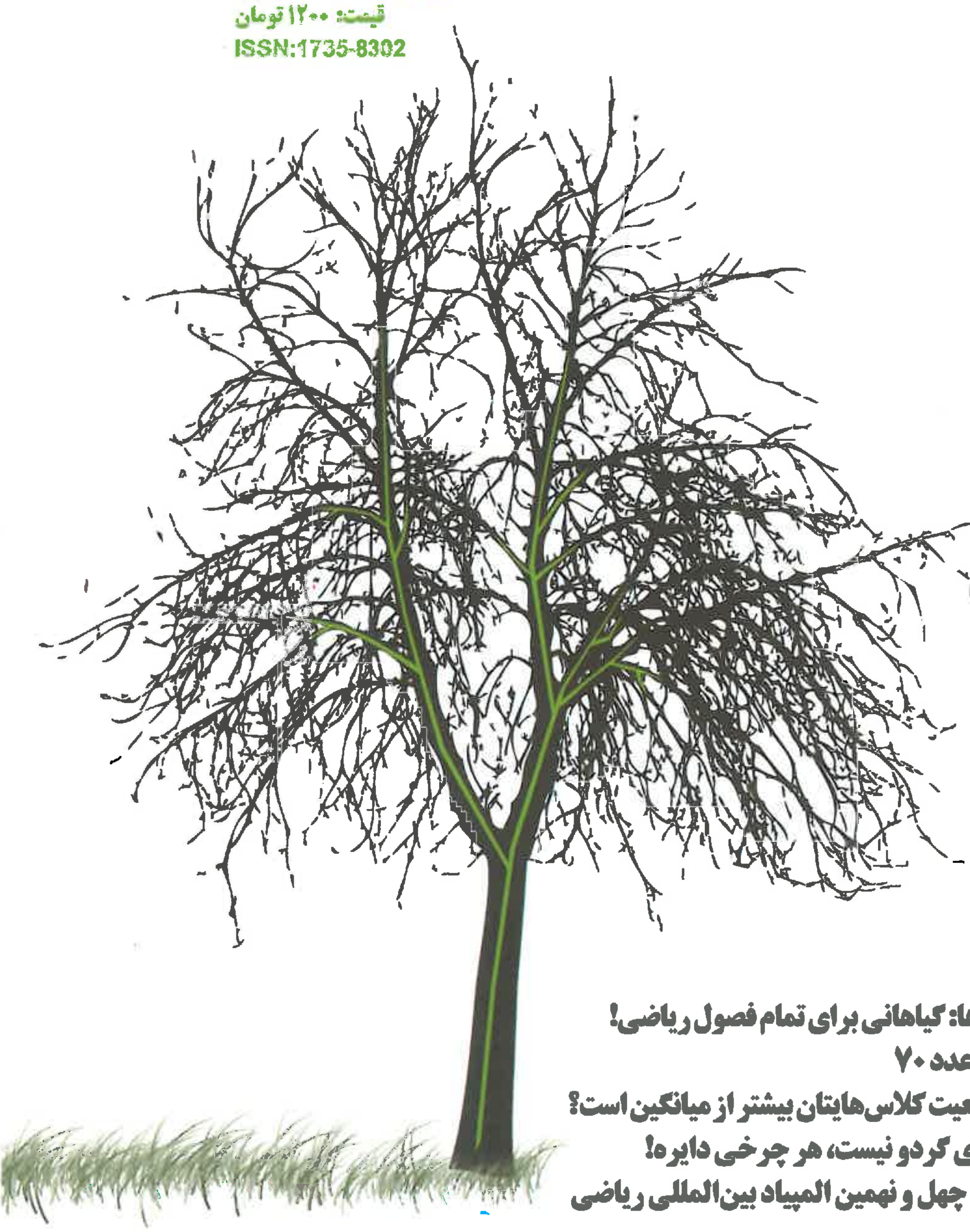
نشریهٔ

ریاضیات

سال هفتم/۴
شمارهٔ پیاپی: ۳۰
فروردین و اردیبهشت ۱۳۸۸
قیمت: ۱۲۰۰ تومان
ISSN:1735-8302



- درخت‌ها: گیاهانی برای تمام فصول ریاضی!
- ویژگی عدد ۷۰
- چرا جمعیت کلاس‌هایتان بیشتر از میانگین است؟
- هر گردی گردو نیست، هر چرخی دایره!
- گزارش چهل و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

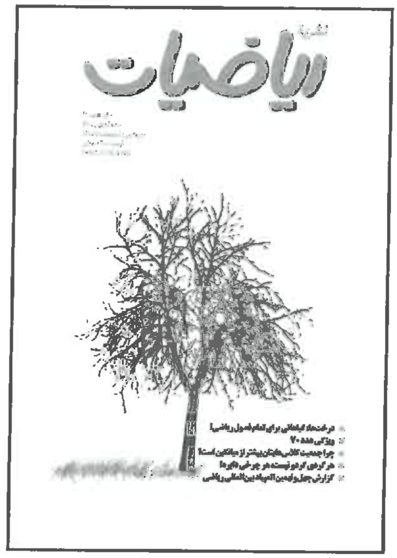
به‌نام خدا

نشریهٔ ریاضیات

سال هفتم/ ۴ ● شمارهٔ پیاپی: ۳۰● فروردین و اردیبهشت ۱۳۸۸

فهرست:

با همکاری باشگاه دانش‌پژوهان جوان



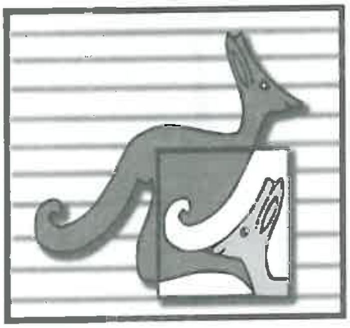
روی جلد: درخت‌ها: گیاهانی برای تمام فصول ریاضی!

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: یحیی تابش
ویراستار اجرایی: بهزاد اسلامی مسلّم
هیئت تحریریه: بهزاد اسلامی مسلّم، یحیی تابش، بردیا حسام، محمد صالح زارع‌پور، کسری علیشاهی، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
امور مشترکین: واحد بازاریابی و روابط عمومی
وب‌گاه: www.riaziat.ir
نشانی پست الکترونیکی: nashriye@riaziat.ir
ISSN:1735-8302

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

مسئول فنی: فرید مصلحی
طراحی جلد و صفحه‌آرایی: زهرا قورچیان
حروفچینی و صفحه‌بندی: اعظم توکلی
رسامی: فاطمه ثقفی
نمونه‌خوانی: شکوفه صرّاف
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: صاحب
چاپ: خاشع
نشانی: تهران، صندوق پستی ۴۴۹-۱۴۱۴۵
تلفن: ۵-۶۶۴۸۶۵۶۲

مسابقهٔ ریاضی کانگرو



مسابقهٔ ریاضی کانگرو از سال ۱۹۹۱ به ابتکار یک معلم فرانسوی شکل گرفت. هدف این مسابقه، برگزاری یک مسابقهٔ ریاضی به‌طور غیرمتمرکز در نقاط مختلف جهان، بین دانش‌آموزان در سطوح مختلف است تا به توسعه و همگانی کردن ریاضیات کمک شود و با شناسایی استعدادهای برتر، نسبت به تشویق و هدایت آنان اقدام شود. در حال حاضر، این مسابقه به‌طور سالانه در پنجاه کشور جهان به‌صورت غیرمتمرکز برگزار می‌شود. در سال ۲۰۰۸ حدود پنج میلیون دانش‌آموز در آن شرکت کردند.

مسابقه در پنج سطح برگزار می‌شود:

- دورهٔ دبستان (در دو سطح ۸ تا ۱۰ ساله‌ها و ۱۱ و ۱۲ ساله‌ها)
- دورهٔ راهنمایی
- دورهٔ دبیرستان
- دورهٔ پیش‌دانشگاهی

در هر مسابقه حدود ۳۰ سؤال پنج‌گزینه‌ای به شرکت‌کنندگان داده می‌شود که در مدت ۶۰ دقیقه به آنها پاسخ بدهند. کشورهای علاقه‌مند به شرکت در این مسابقه با نمایندگی یک نهاد آموزشی به عضویت پذیرفته می‌شوند. سؤالات مسابقه توسط کشورهای عضو پیشنهاد می‌شود و در نشست سالانه در گروه‌های کاری بررسی و نهایی می‌شود.

این مسابقه فرصت مغتنمی برای نوجوانان فراهم می‌کند تا با شرکت در رقابتی سالم، استعداد و علاقهٔ خود را محک بزنند و برای نظام آموزشی نیز فرصت مناسبی است تا استعدادهای علاقه‌مند به ریاضیات را شناسایی، تشویق و هدایت کند و علاوه بر آن، فرصتی برای اشاعه و همگانی کردن ریاضیات در فرایندی بین‌المللی فراهم می‌شود.

کشور ما نیز از دورهٔ ۲۰۰۹ با نمایندگی باشگاه دانش‌پژوهان جوان، به عضویت این مسابقه پذیرفته شده است. در این دوره، برگزاری مسابقه به‌طور محدود در سطح راهنمایی می‌تواند راهگشای کسب تجربه و توسعهٔ آن بین تعداد بیشتری از دانش‌آموزان و تعمیم آن در سایر سطوح باشد. مسابقهٔ ریاضی کانگرو می‌تواند در کنار برنامه‌های رسمی آموزشی فرصت مغتنمی برای پرورش استعدادها و رشد خلاقیت‌های دانش‌آموزان کشور ما فراهم کند تا با توسعهٔ

مهارت‌های حل مسئله و توسعهٔ تفکر خلاق و نقاد بین آنان، به توسعهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی که هدفی ارزشمند برای نظام آموزشی است کمک کند. علاوه بر این، تعامل حاصل با یک جریان جهانی می‌تواند به غنای برنامه‌های آموزشی در سطح ملی کمک کند.

خوشبختانه باشگاه دانش‌پژوهان جوان برگزاری این مسابقه در سطح ملی بین دانش‌آموزان دبستانی و دورهٔ راهنمایی را در دستورکار خود قرار داده است که برای دانش‌آموزان فرصت بسیار مغتنمی خواهد بود.

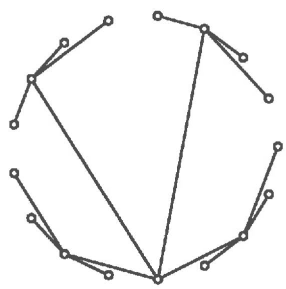
یحیی تابش
tabesh@sharif.ir

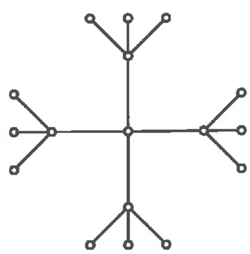
درخت‌ها: گیاهانی برای تمام فصول ریاضی!

جو مالکویچ

مقدمه

درختان همیشه منبع الهام شاعران بوده‌اند و کسی در زیبایی بسیاری از مجسمه‌های چوبی شکی ندارد. برگ‌های درختان زیبا و متنوع‌اند. ریاضی‌دانان از نام درخت برای اشاره به ساختارهایی که نمونه‌شان را در زیر می‌بینید (و دو ترسیم نسبتاً متفاوت از یک ساختار درخت‌اند) استفاده می‌کنند.



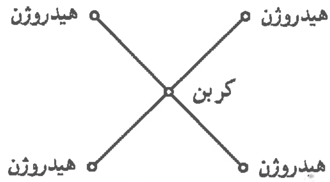


امیدوارم بتوانم قانعتان کنم که درختان در ریاضی دست‌کم به‌اندازهٔ درختان در زیست‌شناسی دوست داشتنی‌اند.

فکرهای اصلی

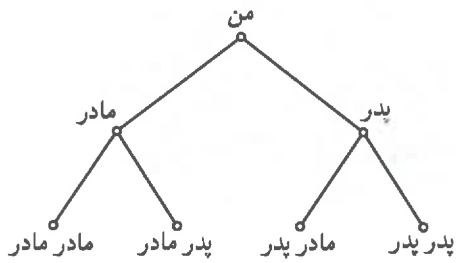
راهی مؤثر برای نمایش ارتباط بین اشیاء، استفاده از ساختاری به‌نام گراف است. می‌توانیم از نقطه‌ها ــ که آنها را رأس می‌نامیم ــ برای نمایش اشیاء، و از خطوطی که نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند ــ و آنها را یال می‌نامیم ــ برای نمایش ارتباط بین اشیائی که نقطه‌ها معرفشان‌اند، استفاده کنیم. مثلاً، شیمی‌دانان می‌توانند برای نمایش مولکول

متان، نمودار زیر را رسم کنند.



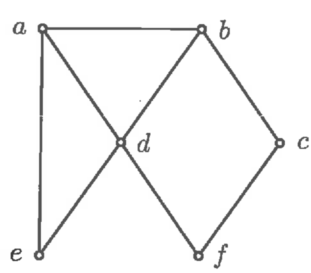
در هر گراف، تعداد یال‌هایی که به رأسی خاص وصل‌اند، ظرفیت یا درجهٔ آن رأس نام دارد. در اینجا، استفاده از واژهٔ ظرفیت نشانگر این واقعیت است که در تشکیل مولکول‌ها، اتم‌هایی مشخص به تعداد ثابتی از اتم‌های دیگر وصل می‌شوند. هیدروژن ظرفیت یک و کربن ظرفیت چهار دارد. در گراف مولکول متان می‌بینیم که اتم هیدروژن، ظرفیت (درجهٔ) یک و اتم کربن، ظرفیت (درجهٔ) چهار دارد. رأس‌های درجهٔ یک در درخت را برگ می‌نامیم.

مثالی دیگر چنین است:



در اینجا، نمودار مشخص‌کنندهٔ اجداد فرد است.

دو گرافی که رسم کردیم خاص‌اند، زیرا دور ندارند. در گراف، دور مجموعه‌ای از یال‌هاست که با آنها می‌توان از رأسی شروع کرد و با طی یال‌هایی، به رأس‌های دیگر رسید، و در نهایت به رأس آغازین بازگشت، و در این کار، یال یا رأسی تکرار نشود، مگر رأس آغازین. گراف زیر چندین دور دارد، مثل $abda$، $adea$، $adfcba$ و $bdfcb$. دورهای $dbcfd$ و $dfcbd$ را همان دور $bdfcb$ در نظر می‌گیریم، زیرا در آن همان یال‌ها استفاده شده‌اند. آیا می‌توانید همهٔ دورهای این گراف را فهرست کنید؟



همهٔ گراف‌هایی که تاکنون رسم کرده‌ایم نیز خاص‌اند، زیرا این ویژگی را دارند که هر دو رأس از گراف را می‌توانیم با مسیری به‌هم وصل کنیم: با مجموعه‌ای از یال‌ها که بین آنها هیچ یال و رأسی تکراری نیست و رأسی را به رأسی دیگر وصل می‌کنند. مثلاً $aedbcf$ مسیر است، اما $adeab$ مسیر نیست، زیرا رأس a تکرار شده است. گرافی با این ویژگی را که بین هر دو رأسش مسیری وجود دارد، همبند می‌نامیم. گرافی همبند را که دور ندارد، درخت می‌نامیم.

