیه در نظریهٔ مقدماتی بازیها آشنا خواهیم کرد. سپس نمونه‌هایی از بازیهای معروف در این نظریه، معرفی می‌شوند و با آنها توانایی تحلیل مقدماتی بازیها را به‌دست خواهید آورد.

۱. مفاهیم اولیه

در زندگی با بازیهای زیادی سروکار داریم. کلمهٔ بازی معمولاً ما را به یاد بازیهایی چون شطرنج، فوتبال و یا بازیهای کامپیوتری می‌اندازد. اما رقابتهای اقتصادی شرکتهای تجاری، تقابل مدیران و نیروی انسانی، جریان دادگاههای قضایی، کشمکشهای سیاسی میان کشورها، نبرد روان‌شناختی خیر و شر و حتی تلاش گونه‌ها برای زیست و بقا، نمونه‌هایی از رفتارهایی است که می‌توان آنها را «بازی» تصور کرد. در نظریهٔ بازیها، سعی می‌کنیم به این بازیها، مدلهای معادلاتی، ترکیبیاتی و منطقی نسبت دهیم و از این طریق سرنوشت آنها را تحلیل و پیش‌بینی کنیم.

مجموعهٔ «بازیکن»های بازی را به $N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ نمایش می‌دهیم. کانوی[1] «بازی زندگی» [۱] را به‌عنوان بازی‌ای بدون بازیکن ($N = \varnothing$) معرفی کرده است. بازیهایی چون جورچین که در آنها n مساوی یک است، در نظریه‌ای معروف به نظریهٔ تصمیم[2] بررسی می‌شوند. در بازیهایی که با آنها سروکار داریم، می‌توانیم از **وضعیت** بازی (که همهٔ اطلاعات وضعیت کنونی بازی در آن لحاظ شده است) و **حرکت** از وضعیتی به وضعیتی دیگر صحبت کنیم. «اطلاع» بازیکنان از وضعیت بازی، در بازیهای مختلف متفاوت است. آیا بازیکنان از تمام حرکات گذشته مطلع‌اند؟ آیا از برامد آزمایشهای تصادفی‌ای که ممکن است رخ دهند مطلع‌اند؟ در بازی **با اطلاعات کامل**[3] (مثل شطرنج) پاسخ هر دو سؤال بالا مثبت است. در شطرنج ممکن است وابسته به وضعیت بازی، بازیکنی بتواند اسب خود را حرکت دهد و یا نتواند. معمولاً با بازیهایی که این‌طور نیستند سروکار داریم: بازیهایی را که در آنها هردو بازیکن در هر نوبت حرکات مُجاز یکسانی دارند **منصفانه** می‌نامیم.

۲. مثالی از بازی

روی میز چند تودهٔ لوبیا به‌ترتیب با $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n لوبیا قرار دارد. در این بازی دو نفر به‌نوبت بازی می‌کنند و در هر نوبت یکی از توده‌ها را انتخاب می‌کنند و حداقل یک لوبیا از آن توده برمی‌دارند. برداشتن لوبیاها از بیش

1. Conway 2. decision theory 3. perfect information

از یک توده و همچنین برنداشتن لوبیا در نوبت، مُجاز نیست. هر بازیکن مجاز است که در نوبت خود یک تودهٔ لوبیا را به‌طور کامل بردارد. بازنده کسی است که حرکتی نداشته باشد و بازیکن دیگر برنده است. این بازی را بازی **نیمِ n توده‌ای** می‌نامیم. هر بازی نیم حتماً برنده خواهد داشت (چرا؟). نیم بازی کنید![۱]

در بازی نیم یک‌توده‌ای، بازیکن اول همواره می‌تواند با برداشتن همهٔ لوبیاها برنده شود. در چنین حالتی می‌گوییم بازیکن اول **استراتژی برد** دارد. در بازی نیم دوتوده‌ای، اگر تعداد لوبیاهای دو توده یکسان باشد، بازیکن دوم همواره از دسته‌ای که در نوبت قبل دست نخورده است آن‌قدر لوبیا برمی‌دارد که تعداد لوبیاهای دو دسته باز هم برابر شود. به‌این‌ترتیب بازیکن دوم بازی را به وضعیت $(0,0)$ می‌رساند و در نتیجه بازیکن دوم استراتژی برد دارد. اما اگر تعداد لوبیاها برابر نباشد بازیکن اول از تودهٔ بزرگ‌تر آن‌قدر لوبیا برمی‌دارد تا تعداد لوبیاهای دو دسته برابر شود. در این‌صورت او به بازیکن دومِ حالت قبل تبدیل خواهد شد و در نتیجه برنده می‌شود. پس در حالتی که تعداد لوبیاها برابر نیست، بازیکن اول استراتژی برد دارد. در بخش ۵ این بازی را در حالت کلی بررسی می‌کنیم.

۳. چندتعریف

تعریف ۱ (بازی ترکیبیاتی). بازی‌ای را بازی ترکیبیاتی می‌نامیم که در آن

۱. دو بازیکن به‌نوبت بازی می‌کنند.

۲. قوانین بازی تعیین می‌کنند که از وضعیتی در بازی به چه وضعیتهایی می‌توان رسید (تعیین حرکات مُجاز).

۳. بازی هنگامی تمام می‌شود که حرکت دیگری ممکن نباشد و بازیکنی که آخرین حرکت را می‌کند برنده است. بازیهایی راکه این شرط را ارضا می‌کنند **بازیهای با قاعدهٔ نرمال** می‌نامیم. در مقابل بازیهایی را که در آنها این بازیکن بازنده است **بازیهای با قاعدهٔ میزِر** می‌نامیم.

۴. مستقل از اینکه چگونه بازی شود، بازی در تعدادی متناهی حرکت پایان می‌پذیرد. (این بازیها را **بازیهای با شرط پایانی** می‌نامیم.)

معمولاً با بازیهایی سروکار داریم که در آنها تعداد وضعیتهای بازی متناهی است.

تعریف ۲ (استراتژی برد). اگر در بازی ترکیبیاتی‌ای یکی از بازیکنها بتواند با پیروی از الگوریتمی در بازی پیروز شود، می‌گوییم آن بازیکن استراتژی برد دارد.

فرض کنید در بازی‌ای، استراتژی برد با بازیکن اول باشد. می‌توان به این بازی پس از اولین حرکت، به‌دید بازی‌ای جدید نگاه کرد که در آن استراتژی برد با نفر دوم (بازیکن اول در بازی سابق) است. چون به چنین تحلیلهایی به دفعات نیاز پیدا می‌کنیم، برد و باخت را به‌جای آنکه به بازی نسبت دهیم، به وضعیت خاصی از بازی نسبت می‌دهیم:

1. http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html

تعریف ۳ (وضعیتهای P و N). Pـوضعیت[1]، وضعیتی از بازی است که در آن بازیکنی که آخرین حرکت را کرده است استراتژی برد دارد. به‌همین ترتیب، در Nـوضعیت[2] بازیکنی که می‌خواهد حرکت بعدی را بکند استراتژی برد دارد.

نتیجهٔ ۴.

۱. هر وضعیت پایانی Pـوضعیت است.

۲. در هر Nـوضعیت، دست‌کم یک حرکت به Pـوضعیت منجر می‌شود.

۳. در هر Pـوضعیت، هر حرکتی به Nـوضعیت منجر می‌شود.

الگوریتم. با استفاده از روشی استقرایی و با توجه به نتیجهٔ بالا می‌توان نوع وضعیتهای ممکن در بازی را تعیین کرد:

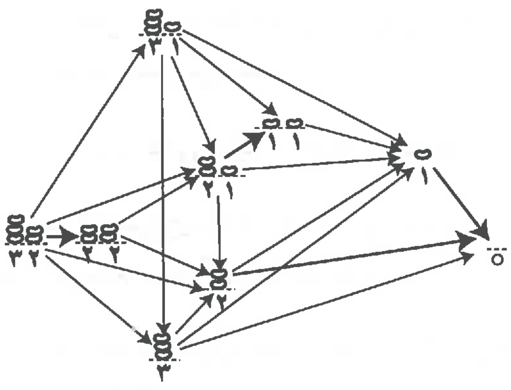
۱. هر وضعیت پایانی را P می‌نامیم.

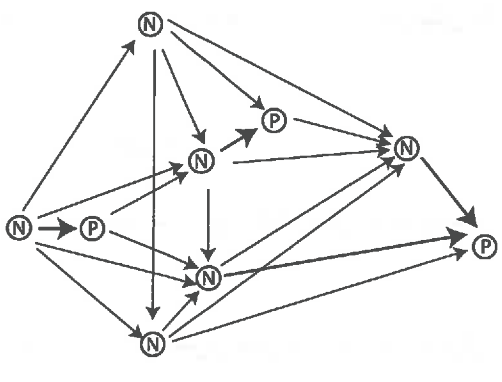
۲. تمام وضعیتهایی را که به Pـوضعیتی دسترسی دارند، N می‌نامیم.

۳. هر وضعیتی را که تمام حرکتهای آن منجر به وضعیتهای N می‌شوند، P می‌نامیم.

۴. اگر در مرحلهٔ ۳، Pـوضعیت جدیدی نیافتیم، متوقف می‌شویم. در غیر این‌صورت به مرحلهٔ ۲ بازمی‌گردیم.

مثال ۵. به شکل ۱ توجه کنید. در اینجا گرافی جهت‌دار به بازی نیم نسبت داده شده است. سپس به کمک الگوریتم بالا نوع وضعیتها تعیین شده است.





شکل ۱. بازی نیم

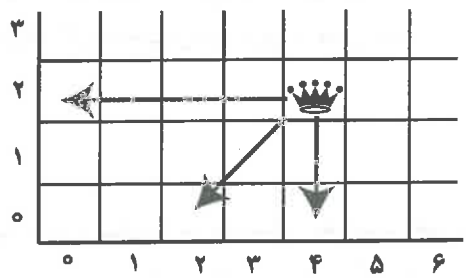
1. previous player 2. next player

با لم زیر رابطهٔ استراتژی برد و استراتژی «نباختن» مشخص می‌شود.

لم ۶. اگر در بازی‌ای با اطلاعات کامل و تعداد متناهی وضعیت، نفر اول استراتژی برد نداشته باشد نفر دوم استراتژی نباختن دارد.

برهان. اگر بازیکن اول استراتژی برد نداشته باشد، نمی‌تواند به هیچ P ـوضعیتی حرکت کند. پس از اینکه او حرکت کرد، بازیکن دوم دست‌کم حرکتی به وضعیتی غیر N دارد، زیرا در غیر این‌صورت او در Pـوضعیت قرار داشته است که با آنچه گفتیم در تناقض است. اگر بازیکن دوم همین استراتژی را ادامه دهد، این ناوردا برای او وجود دارد: بازیکن دوم هیچ‌گاه بازی را در Pـوضعیت شروع نمی‌کند. به‌ویژه نوبت بازی هیچ‌گاه در وضعیتی پایانی به او نخواهد رسید. این همان استراتژی «نباختن» مطلوب است. ∎

تمرین ۷. در بازی وزیر ویتوف، از خانهٔ (m,n) صفحهٔ شطرنج، هر بازیکن در نوبت خود وزیر را به پایین یا به چپ و یا به‌طور مورب به پایین و چپ حرکت می‌دهد. بازیکنی که وزیر را به خانهٔ $(۰,۰)$ برساند، برنده است. با استفاده از الگوریتم ۳ ثابت کنید که دنبالهٔ Pـوضعیتهای این بازی، دنبالهٔ $\{(۰,۰),(۱,۲),(۳,۵),(۴,۷),(۶,۱۰),(۸,۱۳),\ldots\}$ است. ضابطهٔ این دنباله چنین است: عنصر $(i+۱)$ام به‌صورت $(k,k+i)$ است که در آن k کوچک‌ترین عددی طبیعی‌ای است که در هیچ مؤلفه‌ای از i عنصر اول دنباله ظاهر نشده است. می‌توانید درستی این ادعا را امتحان کنید![1] توجه کنید که این بازی همان بازی نیم دوتوده‌ای است که به آن یک حرکت مجاز اضافه شده است: بازیکنان می‌توانند در هر حرکت به تعداد مساوی از هر دو توده لوبیا بردارند.



شکل ۲. بازی وزیر ویتوف

۴. بازیهای دیگر

در این بخش بازیهای دیگری معرفی کنیم و سعی می‌کنیم آنها را تحلیل کنیم. مشاهده خواهید کرد که بازی نیم از اهمیت زیادی برخوردار است.

1. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml

۱.۴ بازی تفریق

در این بازی زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی مانند S مفروض است. عددی طبیعی مانند n (معمولاً به‌اندازهٔ کافی بزرگ) در نظر بگیرید. در هر نوبت، بازیکن یکی از اعضای S را از این عدد کم می‌کند، به این شرط که حاصل تفریق نامنفی باشد. بازی نیم یک‌توده‌ای با توده‌ای به بزرگی n، بازی تفریقی با $S = \{۱, ۲, \dots, n\}$ است.

برای تحلیل این بازی می‌توانید به‌آسانی از الگوریتم ۳ استفاده کنید. مثلاً فرض کنید $S = \{۱, ۳, ۴\}$. حالت پایانی ۰ است و یکتاست (توجه کنید که اگر $۱ \notin S$ ممکن است چنین نباشد). پس وضعیتهای ۱، ۳ و ۴ همگی Nـوضعیت‌اند. اما ۲ Pـوضعیت است زیرا تنها حرکت مجاز از این وضعیت به ۱ است که خود Nـوضعیت است. با بازگشت به مرحلهٔ دوم الگوریتم نتیجه می‌شود که ۵ و ۶، Nـوضعیت‌اند. پس ۷ Pـوضعیت است زیرا از آن فقط به Nـوضعیتهای ۳، ۴ و ۶ می‌توان حرکت کرد. می‌توانید به‌استقرا ثابت کنید که وضعیتهای بازی، تناوبی به طول ۷ دارند و در آنها الگوی $PNPNNN$ تکرار می‌شود.

تمرین ۸ . نسخهٔ میزر از بازی تفریق را تحلیل کنید. (در این بازی هدف هر بازیکن این است که حریف را مجبور کند آخرین مهره را بردارد.)

تمرین ۹ . در این بازی دو جعبه به‌ترتیب با m و n مهره موجود است. بازی در وضعیت (m, n) شروع می‌شود. هر حرکت عبارت است از خالی کردن یک جعبه و تقسیم مهره‌های جعبهٔ دیگر بین این دو جعبه به‌قسمی که در هریک دست‌کم یک مهره قرار بگیرد. مانند قبل، بازیکنی که آخرین حرکت را بکند برنده است. وضعیت پایانی این بازی $(۱, ۱)$ است و یکتاست (چرا؟). Pـوضعیتهای این بازی را تعیین کنید.

۲.۴ نیمِ فیبوناتچی

این بازی به ردهٔ بزرگ‌تری از بازیها که به بازیهای تفریق دینامیکی معروف‌اند تعلق دارد. در این نوع بازیهای تفریق، تعداد مهره‌هایی که هر بازیکن اجازه دارد به تعداد مهره‌هایی که در حرکت قبل برداشته شده است بستگی دارد. ضمناً، نفر اول مجاز نیست که هیچ مهره‌ای برندارد یا همهٔ توده را بردارد. تحلیل بازیهای تفریق دینامیکی حتی در هنگامی که تعداد مهره‌های ممکن برای برداشتن در هر حرکت تابع بازگشتی ساده‌ای از حرکات قبل باشد، مسئله‌ای دشوار است.

حالت خاصی از این رده از بازیها، نیم فیبوناتچی نام دارد. در نیم فیبوناتچی هر بازیکن حداکثر به‌اندازهٔ دوبرابر تعداد مهره‌های برداشته‌شده در حرکت قبل اجازه دارد مهره بردارد. می‌توانید این بازی را در اینترنت بازی کنید.[1]

1. http://www.cit.gu.edu.au/teaching/1104CIT/examples/FNim/Applet/example1.html

نخست به این قضیه توجه کنید:

قضیهٔ ۱۰ (نمایش زکندرف[1]). هر عدد طبیعی را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت مجموع اعداد فیبوناتچی متمایزِ دوبه‌دو غیرمتوالی نوشت. یعنی اگر N عددی طبیعی باشد،

$$N = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r}$$

که در آن به‌ازای هر عدد مانند i که $1 \leqslant i \leqslant r$، $k_i \geqslant 2$ و $k_{i+1} > k_{i+2}$.

با استفاده از این قضیه و استقرا ثابت کنید که بازیکن اول استراتژی برد دارد اگر و فقط اگر تعداد مهره‌ها در ابتدای بازی عددی فیبوناتچی نباشد. برای راهنمایی به این مثال توجه کنید: اگر توده‌ای از $۳۴ + ۸ + ۱ = ۴۳$ لوبیا تشکیل شده باشد، بازیکن اول در حرکت خود ۱ لوبیا از توده برخواهد داشت. حالا می‌توان تصور کرد که او بازیکن دوم در نیم فیبوناتچی با ۸ لوبیاست با این شرط اضافه که حریف او در حرکت خود اجازه ندارد نصف یا تعداد بیشتری از لوبیاها را بردارد. ثابت کنید که او می‌تواند این بازی را ببرد. همین وضعیت به‌ازای ۳۴ لوبیا تکرار خواهد شد.

۳.۴ نیمبل (Nimble)

روی نواری خانه‌ها از راست به چپ با اعداد ۰، ۱، ۲ و ... شماره‌گذاری شده‌اند. تعداد متناهی سکه در خانه‌های (نه لزوماً متمایز) این نوار قرار داده شده است. هر بازیکن در نوبت خود، یکی از سکه‌ها را انتخاب می‌کند و آن را در خانه‌ای با شمارهٔ کوچک‌تر قرار می‌دهد. در این عمل، اینکه سکهٔ انتخاب‌شده از روی یک یا چند سکه بگذرد و یا در خانه‌ای قرار گیرد که یک یا چند سکهٔ دیگر در آن قرار دارد، مجاز است. سکه‌ای را که روی خانهٔ صفرم قرار می‌گیرد دیگر نمی‌توان حرکت داد. برنده کسی است که آخرین حرکت را بکند. می‌توانید مشاهده کنید که این بازی همان بازی نیم است.[2]

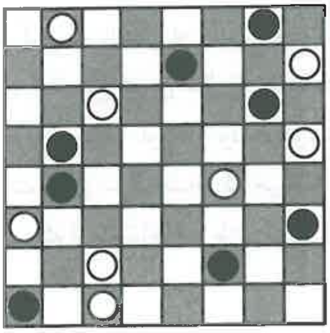
۴.۴ نیمِ پوکری

این بازی همان بازی نیم است، با این تفاوت که بازیکنان مجازند حرکت دیگری نیز بکنند: هر بازیکن سبدی از تعدادی متناهی لوبیا دارد و می‌تواند در حرکت خود به‌جای برداشتن لوبیا از توده‌ای که انتخاب کرده است، تعدادی متناهی لوبیا به آن بیفزاید. به‌سادگی می‌توانید دریابید که بازیکنی که در بازی نیم استراتژی برد داشته باشد در این بازی نیز استراتژی برد دارد (او چگونه می‌تواند اثر اضافه شدن لوبیاها را خنثی کند؟).