آرتور کیلی

درختان چند ویژگی خوب دارند:

الف) اگر دو رأس در درخت داده شده باشند، مسیری یکتا از یکی به دیگری وجود دارد. (به دلایل فنی، بهتر است که گرافی با فقط یک رأس را درخت بنامیم.)

ب) اگر هر یالی از درخت را بِبُریم (حذف کنیم)، گراف دیگر همبند نیست. (بنابراین، درخت‌ها نمونه‌هایی از گراف‌های همبند مینیمال‌اند. گراف‌های همبندی که درخت نیستند باید یالی داشته باشند که بتوان آن را حذف کرد و گراف حاصل همچنان همبند باشد. این یال‌ها، یال‌هایی‌اند که در دورها قرار دارند.)

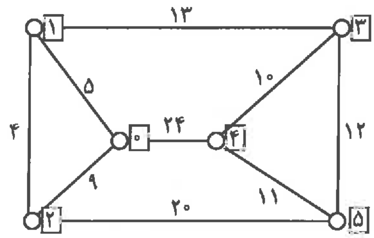
ج) اگر درختی n رأس داشته باشد، $n - ۱$ یال دارد. این حکم را می‌توان حالتی خاص از دستور اویلر دربارهٔ چندوجهی‌ها دانست.

د) اگر دو رأس از درختی به یکدیگر وصل نباشند، با افزودن یالی بین آن دو، دقیقاً یک دور ایجاد می‌شود.

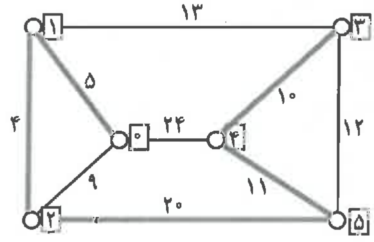
درختان چون این ویژگی‌های جذاب را دارند، از بسیاری جنبه‌های نظری و کاربردی مهم‌اند و به این دلیل، گراف‌ها ابزاری پرکاربرد در ریاضی و علوم کامپیوترند.

درخت فراگیر با کمترین هزینه

یکی از مثال‌های استفاده از درخت‌ها، در مسئله‌ای ظاهر می‌شود که معمولاً در تحقیق در عملیات مطرح است. گرافی با این وزن‌ها در نظر بگیرید:



هر وزن نمایانگر هزینهٔ ایجاد ارتباط بین رأس‌های دو انتهای آن یال است، تا بتوانیم بین نقاط انتهایی یال‌ها پیام مخابره کنیم. (یال‌هایی که در بالا نیامده‌اند، یال‌هایی‌اند که هزینهٔ ایجاد ارتباط بین نقاط انتهاییشان را نمی‌توان تقبل کرد.) هدف ما این است که با انتخاب ارتباط‌هایی که هزینهٔ کل ایجادشان کمترین مقدار ممکن است، بتوانیم بین هر دو رأس پیام مخابره کنیم. توجه کنید که لازم نیست بین هر دو رأس، ارتباطی موجود باشد، زیرا اگر بین A و B و بین B و C ارتباط برقرار باشد، می‌توان با انتقال پیام از طریق B، پیام را از A به C مخابره کرد. (برای راحتی، این انتقال در بین راه را رایگان فرض می‌کنیم.) توجه کنید که اگر ارتباط‌ها دور تشکیل دهند، می‌توانیم یال با بیشترین وزن در دور را حذف کنیم و هنوز هر دو رأس تشکیل‌دهندهٔ دور مرتبط باشند. بنابراین بهترین جواب برای شبکهٔ ارتباطی، درخت است. فرض کنید به ما گرافی داده باشند که روی یال‌هایش وزن موجود باشد. (وزن‌ها معمولاً مثبت‌اند، گرچه وزن‌های منفی نیز مجازند و می‌توان آنها را به معنی یارانه دانست.) هدف این است که درختی فراگیر از گراف بیابیم که حاصل‌جمع وزن یال‌های درخت، کمترین مقدار باشد. فراگیر بودن درخت به این معناست که درخت، همهٔ رأس‌های گراف اصلی را دارد. اگر یال‌های خاکستری را در نمودار زیر به‌عنوان ارتباط‌ها انتخاب کنیم، انتقال پیام بین هر جفت از رأس‌ها ممکن خواهد بود. آیا می‌توانید بگویید که چرا این، ارزان‌ترین راه ایجاد چنین شبکه‌ای نیست؟



مقاله را ادامه دهید تا روش‌های زیبای گوناگونی برای انتخاب ارتباط‌ها برای رسیدن به کمترین هزینه ببینید.

پیشینهٔ الگوریتم‌های یافتن درخت‌های فراگیر با کمترین هزینه

پیشینهٔ این مسئله جالب و پیچیده است. تا این اواخر، در بیشتر کتاب‌های درسی، وقتی از این مسئله سخن به میان می‌آمد، ازکارهای دو ریاضی‌دان امریکایی که در زمان تلاش برای حل مسئله در استخدام آزمایشگاه‌های بل بودند، نام برده می‌شد. هر یک از آنها الگوریتمی برای حل مسئلهٔ درخت فراگیر با کمترین هزینه به‌دست آورد.

جوزف کروسکال

این افراد، جوزف کروسکال[1] و رابرت پریم[2] بودند که الگوریتم‌هایشان را به‌ترتیب در ۱۹۵۶ و ۱۹۵۷ منتشر کردند. سرچشمهٔ توجه آنان به این مسئله، هزینه‌یابی شرکت «بل سیستم» در مورد «خدمات خطوط اجاره‌ای» بود.

رابرت پریم

---

1. Joseph B. Kruskal   2. Robert C. Prim

در کتب درسی و آثار تحقیقاتی‌ای که در آنها به کاری که کروسکال و پریم کردند پرداخته می‌شود، معمولاً فراموش می‌شود که دیگران هم پیش از آنها برای حل این مسئله کوشیده بودند. به‌خصوص، معمولاً اینکه کروسکال و پریم، هر دو در مقاله‌هایشان به‌کار اوتاکار بُروُوکا[1] ریاضی‌دان اهل چک ارجاع داده‌اند، نادیده گرفته می‌شود. کار برووکا به سال ۱۹۲۶ باز می‌گردد و الگوریتمش برای این مسئله با الگوریتم‌های کروسکال و پریم متفاوت است! از جستجوهای جدید در پیشینهٔ مسئلهٔ درخت فراگیر با کمترین هزینه چنین برمی‌آید که الگوریتم‌ها و فکرهای مربوط به مسئله، بارها مستقلاً یافته شده‌اند.

الگوریتم کروسکال بسیار جذاب است. البته لازم است ثابت شود (و شده است) که نتیجه‌اش درختی بهینه است. در ابتدای الگوریتم کروسکال، باید وزن‌های یال‌های گراف موردنظر، از کوچک به بزرگ مرتب شوند. برای این کار، لازم است اطلاعات در حافظهٔ رایانه ذخیره شوند. با توجه به قدرت کم رایانه‌های آن زمان، الگوریتم کروسکال نمی‌توانست نیازهای مشتریان «بل سیستم» را برآورده کند. پریم که همکار کروسکال بود، فکر کرد شاید بتوان الگوریتمی یافت که این مشکل را نداشته باشد، و موفق شد. او به این هم توجه کرد که اگر وزن بعضی یال‌ها برابر باشند و یا وزن بعضی یال‌ها منفی باشند، باز هم الگوریتمش کار می‌کند.

هر سهٔ الگوریتم‌های برووکا، کروسکال و پریم، «حریصانه»اند، یعنی براساس انتخاب کردن کاری‌اند که در بین کارهای در دسترس، بهترین کار است و به‌طرز معجزه‌آسایی، نتیجهٔ کلیشان نیز بهینه است. [برای آشنایی با الگوریتم‌های حریصانه، قسمت الگوریتم را در همین شماره از نشریهٔ ریاضیات بخوانید.]

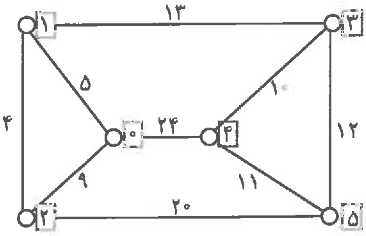
در الگوریتم پریم، با شروع از رأسی دلخواه، ارزان‌ترین یال متصل به این رأس را انتخاب می‌کنیم و با منقبض کردن این یال، «اَبَررأسی» می‌یابیم و فرایند را تکرار می‌کنیم. یال‌ها را با این شرط اضافه می‌کنیم که دور ایجاد نشود. (از مزیت‌های الگوریتم پریم این است که لازم نیست احتیاط شود که دور به‌وجود نیاید.) در الگوریتم برووکا (که در ساده‌ترین صورتش، باید وزن‌های یال‌ها متفاوت باشند) هر رأس، ارزان‌ترین یال متصل به خودش را برمی‌دارد. اگر نتیجه درخت نشود، مؤلفه‌ها (تکه‌های به‌هم پیوستهٔ به‌دست آمده) کوچک می‌شوند و فرایند تکرار می‌شود. جزئیات این الگوریتم‌ها را در ادامه با مثالی ساده توضیح می‌دهیم.

الگوریتم‌های درخت‌های فراگیر با کمترین هزینه

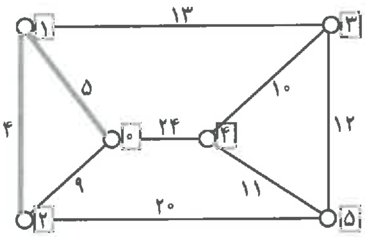
در ادامه، از گراف وزن‌داری که قبلاً دیدیم استفاده می‌کنیم تا توضیح دهیم الگوریتم‌هایی که نام بردیم، چگونه کار می‌کنند. می‌توانید به این گراف به دید ۶ پایگاه که با سیم به‌هم مرتبط‌اند بنگرید. ایجاد ارتباط بین پایگاه‌هایی که بین آنها هیچ پاره‌خطی متصل نیست، صرفهٔ اقتصادی ندارد. توجه کنید که یال‌ها وزن‌ها (طول‌ها)ی متفاوت دارند تا توضیح کمی ساده‌تر شود، اما به‌هرحال بحث ادامه را می‌توان طوری اصلاح کرد که در حالتی که در آن یال‌هایی وزن مساوی دارند هم درست باشد. زمانی که بعضی یال‌ها وزن برابر دارند، درخت‌هایی که به‌دست می‌آیند

1. Otakar Borůvka

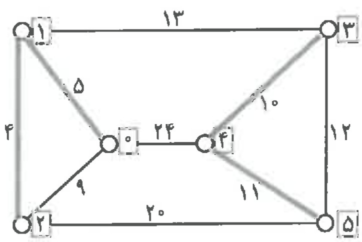
هزینه‌های برابر دارند. وقتی وزن‌های یال‌ها متفاوت‌اند، درخت فراگیر با کمترین هزینه یکتاست.



گراف بالا ۹ یال دارد. اگر وزن آنها را به‌ترتیب صعودی مرتب کنیم، به این دنباله می‌رسیم: ۴، ۵، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۲۰ و ۲۴. اگر بخواهیم با اضافه کردن یال‌ها به‌ترتیب افزایش هزینه، ارتباطی ارزان بیابیم، ابتدا یال‌های با وزن‌های ۴ و ۵ را که در شکل زیر نشان داده شده‌اند، اضافه می‌کنیم.

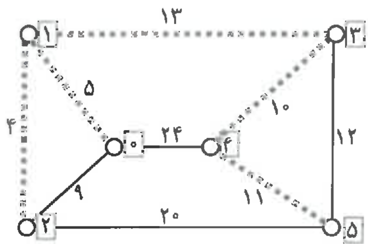


وزن یال ارزان بعدی، ۹ است اما اگر اضافه شود، دور ایجاد می‌شود. به‌بیان دیگر، برای ارتباط الکتریکی از رأس ۰ به رأس ۲، لازم نیست ۰ و ۲ به‌هم وصل باشند زیرا ۰ و ۱ و نیز ۱ و ۲ به‌هم وصل‌اند. بنابراین یال‌های بعدی از رأس ۳ به رأس ۴ و از رأس ۴ به رأس ۵ هستند، زیرا در مراحل تصمیم‌گیری بعدی، اینها ارزان‌ترین یال‌ها هستند و نیز دور ایجاد نمی‌کنند.

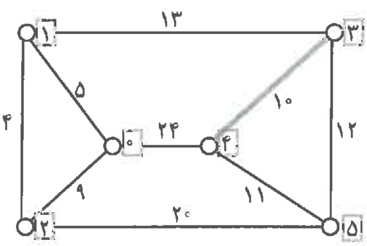


توجه کنید که در این مرحله، یال‌های انتخاب شده زیرگرافی همبند تشکیل نمی‌دهند. بنابراین، گاهی نتیجهٔ الگوریتم کروسکال در مراحل میانی درخت نیست. اما وقتی الگوریتم به پایان می‌رسد، یال‌ها درخت تشکیل می‌دهند. وزن ارزان‌ترین یال بعد از این یال‌ها، ۱۲ است که با یال‌های انتخاب شده دور تشکیل می‌دهد، پس اضافه نمی‌شود. اما یال ۱۳ را می‌توان اضافه کرد. اکنون مجموعه‌ای از یال‌ها داریم که دور تشکیل نمی‌دهند و همهٔ

رأس‌های گراف اصلی را دربر دارند و با آنها بین هر دو تا از پایگاه‌ها می‌توان ارتباط الکتریکی برقرار کرد (در صورت لزوم با واسطه). چون در پایان می‌خواهیم درخت داشته باشیم (درخت حاصل با نقطه‌چین در شکل زیر مشخص شده است)، می‌توانیم از این واقعیت بهره بگیریم که همهٔ درخت‌ها با تعداد یکسان رأس، تعداد یکسانی یال دارند، تا بدانیم که تا پایان الگوریتم‌های کروسکال، پریم و برووکا چند یال باید انتخاب شود. می‌دانیم که در هر درخت، تعداد یال‌ها یکی کمتر از تعداد رأس‌هاست (ویژگی ج در ابتدای مقاله). بنابراین وقتی در الگوریتم کروسکال، تعدادی یال که مجموعه‌ای همبند تشکیل می‌دهند انتخاب کنیم که تعدادشان یکی کمتر از تعداد رأس‌هایی باشد که قرار است به‌هم وصل شوند، خواهیم دانست که حتماً تعدادی درست از یال‌ها را انتخاب کرده‌ایم.[۱]



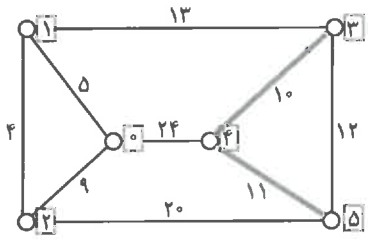
الگوریتم پریم هم حریصانه است، به این معنی که به‌طور مکرر، در مراحل پیاپی، بهترین انتخاب صورت می‌گیرد. اما تفاوتی وجود دارد: در هر مرحله از این الگوریتم، نتیجه درخت است و وقتی الگوریتم به پایان می‌رسد، نتیجه درختی فراگیر با کمترین هزینه است. ایدهٔ الگوریتم پریم این است که ارزان‌ترین یال را انتخاب کنیم تا «اَبَررأسی» را به مجموعهٔ رأس‌هایی که تا آن مرحله انتخاب شده‌اند، وصل کند. می‌توانیم الگوریتم را از هر رأسی از گراف اصلی شروع کنیم. پس اگر از رأس ۳ شروع کنیم، از بین سه یال باید انتخاب کنیم: یال‌های با وزن‌های ۱۳، ۱۰ و ۱۲. چون ۱۰ کمترین وزن است، این یال انتخاب می‌شود. اکنون به موقعیتی که در شکل زیر مشخص شده است رسیده‌ایم.



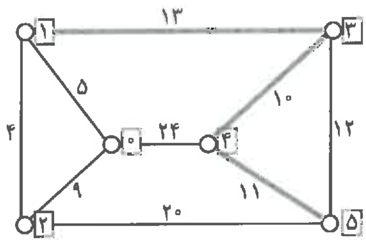
اکنون یال انتخاب شده را «منقبض می‌کنیم» تا رأس‌های ۳ و ۴ روی هم قرار گیرند و «اَبَررأس» تشکیل دهند.

۱. بدون زحمت زیاد می‌توان ثابت کرد که اگر (مانند الگوریتم کروسکال) از گرافی همبند، بعضی یال‌ها را که دور تشکیل نمی‌دهند انتخاب کنیم و این تعداد از تعداد رأس‌ها در گراف اصلی، یکی کمتر باشد، آنگاه آن یال‌ها درخت تشکیل می‌دهند. (این حکم از جملاتی که اکنون خواندید، قوی‌تر است.)

این ابررأس همسایه‌هایی دارد که با یال‌هایی با وزن‌های ۲۴، ۱۳، ۱۲ و ۱۱ به آن متصل شده‌اند. هزینهٔ ارزان‌ترین یال، ۱۱ است. پس این یال را انتخاب می‌کنیم.



در این مرحله، رأس‌های ۳ و ۴ و ۵ را ابررأس خواهیم دانست وزن‌های یال‌های متصل به آن عبارت‌اند از ۲۴، ۱۳ و ۲۰. توجه کنید که دیگر یال بین رأس‌های ۳ و ۵ را در نظر نمی‌گیریم، زیرا این یال دو رأسی را به هم متصل می‌کند که «درون» ابررأس قرار دارند. چون یال با وزن ۱۳ ارزان‌ترین یال متصل به ابررأس است، آن را به این مجموعهٔ در حال رشد از ارتباط‌ها می‌افزاییم.

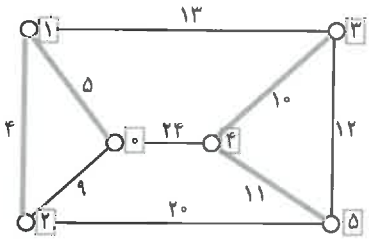


اکنون به همین ترتیب آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا ابررأسمان شامل همهٔ رأس‌های گراف اصلی شود. رأس‌ها با این ترتیب با شروع از رأس ۳، به ابررأس اضافه می‌شوند: ۴، ۵، ۱، ۲ و ۰. پس یال‌هایی که اضافه می‌شوند عبارت‌اند از یال‌های ۳ به ۴، ۴ به ۵، ۱ به ۳، ۱ به ۲، ۱ به ۰. به این ترتیب همان مجموعهٔ نهایی از یال‌های ارتباطی را که در شکل با نقطه‌چین مشخص شده بودند، ایجاد می‌کنند.

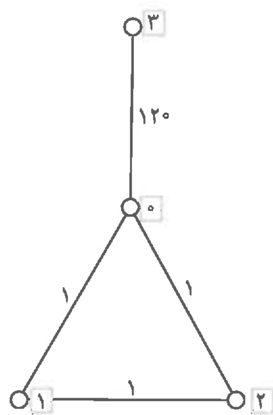
الگوریتم برووکا چگونه کار می‌کند؟ این الگوریتم در حالتی کار می‌کند که وزن‌های یال‌های گراف متفاوت باشند. با عمل «برداشتن» که در قسمت قبل ذکر شد و در ادامه دوباره توضیح داده می‌شود، دور تولید نمی‌شود (چرا؟). پس یال‌های انتخاب شده، یا درخت تشکیل می‌دهند، یا مجموعه‌ای از درخت‌ها (یعنی جنگل).

مرحله‌ای در این الگوریتم شامل این است که هر رأس (یا در مراحل بعدی، ابررأس‌ها) یالی را که بین یال‌های متصل به خود، ارزان‌ترین است، «بردارد»، بدون توجه به اینکه بقیهٔ رأس‌ها چه یال‌هایی را برداشته‌اند. پس چون در رأس ۰، یال‌ها وزن‌های ۵، ۹ و ۲۴ دارند، رأس ۰ یال با وزن ۵ را برمی‌دارد. به همین ترتیب، رأس ۲ یال با وزن ۴ و رأس ۳ یال با وزن ۱۰ را برمی‌دارد. رأس‌های ۴ و ۵ به‌ترتیب یال‌های با وزن‌های ۱۰ و ۱۱ را برمی‌دارند. اکنون این

مجموعه از یال‌های «برداشته‌شده» را داریم:



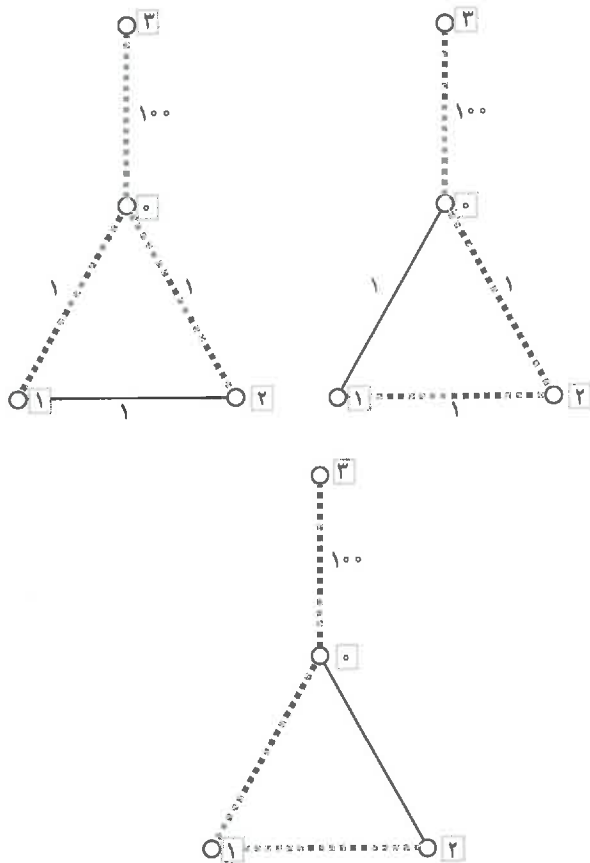
اگر یال‌های خاکستری در شکل بالا درخت تشکیل می‌دادند، کار تمام بود. اما چنین نیست. پس مجموعه‌ای از ابررأس‌ها تشکیل می‌دهیم. هر ابررأس از رأس‌هایی که با یال‌های انتخاب شده به‌هم مربوط‌اند، تشکیل شده است. اکنون به مرحله‌ای دیگر از «برداشتن» می‌پردازیم. در این مثال، دو ابررأس وجود دارند که یکی، از رأس‌های ۰، ۱ و ۲ تشکیل شده است و دیگری از رأس‌های ۳، ۴ و ۵. این دو با یال‌هایی با وزن‌های ۱۳، ۲۰ و ۲۴ به هم وصل‌اند. پس اگر ابررأس‌ها را A و B بنامیم، یکی یال از A به B با وزن ۱۳ را برمی‌دارد و دیگری رأس از B به A با وزن ۱۳ را (که همان است). اگر یال جدید را هم خاکستری کنیم، به همراه یال‌های خاکستری قبلی، همان مجموعه‌ای از یال‌های نقطه‌چین که در شکل مشخص شده بودند، به‌دست می‌آید. دوباره درختی فراگیر با کمترین هزینه یافته‌ایم.



سعی کنید با مثالی، دریابید که اگر درگرافی، چند یال وزن‌های یکسان داشته باشد، نتیجهٔ الگوریتم‌ها چه خواهد بود.

ایده‌ای که در یکی از اثبات‌های درستی الگوریتم کروسکال به‌کار می‌آید این است که فرض کنیم درختی مانند T با هزینه‌ای کمتر از یا مساوی با درختی مانند K که از الگوریتم کروسکال به‌دست آمده است وجود داشته باشد. فهرستی به نام L از یال‌های K به‌ترتیبی که در الگوریتم کروسکال اضافه شدند تا K ساخته شود، تهیه می‌کنیم. اگر

T با K برابر نبود، اولین یالی مانند e را که در فهرست L آمده است (یعنی در K هست) و در T نیست می‌یابیم. وقتی e به T افزوده شود، به دلیل ویژگی (د) از درخت‌ها که در ابتدا ذکر شد، دوری یکتا در T ایجاد می‌شود. این دور باید دست‌کم یک یال مانند e' داشته باشد که در K نیست، زیرا K درخت است و دور ندارد. اکنون با افزودن e به T و حذف e'، درختی مانند T' می‌سازیم. هزینهٔ T' برابر است با هزینهٔ T به‌علاوهٔ وزن e منهای وزن e'. چون T درختی با کمترین هزینه است و چون در الگوریتم کروسکال یال‌ها به‌ترتیب ارزانی با این شرط که دور نسازند، انتخاب می‌شوند، با کمی دقت می‌توان دریافت که وزن‌های e و e' باید برابر باشند. یعنی T و T' هزینهٔ برابر دارند، و تعداد یال‌هایی از K که وزنشان با وزن یالی از T' برابر است، یکی بیش از تعداد چنین یال‌هایی بین K و T است. با این کار به درخت‌های متفاوتی می‌رسیم که کمترین هزینه را دارند، اما هیچ‌یک ارزان‌تر از درختی که در الگوریتم کروسکال تولید می‌شود، نیست.



طبیعی است که بخواهیم این الگوریتم‌ها را از این نظر که کدام به لحاظ محاسباتی بهتر است، مقایسه کنیم.

این پرسش پیچیده است و به تعداد رأس‌ها و یال‌ها بستگی دارد. ضمناً در پاسخ به این پرسش ممکن است ساختمان‌های داده‌ای هم که برای نمایش گراف و وزن‌هایش به‌کار می‌روند و نوع رایانه‌ای که محاسبه می‌کند (سری یا موازی) نیز اهمیت یابند.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

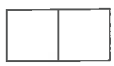
Joe Malkevitch, '*Trees: A Mathematical Tool for All Seasons*,' available at http://www.ams.org/featurecolumn/archive/trees.html

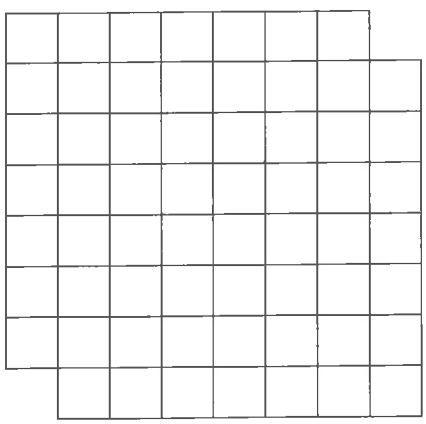
مسئله‌های آسان

یحیی تابش

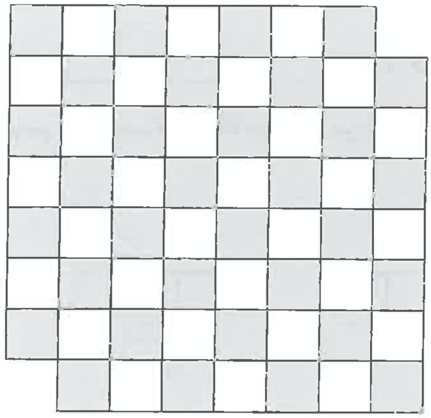
در این بخش می‌خواهیم با ایده‌های ساده در حل مسئله آشنا شویم. این کار را به‌طور عمده با بررسی راه‌حل‌های مسئله‌ها انجام می‌دهیم؛ یعنی مسئله‌های نمونه‌ای را مطرح می‌کنیم و راه‌حل‌های آنها، ایده‌های مشخصی را حاصل می‌کند که موجب کسب تجربه‌های نوینی می‌شود. علاوه بر این، در این بخش مسائلی را نیز مطرح می‌کنیم که خوانندهٔ علاقه‌مند و مبتدی آنها را حل کند و در رضایت‌خاطر چالش‌های حل مسئله سهیم شود. مسائل جایزه‌داری را نیز عرضه خواهیم کرد، تا جوایزی به راه‌حل‌های برگزیده تعلق گیرد. پس، این گوی و این میدان برای مبتدیان علاقه‌مند به حل مسئله!

چهارخانه‌ای‌ها

صفحهٔ شطرنجی و چهارخانه‌ها منشأ مسئله‌های گوناگونی هستند. یکی از مسئله‌های معروف در این زمینه این مسئله است که از یک صفحهٔ 8×8 خانه‌های گوشه‌های سمت راست بالا و سمت چپ پایین را حذف کرده‌ایم. آیا می‌توان این صفحه را با مستطیل‌های 1×2 به‌صورت  پوشاند؟



ایدهٔ ساده‌ای که برای حل این مسئله به‌کار می‌بریم این است که خانه‌های صفحه را یک در میان سیاه و سفید کنیم. اگر شکل مزبور با مستطیل‌های 1×2 قابل پوشاندن باشد، باید تعداد خانه‌های سفید و سیاه برابر باشند؛

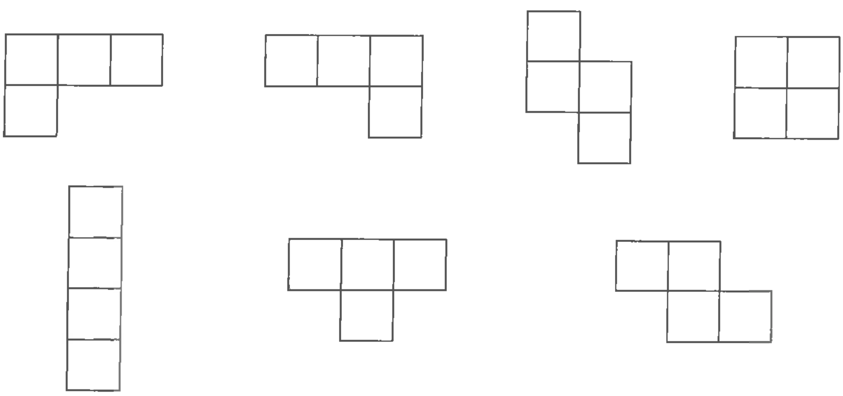


در حالی که هر جور که صفحهٔ ۸ × ۸ را یک در میان سیاه و سفید کنیم، تعداد کل خانه‌های سفید با تعداد کل خانه‌های سیاه برابر نخواهد بود.