1. Zeckendorf 2. http://www.cut-the-knot.org/recurrence/Nimble.shtml

۵.۴ نورث‌کات (Northcott)

در صفحه‌ای شطرنجی، که در هر سطر آن یک مهرهٔ مشکی و یک مهرهٔ سفید قرار گرفته است، بازیکنهای سفید و مشکی، به‌نوبت با هم بازی می‌کنند و هر یک در نوبت خود یکی از مهره‌های خود را در سطری که قرار دارد به چپ یا راست حرکت می‌دهد (هر یک از بازیکنها فقط اجازه دارد مهره‌های خود را حرکت دهد و در نتیجه این بازی منصفانه نیست). بازیکنان اجازه ندارند مهرهٔ خود را روی مهرهٔ نفر دیگر قرار دهند و یا از روی آن بگذرند. این بازی بسیار شبیه نیم پوکری است. آن را بازی کنید.[1]



شکل ۳. بازی نورث‌کات

۶.۴ دلار نقره

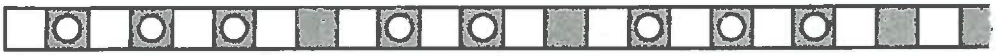
این بازی ـ مانند نیمبل ـ روی نواری بلند بازی می‌شود. مانند قبل، سکه‌هایی روی این نوار قرار دارند. ولی در اینجا سکه‌ها نباید روی هم قرار بگیرند، ضمناً فقط لغزاندن سکه‌ها مجاز است، یعنی نمی‌توان سکه‌ها را از روی هم عبورداد. طبق معمول برنده کسی است که آخرین حرکت مجاز را بکند. آیا می‌توانید بگویید چرا این بازی نیز شبیه بازی نیم پوکری است؟ (در اینجا می‌توانید تعداد خانه‌های خالی بین سکه‌ها را تعداد لوبیاهای تودهٔ نیم فرض کنید.).[2]

بازی دلار نقره مانند بازی قبل است، با این تفاوت که در انتهای نوار کیسه‌ای قرار دارد. ضمناً یکی از سکه‌ها «سکهٔ نقره» نام دارد و ارزش آن از مجموع ارزش تمام سکه‌های دیگر بیشتر است. یک حرکت دیگر نیز در این بازی مجاز است: بازیکن اجازه دارد به‌جای حرکت کردن، کیسه را بردارد و بازی را ترک کند. در این‌صورت او محتوای کیسه را برده است و حریف او سکه‌های روی نوار را. خود را قانع کنید که برنده کسی است که حریف خود را مجبور کند که دلار نقره را به درون کیسه بیندازد.

1. http://www.cut-the-knot.org/recurrence/Northcott.shtml

2. http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Games/NoSilverDollar.shtml

برای تحلیل این بازی کافی است از این ایده استفاده کنید: تا هنگامی که سکهٔ سمت راست کیسه، سکهٔ نقره نیست آن را خانه‌ای اشغال‌نشده در نظر بگیرید، و هنگامی که سکهٔ نقره اولین سکهٔ بعد از کیسه بود آن را خانه‌ای پر در نظر بگیرید.



شکل ۴. بازی دلار نقره بدون دلار نقره‌ای

۵. تحلیل بازی نیم

در بخش ۲ بازی نیم را معرفی کردیم. استراتژی برد در نیم nتوده‌ای در حالت $n \geqslant 3$ چندان بدیهی نیست. ابتدا جمع نیمی دو عدد صحیحی نامنفی را چنین تعریف می‌کنیم: دو عدد را در مبنای دو جمع می‌کنیم ولی دو بر یک نمی‌کنیم.

تعریف ۱۱ (جمع نیمی). جمع نیمی دو عدد $(x_m \dots x_0)_2$ و $(y_m \dots y_0)_2$ برابر است با

$$(x_m \dots x_0)_2 \oplus (y_m \dots y_0)_2 = (z_m \dots z_0)_2$$

که در آن به‌ازای هر عدد مانند k که $0 \leqslant k \leqslant m$، (به پیمانهٔ ۲) $z_k \equiv x_k + y_k$.

قضیهٔ ۱۲. (بوتون[1]، ۱۹۰۲) وضعیت $(x_1, \dots, x_n)$ در بازی نیم، Pـوضعیت است اگر و فقط اگر $x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.

برهان.

۱. هر وضعیت پایانی Pـوضعیت است و در نیم، این وضعیت، وضعیت یکتای $(0, \dots, 0)$ است و $0 \oplus \dots \oplus 0 = 0$.

۲. از هر وضعیتی که در آن جمع نیمی ناصفر است، حرکتی به وضعیتی با جمع نیمی صفر موجود است: جمع نیمی را به‌شکل جمع ستون‌به‌ستون در مبنای دو بنویسید. اولین ستون سمت چپ را که در آن جمع نیمی آن ستون ناصفر شده است در نظر بگیرید. این اولین ستونی است که در آن تعداد فردی ۱ ظاهر می‌شود. عددی شامل یکی از این ۱ها انتخاب کنید و این یک را به صفر تبدیل کنید. سپس در هر ستونی که تعداد ۱ها فرد است، با تغییر رقم متناظر با آن ستون در این سطر تعداد ۱ها را زوج کنید. تفاضل عدد قبلی از عدد جدید، مثبت است. به این تعداد از تودهٔ متناظر با این سطر لوبیا برمی‌داریم. این حرکت ما را به وضعیتی با جمع نیمی صفر می‌رساند.

1. C.L. Bouton

۳. اگر در وضعیتی از بازی، جمع نیمی صفر باشد، بازیکنی که نوبت اوست به‌ناچار بازی را به وضعیتی با جمع نیمی ناصفر خواهد برد. زیرا در غیر این‌صورت

$$x_۱ \oplus x_۲ \oplus \cdots \oplus x_n = ۰ = x'_۱ \oplus x_۲ \oplus \cdots \oplus x_n$$

که از آن مشخص می‌شود که زوجیت ستونها در تبدیل $x_۱$ به $x'_۱$ تغییر نمی‌کند که یعنی این دو عدد، رقم‌به‌رقم برابرند. در این‌صورت هیچ لوبیایی برداشته نشده است ولی چنین حرکتی مجاز نیست.

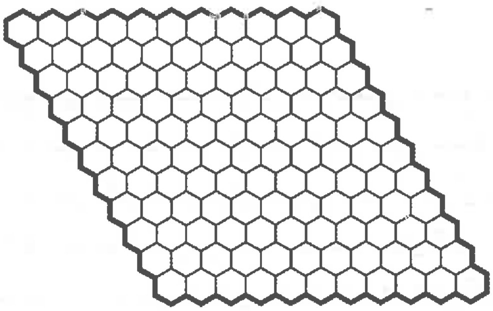
از سه استدلال بالا حکم نتیجه می‌شود. ∎

۶. برهانهای وجودی

گاهی نمی‌توانیم به‌طور مؤثری استراتژی برد را در بازی مشخص کنیم، ولی می‌توانیم با اثباتی وجودی ثابت کنیم که بازیکنی استراتژی برد دارد. در چنین برهانی استراتژی برد معرفی نمی‌شود. در این قسمت با نمونه‌هایی از این بازیها آشنا می‌شویم. بازی هگز[1] یکی از این بازیهاست که در ۲۰ سال گذشته دانشمندان در رشته‌های ریاضی و علوم کامپیوتر به آن بسیار توجه کرده‌اند. ایده‌هایی که در تحلیل این بازی ارائه می‌کنیم در تحلیل بسیاری از بازیها کاربرد دارد.

۱.۶ هگز

صفحه‌ای $n \times n$، مانند شکل در نظر بگیرید. دو ضلع مقابل به رنگ سیاه و دو ضلع مقابل دیگر به رنگ خاکستری‌اند. بازیکن سیاه باید سعی کند با چیدن مهره‌های سیاه دو ضلع سیاه جدول را به‌هم وصل کند. بازیکن خاکستری باید همین کار را در مورد اضلاع خاکستری بکند. اگر هگز بازی کنید تکنیکهای زیادی برای آن خواهید یافت.



شکل ۵. بازی هگز

1. Hex

لم ۱۳ . بازی هگز همواره برنده دارد و به‌تساوی نمی‌انجامد.

برهان. فرض کنید بازی هگز تمام شده باشد. اگر برنده قبل از پر شدن صفحه مشخص شود بازی در همان‌جا به پایان می‌رسد. اکنون فرض کنید تمام صفحه با مهره‌ها پر شده باشد، حالا مهره‌های سیاه را مانند جریان آبی درنظر بگیرید که از یکی از اضلاع سیاه به ضلع سیاه دیگر در جریان است. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد: یا این جریان آب از سویی به سوی دیگر حرکت خواهد کرد که نشان‌دهندهٔ وجود مسیری برای آب از ضلعی به ضلع دیگر است، و این یعنی بازیکن سیاه بازی را برده است. (ضمناً در این‌صورت هیچ مسیر خاکستری‌ای بین اضلاع خاکستری وجود ندارد زیرا وجود آن مانع جریان آب می‌شود.) اگر چنین جریانی وجود نداشته باشد، مانعی جلوی حرکت آب قرار گرفته است که یعنی وجود سدی خاکستری‌رنگ از یک ضلع خاکستری به ضلع خاکستری دیگر. (به همین ترتیب واضح است که در این حالت مسیر سیاه رنگی بین اضلاع سیاه وجود ندارد.) در این حالت بازیکن خاکستری بازی را برده است.[۱] ∎

نتیجهٔ ۱۴ . اگر در بازی هگز نفر اول استراتژی برد نداشته باشد آنگاه نفر دوم استراتژی برد دارد.

برهان. هگز بازی ترکیبیاتی‌ای با اطلاعات کامل و تعداد متناهی وضعیت است. بنابر لم ۶ اگر بازیکن اول استراتژی برد نداشته باشد، استراتژی نباختن دارد. اما بنابر لم ۱۳ این استراتژی نباختن در حقیقت استراتژی برد است. ∎

قضیهٔ ۱۵. استراتژی برد در بازی هگز در دست بازیکن اول است.

برهان. ثابت کردیم یکی از بازیکنها استراتژی برد دارد. به برهان خلف، فرض کنید بازیکن دوم استراتژی برد دارد. در این‌صورت بازیکن اول می‌تواند الگوریتم او را از او «بدزدد». او پس از حرکتی تصادفی وانمود می‌کند که بازیکن دوم بازی است و در نتیجه استراتژی‌ای برای بردن حریف دارد. در این استراتژی هر جا لازم شود مهرهٔ خود را در جایی قرار دهد که خود قبلاً آن را اشغال کرده است، حرکت تصادفی دیگری می‌کند. به‌وضوح حرکت اضافی او را بازنده نخواهد کرد. پس بازیکن اول استراتژی برد دارد. این تناقض فرض خلف را باطل می‌کند. پس استراتژی برد برای بازیکن اول بوده است. ∎

این بازی را پیت هاین[۲]، ریاضی‌دان دانمارکی، اختراع کرد. مجدداً در سال ۱۹۴۸ جان نش[۳] این بازی را ترتیب داد. استدلال بالا برای وجود استراتژی برد را او ارائه کرده است. بررسی پیچیدگی محاسباتی این بازی و یافتن استراتژیهای برد آن از مسائل جالب و امروزی علوم کامپیوتر نظری است.[۴] اگر می‌خواهید دربارهٔ هگز بیشتر بدانید، به نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ آبان ۱۳۸۲ نگاهی بیندازید.

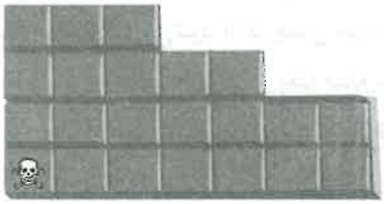
۱. اگر شما هم مانند نویسنده نمی‌توانید این برهان را برهانی ریاضی بدانید ناگزیر باید به [۳] مراجعه کنید. در این مقاله مطالب جالب دیگری نیز دربارهٔ ماهیت هندسی این مسئله خواهید یافت.

2. Piet Hein 3. John Nash

تمرین ۱۶ . ثابت کنید که اگر در بازی شطرنج بازیکنی در هر نوبت دو حرکت بکند، بازیکن سفید استراتژی نباختن دارد.

۲.۶ بازی گاز زدن!

تختهٔ شکلات مستطیل‌شکلی در نظر بگیرید. دو نفر به‌نوبت این شکلات را گاز می‌زنند به‌طوری که در هر بار تمام شکلاتهایی را که در بالا و سمت راست یکی از قطعات شکلات قرار دارند می‌خورند. اما قطعهٔ شکلاتِ پایین سمت چپ سمی است! بازیکنی که در حرکت خود مجبور شود این قطعه را بخورد، می‌بازد.



شکل ۶. بازی گاز زدن

تمرین ۱۷ . با استدلالهایی مشابه قسمت قبل ثابت کنید که بازیکن اول استراتژی برد دارد.

مراجع

1. Martin Gardner, "Mathematical Games: The Fantastic Combinations of John Comway's New Solitaire Game Life", *Scientific American*, October 1970, pp. 120-123.

2. A. J. Schwenk, "Take-Away Games", *Fibonacci Quarterly*, Vol. 8 (1970), pp. 225-234.

3. D. Gale, "The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem", *American Mathematical Monthly*, Vol. 86 (1979), 10, pp. 818-827.

4. T. Maarup, *Hex, Everything You Always Wanted to Know About Hex But Were Afraid to Ask*, Electronic Edition, 2005.

5. E. R. Berlekampl, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2nd ed., A. K. Peters, 2000.

6. A. Engel, *Problem Solving Strategies,* Springer-Verlag, 1997.

7. T. S. Ferguson, *Game Theory*, Electronic Edition.

«ریاضیات چیست؟»

کسری علیشاهی

حتماً شما هم این داستان از مثنوی مولوی را شنیده‌اید که گروهی از بازرگانان فیلی از هندوستان به شهری آوردند که مردمش تا آن زمان فیل ندیده بودند. مردم مشتاق با شنیدن این خبر، طاقت صبر کردن تا صبح و روشن شدن هوا را از دست دادند و شبانه برای زیارت جناب فیل هجوم آوردند. نتیجه آنکه به‌دلیل بزرگی فیل و تاریکی، هرکس فقط توانست به بخشی از فیل دست بزند و تصوری از آن به‌دست آورد. آن شب در بازگشت، کسی که گوش فیل را لمس کرده بود، فیل را موجودی پهن و نازک، کسی که دستش به خرطوم فیل رسیده بود، فیل را لوله‌ای دراز، و آن‌کس که به پای فیل دست زده بود، فیل را ستونی قطور و استوار می‌دانست.

وضعیت ما در مقابل دانش عظیمی چون ریاضیات و تلاش برای درک اینکه ریاضیات **چیست**، نه تنها ساده‌تر از وضع مردم داستان فوق نیست، بلکه دست‌کم به دو دلیل دشوارتر است: اول اینکه با ابداع نظریه‌های جدید، طرح مسائل نو و کشف حقایق و ارتباطات تازه که قبلاً از آنها بی‌خبر بوده‌ایم، ریاضیات دائماً و با سرعتی زیاد در حال گسترش است. از این رو، شاید بیشتر به درخت لوبیای سحرآمیز شبیه باشد تا فیل! تفاوت دوم این است که اینجا ــ برخلاف داستان فیل در تاریک‌خانه ــ نمی‌توان به‌سادگی تا صبح صبر کرد تا نوری بتابد و همه چیز را روشن کند! بنابراین، چاره‌ای جز این نمی‌ماند که آستینها را بالا بزنیم و وارد معرکه شویم. بخوانیم، بشنویم، با مسائل ریاضی دست‌وپنجه نرم کنیم، و از این راهها و با لمس کردن فیل ریاضیات از زوایای مختلف، به‌تدریج درک ریاضی خود را گسترش دهیم. در عین حال باید گوش‌به‌زنگ باشیم، چون گاهی ممکن است فرصتی استثنایی پیش بیاید: فیل‌شناسی متبحر از راه برسد و حاضر شود چند ساعتی ما را با خود به درون قفس فیل ببرد و بگرداند!

کتاب «ریاضیات چیست؟» چنین فرصتی است. ریچارد کورانت ــ یکی از دو نویسندهٔ کتاب ــ ریاضی‌دانی بزرگ بوده است و ریاضیات را نزد استادانی حتی بزرگ‌تر از خود آموخته است. تا پیش از جنگ جهانی دوم، آلمان قطب ریاضی دنیا محسوب می‌شد. سردمدار جامعهٔ ریاضی آلمان، کلاین و پس از او هیلبرت بود. شاید نام هیلبرت را به‌خاطر ۲۳ مسئلهٔ مبارزطلبی که او در ابتدای قرن به‌عنوان مسائل مهم و دشوار پیش روی ریاضیات مطرح کرد، شنیده باشید. بعضی، هیلبرت و پوانکاره را بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان تمامی اعصار می‌دانند. به‌دلیل حضور هیلبرت در دانشگاه گوتینگن، این دانشگاه مرکز تجمع ریاضی‌دانان بزرگی بود که از دل بحثها و جدلهای آنان مکاتب اصلی فلسفهٔ ریاضیات در قرن بیستم متولد شدند.

کورانت شاگرد هیلبرت بود و بخشی از دوران شکوفاییش در ریاضیات را در چنین فضایی سپری کرد. بااین‌حال، کتاب «ریاضیات چیست؟» دست‌کم به‌طور مستقیم، نه دربارهٔ فلسفهٔ ریاضیات، بلکه دربارهٔ خود ریاضی است، به این معنی که نویسندگان کوشیده‌اند با انتخاب بخشهایی از «ریاضیات واقعی» و درگیرکردن خواننده با آن، او را از نزدیک‌ترین راه ممکن به پاسخ این پرسش که ریاضیات چیست، راهنمایی کنند.