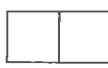
این ایدهٔ سفید و سیاه کردن خانه‌ها از ایده‌های ساده در حل این قبیل مسئله‌ها است. به مسئله دیگری از همین نوع توجه کنید.

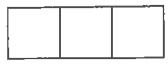
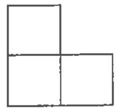
یک چهارخانه‌ای شکلی است که از چهار مربع ۱ × ۱ تشکیل شده است که هرکدام با یک یا چند تای دیگر یک ضلع مشترک دارند. ثابت کنید هفت چهارخانه‌ای متفاوت وجود دارد (البته بدون در نظرگرفتن دوران و انتقال).

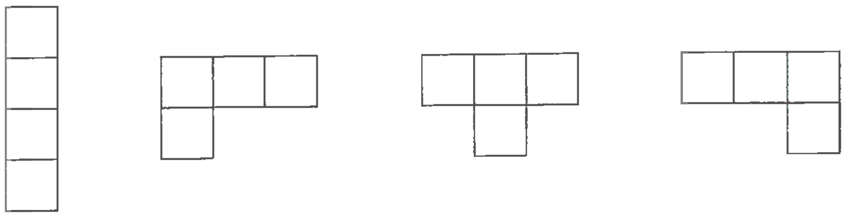
اگر با بازی کامپیوتری تتریس آشنا باشید، قبلاً این هفت چهارخانه‌ای متفاوت را دیده‌اید:



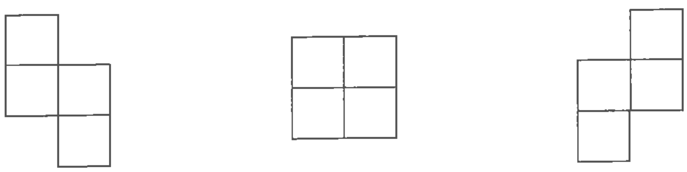
چطور ثابت کنیم فقط و فقط همین هفت حالت وجود دارد؟ یک ایده برای حل این‌گونه مسائل، در نظرگرفتن حالت‌های ساده‌تر و تعمیم آنها به حالت‌های پیچیده‌تر است.

فقط یک یک‌خانه‌ای داریم (یعنی )، دوخانه‌ای هم فقط یک شکل دارد (چون با چسباندن یک مربع به یکی از ضلع‌های مربع شکلی به‌صورت  حاصل می‌شود). حال اگر بخواهیم سه‌خانه‌ای بسازیم،

فقط دو حالت متمایز وجود دارد (یعنی  و )، و بالاخره اگر یک خانهٔ دیگر اضافه کنیم و به چهارخانه‌ای‌ها برسیم می‌بینیم که با چسباندن خانهٔ جدید به سر خانه‌های قبلی، از شکل اول، چهار شکل زیر به‌دست می‌آید:



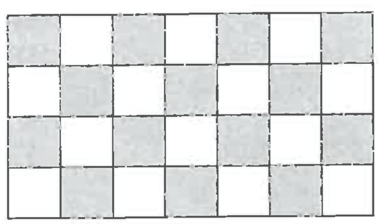
و از شکل دوم سه چهارخانه‌ای دیگر به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:



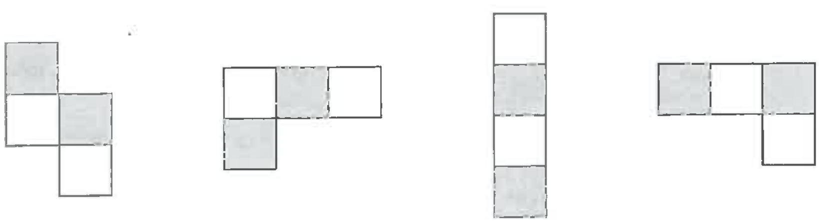
با این ایده که حالت‌های ساده‌تر را در نظر بگیریم و به حالت موردنظر برسیم توانستیم این مسئله را حل کنیم. حال به مسئلهٔ دیگری توجه کنیم.

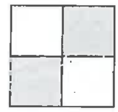
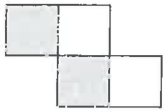
آیا می‌توانیم یک صفحهٔ مستطیل شکل 7×4 را با همهٔ چهارخانه‌ای‌ها (یعنی هر هفت چهارخانه‌ای) بپوشانیم؟

به سراغ ایدهٔ سفید و سیاه کردن می‌رویم. ابتدا صفحهٔ مستطیل‌شکل 7×4 را سفید و سیاه می‌کنیم:

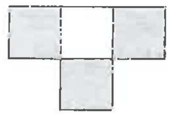
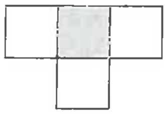


در اینجا چهارده خانهٔ سیاه و چهارده خانهٔ سفید داریم. حالا ببینیم چهارخانه‌ای‌ها را به چند حالت می‌توانیم سفید و سیاه کنیم:



در مورد شش چهارخانه‌ای فوق، هرجور دیگر هم کار سیاه و سفید کردن را انجام دهیم، باز هم تعداد خانه‌های سیاه و تعداد خانه‌های سفید با یکدیگر برابر است ولی چهارخانه‌ای هفتم را به دو صورت می‌توان سفید و سیاه کرد:

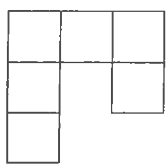



که در هر صورت، تعداد خانه‌های سفید عددی فرد و تعداد خانه‌های سیاه نیز عدد فرد متفاوتی است و نتیجه می‌گیریم که پوشاندن صفحهٔ ۷×۴ که چهارده خانهٔ سفید و چهارده خانهٔ سیاه دارد، امکان‌پذیر نیست.

در خاتمه باید بگوییم که ایدهٔ سیاه و سفید کردن تنها ایده در حل مسائل مربوط به چندخانه‌ای‌ها و صفحات شطرنجی نیست و یک مسئلهٔ جایزه‌دار به‌صورت زیر مطرح می‌کنیم:

مسئلهٔ قلاب

قلاب، شش‌خانه‌ای به شکل زیر است:



همهٔ مستطیل‌های $m \times n$ را مشخص کنید که با قلاب به‌طور کامل پوشانده می‌شوند (قلاب‌ها روی هم نیفتند و هیچ خانه‌ای خالی نماند).

پاسخ‌های خود را برای دفتر نشریه ارسال کنید و روی پاکت بنویسید مربوط به بخش مسائل آسان. به یک راه‌حل برگزیده جایزه‌ای تعلق خواهد گرفت.

ویژگی عدد ۷۰

پال اردوش

می‌دانیم که ۳۰ بزرگ‌ترین عددی است که همهٔ عددهای کوچک‌تر از آن که نسبت به آن اول‌اند، اول هم هستند. در این یادداشت، مسئله‌ای مشابه را بررسی می‌کنیم. عددی که در این مسئله پیدا می‌شود، ۷۰ است. پس از اثبات این ویژگی عدد ۷۰، تعدادی مسئلهٔ مرتبط می‌آورم، که به‌نظر من بعضیشان بسیار دشوارند. امیدوارم به این ترتیب، خوانندگان را قانع کنم که مسئله‌های نو و جالب بسیار زیادی در نظریهٔ اعداد مقدماتی باقی مانده‌اند. این مسائل را به آسانی می‌توان فهمید، اما برای حلشان، قطعاً به ابتکار یا گسترش کاربرد فنون موجود نیاز است.

در این مقاله دنباله‌هایی از اعداد طبیعی، مربوط به عددی داده شده مانند n را بررسی می‌کنیم. دنباله $\{a_i\}_{i=۰}^{\infty}$ است که با $a_۰ = n$ شروع می‌شود. اگر $a_۰$، $a_۱$، ... و $a_{k-۱}$ معلوم شده باشند، a_k را کوچک‌ترین عدد طبیعی‌ای انتخاب می‌کنیم که از $a_{k-۱}$ بزرگ‌تر و نسبت به عدد $a_۰ a_۱ \ldots a_{k-۱}$ اول است. آشکار است که هر عدد اول بزرگ‌تر از n در دنباله می‌آید. ضمناً هر عضو دنباله از $n^۲$ بزرگ‌تر باشد، عددی اول است. دلیل درستی این حرف این است که اگر a_kای بزرگ‌تر از $n^۲$ باشد و اول نباشد، عامل اولی کوچک‌تر از خود مانند q دارد. چون a_k در دنباله آمده است، q نسبت به همهٔ اعداد $a_۰$، $a_۱$، ... و $a_{k-۱}$ اول است. به‌ویژه، q هیچ‌یک از اعداد اول بین n و $n^۲$ نیست. پس $۱ < q < n$. اما در این‌صورت، توانی از q وجود دارد که از n کمتر نیست و از $n^۲$ کمتر است. اگر کوچک‌ترین توان با این شرط، q^α باشد، آنگاه به‌ازای عددی مانند j که $۰ \leqslant j < k$، $a_j = q^\alpha$، که این امر با آنچه گفتیم در تناقض است.

جدول ۱ شامل دنبالهٔ $\{a_i\}$ متناظر با چند عدد طبیعی مانند n است.

قضیهٔ ۱ . ۷۰ بزرگ‌ترین عددی است که در دنبالهٔ متناظر با آن، همهٔ a_kها (به‌ازای $k \geqslant ۱$) عددی اول یا توانی از عددی اول‌اند.

اثبات. می‌کوشم تا حد امکان اثبات را کوتاه کنم. به همین دلیل، این اثبات آن‌قدر که ممکن بود مقدماتی باشد، مقدماتی نیست. با این حکم دشوار ولی مفید شروع می‌کنیم که به‌ازای هر عدد مانند x که $x > \frac{۱۷}{۲}$، دست‌کم سه عدد اول در بازهٔ $(x, ۲x)$ وجود دارند. پس به‌ازای $n > ۱۷^۲ = ۲۸۹$ دست‌کم سه عدد اول در بازهٔ $\left(\frac{\sqrt{n}}{۲}, \sqrt{n}\right)$ وجود دارند. علاوه بر این، دست‌کم یکی از این عددها n را نمی‌شمارد، زیرا حاصل‌ضربشان بیشتر از $\frac{(\sqrt{n})^۳}{۸}$ است و این عدد از n بیشتر است. پس اگر $p_۱$ بزرگ‌ترین عدد اولی باشد که $p_۱ < \sqrt{n}$ و $p_۱ \nmid n$، آنگاه $p_۱ > \frac{\sqrt{n}}{۲}$.

جدول ۱. دنباله‌های نمونه که از عدد n با شمردن از آن، و پریدن از روی هر عددی که عامل اولی مشترک با جمله‌های قبلی دنباله دارد، به‌دست آمده است. چون هر عدد اول بزرگ‌تر از n، خودبه‌خود در دنباله می‌آید، فقط جمله‌های مرکبی را که در دنباله وجود دارند، مشخص کرده‌ایم. (همان‌طور که در متن آمد، هیچ عدد مرکب بزرگ‌تر از $n^۲$ در دنباله ظاهر نمی‌شود. به همین دلیل، دنباله‌ها در جدول بالا قبل از این عدد به پایان می‌رسند.) در ستونی که بالایش «$f(n)$» نوشته شده است، تعداد اعضایی از دنباله مشخص شده‌اند که نه عددی اول‌اند و نه توانی از عددی اول. اگر $f(n) = ۰$، در دنبالهٔ متناظر با n، همهٔ اعضا یا اول‌اند یا توانی از عددی اول. این عددها عبارت‌اند از ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۲، ۲۴، ۳۰ و ۷۰. در این مقاله ثابت شده است که هیچ عدد دیگری این خاصیت را ندارد.

n	a_kهای مرکب	$f(n)$	a_kهایی که توان عددی اول نیستند
۳	۲	۰	
۴	$۳^{۲}$	۰	
۵	۲×۳	۱	۶
۶	$۵^{۲}$	۰	
۷	$۲^{۳}, ۳^{۲}, ۵^{۲}$	۰	
۸	$۳^{۲}, ۵^{۲}, ۷^{۲}$	۰	
۹	$۲ \times ۵, ۷^{۲}$	۱	۱۰
۱۰	۳×۷	۱	۲۱
۱۱	$۴ \times ۳, ۵^{۲}, ۷^{۲}$	۱	۱۲
۱۲	$۵^{۲}, ۷^{۲}, ۱۱^{۲}$	۰	
۱۵	$۲^{۴}, ۷^{۲}, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}$	۰	
۱۸	$۵^{۲}, ۷^{۲}, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}$	۰	
۲۲	$۵^{۲}, ۳^{۳}, ۷^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}, ۱۹^{۲}$	۰	
۲۴	$۵^{۲}, ۷^{۲}, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}, ۱۹^{۲}, ۲۳^{۲}$	۰	
۳۰	$۷^{۲}, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}, ۱۹^{۲}, ۲۳^{۲}, ۲۹^{۲}$	۰	
۳۱	$۲^{۵}, ۳ \times ۱۱, ۵ \times ۷, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۹^{۲}, ۲۳^{۲}, ۲۹^{۲}$	۲	۳۳, ۳۵
۴۶	$۷^{۲}, ۳ \times ۱۷, ۵ \times ۱۱, ۱۳^{۲}, ۱۹^{۲}, ۲۹^{۲}, ۳۱^{۲}, ۳۷^{۲}, ۴۱^{۲}, ۴۳^{۲}$	۲	۵۱, ۵۵
۷۰	$۹^{۲}, ۱۱^{۲}, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}, ۱۹^{۲}, ۲۳^{۲}, ۲۹^{۲}, ۳۱^{۲}, ۳۷^{۲}, ۴۱^{۲}, ۴۳^{۲}, ۴۷^{۲}, ۵۳^{۲}, ۵۹^{۲}, ۶۱^{۲}, ۶۷^{۲}$	۰	
۷۱	$۲^{۳} \times ۳^{۲}, ۷ \times ۱۱, ۵ \times ۱۷, ۱۳^{۲}, ۱۹^{۲}, \ldots, ۶۷^{۲}$	۳	۷۲, ۷۷, ۸۵
۹۷	$۲ \times ۷^{۲}, ۳^{۲} \times ۱۱, ۵ \times ۲۳, ۱۳^{۲}, ۱۷^{۲}, ۱۹^{۲}, ۲۹^{۲}, \ldots, ۹۷^{۲}$	۳	۹۸, ۹۹, ۱۱۵
۲۷۲	$۳ \times ۷ \times ۱۳, ۵^{۲} \times ۱۱, ۱۹^{۲}, ۲۳^{۲}, ۲۹^{۲}, \ldots, ۲۷۱^{۲}$	۲	۲۷۳, ۲۷۵

همچنین به‌ازای اعدادی مانند n که $n > ۲۸۹$، دست‌کم سه عدد اول در بازهٔ $\left(۲\sqrt{n}, \frac{n}{۴}\right)$ وجود دارند، زیرا این بازه شامل بازهٔ $(۲\sqrt{n}, ۴\sqrt{n})$ است و در این بازه بنابر حکمی که ذکر کردیم، دست‌کم سه عدد اول وجود دارند. دست‌کم یکی از این عددهای اول، n را نمی‌شمارد، زیرا حاصل‌ضربشان از $۴n$ بیشتر است. پس اگر $q_۱$ کوچک‌ترین عدد اولی باشد که $۲\sqrt{n} \leqslant q_۱$ و $q_۱ \nmid n$، آنگاه $q_۱ < \frac{n}{۴}$ و چون $p_۱ > \frac{\sqrt{n}}{۲}$، پس $q_۱ < p_۱^۲$.