کتاب از هشت به علاوهٔ یک فصل تشکیل شده است. عنوانهای این فصلها چنین‌اند: (۱) عددهای طبیعی، (۲) دستگاه اعداد در ریاضیات، (۳) ترسیمهای هندسی، جبر هیئتهای اعداد، (۴) هندسهٔ تصویری، رهیافت اصل موضوعی، هندسهٔ نااقلیدسی، (۵) توپولوژی، (۶) تابع و حد، (۷) ماکسیمم و مینیمم، (۸) حساب دیفرانسیل و انتگرال [حسابان]، (۹) پیشرفتهای جدید.

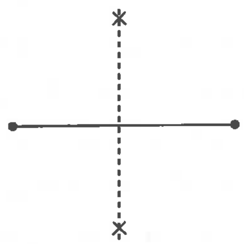
فصل نهم را، سالها بعد از تألیف کتاب، یان استیوارت نوشته است. او در این فصل به مسائلی پرداخته است که در نسخهٔ اولیه به‌عنوان مسائل حل‌نشده مطرح شده بودند و در طول این سالها، یا حل شده‌اند یا پیشرفتهایی مهم در حل آنها رخ داده است.

بیایید در باغی که کورانت و رابینز گیاهانش را با دقت و سلیقهٔ زیاد از دل جنگل ریاضیات برگزیده‌اند، گشتی کوتاه بزنیم.

از رسم با خط‌کش و پرگار تا هندسهٔ تصویری

منظورمان از خط‌کش در این بخش، وسیله‌ای است که با آن می‌توان بین هر دو نقطهٔ دلخواه، خط رسم کرد، اما روی خط‌کش طول مشخص نشده است و نمی‌توان روی آن علامت گذاشت.

به کمک خط‌کش و پرگار، به‌سادگی می‌توان عمودمنصف پاره‌خطی داده‌شده را رسم کرد:

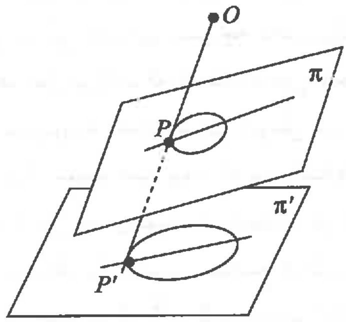


با استفاده از این ترسیم ابتدایی، مسئلهٔ یافتن مرکز دایره‌ای داده‌شده در صفحه به کمک خط‌کش و پرگار، چندان دشوار نخواهد بود (کافی است توجه کنیم که عمودمنصف وتری دلخواه از دایره، از مرکز دایره می‌گذرد). اما آیا می‌توان فقط با استفاده از پرگار، و یا فقط با استفاده از خط‌کش این‌کار را کرد؟ پاسخ پرسش اول مثبت و پاسخ دومی منفی است!

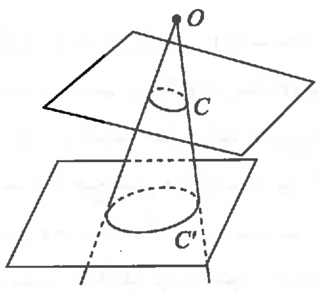
بخش دوم از فصل ۳ کتاب، در باب تبدیل هندسی انعکاس است که ابزاری بسیار نیرومند در حل مسائل

هندسهٔ مسطحه به‌شمار می‌آید. با استفاده از انعکاس می‌توان راه‌حلی برای پرسش اول که در بالا مطرح شد و نیز برای مسئلهٔ مشهور آپولونیوس ـ ترسیم دایره‌ای که بر سه دایرهٔ داده‌شده مماس باشد ـ یافت.

مسئلهٔ دوم (یافتن مرکز دایره فقط با استفاده از خط‌کش)، نمونه‌ای ساده از ناممکنها در ریاضیات است. نمونه‌ای که به‌اندازهٔ تثلیث زاویه و تربیع دایره توجه ریاضی‌دانان حرفه‌ای و آماتور را در طول تاریخ جلب نکرده‌است، اما بررسی آن در نوع خود جالب و آموزنده است. پاسخ در فصل ۴ کتاب و به کمک تبدیلهای تصویری بیان شده‌است. تبدیلهای هندسی تبدیلاتی‌اند که خطوط راست را به خطوط راست می‌برند. نمونهٔ چنین تبدیلی تصویرکردن نقاط صفحه‌ای مفروض مانند π بر صفحه‌ای دیگر مانند π'، از نقطه‌ای مانند O است، به‌این‌صورت که برای یافتن تبدیل نقطهٔ P بر π، O را به P وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا π' را قطع کند.



هندسهٔ تصویری مطالعهٔ آن ویژگیهای هندسی از اشکال است که تحت تبدیلهای تصویری تغییر نمی‌کنند. با این حساب، مفهوم «خط» در هندسهٔ تصویری معنادار است زیرا همان‌طور که گفتیم تصویر هر خط، خط است. آیا مفهوم «دایره» نیز کماکان در این نوع هندسه وجود دارد؟ نه، چنین نیست. زیرا با تصویر کردن، دایره ممکن است بسیار کشیده و یا حتی پاره شود! اگر کمی فکر کنید، متوجه می‌شوید که تصویر دایره در حالت کلی مقطعی مخروطی خواهد شد (و به همین دلیل، هندسهٔ تصویری ابزاری بسیار مناسب برای بررسی مقاطع مخروطی است)، اما اگر تصویر موردنظر را به‌دقت انتخاب کنیم، می‌توان آن دایره را به دایره‌ای دیگر تبدیل کرد و البته لزومی ندارد که مرکز دایرهٔ دوم تصویر مرکز دایرهٔ اول باشد.



همین‌جا می‌توانیم پاسخ سؤال ترسیمی موردنظرمان را پیدا کنیم: آنچه که با استفاده از خطکشِ تنها رسم می‌شود، در حقیقت در دنیای هندسهٔ تصویری رسم‌شدنی است (چون خطکش «خط» می‌کشد و خط مفهومی معتبر در هندسهٔ تصویری است)، اما مرکز دایره در هندسهٔ تصویری ممکن است به نقطه‌ای غیر از مرکز تبدیل شود. پس یافتن مرکز دایره با استفاده از خطکش تنها امکان ندارد.

دستگاه اعداد، مفهوم بی‌نهایت

معمولاً از شنیدن واژه‌ای مثل «دستاوردهای بشر»، اختراع چرخ و هواپیما و رایانه و . . . تداعی می‌شود. دو فصل اول کتاب «ریاضیات چیست؟» به دستاوردی بزرگ و مؤثر در تاریخ تمدن پرداخته است: عدد! شاید کمتر کسی بداند که مفهوم عدد چه سیر تاریخی پرفرازونشیبی را طی و در این مسیر چه اذهان بزرگی را به خود مشغول کرده‌است. جملهٔ معروفی از کرونِکِر، ریاضی‌دان قرن نوزدهم نقل می‌کنند که «اعداد طبیعی را خداوند آفرید، بقیه‌اش کار بشر است.»!

انسان اولیه برای رفع نیاز طبیعی به شمردن، به اعداد طبیعی متوسل شد. اما اعداد طبیعی برای «اندازه‌گیری» کافی نبودند. اعداد گویا یا کسری توسعه‌ای از مفهوم عدد بودند که برای اندازه‌گیری طول، وزن، زمان و . . . مناسب به‌نظر می‌آمدند. تا مدتها تصور بر این بود که هر عددی گویاست یا معادلاً هر دو پاره‌خطی متوافق‌اند، یعنی پاره‌خط سومی وجود دارد که طول هریک از دو پاره‌خط اول مضربی صحیح از طول آن است. کشف نامتوافق بودن ضلع و قطر مربع یا به زبان امروزی کشف این حقیقت که $\sqrt{۲}$ گویا نیست انقلابی بزرگ در ریاضیات بود و تصور بشر از مفهوم عدد را به‌کلی واژگون کرد. دستگاه اعداد حقیقی از همین‌جا و با پر کردن شکافهای بین اعداد گویا به‌وجود آمد. اما ماجرا به همین‌جا ختم نشد: درست است که اعداد حقیقی به مفهومی هندسی کامل‌اند و شکافی در آنها وجود ندارد، اما ذهن نیرومند ریاضی‌دانان بزرگی چون گاؤس از این هم فراتر رفت و دستگاه بزرگ‌تری از اعداد پیشنهاد شد که در آن معادلاتی مثل $x^۲ = -۱$ هم جواب داشته باشند! در حقیقت، اگر وجود جوابی برای این معادله را فرض کنیم و این جواب را i بنامیم و بخواهیم ضرب و جمع اعداد همچنان معنادار باشد، باید همهٔ اعداد به شکل $a + (b \times i)$ را که در آن a و b اعدادی حقیقی‌اند، در دستگاه جدید اعداد خود بپذیریم.

گاؤس و بعضی دیگر کشف کردند که این مجموعهٔ جدید ـ که آن را مجموعهٔ اعداد مختلط می‌نامیم ـ علاوه بر اینکه مانند اعداد حقیقی از نظر هندسی کامل‌اند، از نظر جبری نیز به نوعی کامل‌اند، به این معنی که هر معادلهٔ چندجمله‌ای در آنها جواب دارد!

به اعداد گویا و گنگ برگردیم. $\sqrt{۲}$ گویا نیست، اما می‌توان آن را با استفاده از $\sqrt{\ }$ نمایش داد. آیا اعداد گنگ دیگر را هم می‌توان به‌صورت جمع و تفریق و ضرب و تقسیم رادیکالها (ریشهٔ دوم، ریشهٔ سوم، . . .) و اعداد گویا نوشت؟

این هم از پرسشهایی است که ریاضی‌دانان تا مدتها جواب آنها را نمی‌دانستند. در واقع، هیچ‌کس نتوانسته بود اعدادی مثل π را برحسب رادیکالها بنویسد، اما هیچ‌کس هم نتوانسته بود ثابت کند که چنین کاری ممکن نیست. لیوویل نخستین کسی بود که ثابت کرد اعدادی وجود دارند که جبری نیستند، یعنی جواب هیچ معادلهٔ چندجمله‌ای‌ای با ضرایب گویا نیستند. (هر عددی که برحسب رادیکالها نوشته شود جبری است. بنابراین اعدادی وجود دارند که

نمی‌توان آنها را با رادیکالها نوشت.) لیوویل حتی نمونه‌ای از چنین اعدادی را «ساخت»، که به این شکل است:

$$0/11000100\ldots0100\ldots$$

که در این عدد، رقم !۱ام، !۲ام و . . . بعد از ممیز یک، و بقیهٔ ارقام صفرند.

بعدها کانتور با ابداع نظریهٔ تأثیرگذار خود دربارهٔ بی‌نهایتها که امکان مقایسهٔ مجموعه‌های نامتناهی مختلف با یکدیگر را فراهم می‌کند، ثابت کرد که مجموعهٔ اعداد جبری در برابر مجموعهٔ اعداد غیرجبری بسیار کوچک است، همان‌طور که اعداد گویا بسیار کمتر از اعداد گنگ‌اند!

ماکسیمم و مینیمم در ریاضیات و فیزیک

حاصل‌ضرب n عدد نامنفی که مجموع آنها برابر مقداری ثابت مانند A است حداکثر چند است؟ اگر ABC مثلثی دلخواه باشد، کدام نقطه است که مجموع فاصله‌هایش از نقاط A، B و C کمترین مقدار ممکن باشد؟ در میان همهٔ شکلهایی که محیطهایشان برابر است، مساحت کدام‌یک بیشترین است؟

این سه مسئله که به‌ترتیب به نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، مسئلهٔ اشتاینر و مسئلهٔ برابری محیطی معروف‌اند، و مسائل شبیه به اینها که به بیشترین یا کمترین مقدار کمیتی در شرایط خاص مربوط‌اند، قدمتی بسیار زیاد در ریاضیات دارند. اما با پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌عنوان ابزاری نیرومند برای بررسی توابع چند متغیره، تحولی اساسی در فهم و حل این رده از مسائل رخ داد. نکتهٔ اصلی اینجاست که مشتق تابع در نقطهٔ ماکسیمم و مینیمم برابر صفر است (البته عکس این مطلب گاهی صحیح نیست) و صفر بودن مشتق را غالباً می‌توان به‌صورت ویژگی جبری یا هندسی‌ای نابدیهی برای جواب مسئله ترجمه کرد. این ویژگی در مسئلهٔ نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی، برابر بودن همهٔ عددها و در مسئلهٔ اشتاینر، مساویِ 120° بودن $\angle APB$، $\angle BPC$ و $\angle CPA$ است که P همان نقطهٔ موردنظر است. البته این دو مسئله را می‌توان بدون استفاده از مشتق و با راه‌حلهای زیبا و ابتکاری مقدماتی‌تر نیز حل کرد.

مسئلهٔ برابری محیطی از دو مسئلهٔ دیگر اساساً دشوارتر است. تفاوت مهم این است که نمی‌توان شکلهای روی صفحه را با متناهی پارامتر مشخص کرد تا از این راه مسئله به یافتن جایی که تابعی چند متغیره بیشترین مقدارش را می‌گیرد تبدیل شود. نظریهٔ ریاضی مناسب برای حل این‌گونه از مسائلِ بی‌نهایت بُعدی، که امروزه به حساب تغییرات معروف است، به دنبال حساب دیفرانسیل و در پی آثار ریاضی‌دانانی مانند برنولی‌ها، نیوتن، لایب‌نیتس و . . . به‌وجود آمد.

فصل هفتم کتاب شرحی خواندنی از پیشرفت در حل این مسائل به همراه راه‌حلهایی زیبا و جالب از آنها و مسائل دیگری از این نوع است.

مشخصات کتاب

ریچارد کورانت، هربرت رابینز، ریاضیات چیست؟ ویراست دوم، ترجمهٔ سیامک کاظمی، نشر نی.
چاپ سوم این ترجمه امسال به بازار آمد.

روش تقسیم و حل

مرتضی زادی‌مقدم

در مقالهٔ قبلی کارگاه الگوریتم دیدی کلی نسبت به الگوریتم پیدا کردیم. در این مقاله سعی می‌کنیم به تعدادی الگوریتم که در آنها از روش **تقسیم و حل** استفاده می‌شود بپردازیم. ایدهٔ کلی این روش این است که مسئلهٔ داده‌شده را به زیرمسئله‌های کوچک‌تر تقسیم کنیم و سپس زیرمسئله‌ها را حل کنیم. در پایان سعی می‌کنیم از جواب‌های به‌دست‌آمده، جواب مسئلهٔ اصلی را پیدا کنیم. پس در روش تقسیم و حل سه مرحله وجود دارد:

- تقسیم مسئلهٔ اصلی
- حل زیرمسئله‌ها
- به‌دست آوردن جواب مسئلهٔ اصلی از روی جواب زیرمسئله‌ها

در مثال زیر از این روش استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱ (پیدا کردن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد). فرض کنید n عدد مانند a_1، a_2، ... و a_n در ورودی داده شده باشند. می‌خواهیم کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد بین این اعداد را بیابیم.

الگوریتم

۱. اگر $n = 1$، چون فقط یک عدد داریم، همان عدد هم بزرگ‌ترین و هم کوچک‌ترین عدد است و در خروجی نمایش داده می‌شود. اگر $n = 2$، عدد کوچک‌تر، کوچک‌ترین عدد و عدد بزرگ‌تر، بزرگ‌ترین عدد است و در خروجی نمایش داده می‌شوند.

۲. اعداد a_1، a_2، ... و $a_{[\frac{n}{2}]}$ را ورودی مسئله فرض می‌کنیم و کوچک‌ترین عدد و بزرگ‌ترین عدد را در بین این $\left[\frac{n}{2}\right]$ عدد می‌یابیم. فرض کنید این دو عدد به‌ترتیب a و b باشند. سپس اعداد $a_{[\frac{n}{2}]+1}$، $a_{[\frac{n}{2}]+2}$، ... و a_n را ورودی مسئله فرض می‌کنیم و کوچک‌ترین عدد و بزرگ‌ترین عدد را در بین این $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ عدد می‌یابیم. فرض کنید این دو عدد به‌ترتیب c و d باشند.

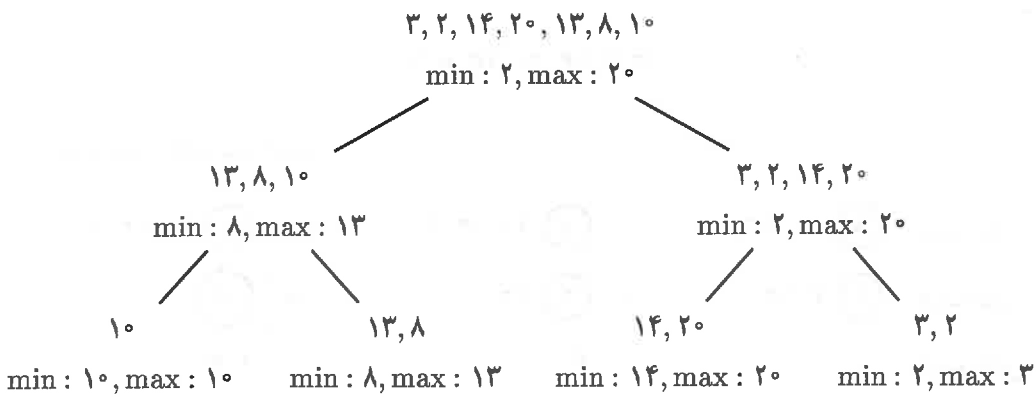
۳. اگر a کمتر از یا مساوی با c باشد، a کوچک‌ترین عدد در بین همهٔ اعداد است و اگر c کمتر از a باشد، c کوچک‌ترین عدد در بین همهٔ اعداد است. همچنین اگر b کمتر از یا مساوی با d باشد، d بزرگ‌ترین عدد در بین همهٔ اعداد است و اگر d کمتر از b باشد، b بزرگ‌ترین عدد در بین همهٔ اعداد است.

نکتهٔ مهم اینجاست که دو زیرمسئله که در قسمت دوم به‌دست می‌آیند نیز با همین روش حل خواهند شد. مثلاً اگر یازده عدد در ورودی به ما بدهند، آنها را به دو دستهٔ پنج و شش‌تایی تقسیم می‌کنیم. سپس دستهٔ پنج‌تایی به دو دستهٔ دو و سه‌تایی تقسیم می‌شود و کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد.

شکل زیر نشان‌دهندهٔ مراحل حل مسئله در حالتی است که هفت عدد

۳, ۲, ۱۴, ۲۰, ۱۳, ۸, ۱۰

به ما داده شده‌اند.*



در مثال بعدی، مرحلهٔ سوم پیچیده‌تر است. درکارگاه الگوریتم (۱) با مسئلهٔ زیر و الگوریتمی برای حل آن آشنا شدید. در اینجا روشی سریع‌تر (یعنی با تعداد مقایسهٔ کمتر) برای حل این مسئله معرفی می‌کنیم.