اکنون به $p_۱q_۱$ توجه کنید. اگر این عدد یکی از a_kها باشد، چون $p_۱$ و $q_۱$ دو عدد اول متمایزند، نتیجه می‌شود که n در این شرط که در دنبالهٔ متناظر با آن، هر a_k عددی اول یا توانی از عددی اول باشد، صدق نمی‌کند. اگر $p_۱q_۱$ یکی از a_kها نباشد، باید a_iای موجود باشد که $n < a_i < p_۱q_۱$ و $(a_i, p_۱q_۱) > ۱$. کافی است ثابت کنیم که این a_i حداقل دو عامل اول متفاوت دارد. اگر چنین نباشد، a_i توانی از $p_۱$ یا توانی از $q_۱$ است. واضح است که توانی از $q_۱$ نیست، زیرا $q_۱^۲ > p_۱q_۱$. اما a_i توانی از $p_۱$ نیز نیست، زیرا $p_۱^۲ < n$ و $p_۱^۳ > p_۱q_۱$ (چون $p_۱^۲ > q_۱$). پس به‌ازای هر عدد مانند n که $n > ۲۸۹$، در دنبالهٔ متناظر با n، عضوی وجود دارد که نه عددی اول است و نه توانی از عددی اول. همین حکم را با محاسبهٔ مستقیم دنبالهٔ متناظر با هر یک از اعداد مانند n که $۷۰ < n \leqslant ۲۸۹$ می‌توان نتیجه گرفت. به این ترتیب، قضیهٔ ۱ ثابت می‌شود. ■

با روشی پیچیده‌تر، می‌توانیم این حکم را که با حکم قضیهٔ ۱ قرابت دارد، ثابت کنیم.

قضیهٔ ۲ . به‌ازای هر عدد به‌قدر کافی بزرگ مانند n، دست‌کم یکی از a_kها در دنبالهٔ متناظر با n حاصل‌ضرب دقیقاً دو عدد اول متفاوت است.

این حکم را ثابت نمی‌کنم، چون اثباتش پیچیده است و در آن از احکامی عمیق در نظریهٔ تحلیلی اعداد استفاده می‌شود. مطمئن بودم که این حکم به‌ازای هر عدد بزرگ‌تر از ۷۰ برقرار است، و در نتیجه، حکم قضیهٔ ۱ را تقویت می‌کند، اما نتوانستم درستی باورم را ثابت کنم. اخیراً سی. پومرنس[1] اثباتی برای قضیهٔ ۲ به‌ازای nهای بزرگ‌تر از ۶۰۰۰ یافته است. ضمناً مشاهده کرده است که حکم به‌ازای $n = ۲۷۲$ غلط است (جدول ۱ را ببینید).

حدسی که در ادامه می‌بینید، با قضیهٔ ۲ نزدیک است و بسیار دشوار به نظر می‌رسد. اگر x عددی صحیح باشد، کوچک‌ترین عامل اول آن را با $p(x)$ نمایش دهید. در این‌صورت به‌ازای اعداد به‌قدر کافی بزرگ مانند n، همیشه عددی مرکب مانند x وجود دارد که در نابرابری

$$n < x < n + p(x) \qquad (۱)$$

صدق کند.

انتظار داشتم که به‌ازای اعداد به‌قدر کافی بزرگ مانند n، اعدادی خالی از مربع مانند x پیدا شوند که در (۱) صدق کنند و دقیقاً k عامل اول متمایز داشته باشند. مطمئنم که این حدس بسیار عمیق است. البته از درستی

1. C. Pomerance

این حکم، درستی قضیهٔ ۲ نتیجه می‌شود زیرا هر xای که در (۱) صدق کند یکی از a_kهای متناظر با n است.

قبل از اینکه مقاله را ادامه دهید و اثبات گزارهٔ اخیر را بخوانید، بکوشید خودتان آن را ثابت کنید. برای اثبات، فرض کنید x در (۱) صدق کند، اما هیچ‌یک از a_kها نباشد. در این‌صورت، عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که $a_{k-1} < x < a_k$ نسبت به یکی از اعداد $a_0 = n$، a_1، ...، a_{k-1} (مثلاً a_j) اول نیست. در این‌صورت عددی اول مانند q وجود دارد به‌طوری که $q \mid a_j$ و $q \mid x$. پس $q \mid (x - a_j)$ و در نتیجه $q \leqslant x - a_j$ و بنابر تعریف $p(x)$، $p(x) \leqslant q$. بنابراین $a_j + p(x) \leqslant x$ و چون $n \leqslant a_j$، پس $n + p(x) \leqslant x$. اما این نابرابری با (۱) در تناقض است.

اکنون می‌خواهم چند حکم آسان دربارهٔ a_kها مطرح کنم. می‌دانیم که هر عدد اول بزرگ‌تر از n یکی از a_kهاست، و هر a_k که از n^2 بزرگ‌تر باشد، عددی اول است.

فرض کنید p عددی اول و کمتر از n باشد و کوچک‌ترین a_kای را که مضرب p است، $a(n,p)$ بنامید. به آسانی می‌توان دریافت که $a(n,p) \leqslant p^{\alpha+1}$ که $p^{\alpha} \leqslant n < p^{\alpha+1}$، زیرا اگر هیچ‌یک از a_kهایی که از $p^{\alpha+1}$ کوچک‌تر است، مضرب p نباشد، آنگاه $p^{\alpha+1}$ یکی از a_kهاست.

تعداد a_kهایی را که توانی از عددی اول نیستند با $f(n)$ نمایش بدهید. در این‌صورت $f(n) \leqslant \pi(\sqrt{n})$ (که در آن، $\pi(x)$ تعداد اعداد اول کوچک‌تر از یا مساوی با x است)، زیرا هر چنین a_kای باید عامل اولی کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ داشته باشد.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

Paul Erdos, "A Property of 70," in *The Harmony of the world,* edited by G. L. Alexanderson, the Mathematical Association of America, 2007, pp. 139-141.

چرا $\sqrt{10}$ گنگ است؟

روی جی. دولینگ

$\sqrt{10}$ طول وتر مثلثی قائم‌الزاویه با طول ضلع‌های ۱ و ۳ است، و با استدلالی نسبتاً آسان، می‌توان ثابت کرد که گنگ است. استدلال چنین است: اگر $\sqrt{10}$ گویا باشد، اعدادی صحیح و ناصفر مانند p و q وجود دارند به‌طوری که $p/q = \sqrt{10}$، و در نتیجه $p^2 = 10q^2$. اگر a عددی صحیح و ناصفر باشد، تعداد صفرهای سمت راست a^2 دو برابر تعداد صفرهای سمت راست a است (حتی اگر a در سمت راستش، صفر نداشته باشد). بنابراین، p^2 تعداد زوجی صفر در سمت راستش دارد، اما تعداد صفرهای سمت راست $10q^2$، فرد است. بنابراین، تساوی $p^2 = 10q^2$ ناممکن است. پس $\sqrt{10}$ گویا نیست.

اکنون با همین روش، ثابت می‌کنیم $\sqrt{4}$ گنگ است! به این منظور، کار بالا را تکرار می‌کنیم، و طی آن از نمایش p و q در مبنای ۴ استفاده می‌کنیم، و با همان استدلال نتیجه می‌گیریم $\sqrt{4}$ گنگ است. آیا اشتباهی مرتکب شده‌ایم؟ کجا؟

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

Roy J. Dowling, "A Radical Suggestion," in *The Harmony of the World,* edited by G. L. Alexanderson, the Mathematical Association of America, 2007, p. 115.

چرا جمعیت کلاس‌هایتان بیشتر از میانگین است؟

دیوید همن‌وی

مسئولان پذیرش دانشگاه‌ها، معمولاً پایین بودن میانگین جمعیت کلاس‌هایشان را با افتخار مطرح می‌کنند، اما مدرسان از خود می‌پرسند «چرا هیچ‌وقت یکی از این کلاس‌های کم‌جمعیت نصیب من نمی‌شود؟». در این مقاله دلیل این امر را می‌بینید.

به این مثال توجه کنید. در اولین سه ماه سال تحصیلی ۸۱-۱۹۸۰، ۱۱۱ درس (از جمله درس‌های خصوصی) در مدرسهٔ بهداشت عمومی هاروارد تدریس شد، و هر دانشجو در کلاس یکی از این درس‌ها شرکت می‌کرد. کم‌جمعیت‌ترین کلاس، تک‌نفره بود، و بیشترین جمعیت را کلاسی با ۲۲۹ نفر دانشجو داشت. **میانگین جمعیت کلاس‌ها** از دید مسئولان دانشگاه ۱۴٫۵ نفر بود. اما اگر از جمعیت کلاس همهٔ دانشجویان میانگین گرفته می‌شد (یعنی از هر یک از دانشجویان می‌پرسیدیم که کلاسش چندنفره است، بعد این عددها را با هم جمع می‌کردیم و حاصل را بر تعداد کل دانشجویان تقسیم می‌کردیم)، عدد ۷۸ به‌دست می‌آمد! عدد اخیر را **امید جمعیت کلاس به‌ازای هر دانشجو** می‌نامیم، و معنای آن این است که هر دانشجو انتظار دارد کلاسش، به‌طور میانگین چندنفره باشد. این تفاوت، به دلیل این است که تعداد کمی کلاس **بسیار** پرجمعیت وجود دارند. در حقیقت، فقط سه کلاس با بیش از ۷۸ دانشجو وجود داشتند: یکی با ۱۰۵، دیگری با ۱۷۱ و کلاسی با ۲۲۹ دانشجو.

در چندین حالت می‌توان کلاسی با ۲۲۹ دانشجو به همراه کلاس‌هایی با تعدادی دیگر داشت، به‌طوری که امید جمعیت به‌ازای هر دانشجو تقریباً برابر ۷۸ شود، مثل این چهار حالت: (آ) یک کلاس ۲۲۹نفره و ۴۵۰ کلاس خصوصی (تک‌نفره)، (ب) یک کلاس ۲۲۹نفره و ۵۰ کلاس ۱۰نفره، (پ) یک کلاس ۲۲۹نفره و ۲۵ کلاس ۳۰نفره (ت) یک کلاس ۲۲۹نفره و ۲۵ کلاس ۵۰نفره. میانگین جمعیت کلاس‌ها در این حالت‌ها به‌ترتیب برابر است با ۱٫۵، ۱۴٫۳، ۳۸ و ۵۷.

با محاسباتی نه‌چندان سخت، دلیل وجود این اختلاف را می‌توان یافت. فرض کنید که هر دانشجو فقط در یک کلاس شرکت کند و تعداد کل دانشجویان برابر M و تعداد کلاس‌ها برابر N باشد. فرض کنید که جمعیت اولین کلاس X_1 باشد، جمعیت دومین X_2 کلاس باشد و .... برای محاسبهٔ امید جمعیت به‌ازای هر دانشجو، باید X_1 تا X_1 را با هم جمع کنیم، X_2 تا X_2 را با هم جمع کنیم، ...و X_N تا X_N را با هم جمع کنیم، بعد همهٔ این عددها را با هم جمع کنیم و حاصل را بر تعداد دانشجویان (که برابر M است) تقسیم کنیم. پس اگر امید جمعیت به‌ازای هر دانشجو را با X^* نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$X^* = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_N^2}{M}$$

اما میانگین جمعیت کلاس‌ها (که آن را با $\bar{X}$ نمایش می‌دهیم) برابر است با حاصل‌جمع جمعیت کلاس‌ها تقسیم بر تعداد آنها، یعنی

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \frac{M}{N}$$

اکنون اختلاف این دو عدد را حساب می‌کنیم:

$$X^* - \bar{X} = \frac{X_1^2 + \cdots + X_N^2}{M} - \frac{M}{N} = \frac{N}{M}\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_N^2}{N} - \frac{M^2}{N^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\bar{X}}\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_N^2}{N} - \bar{X}^2\right)$$

از کتاب آمار و مدل‌سازی به یاد دارید که عبارت $\frac{X_1^2 + \cdots + X_N^2}{N} - \bar{X}^2$ را واریانس می‌نامیم و با σ^2 نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$X^* - \bar{X} = \frac{1}{\bar{X}}\sigma^2$$

پس این اختلاف با واریانس نسبت مستقیم و با میانگین جمعیت کلاس‌ها نسبت معکوس دارد. چون طرف راست تساوی بالا همیشه مثبت است، X^* هیچ‌گاه از $\bar{X}$ کوچک‌تر نیست، و تساوی فقط وقتی اتفاق می‌افتد که واریانس صفر باشد، که یعنی جمعیت همهٔ کلاس‌ها برابر باشد.

مثال‌هایی دیگر از این تفاوت بین امید جمعیت به‌ازای هر نفر و میانگین جمعیت می‌آوریم.

در سال ۱۹۶۹، میانگین (یعنی $\bar{X}$) تعداد سرنشین‌های اتومبیل‌ها در سفر از خانه به محل کار در محدودهٔ متروپولیتن برابر ۱/۴ نفر بوده است. این اطلاعات در این جدول مشخص شده است:

درصد سفرها از خانه به محل کار	تعداد سرنشین‌ها
۷۳/۵	۱
۱۸/۲	۲
۴/۷	۳
۱/۹	۴
۱/۱	۵
۰/۵	۶
۰/۱	۷

با محاسبهٔ X^* از روی این جدول می‌توانیم ببینیم که معمولاً افراد در ماشین‌هایی با جمعیتی بیشتر از این میانگین سفر می‌کردند، زیرا X^* برابر ۱/۹ به‌دست می‌آید.