مثال ۲ (مرتب‌سازی ادغامی). n عدد مانند a_1، a_2، ... و a_n به ما داده شده‌اند. می‌خواهیم این اعداد را مرتب کنیم.

الگوریتم

۱. اگر $n < 3$، اعداد با یک مقایسه مرتب می‌شوند.

* min را مینیمم و max را ماکسیمم بخوانید. مینیمم چند عدد، کوچک‌ترین، و ماکسیمم چند عدد، بزرگ‌ترین آنهاست.

۲. اعداد a_1، a_2، ... و $a_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ را با همین روش (مرتب‌سازی ادغامی) مرتب می‌کنیم و در یک ردیف به‌طور مرتب از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.
اعداد $a_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$، $a_{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$، ... و a_n را نیز با همین روش مرتب می‌کنیم و در یک ردیف به‌طور مرتب از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

۳. در اینجا دو ردیف عدد مرتب‌شده داریم و می‌خواهیم اعداد دو ردیف را در یک ردیف به‌طور مرتب بنویسیم. عدد ابتدایی ردیف اول را با عدد ابتدایی ردیف دوم مقایسه می‌کنیم. هر یک کوچک‌تر بود، کوچک‌ترین عدد در بین همهٔ اعداد است. آن را در جای کوچک‌ترین عدد در ردیف نهایی می‌نویسیم و از این دو ردیف حذفش می‌کنیم. دوباره کوچک‌ترین اعداد دو ردیف را مقایسه می‌کنیم و همین کار را تا تمام شدن همهٔ اعداد ادامه می‌دهیم.

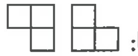
در شکل زیر، مرحلهٔ سوم این الگوریتم، وقتی ورودی همان هفت عدد

۳, ۲, ۱۴, ۲۰, ۱۳, ۸, ۱۰

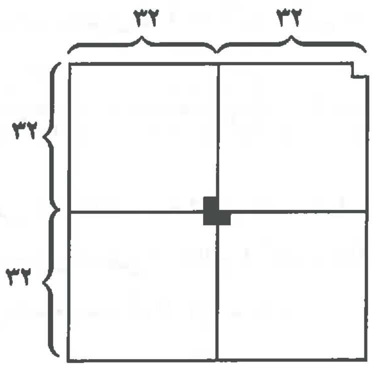
باشند نشان داده شده است.

ردیف اول	۸, ۱۰, ۱۳, ۲۰		۸, ۱۰, ۱۳, ۲۰		۸, ۱۰, ۱۳, ۲۰	
ردیف دوم	۲, ۳, ۱۴	→	۳, ۱۴	→	۱۴	
ردیف نهایی			۲		۲, ۳	
	۱۰, ۱۳, ۲۰		۱۳, ۲۰		۲۰	
→	۱۴	→	۱۴	→	۱۴	→
	۲, ۳, ۸		۲, ۳, ۸, ۱۰		۲, ۳, ۸, ۱۰, ۱۳	
→	۲۰					
		→				
	۲, ۳, ۸, ۱۰, ۱۳, ۱۴		۲, ۳, ۸, ۱۰, ۱۳, ۱۴, ۲۰			

در مثال بعد، قسمت اول الگوریتم ـ یعنی تقسیم به زیرمسئله‌ها ـ قسمت اصلی حل مسئله است.

مثال ۳ (پوشاندن با «سه‌مربعی»). سه‌مربعی از حذف کردن مربعی ۱ × ۱ از مربعی ۲ × ۲ به‌وجود می‌آید، مثل این شکلها:  . جدولی ۶۴ × ۶۴ را که مربعی ۱ × ۱ از گوشه‌ای از آن حذف شده است، با سه‌مربعی بپوشانید، به‌طوری که سه‌مربعیها روی هم نیفتند و همهٔ جدول پوشانده شود.

راه‌حل. فرض کنید که مربع حذف‌شده در گوشهٔ بالا سمت راست باشد (این فرض به کلیت راه‌حل لطمه‌ای نمی‌زند). اکنون با دو خط، جدول را به چهار جدول ۳۲ × ۳۲ تقسیم می‌کنیم و به شکل زیر سه‌مربعی‌ای در وسط جدول قرار می‌دهیم.



در حقیقت، با قرار دادن این سه‌مربعی، از هر یک از سه جدول ۳۲ × ۳۲ (از همه به‌جز جدول بالا سمت راست)، خانه‌ای حذف کرده‌ایم. جدول چهارم هم از قبل خانه‌ای حذف‌شده دارد. اکنون چهار جدول ۳۲ × ۳۲ داریم که هریک خانه‌ای حذف‌شده دارد. آنها را با همین روش با سه‌مربعی می‌پوشانیم، و با این سه‌مربعی که اکنون در وسط جدول قرار دادیم، تمام جدول پوشانده می‌شود.

■

کارگاه

با روش تقسیم و حل، الگوریتمی بنویسید که دو عدد nرقمی را از ورودی بگیرد و درهم ضرب کند.

مسائل ریاضی المپیادی

امید حاتمی‌ورزنه

۱. فرض کنید a و b اعدادی صحیح باشند و به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند n، $2^n a + b$ مربع کامل باشد. ثابت کنید $a = 0$.

۲. x، y و z اعداد حقیقی و مثبت‌اند، به‌طوری که $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. ثابت کنید که

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+xz}{\sqrt{2y^2(x+z)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geqslant 1$$

۳. فرض کنید که در چهارضلعی $ABCD$، $\angle A+\angle B<180^\circ$ و $BC=AD$ و تعریف کنید $\alpha=\angle A+\angle B$. مثلثهای متساوی‌الساقین DCI و ACJ و DBK را طوری بنا می‌کنیم که نقاط I و J و K در طرفی از CD قرار داشته باشند که A قرار ندارد و

$$\angle ICD=\angle IDC=\angle JAC=\angle JCA=\angle KDB=\angle KBD=\alpha$$

ثابت کنید که K و J و I هم‌خط‌اند.

۴. در هر خانه از جدولی $n\times n$، یکی از اعداد ۱، ۲، ... و n را قرار داده‌ایم و از هر عدد دقیقاً nمرتبه استفاده شده است. ثابت کنید سطر یا ستونی با حداقل $\sqrt{n}$ عدد متمایز وجود دارد.

۵. تمام چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی مانند $f(x,y,z)$ را بیابید به‌طوری که به‌ازای هر سه عدد مانند a، b و c که $abc=1$، تساوی

$$f\left(a+\frac{1}{a},b+\frac{1}{b},c+\frac{1}{c}\right)=0$$

برقرار باشد.

۶. فرض کنید نقاط A_1، B_1 و C_1 روی اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC باشند و $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$، $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$ و $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$. فرض کنید H و H_1 مراکز ارتفاعی مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ باشند و O مرکز دایره محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ باشد. ثابت کنید $OH=OH_1$.

نابرابریها، برابری می‌شوند

ا. اِگوروؤ

برخی مسائل ظاهراً دشوار در ریاضیات وجود دارند که حل آنها به‌روشهای معمول و مستقیم بسیار مشکل و گاهی غیرممکن است. راه‌حلهایی که به‌نوعی شبیه آزمایشی تجربی‌اند برای برخی از این مسائل بسیار مفیدند و جواب را به‌صورت شگفت‌انگیزی نمایان می‌سازند. متأسفانه دانش‌آموزان در دوران تحصیل به‌ندرت با مسائلی از این دست آشنا می‌شوند. آنها در مواجهه با مسائل مشکل بیشتر به دنبال راه‌حلهای مستقیم و معمول‌اند. در حالی که گاهی با حدس‌زدن و امتحان‌کردن چند جواب احتمالی، می‌توان مسئله‌ای به‌ظاهر دشوار را به مسئله‌ای ساده تبدیل کرد. در این مقاله چند نمونه از این‌گونه مسائل را مطرح خواهیم کرد. راه‌حلهایی که ارائه می‌کنیم بیشتر مبتنی بر تبدیل نابرابری‌ای به تساوی است. این کار را با تعیین بیشینهٔ (ماکسیمم) و کمینهٔ (مینیمم) طرفین نابرابری موردبحث خواهیم‌کرد.

مسئلهٔ ۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{۳-x}=x^{۲}-۴x+۶ \qquad (۱)$$

راه‌حل. حذف رادیکالها با به توانِ دو رساندن دو طرف معادله شاید راه‌حلی مستقیم برای رسیدن به جواب باشد، ولی این کار منجر به معادلهٔ درجهٔ هشتمی می‌شود که حلش خیلی دشوار است. پس بیایید از این حقیقت ساده استفاده کنیم که طرف چپ معادلهٔ (۱) یعنی $y=\sqrt{x-۱}+\sqrt{۳-x}$ به‌ازای $۱\leqslant x\leqslant ۳$ تعریف شده است و نمودار آن نسبت به خط عمودی $x=۲$ متقارن است. به‌نظر می‌رسد که نقطهٔ $x=۲$ دارای ویژگی خاصی باشد. در واقع ثابت می‌کنیم که طرف چپ معادلهٔ (۱) در این نقطه به بیشینهٔ خود می‌رسد. مربع طرف چپ معادلهٔ (۱) یعنی

$$y^{۲}=(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۳-x})^{۲}=۲+۲\sqrt{(x-۱)(۳-x)}$$

در نقطه‌ای به بیشینهٔ خود می‌رسد که عبارت زیر رادیکال یعنی

$$(x-۱)(۳-x)=-۳+۴x-x^{۲}=۱-(x-۲)^{۲}$$

در آن نقطه به بیشینهٔ خود برسد، که همان نقطهٔ $x=۲$ است. بنابراین طرف چپ معادلهٔ (۱) از ۲ بیشتر نیست، و با ۲ فقط در نقطهٔ $x=۲$ برابر است. از طرف دیگر، چون

$$x^{۲}-۴x+۶=(x-۲)^{۲}+۲$$

طرف راست معادلهٔ (۱) در نقطهٔ $x = ۲$ به کمینهٔ خود یعنی ۲ می‌رسد و در جاهای دیگر از ۲ بیشتر است. بنابراین تنها جواب معادلهٔ (۱)، $x = ۲$ است. ∎

در این مسئله، به دو تابع توجه کردیم: یکی تابع $y = \sqrt{x - ۱} + \sqrt{۳ - x}$ که بیشینه‌اش را در نقطهٔ $x = ۲$ گرفت و دیگری تابع $y = x^۲ - ۴x + ۶$ که کمینه‌اش را در نقطهٔ $x = ۲$ اتخاذ کرد. مقدار بیشینه و کمینهٔ حاصل نیز یکسان بود. در این مقاله، مسائلی از این نوع را بررسی خواهیم کرد. اکنون مثال معمولی زیر را در نظر بگیرید.

مسئلهٔ ۲ . معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin^۵ x + \cos^۳ x = ۱ \qquad (۲)$$

راه‌حل. همهٔ روشهای معمول برای حل چنین معادلاتی در مورد این معادله به شکست منجر می‌شود. در حالتهایی که $\sin x = ۱$ یا $\cos x = ۱$، جوابها واضح‌اند. اکنون فرض کنید $\sin x \neq ۰, ۱$ و $\cos x \neq ۰, ۱$. در این صورت $\sin^۵ x < \sin^۲ x$ و $\cos^۳ x < \cos^۲ x$. بنابراین

$$\sin^۵ x + \cos^۳ x < \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$

پس طرف چپ معادلهٔ (۲) فقط در حالت $\sin x = ۰$ و $\cos x = ۱$ و در حالت $\sin x = ۱$ و $\cos x = ۰$ مساوی یک می‌شود و به‌ازای سایر xها، کوچک‌تر از یک می‌شود. بنابراین جوابهای معادلهٔ (۲) عبارت‌اند از $x = ۲k\pi$ و $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$. ∎

مسئلهٔ بعدی مشابه مسئلهٔ ۲ است.

مسئلهٔ ۳ . دستگاه معادلات $\begin{cases} x + y = ۱ \\ x^{۲n} + y^{۲n} = ۱ \end{cases}$ را که در آن n عددی طبیعی است، حل کنید.

راه‌حل. از دو معادلهٔ داده‌شده نتیجه می‌گیریم که $۱ \geqslant x \geqslant ۰$ و $۱ \geqslant y \geqslant ۰$. از طرف دیگر، اگر $۰ < x < ۱$ و $۰ < y < ۱$، آنگاه $x^{۲n} + y^{۲n} < x + y = ۱$. بنابراین $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$ تنها جوابهای دستگاه‌اند. ∎

مسئلهٔ ۴ . نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$-x - y^۲ - \sqrt{x - y^۲ - ۱} \geqslant -۱ \qquad (۳)$$

راه‌حل. چون عبارت زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس $x \geqslant y^۲ + ۱$. در نتیجه به‌ازای yهای ناصفر، x از یک بزرگ‌تر است، که معادل است با $-x < -۱$. بنابراین به‌ازای $y \neq ۰$، طرف چپ نامعادلهٔ (۳) از طرف راست آن کوچک‌تر می‌شود. پس تنها جواب نامعادلهٔ (۳) مساوی $(۱, ۰)$ است. ∎

مسئلهٔ ۵ . دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y+z=۲ \\ ۲xy-z^{۲}=۴ \end{cases}$ را حل کنید.

راه‌حل. در اینجا دو معادله و سه مجهول داریم. ابتدا از معادلهٔ اول y را برحسب x و z می‌نویسیم:

$$y = ۲-(x+z)$$

اکنون y را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$۲x\big(۲-(x+z)\big)-z^{۲}=۴$$
$$۴x-۲x^{۲}-۲xz-z^{۲}=۴$$
$$x^{۲}-۴x+۴+x^{۲}+۲xz+z^{۲}=۰$$
$$(x-۲)^{۲}+(x+z)^{۲}=۰$$

در نتیجه $x=۲$، $z=-x=-۲$، و $y=۲$. بنابراین تنها جواب دستگاه مساوی $(۲,۲,-۲)$ است. ■

در مسئلهٔ بعدی نیز تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است.

مسئلهٔ ۶ . معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۲(x^{۴}-۲x^{۲}+۳)(y^{۴}-۳y^{۲}+۴)=۷ \qquad (۴)$$

راه‌حل. در این معادله، اولین عامل سه‌جمله‌ای از درجهٔ دو نسبت به $x^{۲}$ و دومین عامل سه‌جمله‌ایی از درجهٔ دو نسبت به $y^{۲}$ است.

$$x^{۴}-۲x^{۲}+۳=(x^{۲}-۱)^{۲}+۲$$
$$y^{۴}-۳y^{۲}+۴=(y^{۲}-\frac{۳}{۲})^{۲}+\frac{۷}{۴}$$

اولین عامل به‌ازای $x^{۲}=۱$ و دومین عامل به‌ازای $y^{۲}=\frac{۳}{۲}$ کمینه می‌شوند. نتیجه می‌گیریم که هر دو عامل همیشه مثبت‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب این دو عامل وقتی به کمینهٔ خود می‌رسد که هر یک از عوامل کمینه شوند. در نتیجه با جاگذاری $x^{۲}=۱$ و $y^{۲}=\frac{۳}{۲}$ معلوم می‌شود که مقدار کمینهٔ طرف چپ معادلهٔ (۴) مساوی با ۷ است. بنابراین جوابهای معادلهٔ (۴) عبارت‌اند از

$$\left(۱,\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right),\ \left(۱,-\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right),\ \left(-۱,\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right),\ \left(-۱,-\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)$$

■

مسئلهٔ ۷ . دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x^۲ - ۶x + ۶y \leqslant ۰ \\ y^۲ - ۲xy + ۹ \leqslant ۰ \end{cases} \qquad (۵)$$

راه‌حل. ابتدا دو نامعادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$(x-y)^۲ - ۶(x-y) + ۹ \leqslant ۰$$

پس

$$(x-y-۳)^۲ \leqslant ۰$$

از نامعادلهٔ آخر نتیجه می‌شود که $x - y = ۳$. هر یک از نابرابریهای دستگاه (۵) نیز باید تساوی باشد، چون اگر دست‌کم یکی از آنها به‌صورت نابرابری اکید باشد، آنگاه مجموعشان نیز نابرابری اکید می‌شود، که این ناممکن است، زیرا مربع هیچ عبارتی نمی‌تواند منفی باشد. پس $y = x - ۳$ و $x^۲ - ۶x + ۶y = ۰$. در نتیجه $x = \pm ۳\sqrt{۲}$ و $y = -۳ \pm ۳\sqrt{۲}$. بنابراین دستگاه (۵) دارای دو جواب $(۳\sqrt{۲}, -۳+۳\sqrt{۲})$ و $(-۳\sqrt{۲}, -۳-۳\sqrt{۲})$ است. ■

مسئلهٔ ۸ . دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{۱}{۲}(x-y)^۲ - (x-y)^۴} = y^۲ - ۲x^۲ \\ y \geqslant ۴x^۴ + ۴yx^۲ + \frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad (۶)$$

راه‌حل. فرض می‌کنیم $t = (x-y)^۲$. طرف چپ اولین معادله در دستگاه (۶) را می‌توانیم به‌صورت $f(t) = \sqrt{\frac{۱}{۲}t - t^۲}$ بنویسیم. عبارت زیر رادیکال یعنی $\frac{۱}{۲}t - t^۲ = \frac{۱}{۱۶} - (\frac{۱}{۴} - t)^۲$ در $t = \frac{۱}{۴}$ به بیشینهٔ خود می‌رسد. در نتیجه مقدار بیشینهٔ $f(t)$ برابر با $f(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۴}$ است. حالا به گام اساسی در این راه‌حل می‌رسیم: استفاده از نابرابری $\frac{۱}{۴} \geqslant y^۲ - ۲x^۲$ به‌جای اولین معادله در دستگاه (۶).

$$\begin{cases} \frac{۱}{۴} \geqslant y^۲ - ۲x^۲ \\ y \geqslant ۴x^۴ + ۴yx^۲ + \frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad (۷)$$

این دو نامعادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} y+\frac{۱}{۴} &\geqslant ۴x^{۴}+۴yx^{۲}+\frac{۱}{۲}+y^{۲}-۲x^{۲} \\ ۰ &\geqslant (۲x^{۲}+y)^{۲}-(۲x^{۲}+y)+\frac{۱}{۴} \\ ۰ &\geqslant (۲x^{۲}+y-\frac{۱}{۲})^{۲} \end{aligned}$$

از نامعادلهٔ آخر نتیجه می‌شود که $۲x^{۲}+y-\frac{۱}{۲}=۰$، و نیز هر یک از نابرابریهای دستگاه (۷) باید تساوی باشد. از تساوی $y^{۲}-۲x^{۲}=\frac{۱}{۴}$ نتیجه می‌گیریم که طرف چپ اولین معادله در دستگاه (۶) یعنی $f(t)$ باید همیشه مساوی مقدار بیشینهٔ خود یعنی $\frac{۱}{۴}$ باشد. از طرف دیگر چون $f(t)$ در $t=\frac{۱}{۴}$ به مقدار بیشینهٔ خود می‌رسد، پس $t=(x-y)^{۲}=\frac{۱}{۴}$. به این ترتیب دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} ۲x^{۲}+y=\frac{۱}{۲} \\ y^{۲}-۲x^{۲}=\frac{۱}{۴} \\ (x-y)^{۲}=\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

با محاسبه‌ای ساده نتیجه می‌گیریم که این دستگاه دارای دو جواب $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$ و $\left(-۱,-\frac{۳}{۲}\right)$ است. ■

اکنون مسئلهٔ مشابهی را که در آن پارامتر وجود دارد حل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۹ . مقدار a را طوری پیدا کنید که دستگاه زیر دارای جواب یکتا باشد.

$$\begin{cases} x\geqslant (y-a)^{۲} \\ y\geqslant (x-a)^{۲} \end{cases} \qquad (۸)$$

راه‌حل. به‌سادگی می‌توانیم دریابیم که اگر $(x_۰\,,y_۰)$ جوابی از این دستگاه باشد، آنگاه $(y_۰\,,x_۰)$ هم جوابی از این دستگاه خواهد بود. پس در صورتی جواب این دستگاه یکتاست که $x_۰=y_۰$. بنابراین نامعادلهٔ

$$x\geqslant (x-a)^{۲}$$

و معادلاً نامعادلهٔ

$$۰\geqslant x^{۲}-(۲a+۱)x+a^{۲}$$

باید جواب یکتا داشته باشد. در نتیجه مبیّن سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم بالا باید مساوی صفر باشد:

$$(۲a+۱)^۲ - ۴a^۲ = ۰$$

پس $a = -\frac{۱}{۴}$.