اگر میانگین تعداد سرنشینان ماشین‌ها ($\bar{X}$) به ۲ افزایش یابد، بیشتر راهبندان‌ها در شهرهای آمریکا برطرف می‌شوند. این کار چندان سخت به‌نظر نمی‌رسد. اما فرض کنید برای این کار، بعضی از رانندگان خودروهای

تک‌سرنشین را مجبور کنند که در گروه‌های پنج‌نفره، همراه یکدیگر و در یک خودرو به محل کار ببرند. در این صورت، تعداد خودروهای تک‌سرنشین کم می‌شود و به ۵۸٫۷٪ کل می‌رسد، تعداد پنج‌سرنشین‌ها زیاد می‌شود و به ۱۵٫۹٪ کل افزایش می‌یابد، و نسبت افرادی که با خودروهای تک‌سرنشین مسافرت می‌کنند به کل افراد، به کمتر از ۳۰٪ کاهش می‌یابد. در این شرایط، با محاسبهٔ X^* می‌بینیم که افراد به‌طور میانگین در خودروهایی با بیش از ۳ سرنشین، به محل کارشان خواهند رفت.

من معمولاً شامم را از غذاخوری‌ای نزدیک خانه‌ام که غذاهای آماده می‌فروشد، می‌خرم. بیشتر مشتریان غذایشان را می‌برند و در غذاخوری نمی‌خورند، اما غذاخوری معمولاً شلوغ است، که به نظر من، خود موفقیتی است. یک روز غروب حدود ۳۰ : ۶ به آنجا رفتم. هیچ‌کس در صف نبود. مدیر از من پذیرایی می‌کرد، به همین دلیل پرسیدم «مردم کجا هستند؟». او پاسخ داد «معمولاً همین‌جور خلوت می‌شود، حتی در زمان شام. مشتریان ناگهان هجوم می‌آورند. اگر ربع ساعت صبر کنی، اینجا دوباره شلوغ می‌شود». تعجب کرده بودم، چون هیچ‌وقت ندیده بودم که غذاخوری این‌قدر خلوت باشد. اما شاید هم قرار نبوده است که ببینم. اگر مشتری‌ای معمولی باشم، محتمل‌تر است که در زمان هجوم‌های مشتریان، در غذاخوری باشم، و به همین دلیل، تخمینم از محبوبیت آن (یعنی X^*)، بسیار بیشتر از محبوبیت واقعیش (یعنی $\bar{X}$) باشد.

تعداد میانگین افرادی که در روزهای معمولی به ساحل می‌آیند، همیشه کمتر از تعداد میانگین افرادی است که شخصی عادی که به ساحل می‌رود، در آنجا می‌یابد. زیرا در روزهایی که ساحل شلوغ است، عدهٔ بیشتری به ساحل می‌آیند، اما وقتی ساحل خلوت است، عدهٔ کمی آنجا هستند.

اگر زمان انتظار در مرکز سلامت، با تعداد بیماران افزایش یابد، زمان انتظار در روزی معمولی همیشه کمتر از میانگین زمان انتظار به‌ازای بیماری معمولی است، زیرا روزهایی که زمان انتظار طولانی‌تر است، بیماران بیشتری در صف انتظار هستند. امید تعداد افراد هر نسل، کمتر از افرادی است که با شخصی که به‌طور تصادفی از یکی از آن نسل‌ها انتخاب شده است، هم‌نسل‌اند.

در شکل‌های تراکم جمعیت در هر ناحیه، مقدار تراکم کمتر از میانگین آن به‌ازای هر ساکن است.

در این یادداشت، تفاوت دو نوع میانگین را از دید ریاضی بررسی کردیم، و از یافته‌ای جدید دربارهٔ رفتار انسان‌ها خبر ندادیم. با این حال، در این مقاله چیزی دربارهٔ درک معلوم شد ــ به‌خصوص درک خودم. من در غذاخوری تعجب کردم. همین‌طور وقتی که درس‌هایی که در مدرسه داشتم، کلاس‌هایی پرجمعیت‌تر از آنچه تبلیغ می‌شد، داشتند. اگر شما هم با این چیزها غافلگیر شده‌اید، با خواندن این مقاله، درک شما و حتی شاید رفتارتان ممکن است تغییر کند.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

David Hemenway, "Why Your Classes Are Larger Than Average," in *The Harmony of the World*, edited by G. L. Alexanderson, the Mathematical Association of America, 2007, pp.255-256.

مسئلهٔ بورسوک

آرکادی اسکوپنکوف

در سال ۱۹۳۳ کارل بورسوک، ریاضیدان لهستانی، این قضیه را ثابت کرد:

قضیه. هر شکل کراندار در صفحه را می‌توان به سه بخش با قطر کمتر تقسیم کرد. (قطر هر شکل برابر است با بیشترین فاصلهٔ بین نقاط آن.) او تعمیمی هم در مورد این حکم پیشنهاد کرد که سال‌ها از جذاب‌ترین مسئله‌ها در زمینهٔ هندسهٔ ترکیبیاتی بود:

حدس بورسوک. هر شکل کراندار nبعدی را می‌توان به $n+1$ بخش با قطر کمتر تقسیم کرد.

این حکم آشکارا به‌ازای $n=1$ درست است. همچنین، یافتن شکل‌هایی nبعدی که نتوان آنها را به n بخش با قطر کمتر تقسیم کرد دشوار نیست. به‌ازای $n=3$ ساده‌ترین مثال چهاروجهی منتظم است: قطر آن برابر با طول یالش است و هر طورکه آن را به سه بخش تقسیم کنیم، دست‌کم یکی از بخش‌ها دوتا از چهار رأس را خواهد داشت و درنتیجه قطر دست‌کم یکی از بخش‌ها برابر با قطر خود چهاروجهی خواهد بود. این مثال را می‌توان به هر بعد دیگری تعمیم داد: چندوجهی nبعدی با $n+1$ رأس هم‌فاصله را سادک nبعدی می‌نامند.

تمرین ۱. مختصات رأس‌های سادکی چهاربعدی را بیابید.

در سال ۱۹۵۵ ه. ج. اگلستون[1]، ریاضی‌دان انگلیسی، حدس بورسوک را در بعد سه ثابت کرد. بعدها حدس در مورد کرهٔ nبعدی و در مورد شکل‌های محدبی که تقارن مرکزی دارند، و سپس در مورد همهٔ شکل‌های هموار (شکل‌هایی که «نقاط تیز» ندارند) ثابت شد. حل کامل کاری آسان به‌نظر می‌رسید. اما در ۱۹۹۳ دو ریاضی‌دان به نام‌های د. کان[2] و ج. کالای[3]، با دنبال کردن ایده‌ای از اردوش، لرمان و بولتیانسکی که به استفاده از ملاحظاتی ترکیبیاتی برای ساختن مثال نقضی مربوط بود، مثال نقضی برای حدس بورسوک یافتند! آنها ثابت کردند که مجموعه‌ای خاص از رأس‌های مکعب nبعدی را وقتی و فقط وقتی می‌توان به بخش‌هایی با قطر کمتر تقسیم کرد که تعداد بخش‌ها بر حسب n تقریباً $۱/۲^{\sqrt{n}}$ باشد. این عدد به‌ازای عددهای به‌قدرکافی بزرگ مانند n از $n+1$ بزرگ‌تر است.

حدس به همین راحتی رد شد! خوب، چنین فاجعه‌هایی در ریاضیات چندان هم نادر نیستند.

این مثال نقض از نتایج کمیاب در ریاضیات است که هم مهم‌اند و هم برای درکشان لازم نیست یک دورهٔ

1. H. G. Eggleston 2. D. Kahn 3. G. Kalai

دوساله درس‌های معمولی دانشگاه را خواند و سپس واحدی اختصاصی و شش‌ماهه گذراند، و درنهایت هم از جزئیات صرف‌نظر کرد. هدف اصلی این مقاله توصیف کاربرد مهم ترکیبیات در هندسه است. اما قبل از آنکه به این کار بپردازیم، برای آنکه ایده‌های ساخت مثال‌نقض روشن شوند و به روح مسئله دست یابیم، گریزی به مباحثی دیگر می‌زنیم.

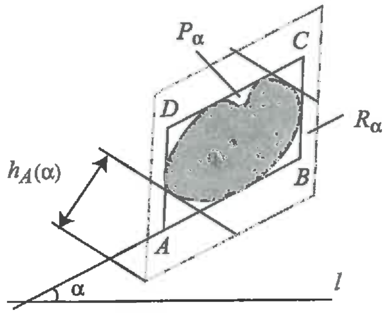
مسئلهٔ بورسوک در صفحه

این قسمت را با طرحی از روش حل مسئله در حالت دوبعدی شروع می‌کنیم. این کار عملاً با مثال نقض ارتباطی ندارد، اما به‌خودی‌خود مفید است و با آن، گستردگی ایده‌هایی که به مسئله مربوط‌اند آشکار می‌شود.

توجه کنید که شش‌ضلعی منتظم را می‌توان به سه پنج‌ضلعی با قطر کمتر از خود شش‌ضلعی تقسیم کرد (به شکل ۱ توجه کنید. قطر هر یک از این پنج‌ضلعی‌ها از فاصلهٔ ضلع‌های مقابل شش‌ضلعی هم کمتر است). بنابراین، کافی است ثابت کنیم که هر شکل در صفحه مانند Φ را می‌توان با شش‌ضلعی منتظمی که فاصلهٔ ضلع‌های مقابلش با قطر Φ (که آن را d می‌نامیم) برابر است، پوشاند. این شش‌ضلعی را بر اساس استفاده از «پیوستگی» می‌یابیم.

شکل ۱

خطی جهت‌دار و ثابت در صفحه مانند l در نظر بگیرید. کوچک‌ترین متوازی‌الاضلاع مانند $ABCD$ را که بر Φ محیط می‌شود و در آن $\angle BAD = ۶۰^\circ$ و l با AB زاویه‌ای برابر α می‌سازد، P_α بنامید (شکل ۲). ضلع‌های مقابل P_α را به‌طور موازی از هم دور کنید تا فاصله‌شان از یکدیگر d شود و لوزی‌ای مانند R_α با همان مرکز به‌دست آورید. از دو زاویهٔ شصت درجهٔ لوزی طوری بزرگ‌ترین مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ممکن را جدا کنید که شش‌ضلعی باقی‌مانده (که آن را H_α می‌نامیم) همچنان Φ را بپوشاند. ارتفاع‌های این دو مثلث را $h_A(\alpha)$ و $h_C(\alpha)$ بنامید (همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده‌ایم). وقتی جهت ضلع AB نیم‌دور عوض شود، همان متوازی‌الاضلاع و لوزی را به‌دست می‌آوریم که در ابتدا به‌دست آورده بودیم ($P_{\alpha+۱۸۰^\circ} = P_\alpha$ و $R_{\alpha+۱۸۰^\circ} = R_\alpha$)، فقط جای A و C (و نیز جای B و D) عوض می‌شود. یعنی $h_A(\alpha+۱۸۰^\circ) - h_C(\alpha+۱۸۰^\circ) = h_C(\alpha) - h_A(\alpha)$. چون



شکل ۲

تابع f که $f(X) = h_A(X) - h_C(X)$، تابعی پیوسته از X است، می‌توانیم از قضیهٔ مقدار میانی استفاده‌کنیم و نتیجه بگیریم زاویه‌ای مانند $\alpha_\circ$ که $\alpha \leqslant \alpha_\circ \leqslant \alpha + ۱۸۰^\circ$ وجود دارد که $h_A(\alpha_\circ) = h_C(\alpha_\circ)$ (زیرا یا $f(\alpha) = f(\alpha + ۱۸۰^\circ) = \circ$ یا $f(\alpha + ۱۸۰^\circ) = -f(\alpha)$). چون فاصلهٔ ضلع‌های مقابل شش‌ضلعی به‌دست‌آمده به‌ازای $\alpha_\circ$ از d بیشتر نیست، اگر لازم باشد می‌توانیم این ضلع‌ها را آن‌قدر از هم دورکنیم که فاصله‌شان دقیقاً برابر d شود و شش‌ضلعی‌ای را که می‌خواستیم بیابیم.

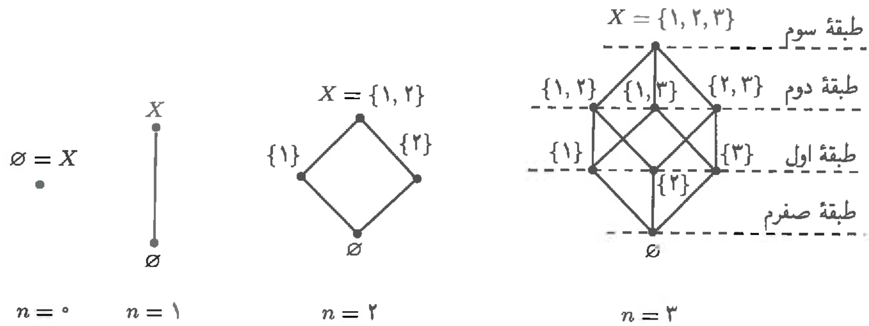
هندسهٔ مجموعهٔ زیرمجموعه‌ها

اساس روش کان‌ـکالای تخمین تعداد زیرمجموعه‌های خاصی از مجموعه‌ای متناهی است. به‌همین دلیل، کار را با مشخص کردن رابطهٔ این زیرمجموعه‌ها با رأس‌های مکعب چندبعدی آغاز می‌کنیم.

زیرمجموعه‌های مجموعهٔ متناهی X را که $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ به‌صورت نقاطی از صفحه مشخص می‌کنیم. این نقاط را در $n + ۱$ «طبقه» (یعنی خطوطی افقی با شماره‌های ۰، ۱، . . . و n از پایین تا بالا) می‌چینیم. مجموعهٔ تهی $\varnothing$ در «همکف» (طبقهٔ صفرم) قرار می‌گیرد؛ مجموعه‌های تک‌عضوی $\{۱\}$، $\{۲\}$، . . . و $\{n\}$ در طبقهٔ اول قرار می‌گیرند، و به‌همین ترتیب. آخرین طبقه (طبقهٔ nام) را یک «مستأجر» اشغال می‌کند: خود مجموعهٔ X. تعداد نقاط در طبقهٔ kام برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-۱) \times \cdots \times (n-k+۱)}{k \times (k-۱) \times \cdots \times ۲ \times ۱}$$

هر دو نقطه‌ای را که مجموعهٔ متناظر با یکی از آنها فقط یک عضو بیشتر از مجموعهٔ متناظر با نقطهٔ دیگر دارد، با خطی به هم وصل کنید. چنین نقطه‌هایی در طبقه‌های همسایه‌اند. در شکل ۳ گرافی را که به این ترتیب به‌ازای $n = \circ, ۱, ۲, ۳$ به‌دست می‌آید می‌بینید.



شکل ۳

تمرین ۲. گراف بالا را به‌ازای $n = ۴$ رسم کنید.

با این روش چه به‌دست می‌آوریم؟ بله، اینها مکعب‌های nبعدی (به‌بیان دقیق‌تر، گراف رأس‌ها و یال‌های آنها) هستند. این امر به‌ازای مقادیر کوچک n آشکار است. به‌هر حال، برای مقصود ما رأس‌ها کافی هستند. در حقیقت، ما فقط با رأس‌های مکعب nبعدی استاندارد (یعنی همهٔ nتایی‌ها از رقم‌های صفر و یک) کار خواهیم داشت.

از دید هندسی، این nتایی‌ها مختصات نقاط (رأس‌های مکعب) در فضای nبعدی‌اند. فاصلهٔ بین هر دوتا از آنها، مثلاً $\alpha = (\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_n)$، با دستور آشنای

$$\sqrt{(\alpha_۱ - \beta_۱)^۲ + (\alpha_۲ - \beta_۲)^۲ + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)^۲}$$

تعریف می‌شود. هدف ما این است که زیرمجموعه‌ای از این نقطه‌ها بیابیم که نتوان آن را طوری به $n + ۱$ بخش افراز کرد که قطر هر یک، از قطر کل زیرمجموعه کمتر باشد. آسان‌تر است که از مجذور فاصله استفاده کنیم تا از خود آن، و با این کار مسئله تغییر نمی‌کند. ولی به‌ازای نقاطی که با آنها سروکار داریم (که در آنها α_i و β_i هر یک، صفر یا یک‌اند)، $(\alpha_i - \beta_i)^۲ = |\alpha_i - \beta_i|$، و بنابراین می‌توانیم فاصله را با دستور $|\alpha_۱ - \beta_۱| + |\alpha_۲ - \beta_۲| + \ldots + |\alpha_n - \beta_n|$ مشخص کنیم. فاصله‌ای که با این دستور تعریف می‌شود، فاصلهٔ همینگ نام دارد. این فاصله را می‌توانیم به‌صورت تعداد «تفاوت‌ها» بین α و β تعریف کنیم، یعنی تعداد رقم‌هایی که در یکی با رقم متناظرش در دیگری تفاوت دارد.

از دید ترکیبیاتی، هر نقطه مانند $(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$ را می‌توان به زیرمجموعه‌ای از X مانند A مربوط کرد که شامل تمام عددهایی مانند i است که $\alpha_i = ۱$. بنابراین، تناظری یک‌به‌یک بین رأس‌های مکعب و زیرمجموعه‌های X می‌یابیم. توجه کنید که اگر رأس‌ها را زیرمجموعه‌هایی بینگاریم، فاصلهٔ همینگ برابر تعداد اعضایی است که عضو فقط یکی از دو مجموعه است. مجموعهٔ تمام چنین اعضایی را تفاضل متقارن این دو زیرمجموعه می‌نامند.

این تناظر چگونه به‌کار می‌آید؟

برای اینکه به این تناظر عادت کنیم، بیایید این مسئله را حل کنیم.

بهترین‌ها در قیاس با خودشان. در المپیاد ریاضی‌ای، هر شرکت‌کننده جایزه گرفت، زیرا مقایسهٔ نتیجه‌های شرکت‌کننده‌ها ممکن نبود: هیچ‌یک از آنها نتوانسته بود همهٔ مسئله‌هایی را که دیگری حل کرده بود، حل کند. یعنی به‌ازای هر شرکت‌کننده مانند «الف»، هیچ شرکت‌کننده‌ای مانند «ب» پیدا نمی‌شد که «الف» همهٔ سؤالاتی را که «ب» حل کرده بود، حل کرده باشد. اگر تعداد کل مسئله‌ها n باشد، تعداد شرکت‌کننده‌ها حداکثر چند است؟

می‌توانیم هر شرکت‌کننده را با مجموعهٔ مسئله‌هایی که حل کرده مشخص کنیم. بنابر فرض مسئله هیچ‌یک از این مجموعه‌ها زیرمجموعه‌ای از دیگری نیست. اگر چنین مجموعه‌هایی را مقایسه‌نشدنی بنامیم، مسئله را می‌توانیم به این شکل مطرح کنیم: «تعداد اعضای بزرگ‌ترین خانوادهٔ مقایسه‌نشدنی از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای n عضوی را بیابید.»

توجه کنید که مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های kعضوی از مجموعهٔ X که $X = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ (یعنی «نقطه‌های طبقهٔ kام») خانواده‌ای مقایسه‌نشدنی است. تعداد اعضای این خانواده برابر است با $\binom{n}{k}$.

تمرین ۳. ثابت کنید که $\binom{n}{k}$ وقتی بیشینه است که $k = \left[\frac{n}{۲}\right]$.

بنابراین، خانواده‌ای مقایسه‌نشدنی که تعداد عضوهایش برابر $\binom{n}{[n/۲]}$ است وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که تعداد بیشتری مجموعهٔ مقایسه‌نشدنی نمی‌توان یافت. بیایید از نمایش زیرمجموعه‌ها به‌عنوان رأس‌های مکعب nبعدی استفاده کنیم.

زیرمجموعه‌ای مانند A وقتی زیرمجموعه‌ای مانند B دارد که بتوانیم با یکی‌یکی افزودن تعدادی عضو به B، به مجموعهٔ A برسیم. این تبدیل تدریجی B به A متناظر با مسیری در گراف ماست. این مسیر از دنباله‌ای به‌هم‌پیوسته از یال‌ها تشکیل شده است که به طرف بالا می‌روند و B را به A وصل می‌کنند. هر چنین مسیری از پایین‌ترین رأس (یعنی $\varnothing$) به بالاترین رأس (یعنی X) را زنجیر می‌نامیم. در نتیجه، وقتی و فقط وقتی $B \subset A$ که نقاط متناظر آنها (که آنها را با زیرمجموعه‌ها یکی در نظر می‌گیریم) در یک زنجیر باشند و B پایین‌تر از A باشد. نتیجه می‌گیریم که هر زنجیر حداکثر از یکی از نقطه‌های خانواده‌ای مقایسه‌نشدنی می‌گذرد و به‌این‌ترتیب به این نابرابری می‌رسیم

$$\text{تعداد اعضای هر خانوادهٔ مقایسه‌نشدنی} \leq \frac{\text{تعداد کل زنجیرها}}{\text{کمترین تعداد زنجیرهایی که از نقطه‌ای می‌گذرند}}$$

حساب می‌کنیم که صورت و مخرج در کسر بالا هر یک چند است. هر زنجیر مانند

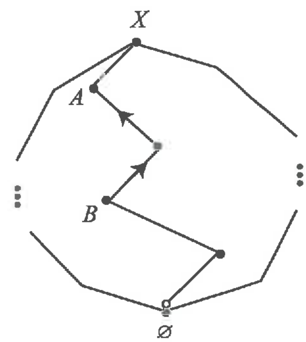
$$\varnothing \subset \{i_۱\} \subset \{i_۱, i_۲\} \subset \ldots \subset \{i_۱, \ldots, i_n\} = X$$

با ترتیب عددهای ۱، ۲، ... و n وقتی‌که از $\varnothing$ به X می‌رویم (یعنی با جایگشت $(i_۱, \ldots, i_n)$ از مجموعهٔ X) به‌طور یکتا مشخص می‌شود. می‌دانیم که تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$. یعنی صورت کسر برابر $n!$ است.

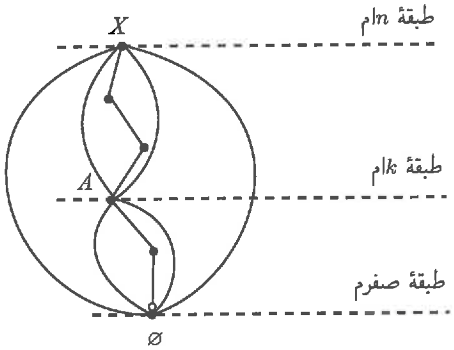
اکنون زنجیرهایی را که از نقطه‌ای ثابت مانند A در طبقهٔ kام می‌گذرند در نظر بگیرید. هر یک از این زنجیرها در نقطهٔ A به دو بخش پایینی و بالایی تقسیم می‌شوند (شکل ۵). چون تعداد اعضای A برابر k است، زیرمجموعه‌هایش مکعبی kبعدی تشکیل می‌دهند که شامل بخش پایینی هر زنجیری است که از A می‌گذرد. در نتیجه، تعداد بخش‌های پایینی برابر است با $k!$. مشابهاً، هر مجموعه‌ای که شامل A باشد، با افزودن تعدادی از اعضای مجموعهٔ $X - A$ به A به‌دست می‌آید، و تعداد اعضای $X - A$ برابر با $n - k$ است. مجموعهٔ زیرمجموعه‌های این مجموعهٔ $(n-k)$عضوی، همان مکعب $(n-k)$بعدی است. در نتیجه، تعداد بخش‌های بالایی برابر است با $(n-k)!$. بنابراین، تعداد زنجیرهایی که از A می‌گذرند برابر است با $k!(n-k)!$. این عدد وقتی کمترین مقدار را دارد که $k = \left[\frac{n}{۲}\right]$ (با تمرین ۳ مقایسه کنید). در نتیجه، تعداد اعضای هیچ خانوادهٔ مقایسه‌نشدنی‌ای از

$$\frac{n!}{[n/۲]!(n-[n/۲])!} = \binom{n}{[n/۲]}$$

بیشتر نیست و به‌این‌ترتیب، حل مسئله کامل می‌شود.



شکل ۴



شکل ۵

تمرین ۴. ثابت کنید که اگر زیرمجموعه‌هایی مانند $A_۱$، ... و A_m از مجموعه‌ای nعضوی خانواده‌ای مقایسه‌نشدنی تشکیل دهند و به‌ترتیب $a_۱$، ... و a_m عضو داشته باشند، آنگاه

$$\binom{n}{a_۱}^{-۱} + \cdots + \binom{n}{a_m}^{-۱} \leqslant ۱$$

شمردن تعداد نقاط مشترک

مثال نقض کان-کالای با مفاهیم مختلفی مربوط است و از راهی پیچیده که از مجموعه‌ها، مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها، و حتی مجموعه‌هایی از مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها می‌گذرد به‌دست می‌آید. به همین دلیل، کوشیدم مسئله‌هایی

ابداع کنم که ایده‌های اساسی این روش به‌طور ملموس در آنها ظاهر شوند. کاملاً طبیعی است که فرمول‌بندی‌ها تقریباً غیرطبیعی به‌نظر برسند (این مسئله‌ها مصنوعی‌اند) اما امیدوارم با کمک این مسئله‌ها بتوانید نکته‌های اصلی روش را درک کنید. ضمناً، اولین مسئله، در دوره‌ای از تمرین تیم روسیه قبل از المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شد.

شیرینی‌پز و دوازده نفر. خانم مهماندار می‌تواند k نوع کیک بپزد. روزی او ۶۶ نفر را به میهمانی‌ای بزرگ دعوت کرد. هر گروه ۳۶نفره از مهمان‌ها کیکی خوردند. معلوم شد که هیچ دو گروهی وجود نداشتند که اعضای هر دو از یک نوع کیک خورده باشند و تعداد افراد مشترک بین دو گروه دقیقاً برابر ۱۸ نفر باشد. ثابت کنید مهماندار می‌تواند از ۱۲ مهمان دعوت کند و کیکی به هر گروه ۶نفره بدهد، طوری که هیچ دو گروهی که اعضایشان یک نوع کیک بخورند و دقیقاً ۳ نفر در اشتراک دو گروه باشند، وجود نداشته باشند.

راه حل. ۶۶ مهمان را به ۱۱ گروه مانند G_1، ... و G_{11} که در هر یک شش نفر حضور دارند، تقسیم کنید. مهمانان در مهمانی دوم را با شماره‌های ۰، ۱، ... و ۱۱ شماره‌گذاری کنید. به هر گروه مانند $\{i_1, i_2, \dots, i_6\}$ (که در اینجا، $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_6 \leqslant 11$)، اگر $i_1 \neq 0$ کیکی از همان نوعی را بدهید که افراد گروه $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_6}$ خوردند و اگر $i_1 = 0$ کیکی از نوعی بدهید که افراد گروه $(G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_6})^c$ خوردند. با بررسی مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که با این روش توزیع کیک‌ها، شرط‌های مهمانی برآورده خواهند شد. برای مثال، اگر فرض کنیم که دو گروه مانند $\{i_1, i_2, \dots, i_6\}$ و $\{j_1, j_2, \dots, j_6\}$ که در آنها $i_1 \neq 0$ و $j_1 \neq 0$، سه عضو مشترک، مثلاً a، b و c، داشته باشند، در این‌صورت، گروه‌هایی متناظر در مهمانی اول (یعنی $G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_6}$ و $G_{j_1} \cup G_{j_2} \cup \cdots \cup G_{j_6}$) ۱۸ نفر (که اعضای مجموعهٔ $G_a \cup G_b \cup G_c$ هستند)، در اشتراک خواهند داشت، که این امر با فرض مسئله در تناقض است. ■

تمرین ۵. ثابت کنید که حکم مسئله با جانشین کردن ۶۶، ۳۶، ۱۸، ۱۲، ۶، ۳ با به‌ترتیب $k(4n-1)$، $2nk$، nk، $4n$، $2n$، n درست باقی می‌ماند.

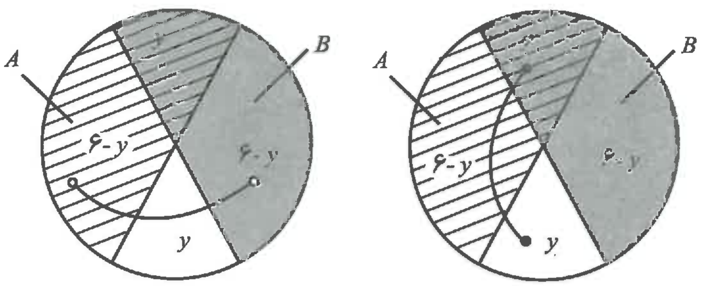
راه‌حلی را که در بالا دیدید، اعضای تیم المپیاد یافتند. اما این مسئله در حقیقت، به‌عنوان نتیجه‌ای از مسئلهٔ زیر پدیدار می‌شود. به‌این‌ترتیب، منشأ مقدارهای عددی نسبتاً نامعمولی که در هر دوی این مسئله‌ها آمده‌اند، تا حدودی مشخص می‌شود.

یال‌های بیرون‌آمده. در مجموعه‌ای شامل ۱۲ نقطه، هر دو نقطه با یالی به یکدیگر متصل‌اند. وقتی می‌گوییم یالی از زیرمجموعه‌ای داده‌شده از این نقطه‌ها بیرون آمده است که دقیقاً یکی از نقاط انتهایی آن یال عضوی از این زیرمجموعه باشد. ثابت کنید که هر دو زیرمجموعهٔ ۶نقطه‌ای حداقل ۱۸ یال بیرون‌آمدهٔ مشترک دارند.