اکنون ثابت می‌کنیم که دستگاه (۸) به‌ازای $a = -\frac{۱}{۴}$ دارای جواب یکتاست.

$$\begin{cases} x \geqslant (y + \frac{۱}{۴})^۲ \\ y \geqslant (x + \frac{۱}{۴})^۲ \end{cases}$$

این دو نامعادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$x + y \geqslant y^۲ + \frac{y}{۲} + \frac{۱}{۱۶} + x^۲ + \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۱۶}$$
$$۰ \geqslant (y - \frac{۱}{۴})^۲ + (x - \frac{۱}{۴})^۲$$

از نامعادلهٔ آخر نتیجه می‌شود که $x = y = \frac{۱}{۴}$. بنابراین دستگاه (۸) به‌ازای $a = -\frac{۱}{۴}$ دارای جواب یکتای $\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}\right)$ است. ■

در دو مسئلهٔ بعدی به تعیین بیشینه و کمینهٔ برخی از عبارتهای مثلثاتی نیاز داریم. در آینده از نابرابری جبری زیر نیز استفاده خواهیم کرد.

گزاره. اگر $A > ۰$ آنگاه $A + \frac{۱}{A} \geqslant ۲$ و علاوه بر این، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $A = ۱$.

اثبات. فرض کنید $A > ۰$. در این‌صورت

$$۰ \leqslant (\sqrt{A} - \sqrt{\frac{۱}{A}})^۲ = A + \frac{۱}{A} - ۲\sqrt{A\frac{۱}{A}} = A + \frac{۱}{A} - ۲$$

و واضح است که در نابرابری بالا تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $A = ۱$. ■

مسئلهٔ ۱۰ . دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \tan^۲ x + \cot^۲ x = ۲\sin^۲ y \\ \sin^۲ y + \cos^۲ z = ۱ \end{cases} \qquad (۹)$$

راه‌حل. بنابر گزارهٔ بالا، $\tan^2 x + \cot^2 x = \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} \geqslant 2$. از طرف دیگر $2\sin^2 y \leqslant 2$. پس برای اینکه اولین معادله در دستگاه (۹) برقرار باشد باید $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = 2$ و $2\sin^2 y = 2$. بنابراین

$$\tan^2 x = 1, \quad \sin^2 y = 1, \quad \cos^2 z = 0$$

پس جواب به این‌صورت است:

$$\left(k\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad k'\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k''\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

که در آن k، k' و k'' اعدادی صحیح‌اند. ■

مسئلهٔ ۱۱ . معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\tan^4 x + \tan^4 y + 2\cot^2 x \cot^2 y = 3 + \sin^2(x+y) \qquad (10)$$

راه‌حل. فرض می‌کنیم $a = \tan^2 x$ و $b = \tan^2 y$. بنابراین

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + \frac{2}{ab} &= (a-b)^2 + 2ab + \frac{2}{ab} \\ &\geqslant (a-b)^2 + 4 \geqslant 4 \end{aligned}$$

تساوی $\tan^4 x + \tan^4 y + 2\cot^2 x \cot^2 y = 4$ وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a = b$ و $ab = 1$. از طرف دیگر، $3 + \sin^2(x+y) \leqslant 4$ و تساوی $3 + \sin^2(x+y) = 4$ وقتی و فقط وقتی برقرار است که $\sin^2(x+y) = 1$. بنابراین برای اینکه معادلهٔ (۱۰) برقرار باشد باید

$$\tan^2 x = \tan^2 y, \quad \tan^2 x \tan^2 y = 1, \quad \sin^2(x+y) = 1$$

پس جواب به‌صورت زیر است

$$\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad \frac{k'\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

که در آن k و k' اعدادی صحیح‌اند و $k + k'$ زوج است. ■

در برخی از مسائل عبارتی به‌شکل $f(x) = a\sin x + b\cos x$ وجود دارد که می‌توانیم آن را با استفاده از زاویه‌ای کمکی به شکلی ساده‌تر بنویسیم. این کار را به این‌صورت می‌کنیم:

$$f(x) = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

چون نقطهٔ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}, \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\right)$ روی دایرهٔ به شعاع یک و به مرکز مبدأ مختصات قرار دارد، پس زاویهٔ یکتایی مانند ϕ که $۰ \leqslant \phi < ۲\pi$ وجود دارد به‌طوری که $\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$، $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$. بنابراین

$$f(x) = \sqrt{a^۲+b^۲}(\cos\phi\sin x + \sin\phi\cos x) = \sqrt{a^۲+b^۲}\sin(x+\phi) \qquad (۱۱)$$

در نتیجه

$$|a\sin x + b\cos x| \leqslant \sqrt{a^۲+b^۲} \qquad (۱۲)$$

در (۱۲) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\sin(x+\phi) = \pm ۱$ که معادل است با

$$x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} - \phi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

در مسئلهٔ بعدی از این روش استفاده خواهیم کرد.

مسئلهٔ ۱۲ . معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin ۳x - ۲\sin ۱۸x \sin x = ۳\sqrt{۲} - \cos ۳x + ۲\cos x$$

راه‌حل. معادلهٔ بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sin ۳x + \cos ۳x - ۲(\sin ۱۸x \sin x + \cos x) = ۳\sqrt{۲} \qquad (۱۳)$$

بنابر (۱۲)، $|\sin ۳x + \cos ۳x| \leqslant \sqrt{۲}$ و

$$|\sin ۱۸x \sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{\sin^۲ ۱۸x + ۱} \leqslant \sqrt{۲}$$

در نابرابری اخیر، از (۱۲) با فرض $a = \sin ۱۸x$ و $b = ۱$ و اینکه $\sin ۱۸x \leqslant ۱$ استفاده کرده‌ایم. در نتیجه $|\sin ۳x + \cos ۳x - ۲(\sin ۱۸x \sin x + \cos x)| \leqslant ۳\sqrt{۲}$. بنابراین معادلهٔ (۱۳) برقرار است اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} \sin ۳x + \cos ۳x = \sqrt{۲} \\ \sin ۱۸x = ۱ \\ \sin x + \cos x = -\sqrt{۲} \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \\ \sin 18x = -1 \\ -\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

ابتدا اولین دستگاه را حل می‌کنیم. بنابر (۱۱)، معادلهٔ $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ را می‌توانیم به‌صورت

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

بنویسیم. پس

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

در نتیجه

$$x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اما این xها در معادلهٔ $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ صدق نمی‌کنند، زیرا

$$\sin 3\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos 3\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = 0$$

بنابراین اولین دستگاه جواب ندارد.

اکنون دومین دستگاه را حل می‌کنیم. بنابر (۱۱)، معادلهٔ $-\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ را می‌توانیم به‌صورت

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

بنویسیم. پس

$$\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

در نتیجه

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

به‌آسانی دیده می‌شود که این xها در معادلات $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$ و $\sin 18x = -1$ نیز صدق می‌کنند.
بنابراین جواب نهایی به‌صورت زیر است

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مسئلهٔ ۱۳ . معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\left(\sqrt{۳-\tan^۲\frac{۳}{۲}\pi x}\right)\sin\pi x-\cos\pi x=۲ \qquad (۱۴)$$

راه‌حل. فرض می‌کنیم $A=\sqrt{۳-\tan^۲\frac{۳}{۲}\pi x}$. بنابر (۱۲)،

$$|A\sin\pi x-\cos\pi x|\leqslant\sqrt{A^۲+۱}=\sqrt{۴-\tan^۲\frac{۳}{۲}\pi x}\leqslant ۲$$

پس برای اینکه معادلهٔ (۱۴) برقرار باشد. باید $\tan^۲\frac{۳}{۲}\pi x=۰$ در نتیجه

$$x=\frac{۲}{۳}n,\quad n\in\mathbb{Z} \qquad (۱۵)$$

به‌ازای این xها، معادلهٔ (۱۴) را می‌توان به‌صورت $\sqrt{۳}\sin\pi x-\cos\pi x=۲$ نوشت. در نتیجه بنابر (۱۱)،

$$۲\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{۶}\right)=۲$$

پس

$$x=۲m+\frac{۲}{۳},\quad m\in\mathbb{Z}$$

چون این xها در (۱۵) نیز صدق می‌کنند، مجموعهٔ بالا همان مجموعهٔ جواب معادلهٔ (۱۴) است. ■

در پایان پیشنهاد می‌کنیم که مسئله‌های زیر را حل کنید.

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x+۲}+\sqrt{۶-x}=۳x^۲-۱۲x+۱۶$

ب) $\sin^{۱۳}۲x+\cos^{۱۲}۲x=۱$

ج) $\sin x+\sin ۹x=۲$

د) $(x^۲-۲x+۳)(y^۲+۶y+۱۲)=۶$

هـ) $۲^{|x|}-\cos y+\log_{۱۰}(۱+x^۲+|y|)=۰$

و) $\left(\sin^۲x+\frac{۱}{\sin^۲x}\right)^۲+\left(\cos^۲x+\frac{۱}{\cos^۲x}\right)^۲=۱۲+\frac{۱}{۲}\sin y$

۲. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}x+y+z=\sqrt{۳}\\ x^۲+y^۲+z^۲=۱\end{cases}$$

۳. در هر یک از قسمتهای زیر، جفتهایی از اعداد را بیابید که شرطهای داده‌شده را ارضا کنند.

الف)
$$\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4xy^3+y^3+\dfrac{1}{2}\geqslant 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2-x^4y^4}=y^6+x^2(1-x) \\ \sqrt{1+(x+y)^2}+x(2y^3+x^3)\leqslant 0 \end{cases}$$

۴. مقدار a را طوری پیدا کنید که دستگاه زیر دارای جواب یکتا باشد.

$$\begin{cases} y\geqslant x^2+2a \\ x\geqslant y^2+2a \end{cases}$$

۵. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sqrt{3}\sin 5x-\sqrt{3}\sin x=\cos 24x\cos x+2\cos 5x-6\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$

ب) $\sqrt{1-\cot^2 2\pi x}\cos \pi x+\sin \pi x=\sqrt{2}$

۶. از معادلهٔ زیر x را برحسب b بیابید.

$$3\cos x\sin b-\sin x\cos b-4\cos b=3\sqrt{3}$$

• ترجمهٔ حمیدرضا وهابی (عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد اسلامشهر)

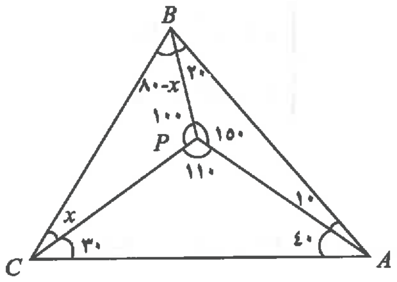
A. Egorov, "Inequalities become equalities", *Quantum*, Vol. 10, No. 4, March/April 2000, pp. 42-46

استفاده از مثلثات در حل مسائل هندسه (۲)

احسان کریمی

مسئلهٔ ۷. نقطهٔ P درون مثلث ABC قرار دارد و $\angle PAB = ۱۰^\circ$، $\angle PBA = ۲۰^\circ$، $\angle PCA = ۳۰^\circ$ و $\angle PAC = ۴۰^\circ$. ثابت کنید مثلث ABC متساوی الساقین است (المپیاد بیست و پنجم آمریکا، مسئلهٔ ۵).

راه‌حل. به شکل زیر توجه کنید.



از طرفی بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ABP و ACP

$$\frac{PB}{\sin ۱۰} = \frac{PA}{\sin ۲۰} \quad \text{و} \quad \frac{PC}{\sin ۴۰} = \frac{PA}{\sin ۳۰}$$

در نتیجه

$$PC = ۲PA\sin ۴۰ \quad \text{و} \quad PB = \frac{PA}{۲\cos ۱۰} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلث BCP

$$\frac{PB}{\sin x} = \frac{PC}{\sin(۸۰ - x)} \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم

$$۴\sin ۴۰ \cos ۱۰ \sin x = \sin(۸۰ - x)$$

$$۴\sin ۴۰ \cos ۱۰ \sin x = \sin ۸۰ \cos x - \cos ۸۰ \sin x$$

$$(۴\sin ۴۰ \cos ۱۰ + \cos ۸۰)\sin x = \sin ۸۰ \cos x$$

به‌جای $\sin 40 \cos 10$ می‌نویسیم $\frac{1}{2}(\sin 50 + \sin 30)$ و محاسبه را ادامه می‌دهیم:

$$(2\sin 50 + 1 + \cos 80)\sin x = \sin 80 \cos x$$

$$(2\cos 40 + 1 + 2\cos^2 40 - 1)\sin x = 2\sin 40 \cos 40 \cos x$$

$$\cos 40(1+\cos 40)\sin x = \sin 40 \cos 40 \cos x$$

$$(1+\cos 40)\sin x = \sin 40 \cos x \qquad (3)$$

به‌راحتی می‌توان ثابت کرد اگر θ عددی حقیقی باشد و مضربی صحیح از 180° نباشد،

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

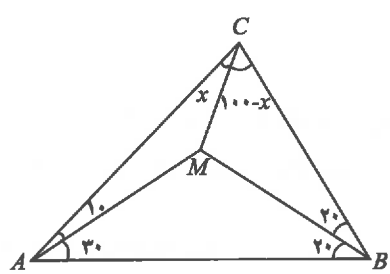
در نتیجه از تساوی (۳) نتیجه می‌شود

$$\cot x = \cot 20$$

و چون $0^\circ < x < 80^\circ < 180^\circ$، پس $x = 20^\circ$. در نتیجه $\angle BAC = \angle ACB = 50^\circ$ و ABC متساوی‌الساقین است. (این مسئله را با صورت سینوسی قضیهٔ سوا نیز می‌توان حل کرد.) ■

مسئلهٔ ۸. در مثلث ABC، $AC = BC$، $\angle C = 100^\circ$ و M نقطه‌ای درون مثلث است که $\angle MBA = 20^\circ$ و $\angle MAB = 30^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ CMA چند درجه است؟

راه‌حل. x را مطابق با شکل زیر در نظر بگیرید.



بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای AMC و AMB،

$$AM = \frac{AC\sin x}{\sin(180 - (x+10))} = \frac{AC\sin x}{\sin(x+10)} \quad \text{و} \quad AM = \frac{AB\sin 20}{\sin 130}$$

از تساویهای بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{AB\sin ۲۰}{AC\sin ۵۰}=\frac{\sin x}{\sin(x+۱۰)} \qquad (۴)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin ۱۰۰}{\sin ۴۰}=\frac{۲\sin ۵۰\cos ۵۰}{\cos ۵۰}=۲\sin ۵۰ \qquad (۵)$$

از (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\sin x}{\sin(x+۱۰)}=۲\sin ۲۰$$

در نتیجه

$$\sin x=۲\sin ۲۰\sin(x+۱۰)=\cos(۱۰-x)-\cos(x+۳۰)$$

یعنی

$$\begin{aligned}\cos(۱۰-x)=\sin x+\sin(۶۰-x)&=۲\sin ۳۰\cos(۳۰-x)\\ \cos(۱۰-x)-\cos(۳۰-x)&=۰\\ ۲\sin ۱۰\sin(۲۰-x)&=۰\end{aligned}$$

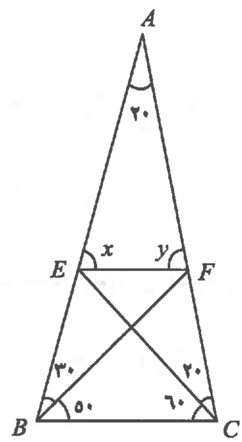
یعنی $\sin(۲۰-x)=۰$. اما $۰^\circ<x<۱۰۰^\circ$ و در نتیجه $x=۲۰^\circ$، پس $\angle CMA=۱۵۰^\circ$. (برای راه‌حل مثلثاتی دیگر به [۱۶] مراجعه کنید (صفحهٔ ۲۱، مسئلهٔ ۸). این مسئله را نیز می‌توان با استفاده از صورت سینوسی قضیهٔ سوا حل کرد.) ■

مسئلهٔ ۹ . در مثلث ABC، $AB=AC$، $\angle A=۲۰^\circ$ و E نقطه‌ای روی ضلع AB و F نقطه‌ای روی ضلع AC است و $\angle BCE=۶۰^\circ$ و $\angle CBF=۵۰^\circ$. زاویهٔ FEC چند درجه است؟

راه‌حل اول. زاویه‌های x و y را مانند شکل در نظر بگیرید.

می‌خواهیم $x-y$ را بیابیم. بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلثهای ABF و ACE

$$\frac{AF}{\sin ۳۰}=\frac{AB}{\sin ۱۳۰}=\frac{AB}{\sin ۵۰} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{\sin ۲۰}=\frac{AC}{\sin ۴۰}$$



در نتیجه

$$AF = \frac{AB}{۲\sin ۵۰} \quad \text{و} \quad AE = \frac{AC}{۲\cos ۲۰}$$

بنابراین، چون $AB = AC$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{\cos ۲۰}{\sin ۵۰} \qquad (۶)$$

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلث AEF

$$\frac{AF}{AE} = \frac{\sin x}{\sin y} \qquad (۷)$$

از تساویهای (۶) و (۷) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\cos ۲۰}{\sin ۵۰} = \frac{\sin ۷۰}{\sin ۵۰}$$

در نتیجه

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin ۷۰ + \sin ۵۰}{\sin ۷۰ - \sin ۵۰}$$

$$\frac{۲\sin\left(\frac{x+y}{۲}\right)\cos\left(\frac{x-y}{۲}\right)}{۲\sin\left(\frac{x-y}{۲}\right)\cos\left(\frac{x+y}{۲}\right)} = \frac{۲\sin ۶۰ \cos ۱۰}{۲\sin ۱۰ \cos ۶۰}$$

در نتیجه

$$\tan\left(\frac{x+y}{۲}\right)\cot\left(\frac{x-y}{۲}\right) = \sqrt{۳}\cot ۱۰$$

اما $x+y=۱۶۰^\circ$. بنابراین

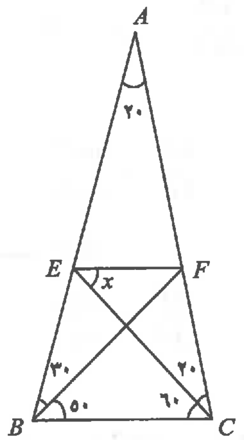
$$\tan ۸۰ \cot\left(\frac{x-y}{۲}\right)=\sqrt{۳}\cot ۱۰$$
$$\cot\left(\frac{x-y}{۲}\right)=\sqrt{۳}$$

بنابراین، $\frac{x-y}{۲}=۳۰^\circ$ و چون $x+y=۱۶۰^\circ$، به‌دست می‌آوریم $x=۱۱۰^\circ$ و $y=۵۰^\circ$. در نتیجه

$$\angle FEC=۳۰^\circ$$

(این روش را در مسائل قبل نیز می‌توان به‌کار برد.)

راه‌حل دوم. x را مانند شکل زیر در نظر بگیرید.



از طرفی، طبق قضیهٔ سینوسها در مثلثهای CEF و ACE

$$\frac{FC}{\sin x}=\frac{EC}{\sin(۱۸۰-(x+۲۰))}=\frac{EC}{\sin(x+۲۰)}$$

و

$$\frac{EC}{\sin ۲۰}=\frac{AC}{\sin ۱۴۰}=\frac{AC}{\sin ۴۰}=\frac{AC}{۲\sin ۲۰\cos ۲۰}$$

در نتیجه

$$\frac{FC}{\sin x}=\frac{AC}{۲\cos ۲۰\sin(x+۲۰)} \qquad (۸)$$

از طرف دیگر، اگر H پای ارتفاع وارد بر BC از رأس A باشد، چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، $\angle BAH = \angle CAH = 10^\circ$ و در نتیجه $HC = AC\sin 10^\circ$. اما $2HC = BC$ و مثلث BCF متساوی‌الساقین است و در آن $BC = FC$. بنابراین، $2HC = FC$ و در نتیجه

$$FC = 2AC\sin 10^\circ \qquad (9)$$

از (۸) و (۹) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}
\sin x &= 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ \sin(x+20^\circ)\\
&= \frac{4\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}\sin(x+20^\circ)\\
&= \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 10^\circ}\sin(x+20^\circ) = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}\sin(x+20^\circ)\\
&= \frac{1}{2\cos 40^\circ}\sin(x+20^\circ) = \frac{1}{2\sin 50^\circ}\sin(x+20^\circ)
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$2\sin 50^\circ \sin x = \sin(x+20^\circ)$$

$$\cos(x-50^\circ) - \cos(x+50^\circ) = \sin(x+20^\circ)$$

$$\sin(x+20^\circ) + \cos(x+50^\circ) = \cos(x-50^\circ)$$

$$\sin(x+20^\circ) + \sin(40^\circ - x) = \cos(x-50^\circ)$$

$$\cos(x-10^\circ) = \cos(x-50^\circ)$$

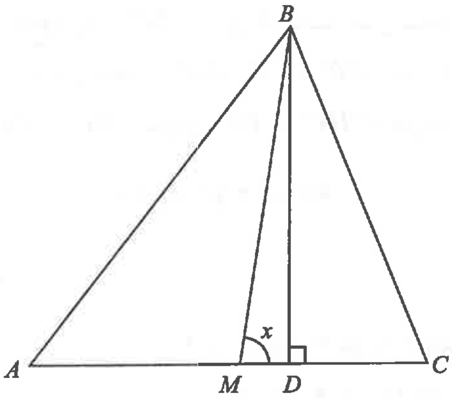
و با روشی که در راه‌حل بعضی مسائل قبل هم گفتیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$x = 30^\circ$$

(برای دیدن چند راه‌حل هندسی به [۹]، [۸] و [۱۷] مراجعه کنید.) ∎

مسئلهٔ ۱۰ (قضیهٔ اشتاینر ـ لموس). اگر در مثلثی دو تا از نیمسازهای داخلی طول برابر داشته باشند، آنگاه آن مثلث، متساوی‌الساقین است.

اثبات. فرض کنید در مثلث ABC، طول نیمساز زاویهٔ B با طول نیمساز C برابر باشد و BM نیمساز زاویهٔ B باشد و پای ارتفاع وارد بر ضلع AC از B را D بنامید. فرض کنید $x = \angle BMD$، $a = \angle A$، $b = \angle B$ و $c = \angle C$.



$$x = \frac{\angle B + ۲\angle A}{۲} = \frac{\angle A + \angle B + \angle A}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \angle C + \angle A}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{\angle A - \angle C}{۲}$$

اما

$$BD = BC \sin c \quad \text{و} \quad BD = BM \sin x$$

در نتیجه

$$BM = \frac{BC \sin c}{\sin x} = \frac{BC \sin c}{\cos\left(\frac{a-c}{۲}\right)}$$

به‌روشی مشابه، طول نیمساز زاویهٔ C را برابر $\dfrac{BC \sin b}{\cos\left(\frac{a-b}{۲}\right)}$ به‌دست می‌آوریم. بنابر فرض، طول نیمساز زاویهٔ B با طول نیمساز زاویهٔ C برابر است. بنابراین

$$\frac{BC \sin b}{\cos\left(\frac{a-b}{۲}\right)} = \frac{BC \sin c}{\cos\left(\frac{a-c}{۲}\right)}$$

$$\sin c \cos \frac{a-b}{۲} = \sin b \cos \frac{a-c}{۲}$$

$$\sin \frac{c}{۲} \cos \frac{c}{۲} \cos \frac{a-b}{۲} = \sin \frac{b}{۲} \cos \frac{b}{۲} \cos \frac{a-c}{۲} \qquad (۱۰)$$

اما $a + b + c = ۱۸۰^\circ$. بنابراین

$$\cos \frac{a+c}{۲} = \sin \frac{b}{۲} \quad \text{و} \quad \cos \frac{a+b}{۲} = \sin \frac{c}{۲}$$

با جاگذاری تساویهای بالا در تساوی (۱۰)، به تساوی زیر می‌رسیم

$$\cos \frac{c}{۲} \cos \frac{a+b}{۲} \cos \frac{a-b}{۲} = \cos \frac{b}{۲} \cos \frac{a+c}{۲} \cos \frac{a-c}{۲}$$

در نتیجه

$$\cos\frac{c}{۲}(\cos a+\cos b)=\cos\frac{b}{۲}(\cos a+\cos c)$$

$$\cos a\left(\cos\frac{c}{۲}-\cos\frac{b}{۲}\right)=\cos\frac{b}{۲}\cos c-\cos\frac{c}{۲}\cos b$$

اما به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}-۱$. در نتیجه

$$\cos a\left(\cos\frac{c}{۲}-\cos\frac{b}{۲}\right)=\cos\frac{b}{۲}\left(۲\cos^۲\frac{c}{۲}-۱\right)-\cos\frac{c}{۲}\left(۲\cos^۲\frac{b}{۲}-۱\right)$$

یعنی

$$\left(\cos\frac{b}{۲}-\cos\frac{c}{۲}\right)\left(۲\cos\frac{b}{۲}\cos\frac{c}{۲}+۲\sin^۲\frac{a}{۲}\right)=\circ$$

اما

$$\circ^\circ<\frac{c}{۲},\frac{b}{۲}<۹\circ^\circ$$

در نتیجه

$$۲\cos\frac{b}{۲}\cos\frac{c}{۲}+۲\sin^۲\frac{a}{۲}>\circ$$

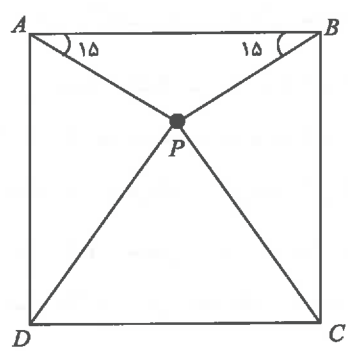
بنابراین

$$\cos\frac{b}{۲}-\cos\frac{c}{۲}=\circ$$

در نتیجه $b=c$ که یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ■

تمرین

۱. در شکل زیر $ABCD$ مربع است. ثابت کنید مثلث PDC متساوی‌الاضلاع است.



۲. در چندضلعی‌ای منتظم، A، B، C و D رأسهایی متوالی‌اند و $\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{AB}$. تعداد اضلاع این چندضلعی را بیابید.

۳. در مثلث ABC، روی ضلعهای BC و AC به‌ترتیب نقاط D و E طوری انتخاب شده‌اند که $\angle BAD = 50^\circ$ و $\angle ABE = 30^\circ$ و ضمناً $\angle ACB = \angle ABC = 50^\circ$. زاویهٔ BED چند درجه است؟

۴. در مثلث ABC، $\angle B = 100^\circ$ و $\angle C = 60^\circ$ و نقاط M و N به‌ترتیب روی ضلعهای AB و AC طوری قرار دارند که $\angle MCB = 55^\circ$ و $\angle NBC = 80^\circ$. زاویهٔ NMC چند درجه است؟ (راه‌حل هندسی را در [۸]، صفحهٔ ۳۲، مسئلهٔ ۲۵۲ ببینید.)

۵. در مثلث ABC، $\angle ACB = 80^\circ$ و $AC = BC$ و نقطهٔ M در مثلث ABC طوری قرار دارد که $\angle MBA = 30^\circ$ و $\angle MAB = 10^\circ$. زاویهٔ AMC چند درجه است؟

۶. فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد و نقطهٔ M نقطه‌ای روی کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد. ثابت کنید $MA = MB + MC$.

۷. نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. ثابت کنید $MA^4+MB^4+MC^4$ مقداری ثابت است (تعمیم: اگر M روی دایرهٔ محیطی nضلعی منتظم $A_1A_2\cdots A_n$ باشد، ΣMA_i^4 ثابت است).

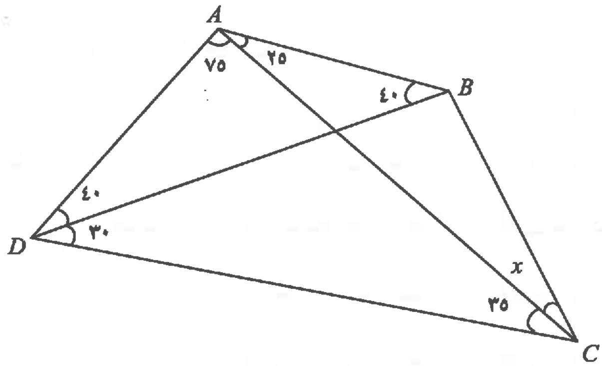
۸. روی اضلاع مثلث ABC دو مربع $ABMN$ و $ACPQ$ را رو به خارج می‌سازیم. ثابت کنید ارتفاع وارد بر ضلع BC از وسط MP می‌گذرد.

۹. در مثلث ABC، AH ارتفاع وارد بر BC است. در مثلث ABC دایره‌ای به قطر برابر طول AH رسم‌کنید تا اضلاع مثلث را در M و N قطع کند. P نقطهٔ تقاطع مماسهای بر دایره در نقاط M و N است. ثابت کنید AP از وسط BC می‌گذرد (این مسئله با اعداد مختلط و قضیهٔ منلائوس نیز حل می‌شود. راه‌حل هندسی را در [۸]، مسئلهٔ ۱۸۳ ببینید. راه‌حل با کمک هندسهٔ تحلیلی چندمحوری را در [۱۸] می‌توانید بیابید).

۱۰. نقطهٔ P طوری روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد که $PC = 2BP$. اگر $\angle APC = 60^\circ$ و $\angle ABC = 45^\circ$، زاویهٔ ACB چند درجه است؟ (راه‌حلهای هندسی را می‌توانید در [۱۷]، مسئلهٔ ۱۸۱ و در [۸] ببینید. این مسئله را با مثلثات به حداقل دو راه می‌توان حل کرد.)

۱۱. در صفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، خطی دلخواه از مرکز ثقل مثلث عبور کرده است. ثابت کنید مجموع مربعهای فاصله‌های رأسهای مثلث از این خط مقداری ثابت است.

۱۲. در شکل زیر x را بیابید.



۱۳. در مثلثی، میانه و ارتفاع یک رأس با ضلعها دو زاویهٔ مساوی ساخته‌اند. ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ آن رأس 90° است.

۱۴. ثابت کنید یک و فقط یک مثلث وجود دارد که طولهای ضلعهایش عددهای طبیعی متوالی‌اند و یکی از زاویه‌هایش دو برابر زاویه‌ای دیگر است.

۱۵. در مثلث ABC، $AB = AC$ و $\angle A = 20^\circ$ و D نقطه‌ای روی AC است که $AD = BC$. زاویهٔ BDC چند درجه است؟

مراجع

۱. المپیادهای ریاضی آمریکا، ۱۹۸۶ـ۱۹۷۲، ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل، نشر بردار، ۱۳۶۸.

۲. مسئله‌های المپیادهای ریاضی (در کشورهای مختلف)، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فردوس، ۱۳۷۴.

۳. مورای اس. کلامکین، المپیادهای بین‌المللی ریاضی، جلد دوم ۱۹۸۵ـ۱۹۷۸، ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور، ۱۳۶۹.

۴. مسعود نیکوکار، مهران احمدلو، ایده‌های المپیاد ریاضی، جلد اول (هندسه و نابرابریها)، گسترش نشر پایه، ۱۳۸۱.

۵. لورن سی. لارسن، حل مسئله از طریق مسئله، ترجمهٔ علی ساوجی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷.

۶. پرویز شهریاری، محاسبهٔ برداری (کتابهای کوچک ریاضی، شمارهٔ ۱۵)، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۰.

۷. نیکلای یوری‌سوویچ واسیلیف، آندره آلکساندرویچ یه‌گورف، المپیادهای ریاضی در شوروی (سابق)، ترجمهٔ پرویز شهریاری، نشر توسعه، ۱۳۷۳.

۸. شاریگین،مسئله‌هایی در هندسهٔ مسطحه، ترجمهٔ ارشک حمیدی، انتشارات مبتکران، ۱۳۷۴.

۹. استروسکی، مالچانف، تولپیکو، روزنتال، دینکین، مسائل ریاضی، آسان ولی . . .، ترجمهٔ پرویز شهریاری، نشر گستره، ۱۳۶۳.

۱۰. فرشید الموتی و دیگران، مباحث و مسائل المپیاد ریاضی، انتشارات پیش‌دانشگاهیان، ۱۳۷۸.

۱۱. کاکستر، گرایتزر، بازآموزی و بازشناخت هندسه، ترجمهٔ حسین غیور، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۴.

۱۲. مانیس کاروش، ورزیدگی در ریاضیات، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، مؤسسهٔ انتشارات فاطمی، ۱۳۶۹.

۱۳. عبادالله محمودیان، المپیادهای ریاضی در ایران، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۹.

۱۴. المپیادهای ریاضی در گوشه‌وکنار جهان ۱۹۹۸، ترجمهٔ مهدی بهزادی و محمد زائری، مؤسسهٔ فرهنگی دانش‌پژوهان جوان، ۱۳۸۰.

۱۵. المپیادهای ریاضی کانادا ۲۰۰۲ـ۱۹۹۴، گردآوری و ترجمهٔ سام نریمان، نشر مهر، ۱۳۸۱.

۱۶. برگزیدهٔ مسائل هندسه، ترجمهٔ عادل ارشقی، مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسا، چاپ اول، ۱۳۷۰.

۱۷. ادوارد ج. باربو، ماری سی. کلامیکن، ویلیام اُ. ج. موزر، پانصد مسئلهٔ ریاضی پیکارجو، ترجمهٔ مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷.

۱۸. احمد شرف‌الدین، هندسهٔ تحلیلی چندمحوری، انتشارات مدرسه.

بازی جعبه‌سیاه به ضمیمهٔ سفرنامهٔ مکزیک

سیدامین سیدی و وحید لیاقت

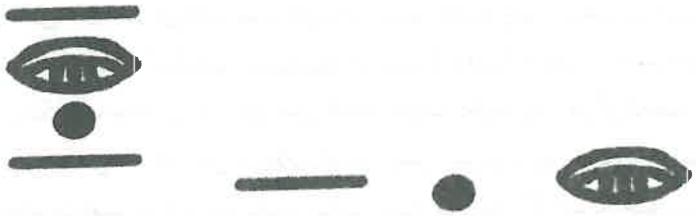
در نخستین ساعات بامداد جمعه سوم شهریورماه ۱۳۸۵، تیم المپیاد کامپیوتر ایران، متشکل از وحید لیاقت، حسام‌الدین اخلاق‌پور، نیما احمدی‌پور و شایان احسانی پس از سفری دوهفته‌ای با دستی پر، از کشور مکزیک بازگشتند.

درست دو هفته پیش از این شب بود که اعضای تیم به همراه دکتر جابری‌پور، مهندس مهینی و من ایران را به مقصد مکزیک برای شرکت در مسابقات جهانی ترک کردیم. ساعت پنج صبح از تهران به سمت هلند پرواز کردیم. بعد از سفری شش‌ساعته در فرودگاه آمستردام پیاده شدیم. حدود چهار ساعت در فرودگاه استراحت کردیم و بعد هلند را به مقصد مکزیک ترک کردیم. مدت پرواز از هلند تا مکزیک دوازده ساعت بود ولی جالب است بدانید هنگامی که در مکزیک به زمین نشستیم هنوز آفتاب غروب نکرده بود (در آن لحظه در ایران از نیمه‌شب گذشته بود). شاید بتوان حدس زد که اولین مشکلی که در چنین سفری برای اعضای تیم پیش می‌آید چیست؛ ساعت طبیعی بدن به‌شدت تغییر می‌کند و وضعیت خواب مختل می‌شود. اگر تجربهٔ چنین سفری را داشته باشید می‌دانید که عوض کردن ساعات خواب و بیداری و عادت کردن به شرایط جدید کار آسانی نیست. حدود ساعت پنج در فرودگاه مکزیک به زمین نشستیم. چند روزی در این شهر اقامت کردیم و مهمان سفارت بودیم. در این مدت توانستیم تا حد خوبی ساعات خواب خود را تنظیم کنیم. از مکانهای دیدنی نظیر موزهٔ تاریخی و هرمهای سرخپوستی باقی‌مانده از تمدن مایاها و آزتک‌ها بازدید کردیم. از مشکلات قابل توجه در سفر به مکزیک، بیگانه بودن مردم این کشور با زبان انگلیسی است. به‌ندرت می‌توان در خیابانهای شهر کسی را پیدا کرد که بتواند انگلیسی صحبت کند. طبعاً این سفر تمرین بسیار خوبی بود که بتوانیم با زبان بی‌زبانی با دیگران ارتباط برقرار کنیم. نهایتاً مکزیکوسیتی را به مقصد مریدا، محل برگزاری مسابقات، ترک کردیم.

در هواپیمایی که ما را از مکزیکوسیتی به مریدا می‌بُرد، اکثر سرنشینان شرکت‌کنندگان در مسابقات بودند. هنگامی که وارد فرودگاه شدیم، به همراه تعدادی از راهنمایان مسابقات به هتلهای محل اقامت رفتیم. دیدن تعداد زیادی دانش‌آموز علاقه‌مند به علوم کامپیوتر که از تقریباً نود کشور جهان در یک نقطه جمع شده‌اند بدون شک تجربه‌ای لذت‌بخش و به‌یادماندنی است. دانش‌آموزان از کشورهای مختلف دور هم جمع می‌شدند، با هم در مورد کشورشان، نظراتشان و مباحث علمی صحبت می‌کردند و در سالن مخصوصی که برگزارکنندگان آماده کرده بودند به انواع بازیهای می‌پرداختند که در آن میان بچه‌های تیم ایران بیشتر مشغول فوتبال‌دستی بودند. تا قبل از روز مسابقه برنامه‌هایی تفریحی برای سرگرم کردن شرکت‌کنندگان وجود داشت.

طبیعی است که برگزارکنندگان مسابقات بخشی از برنامه‌ها را به معرفی فرهنگ خود اختصاص دهند. فرهنگ کشور مکزیک با سابقهٔ تاریخی تمدن سرخپوستی، از این نظر بسیار جذاب است. به گفتهٔ راهنمای بازدید، مایاها (تمدن سرخپوستی تاریخی مکزیک) اولین تمدنی بودند که صفر را اختراع کردند و چون که در کامپیوتر همه چیز با صفر و یک نشان داده می‌شود، آنها مدعی بودند که نیمی از علوم کامپیوتر در مکزیک کشف شده است!

شیوهٔ سرخپوستان در نمایش اعداد نیز بسیار جالب است. آنها اعداد را در مبنای ۲۰ نمایش می‌دادند، یعنی هر رقم ارزشی بین صفر تا نوزده داشت. برای نشان دادن هر رقم نیز از سه علامت استفاده می‌کردند که ارزش این علامتها به‌ترتیب صفر، یک و پنج است. مثلاً اگر می‌خواستند رقم ۱۸ را نشان دهند، آن را به‌صورت سه‌تا علامت پنج و سه‌تا علامت یک نشان می‌دادند. اگر بخواهیم عدد ۲۰۰۶ را نشان دهیم، این عدد را به‌صورت پنج‌تا ۴۰۰ به‌اضافهٔ صفرتا ۲۰ به‌اضافهٔ شش‌تا ۱ مشخص می‌کنیم. بنابراین در مکان چهارصدگان پنج می‌نویسیم، در مکان بیست‌گان، صفر می‌نویسیم و در مکان یکان، شش می‌نویسیم. دقت کنید که اعداد را از بالا به پایین می‌نویسیم.



رقم صفر — رقم یک — رقم پنج — عدد ۲۰۰۶

همان‌طور که در شکل می‌بینید، بالاترین خط مربوط به رقم ۵ در مکان چهارصدگان است. به‌دنبال آن صفر در مکان بیست‌گان آمده است. خط و نقطهٔ انتهایی (در پایین) نشان‌دهندهٔ عدد ۶ در یکان‌اند. آیا می‌توانید اکنون سال تولد خودتان را به شیوهٔ سرخپوستی نمایش دهید؟

روز قبل از امتحان شرکت‌کنندگان به سالن امتحان رفتند تا با محیط آشنا شوند، کامپیوترها را بررسی کنند و اگر پرسشی فنی دارند در همان روز بپرسند. عصر آن روز همراهان تیم (من، دکتر جابری‌پور و مهندس مهینی) از اعضای تیم جدا و قرنطینه شدیم. همان شب در جلسه‌ای سؤالات امتحان را به ما دادند تا بررسی کنیم تا اگر اشکالی وجود داشت یا ابهامی در آنها بود، گزارش کنیم. این جلسه ادامه داشت و به‌صورت هم‌زمان شروع به ترجمه کردیم. حدود ساعت چهار صبح بود که کار ترجمه و تصحیح تمام شد. سؤالات بسیار آسان به‌نظر می‌آمدند و از بچه‌ها انتظار نمرهٔ بسیار بالایی داشتیم. صبح روز بعد امتحان شروع شد. ما حوالی ظهر به سالن امتحان رفتیم و پشت در منتظر ماندیم تا امتحان تمام شود. همه از امتحان راضی بودند، اما عصر وقتی نمره‌ها اعلام شد، نمره‌ها بسیار کمتر از حد انتظار بود. از مجموع ۳۰۰ نمره، انتظار ما برای همه نمره‌ای بالاتر از ۲۲۰ بود در حالی‌که حسام ۱۴۲، شایان ۱۸۶، نیما ۲۰۰ و وحید ۲۵۵ گرفته بودند. اعضای تیمهای مختلف مرتباً از هم در مورد نمره‌ها می‌پرسیدند و بچه‌های تیم ما ناامیدتر می‌شدند. فقط وحید از نمره‌اش راضی بود.

فردای روز امتحان برنامه‌ای تفریحی در کنار دریا برگزار شد. برنامهٔ بسیار خوبی بود، چون بچه‌ها ورزش کردند و وقتی به هتل رسیدیم همه خوابیدند. از طرف دیگر این برنامه تا حدی باعث شد که کمتر به امتحان روز قبل فکر کنند و تا حدی به استراحت بپردازند. آن شب دوباره برنامهٔ ترجمهٔ سؤالات، تصحیح و اعتراض به آنها بود. عصر که به هتل رسیدیم از بچه‌ها جدا شدیم و به جلسه رفتیم. سؤالات در روز دوم بسیار سخت‌تر از روز اول بود. با توجه به نمره‌های ضعیف روز اول، امید چندانی به روز دوم نداشتیم و فقط به خدا توکل کردیم. کار ترجمه و تصحیح حدود ساعت ۲ نیمه‌شب تمام شد.

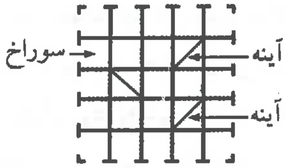
یکی از سؤالات روز دوم را فقط یک نفر (از تیم بلغارستان) حل کرد. احتمالاً شرح کامل این سؤال را در مقاله‌ای که نیما احمدی‌پور در شمارهٔ قبل نوشته است، خوانده‌اید. در میان سؤالات، سؤال بسیار جالب دیگری نیز وجود داشت. در میان تمامی شرکت‌کنندگان، کسی که بهترین جواب را می‌داد نمرهٔ کامل می‌گرفت و بقیهٔ افراد بسته به اینکه تا چه حد جوابشان به بهترین جواب نزدیک بود، بخشی از نمره را می‌گرفتند. این خصوصیت باعث می‌شود که فرد با طراحی الگوریتمی خوب بتواند نه‌تنها نمرهٔ خود را بالا ببرد، بلکه نمرهٔ رقبا را نیز کم کند. در این رقابت سخت، وحید توانست بالاترین نمره را از این سؤال بگیرد. در انتهای این مقاله می‌توانید شرح این سؤال را به‌همراه راه‌حل آن به قلم وحید بخوانید. چون در راه‌حل این سؤال از تکنیکهای متداول الگوریتمی استفاده نمی‌شود، خواندن آن برای همهٔ افراد علاقه‌مند به ریاضیات که قصد آشنایی با دنیای الگوریتم را دارند، مفید است.

بعد از امتحان روز دوم، همگی به سالن غذاخوری رفتیم. از شدت بوی بد نمی‌توانستیم نزدیک بعضی از میزها شویم. بعد از کمی پرس‌وجو فهمیدیم که سر میزها با غذاهایی از قبیل کرم‌خاکی سرخ‌شده، مورچهٔ سوخاری و ملخ پذیرایی می‌شود! بعد از پذیرایی مفصل، دوباره به سالن امتحان رفتیم. همه می‌توانستند از روی کامپیوتر خود، نمرهٔ روز دومشان را بفهمند. با توجه به اینکه امتحان روز دوم بسیار مشکل‌تر از امتحان روز اول بود، بچه‌ها خیلی خوب کار کرده بودند. در روز دوم از مجموع ۳۰۰ نمره، حسام ۱۳۰، وحید ۱۶۳، نیما ۱۶۵ و شایان ۱۵۷ گرفتند. وقتی نمره‌های تیمهای دیگر را می‌پرسیدیم بسیار امیدوار می‌شدیم. ولی متأسفانه، نتایج روز دوم به‌طور کامل نتایج روز اول را جبران نکرد. در نهایت وحید مدال طلا، نیما و شایان مدال نقره و حسام مدال برنز گرفتند. نیما سال گذشته در همین کشور و در همین شهر مدال نقرهٔ المپیاد ریاضی گرفته بود و این تجربه را بار دیگر در المپیاد کامپیوتر تکرار کرد. بد نیست بدانید که مکزیک از بزرگ‌ترین تولیدکنندگان نقره در جهان است!

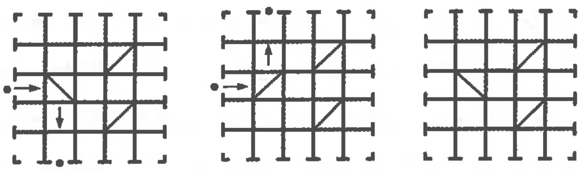
تیم کشورمان توانست در میان حدود نود کشور، مقام هفتم مسابقات را کسب کند. تیمهای اول تا ششم به‌ترتیب چین، لهستان، روسیه، کره، آمریکا و رومانی بودند. قطعاً این موفقیت علاوه بر زحمات اعضای تیم، مرهون تلاشهای دکتر قدسی (سرپرست کمیتهٔ ملی المپیاد کامپیوتر) که به‌دلیل کسالت نتوانست تیم را همراهی کند، محمدحسین باطنی و شایان اویس‌قرن که نقشی اساسی در اردوی آمادگی بچه‌ها برای مسابقات داشتند و دیگر اعضای کمیتهٔ دانشجویی المپیاد کامپیوتر است.

بازی جعبه‌سیاه

بازی جعبه‌سیاه با جدولی مربع‌شکل که روی میز قرار دارد بازی می‌شود. هر یک از چهار ضلع آن حاوی n **سوراخ** است (مجموعاً $4n$ سوراخ) که می‌توان از هر سوراخ توپی به داخل جعبه انداخت. هر توپ از یکی از $4n$ سوراخ که ممکن است همان سوراخ اولیه باشد خارج شود. داخل جعبه‌سیاه را می‌توان به‌صورت شبکه‌ای $n \times n$ تصور کرد. سوراخهای اضلاع در شروع و پایان هر سطر و هر ستون قرار دارند. هر مربع یا خالی است یا دارای **آینه** است. آینه قطعه‌ای است که جهت توپ را به‌اندازهٔ ۹۰ درجه تغییر می‌دهد. مثال زیر را که جعبه‌ای 5×5 است، در نظر بگیرید.



توپ پرتاب‌شده در جعبه در مسیری مستقیم حرکت می‌کند تا یا به آینه‌ای برخورد کند یا از جعبه خارج شود. وقتی توپ به آینه برخورد می‌کند جهتش تغییر می‌کند و آینه نیز جهتش عوض می‌شود (منظور از عوض شدن جهت آینه، چرخش ۹۰ درجهٔ آن است). در مثال زیر نحوهٔ عمل آینه نشان داده شده است.



۱. توپی از سوراخی وارد شده و به آینه‌ای برخورد کرده است و جهت حرکتش عوض می‌شود.

۲. بعد از برخورد اولین توپ، آینه جهتش را عوض کرده است. توپ بعدی که از همان سوراخ وارد شده است به همان آینه برخورد می‌کند و جهت حرکتش به‌صورت مخالف توپ اول عوض می‌شود.

۳. هرگاه توپ به آینه برخورد کند، آینه تغییر جهت می‌دهد.

هرگاه به آینه‌ای توپی می‌خورد، صدایی ایجاد می‌شود. تعداد دفعاتی که توپ تغییر جهت می‌دهد از شمارش تعداد صداها به‌دست می‌آید. ثابت می‌شود که توپ همیشه از جعبه خارج می‌شود. جعبه کلیدی دارد که آن را به وضعیت اولیهٔ آن برمی‌گرداند و همچنین کلیدی دارد که جهت تمام آینه‌ها را عوض می‌کند.

به شما ۱۵ جعبه‌سیاه داده می‌شود. شما باید داخل جعبه سیاهها را به بهترین وجه ممکن مشخص کنید. شما

باید از محتویات جعبه باخبر شوید و وضعیت هر یک از مربعهای آن را به این‌صورت نمایش دهید:

- "." به معنای خالی بودن مربع است.
- "/" به معنی این است که مربع حاوی آینه‌ای با موقعیت اولیهٔ "/" است.
- "\" "یعنی مربع حاوی آینه‌ای با موقعیت اولیهٔ "\" "است.
- "?" یعنی نتوانسته‌اید تعیین کنید که محتوای اولیهٔ مربع چه بوده است.

نمره‌دهی

شما باید به‌ازای هر جعبه فایل متنی تولید کنید که محتوای جعبه‌سیاه را نشان دهد. به‌ازای هر جعبه

- اگر شما کاراکتر "."، "/" یا "\ " را در موقعیت غلط در خروجی بنویسید نمرهٔ شما به‌ازای آن جعبه صفر است.
- اگر نتیجهٔ شما مشمول حالت بالا نشود و B_m حداکثر تعداد مربعهایی باشد در بین همهٔ نتایجی که شرکت‌کنندگان در پاسخهای بی‌اشتباه خود، در این جعبه مشخص کرده‌اند و B_y تعداد مربعهایی در آن جعبه باشد که وضعیت آنها را کشف کرده‌اید، درصد نمرهٔ شما از آن جعبه برابر $۱۰۰B_y/B_m$ خواهد بود.

راه‌حل وحید لیاقت به قلم خودش

به‌استقرا روشی برای پیدا کردن محتوای همهٔ خانه‌ها پیدا و آن را ثابت می‌کنیم. خانه‌ها را به‌ترتیب، سطربه‌سطر از بالا به پایین و در هر سطر از چپ به راست مرتب می‌کنیم و به آنها شماره‌های ۱ تا $n^۲$ می‌دهیم. فرض استقرا این است که محتوای (ابتدایی) خانه‌های ۱ تا i را می‌دانیم. می‌خواهیم محتوای خانهٔ $i + ۱$ را به‌دست آوریم. برای این منظور احتیاج به دو لم داریم که اثبات آنها در آخر متن آمده است.

لم ۱ . t را عددی طبیعی و دلخواه بین ۱ و n در نظر بگیرید، همهٔ خانه‌های ۱ تا i را این‌گونه می‌چینیم که اگر آینه‌ای در خانهٔ j و مختصات طول آن خانه بیشتر از یا مساوی با t باشد، آن آینه را به‌صورت "/" در می‌آوریم (اینها ناحیه‌ای به‌صورت مستطیلی $\left(۱ + \frac{i - ۱}{n}\right) \times (n - t)$ در گوشهٔ بالا سمت راست تشکیل می‌دهند). در این صورت تناظر یک‌به‌یکی بین راههای ورود به این ناحیه، و راههای خروج وجود دارد.

لم ۲ . فرض کنید محتوای خانه‌های ۱ تا i را بدانیم. در این صورت می‌توانیم چینش جدول را به‌صورتی دربیاوریم که خانه‌های ۱ تا i چینش دلخواه p داشته باشند و بقیهٔ خانه‌های جدول تغییر نکنند.

می‌خواهیم محتوای اولیهٔ خانهٔ $i+1$ را پیدا کنیم. t را برابر مختصهٔ طول خانهٔ $i+1$ درنظر می‌گیریم (($t \equiv i \pmod{n+1}$ به پیمانهٔ $n+1$) و بنابر لم ۲ می‌توانیم به خانه‌های ۱ تا i چینشی مانند لم ۱ بدهیم. حالا از خانهٔ $i+1$ به سمت چپ حرکت می‌کنیم و تا وقتی از جدول خارج نشده‌ایم این کار را تکرار می‌کنیم که هر بار به آینه‌ای رسیدیم، آن آینه را به‌صورت "\" در نظر می‌گیریم و همانند حرکت توپ تغییر جهت می‌دهیم و مثلاً از خانهٔ a خارج می‌شویم. بنابراین در چینش خانه‌های ۱ تا i علاوه بر چینش خانه‌های با مختصات طول بیشتر از $i+1$ به‌صورت "/"، خانه‌هایی را که در این مسیر از a تا خانهٔ $i+1$ قرار داشته‌اند نیز به‌صورت "\" درمی‌آوریم. پس اگر از خانهٔ a توپی به سمت داخل پرتاب کنیم، از سمت راست به داخل خانهٔ $i+1$ خواهد رفت. حالا اگر خانهٔ $i+1$ به‌صورت "/" باشد توپ بعد از برخورد از خانهٔ $i+1$ به سمت بالا حرکت می‌کند. در این‌صورت به‌طور یکتا از خانهٔ b خارج می‌شود و البته انتظار داریم تعداد مشخصی صدای کلیک (مثلاً cتا) بشنویم.

بنابراین کافی است که توپی از خانهٔ a شلیک کنیم. ادعا می‌کنیم که توپ با c کلیک از خانهٔ b خارج می‌شود اگر و فقط اگر خانهٔ $i+1$ به‌صورت "/" باشد.

بنابر لم ۱ واضح است که فقط درصورتی توپ از خانهٔ b خارج خواهد شد که هنگام ورود به ناحیهٔ ۱ تا i، از خانهٔ $i+1$ به سمت بالا برود. به همین دلیل اگر خانهٔ $i+1$ به‌صورت "/" نباشد، آنگاه توپ برای اینکه مجدداً به وضعی برسد که از خانهٔ $i+1$ به سمت بالا برود، حداقل باید به ۳ آینه برخورد کند که در این‌صورت حداقل $c+3$ کلیک خواهیم شنید. بنابراین توپ با c کلیک از خانهٔ b خارج خواهد شد اگر و فقط اگر آینهٔ خانهٔ $i+1$ به‌صورت "/" باشد. حالا دو بار همهٔ اعمال گفته‌شده را اجرا می‌کنیم. یک‌بار ابتدا همه را به‌صورت حالت اولیه درمی‌آوریم، و یک‌بار هم، ابتدا همه را به‌صورت عکس حالت اولیه درمی‌آوریم. بنابراین اگر خانهٔ $i+1$ آینه‌ای داشته باشد، دقیقاً در یکی از این دوبار، توپ از خانهٔ b، با cتا صدای کلیک خارج خواهد شد و به‌این‌ترتیب می‌توانیم محتوای ابتدایی خانهٔ $i+1$ را نیز پیدا کنیم. بنابراین با تکرار این الگوریتم به‌ازای همهٔ iها می‌توانیم محتوای ابتدایی همهٔ خانه‌های جدول را پیدا کنیم. البته همان‌طور که پیداست در بدترین حالت، الگوریتم دارای پیچیدگی حدود $۲^{n\times n}$ خواهد بود، اما باید توجه کرد که به‌طور معمول زمان واقعی اجرای الگوریتم بسیار کمتر از این است و چون از ۱۵ جعبهٔ داده‌شده در امتحان تنها ۳ تا از آنها دارای n بزرگ (نزدیک به ۳۰) بودند، این الگوریتم حتماً خواهد توانست محتوای همهٔ ۱۵ جعبه را در زمانی نزدیک به ۵ دقیقه مشخص کند.

در زمان امتحان، به‌دلایل مختلفی همچون دقیق نبودن اثبات الگوریتم و کمبود زمان، فقط موفق شدم که این الگوریتم را برای به‌دست آوردن خانه‌های دور جدول اجرا کنم. از ایده‌هایی همچون به‌دست آوردن شلیکهایی که در آنها فقط یک صدای کلیک شنیده می‌شود (یعنی مسیرهایی که تنها یک آینه در راه خود دارند) نیز استفاده کردم، اما در این مورد نیز از روی بی‌دقتی فراموش کردم که خانه‌های مکان شلیک تا محل تک‌آینه را، در خروجی، خانهٔ خالی اعلام کنم. همچنین به‌دلیل کمبود وقت احتمالاً دو تا از ۱۵ تست ورودی را اشتباهاً فرستادم و از آنها نمره‌ای نگرفتم. با وجود این به‌نظر می‌رسد که بقیهٔ افراد شرکت‌کننده وقت کمتری برای این سؤال گذاشته بودند و من

با چنین برنامه‌ای و چنین بی‌دقتیهایی، باز هم نمرهٔ ۶۵ گرفتم!

اثبات لم ۱. لم را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید دو توپ از دو خانهٔ a و b شلیک و هر دو از خانهٔ مشترکی مانند p خارج شده باشند. در مسیر این دو توپ اولین آینه‌ای را در نظر بگیرید که از آن به بعد مسیر دو توپ مشترک شده است. چون که همهٔ آینه‌ها به‌صورت "/"اند، پس مسیر توپ همواره یا به سمت راست است و یا به سمت بالا و چنین مسیری دور ندارد. پس اگر مسیر دو توپ شلیک شده از a و b از آینه‌ای به بعد یکسان شده‌باشد، باید قبل از این هم مسیرشان یکسان باشد و در نتیجه هرگز اولین آینهٔ مشترک وجود نخواهد داشت. ■

اثبات لم ۲. این لم را می‌توانیم به‌استقرا ثابت کنیم. اگر به‌ازای هر عدد مانند i، خانهٔ i همان حالت $p(i)$ را داشته‌باشد که حکم مطلوب درست است. پس فرض کنید خانهٔ i حالت $p(i)$ را نداشته باشد. در این‌صورت دو حالت پیش می‌آید:

۱. حالت مطلوب "/" باشد (جنوب غربی ـ شمال شرقی). پس حالت فعلی "\" است و ابتدا همهٔ خانه‌ها را برعکس می‌کنیم. سپس بنابر فرض استقرا به خانه‌های ۱ تا $i-1$ چینشی می‌دهیم تا بتوانیم توپی را به نحوی شلیک کنیم که به i برخورد و فقط از خانه‌های ۱ تا i عبور کند (این کار با حرکت به سمت چپ با شروع از خانهٔ i ممکن است و تا خارج شدن از جدول، هر بار کافی است به هر آینه که می‌رسیم آن را به‌صورت "\" در نظر بگیریم و مانند توپ تغییر جهت بدهیم). همین‌گونه عمل می‌کنیم و توپی را به حالت موردنظر شلیک می‌کنیم. حالا بار دیگر همهٔ خانه‌ها را برعکس می‌کنیم. خانه‌های بعد از i وضعیت مطلوب را دارند، همچنین خانهٔ i به وضعیت مطلوب رسیده است، و نیز وضعیت فعلی خانه‌های کمتر از i را نیز می‌دانیم، و بنابراین به حالت فرض استقرا رسیده‌ایم.

۲. حالت مطلوب "\" باشد. پس حالت فعلی "/" است. در نتیجه باز هم بنابر فرض استقرا کافی است که به خانه‌های ۱ تا $i-1$ چینشی بدهیم تا بتوانیم توپی را به‌نحوی شلیک کنیم که به i بخورد و فقط از خانه‌های ۱ تا i عبور کند. حالا واضح است که وضعیت خانه‌های بزرگ‌تر از یا مساوی با i مطلوب است و همچنین وضعیت فعلی خانه‌های کمتر از i را نیز می‌دانیم، و بنابراین به حالت فرض استقرا رسیده‌ایم.

■

راه‌حلهای مسائل المپیادی ریاضی*

امید حاتمی ورزنه

۱. همهٔ اعداد طبیعی مانند x و n را بیابید به‌طوری که $x^n + ۲^n + ۱$ مقسوم علیهی از $x^{n+۱} + ۲^{n+۱} + ۱$ باشد.

راه‌حل. ابتدا جوابها را در حالتی که $n = ۱$ به‌دست می‌آوریم. در این حالت $x + ۳ \,|\, x^۲ + ۵$ و چون $x + ۳ \,|\, x^۲ - ۹$، پس $x + ۳ \,|\, ۱۴$. بنابراین، $x \in \{-۲, -۱, ۴, ۱۱, -۴, -۵, -۱۰, -۱۷\}$. جوابهای منفی قابل قبول نیستند. با جاگذاری می‌بینیم که ۴ و ۱۱ در رابطهٔ $x + ۳ \,|\, x^۲ + ۵$ صدق می‌کنند. پس در این حالت $(x, n) = (۴, ۱)$ و $(x, n) = (۱۱, ۱)$ جواب‌اند. اکنون فرض کنید $n \geqslant ۲$. توجه کنید که $x \neq ۱$، زیرا اگر $x = ۱$، $۲ + ۲^n \,|\, ۲ + ۲^{n+۱}$ و در نتیجه $۱ + ۲^{n-۱} \,|\, ۲^{n-۱}$ که تناقض است. بنابراین $x \geqslant ۲$. با ضرب طرفین رابطهٔ صورت مسئله در x می‌نویسیم $x^n + ۲^n + ۱ \,|\, x^{n+۱} + ۲^n x + x$. درنتیجه، اگر $x^n + ۲^n + ۱ \,|\, x^{n+۱} + ۲^{n+۱} + ۱$، آنگاه

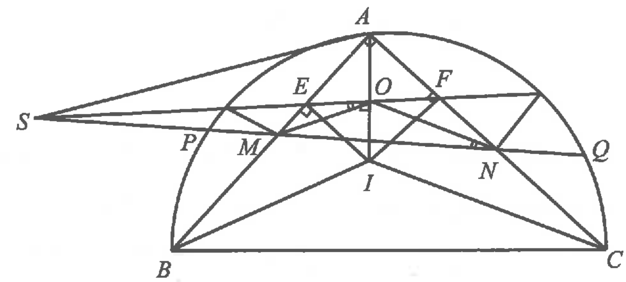
$$x^n + ۲^n + ۱ \,|\, (x^{n+۱} + ۲^n x + x) - (x^{n+۱} + ۲^{n+۱} + ۱) = ۲^n(x - ۲) + (x - ۱)$$

چون $x \geqslant ۲$، پس $۲^n(x - ۲) + (x - ۱) \geqslant ۱$. در نتیجه $x^n + ۲^n + ۱ \leqslant ۲^n(x - ۲) + (x - ۱)$ یعنی $x^n \leqslant ۲^n(x-۳)+(x-۲)$. حالت $x = ۲$ نیز ممکن نیست، زیرا اگر $x = ۲$، $۲^n \leqslant -۲^n < ۰$. درضمن $x \neq ۳$، چون اگر $x = ۳$، $x^n \leqslant (x - ۲) \leqslant x$ که ممکن نیست. حالت $x = ۴$ نیز ممکن نیست، زیرا در این‌صورت $۴^n \leqslant ۲^n + ۲$ که چون $n > ۱$ امکان ندارد. پس $x \geqslant ۵$. بنابراین $x^{n-۱} \geqslant ۲^n + ۱$. در نتیجه $x^n \geqslant x(۲^n + ۱) > ۲^n(x - ۳) + (x - ۲)$ که با نابرابری‌ای که در بالا یافتیم در تناقض است. بنابراین جوابهای معادله عبارت‌اند از $(x, n) = (۴, ۱)$ و $(x, n) = (۱۱, ۱)$. ∎

۲. در مثلث ABC، $\angle A = ۹۰^\circ$ و دایرهٔ محاطی در E و F بر AB و AC مماس است و M و N وسطهای AB و AC هستند. MN دایرهٔ محیطی را در P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید E و F و P و Q روی یک دایره قرار دارند.

راه‌حل. فرض کنید S محل برخورد EF و MN باشد و $\angle ABC > \angle ACB$. I را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC فرض کنید. توجه کنید که چهارضلعی $AFIE$ مستطیل است و در آن $AF = AE$. پس $AFIE$ مربع است.

*. مسائل در شمارهٔ قبل چاپ شده‌اند.



O را وسط AI (که همان وسط EF است) در نظر بگیرید. توجه کنید که چون

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AO}{AI} = \frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین با تجانس با ضریب ۲ و به مرکز A، نقاط M و O و N به نقاط C و I و B می‌روند و چون I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است، O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث AMN است. بنابراین

$$\angle AIM = ۱۸۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} - \angle AIM = ۱۸۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} - \angle B$$

پس

$$\angle MOI = ۱۸۰^\circ - \angle OIM - \angle OMI = ۱۸۰^\circ - \left(۱۸۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} - \angle B\right) - \frac{\angle B}{۲} = \frac{\angle A + \angle B}{۲}$$

اما $EF \perp AI$، پس

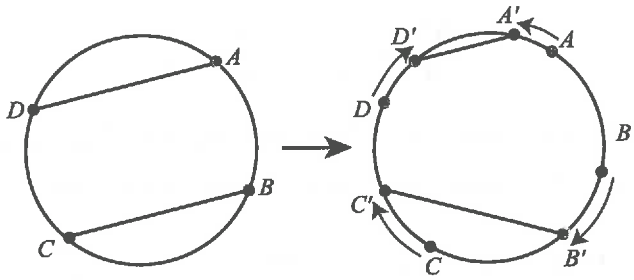
$$\angle SOM = ۹۰^\circ - \angle MOI = \frac{\angle C}{۲} = \angle ONI = \angle ONS$$

زیرا $\angle AOM = \frac{۱۸۰^\circ + \angle ANM}{۲}$ و $\angle AOS = ۹۰^\circ$. بنابراین دو مثلث SNO و SOM متشابه‌اند، و در نتیجه، $SM \cdot SN = SO^۲$. بنابراین چون AO و EF بر هم عمودند، S روی محور اصلی دایرهٔ به قطر AO و دایرهٔ محیطی مثلث AMN است. از آنجا که A محل تقاطع دو دایرهٔ مذکور است، AS محور اصلی دایرهٔ به قطر AO و دایرهٔ محیطی مثلث AMN است. در نتیجه با تجانس به مرکز A و نسبت ۲، نتیجه می‌شود که AS محور اصلی دایرهٔ به قطر AI و دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. ولی دایرهٔ به قطر AI از E و F می‌گذرد. قوت S نسبت به دایرهٔ محیطی AEF برابر است با $SE \cdot SF$ و قوت S نسبت

به دایرهٔ محیطی ABC برابر است با $SP \cdot SQ$. بنابراین $SP \cdot SQ = SE \cdot SF$. در نتیجه P و Q و E و F روی یک دایره قرار دارند. ■

۳. n و k اعدادی طبیعی‌اند که $k \geqslant ۱$ و $n \geqslant ۲k + ۱$. فرض کنید n نقطه روی دایره داده شده باشند. $nk + ۱$ وتر دلخواه از بین وترهایی که این نقاط را به‌هم متصل می‌کنند، رسم می‌کنیم. ثابت کنید $k + ۱$ وتر وجود دارند که هیچ دوتایی از آنها نقطهٔ مشترکی ندارند.

راه‌حل. $nk + ۱$ وتر در نظر بگیرید. اگر نقاط روی دایره را حرکت دهیم به‌طوری که از روی هم عبور نکنند، متقاطع بودن و متقاطع نبودن وترها تغییر نمی‌کند.



بنابراین کافی است نقاط را طوری حرکت دهیم که رأسهای nضلعی‌ای منتظم شوند و اگر حکم را در مورد nضلعی منتظم ثابت کنیم، $k + ۱$ وتری که هم را قطع نمی‌کنند، در حالت قبلی هم، یکدیگر را قطع نمی‌کردند. برای این کار، توجه کنید در هر nضلعی منتظم قطرها n راستای مختلف دارند (در اینجا هر ضلع را هم قطر محسوب می‌کنیم). بنابراین با انتخاب $nk + ۱$ وتر بنابر اصل لانهٔ کبوتری $(k + ۱)$تا از این وترها در یک راستا هستند، یعنی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. در حقیقت، $k + ۱$ خط موازی دوبه‌دو هم را قطع نمی‌کنند. پس $k + ۱$ وتر موردنظر پیدا شد، و حکم ثابت شده است. ■

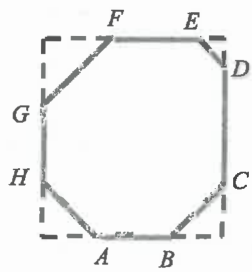
۴. کلیهٔ توابع مانند f، $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ را بیابید به‌طوری که

$$۲f(f(x)) = f(۲x)$$
$$f(x) + f\left(\frac{۱}{x}\right) = ۱$$

معلوم شد که راه‌حل ما برای این مسئله اشتباه بوده است! اگر این مسئله را حل کردید، راه‌حلتان را به نشانی نشریهٔ ریاضیات بفرستید.

۵. فرض کنید همهٔ زوایای هشت‌ضلعی‌ای با یکدیگر برابر باشند و طولهای اضلاع آن، گویا باشند. ثابت کنید که این هشت‌ضلعی مرکز تقارن دارد.

راه‌حل. هشت‌ضلعی را $ABCDEFGH$ بنامید. تمام زوایای این هشت‌ضلعی ۱۳۵°اند. بنابراین خطوط GH، EF، CD و AB مستطیل تشکیل می‌دهند.



چون طول اضلاع روبه‌رو در مستطیل با هم برابر است، به‌دست می‌آوریم

$$AB + \frac{\sqrt{2}}{2}(AH + BC) = EF + \frac{\sqrt{2}}{2}(DE + FG)$$

یا به‌صورت معادل

$$AB - EF = \frac{\sqrt{2}}{2}(DE + FG - AH - BC)$$

بنابر فرض، طولهای اضلاع این هشت‌ضلعی گویا هستند. پس تساوی بالا برقرار است اگر و فقط اگر $AB - EF = DE + FG - AH - BC = 0$. به طریقهٔ مشابه به‌دست می‌آوریم

$$CD - GH = FG + AH - DE - BC = 0$$

از این تساویها نتیجه می‌شود $DE = AH$، $BC = FG$، $CD = GH$ و $AB = EF$. بنابراین، اضلاع روبه‌رو هم‌طول‌اند. اما اضلاع روبه‌روی این هشت‌ضلعی موازی‌اند. پس $ABEF$، $BCFG$، $CDGH$ و $DEHA$ متوازی‌الاضلاع‌اند. بنابراین وسطهای پاره‌خطهای AE، BF، CG، DH منطبق‌اند. بنابراین، این نقطه نقطهٔ تقارن این هشت‌ضلعی است. ■

۶. فرض کنید G گرافی باشد که اگر e یالها و v تعداد رأسهای آن باشد، $e \geqslant \frac{v^2}{4} + 2$. ثابت کنید G دو مثلث دارد که دقیقاً در یک رأس مشترک‌اند.

راه‌حل این مسئله بسیار دشوار و فنی بود. به همین دلیل، هیئت تحریریه تصمیم گرفت که راه‌حل این مسئله چاپ نشود. ضمناً در صورت مسئله در شمارهٔ قبل، نابرابری $e \geqslant \frac{v^2}{4} + 1$ آمده بود که در اینجا به $e \geqslant \frac{v^2}{4} + 2$ اصلاح شده است.