راه حل. دو زیرمجموعهٔ ۶نقطه‌ای مانند A و B در نظر بگیرید. فرض کنید y تعداد نقاط مشترک آنها باشد. وقتی و فقط وقتی یالی هم از A و هم از B بیرون می‌آید که، یا یکی از نقاط انتهاییش عضوی از هر دوی زیرمجموعه‌ها (یعنی $A \cap B$) باشد و نقطهٔ انتهایی دیگرش عضو هیچ‌یک نباشد (یعنی عضو $A^c \cap B^c$ باشد)، یا یکی از نقاط انتهاییش عضو A باشد و عضو B نباشد (یعنی عضو $A \cap B^c$ باشد) و نقطهٔ انتهایی دیگرش عضو B باشد و

عضو A نباشد (یعنی عضو $B \cap A^c$ باشد). تعداد یال‌های نوع اول برابر با $y^۲$ است (شکل ۶الف را ببینید)، و تعداد یال‌های نوع دوم برابر با $(۶ - y)^۲$ است (شکل ۶ب). در نتیجه تعداد کل یال‌های «دو بیرون آمده» برابر است با $y^۲ + (۶ - y)^۲$. اما

$$y^۲ + (۶ - y)^۲ \geq \frac{(y + (۶ - y))^۲}{۲} = ۱۸$$



(ب) (الف)

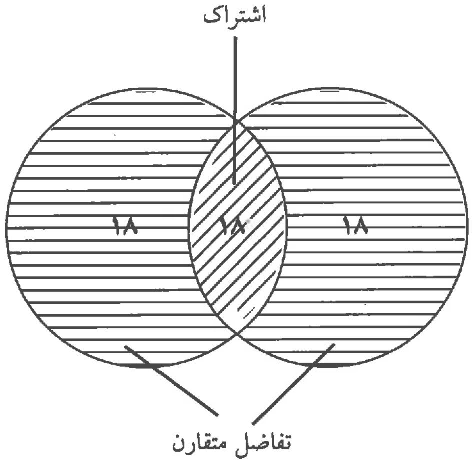
شکل ۶

■

بنابراین، اگر تعداد یال‌هایی که هم‌زمان از دو مجموعهٔ ۶ نقطه‌ای بیرون آمده‌اند برابر ۱۸ نباشد، آن‌وقت تعداد نقطه‌های مشترک دو مجموعه برابر ۳ نیست. همچنین توجه کنید که تعداد یال‌هایی که ۱۲ نقطه را به یکدیگر متصل می‌کنند برابر است با $۶۶ = \binom{۱۲}{۲}$ و تعداد یال‌هایی که از هر مجموعهٔ ۶ نقطه‌ای بیرون می‌آید $۳۶ = ۶ \times ۶$ است. حالا این عددها را با عددهای مسئلهٔ «شیرینی‌پز و دوازده نفر» مقایسه کنید!

تمرین ۶. مسئلهٔ «شیرینی‌پز و دوازده نفر» را با استفاده از مسئلهٔ «یال‌های بیرون‌آمده» حل کنید.

معنای همهٔ این تمرین‌های ترکیبیاتی مربوط به حدس بورسوک وقتی روشن خواهد شد که بین مجموعه‌های یال‌ها فاصلهٔ همینگ را برقرار کنیم. اگر خودمان را مانند بالا به مجموعه‌های ۳۶عضوی از یال‌های بیرون‌آمده از زیرمجموعه‌های ۶نقطه‌ای از مجموعه‌ای ۱۲نقطه‌ای محدود کنیم، قطر همینگ این خانواده از مجموعه‌ها ۳۶ است (زیرا هر دو تا از چنین مجموعه‌هایی، حداقل ۱۸ عضو مشترک دارند، و بنابراین تفاضل متقارن آنها حداکثر $۳۶ = (۱۸ - ۳۶) + (۱۸ - ۳۶)$ عضو دارد (شکل ۷ را ببینید). به‌علاوه، توصیفی از مجموعه‌هایی که بیشترین فاصله را از یکدیگر دارند، در دست داریم: این مجموعه‌ها با مجموعه‌هایی ۶نقطه‌ای که دقیقاً ۳ نقطهٔ مشترک دارند ایجاد می‌شوند. با این ساختار است (در حالت بُعد $n = ۶۶$) که حدس بورسوک نقض می‌شود. اکنون این ساختار را صوری‌تر و کلی‌تر توضیح می‌دهیم.



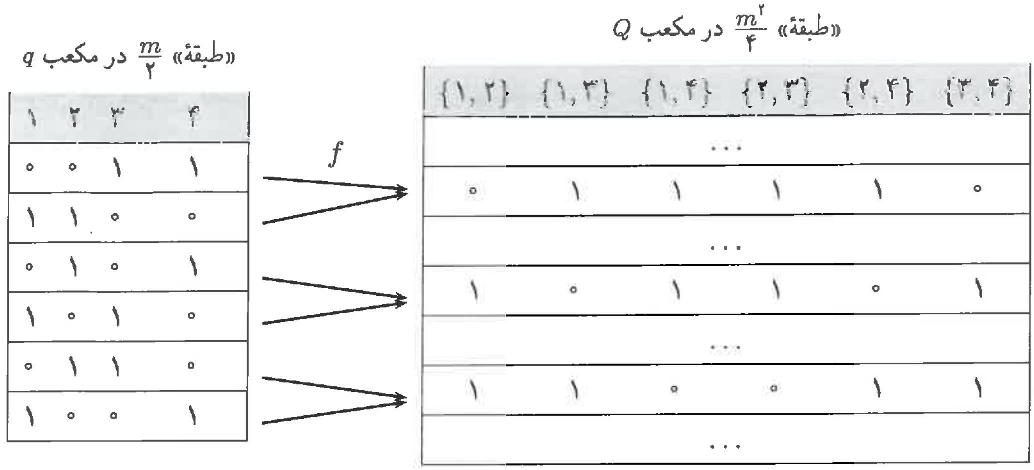
شکل ۷

ساختن مثال

به‌ازای هر عدد صحیح و زوج مانند m، مجموعه‌ای از m عضو مانند S (که در بالا آنها را «نقطه‌ها» نامیدیم) و مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایش (به‌عنوان مکعبی mبعدی به نام q) در نظر بگیرید. سپس مجموعهٔ P را مجموعهٔ همهٔ جفت‌های تشکیل‌شده از عضوهای S تعریف کنید (P از $m(m-۱)/۲$ عضو ــ که آنها را در بالا «یال» نامیدیم ــ تشکیل شده است) و مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های P را به‌عنوان مکعبی $m(m-۱)/۲$بعدی، Q بنامید. به بزرگ‌ترین «خانوادهٔ مقایسه‌نشدنی از زیرمجموعه‌ها»ی S، یعنی نقطه‌هایی که در طبقهٔ $m/۲$ام در q قرار دارند، توجه کنید. مجموعه‌ای که نیاز داریم (و آن را X می‌نامیم) تصویر این خانواده تحت تابعی مانند f از q به Q است. به‌بیان دقیق‌تر، به‌ازای هر زیرمجموعه از S مانند A (نقطه‌ای از q)، $f(A)$ را زیرمجموعه‌ای از P (نقطه‌ای از Q) تعریف کنید که شامل همهٔ جفت‌هایی است که دقیقاً یک عضو در A دارد. (بنابراین، با استفاده از واژه‌های بخش قبلی، $f(A)$ برابر است با مجموعهٔ یال‌هایی که از A «بیرون می‌آیند».) این تابع در شکل ۸ نمایش داده شده است.

تمرین ۷. ثابت کنید که مجموعهٔ X در طبقهٔ $m^۲/۴$ام مکعب Q قرار دارد.

قطر X را بر مبنای فاصلهٔ همینگ می‌یابیم. برای تنوع، کمی متفاوت با قبل عمل می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم، فاصلهٔ همینگ بین زیرمجموعه‌هایی مانند $f(A)$ و $f(B)$ از مجموعهٔ همهٔ جفت‌ها (یعنی P) برابر است با تعداد جفت‌ها در تفاضل متقارن $f(A)$ و $f(B)$ که شامل این دو دسته جفت‌هاست: (۱) جفت‌هایی که عضو $f(A)$ هستند و عضو $f(B)$ نیستند و (۲) جفت‌هایی که عضو $f(B)$ هستند و عضو $f(A)$ نیستند. وقتی جفتی عضو $f(A)$ است که دقیقاً یکی از اعضایش عضو A باشد؛ وقتی عضو $f(B)$ نیست که یا هر دوی عضوهایش عضو



شکل ۸. دنباله‌های ۱-۰ در سمت چپ تمام زیرمجموعه‌های $m/۲$عضوی مجموعهٔ $\{۱,۲,\dots,m\}$ (به‌ازای $m=۴$) را مشخص می‌کنند: مثلاً ۰۰۱۱ زیرمجموعهٔ $\{۳,۴\}$ را مشخص می‌کند. از طرف دیگر، این دنباله‌ها را می‌توان مختصات رأس‌های مکعبی mبعدی تصور کرد که در طبقهٔ $m/۲$ام قرار دارند. معنای رقم‌های سمت راست مشابه است، بجز اینکه در اینجا مجموعه شامل $m(m-۱)/۲$ (به‌جای m) عضو است ــ جفت‌های $\{۱,۲\}$، $\{۱,۳\}$، ... و $\{m-۱,m\}$. پیکان‌ها هر زیرمجموعه در سمت چپ را به مجموعهٔ جفت‌هایی که از این مجموعه «بیرون می‌آیند» وصل می‌کنند.

B باشند یا هیچ‌یک از اعضایش عضو B نباشند. به‌بیان دیگر، یا یکی از عضوهای جفت باید هم عضو A باشد هم عضو B و دیگری عضو B باشد اما عضو A نباشد (تعداد چنین جفت‌هایی برابر است با $y(m/۲-y)$ که در اینجا، y تعداد اعضای $A\cap B$ است)، یا یکی از اعضا عضو A باشد و عضو B نباشد، و دیگری نه عضو A باشد و نه عضو B (تعداد چنین جفت‌هایی برابر است با $y(m/۲-y))$. در نتیجه، تعداد جفت‌های نوع (۱) برابر است با $۲y(m/۲-y)$. آشکارا، به همین ترتیب تعداد جفت از نوع (۲) وجود دارد. بنابراین، فاصلهٔ بین $f(A)$ و $f(B)$ برابر $۴y(m/۲-y)$ است. مقدار این عبارت به‌ازای $y=m/۴$ بیشینه است و مقدار بیشینه برابر است با $m^۲/۴$. بنابراین، اگر X به بخش‌هایی با قطر کمتر تقسیم شود، آن‌وقت به‌ازای هر دو نقطه مانند $f(A)$ و $f(B)$ که در یک بخش باشند، تعداد نقاط مشترک در A و B برابر $m/۴$ نیست.

کمک غیرمنتظره

قصد داشتیم تمام ساختمان‌هایمان مناسب شرایط این قضیه باشند، که فرانکل و ویلسون مدت‌ها قبل آن را اثبات کردند و سپس کاربردی غیرمنتظره در حل مسئلهٔ بورسوک برای آن پیدا شد.

قضیه. فرض کنید F خانواده‌ای از زیرمجموعه‌هایی $m/۲$عضوی و متمایز از مجموعه‌ای mعضوی باشد، به‌طوری که هیچ دو تا از آنها دقیقاً $m/۴$ عضو مشترک ندارند. اگر $m=۴p^\alpha$ که در اینجا p عدد اول و بزرگ‌تر از

۲ و α عددی صحیح و نامنفی است، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های عضو F حداکثر برابر است با $\text{۲}\binom{m-\text{۱}}{m/\text{۴}-\text{۱}}$.

تمرین ۸. درستی قضیه را به‌ازای $m=\text{۴}$ بررسی کنید.

با استفاده از این قضیه نتیجه می‌گیریم که اگر مجموعهٔ X موردنظر ما به بخش‌هایی با قطر کمتر تقسیم شود، آنگاه پیش‌تصویر هریک از بخش‌ها مانند A (یعنی $(f^{-\text{۱}})(A)$) از حداکثر $\text{۲}\binom{m-\text{۱}}{m/\text{۴}-\text{۱}}$ عضو تشکیل شده است. بنابراین، اگر تعداد بخش‌ها N باشد، تعداد عضوها در پیش‌تصویر همهٔ مجموعهٔ X (یعنی در طبقهٔ $m/\text{۲}$ از مکعب q) حداکثر برابر است با $\text{۲}N\binom{m-\text{۱}}{m/\text{۴}-\text{۱}}$. اما این عدد مساوی $\binom{m}{m/\text{۲}}$ است، و در نتیجه

$$N \geq \frac{\binom{m}{m/\text{۲}}}{\text{۲}\binom{m-\text{۱}}{m/\text{۴}-\text{۱}}}$$

تنها کار باقی‌مانده، تخمین مقدار سمت راست است. برای این کار، از دستور مُجانبی معروف استرلینگ در مورد $n!$ استفاده می‌کنیم که بنابر آن، $n!$ به‌ازای اعدادی طبیعی مانند n که به قدرکافی بزرگ باشند، تقریباً برابر است با $\sqrt{\text{۲}\pi n}e^{-n}n^n$.

تمرین ۹. ثابت کنید که به‌ازای اعداد به قدرکافی بزرگ مانند m،

$$N > \frac{m(m-\text{۱})}{\text{۲}} + \text{۱}$$

در نتیجه، با شیوهٔ ساخت ما اگر m به‌اندازهٔ کافی بزرگ و به‌شکل $\text{۴}p^{\alpha}$ باشد، مثال نقضی برای حدس بورسوک فراهم می‌شود.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

Arkady Skopenkov, "Borsuk's problem", *Quantum*, September/ October 1996, pp. 17-21.

هر گردی گردو نیست، هر چرخی دایره!

بهزاد اسلامی مسلّم، کسری علیشاهی

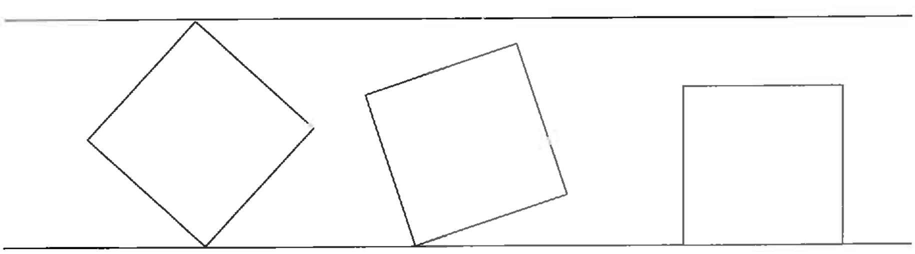
۱. چاه‌های مربعی

دایره‌ای بودن چاه‌ها، به استحکام دیوارهٔ آنها کمک می‌کند، و کندن چاه دایره‌ای از کندن چاه مثلاً مربعی راحت‌تر است. اما لحظه‌ای این امور فنی را فراموش کنید. می‌خواهیم چاهی با شکلی بکنیم و روی آن دری با همان شکل بگذاریم. اگر شکل چاه و شکل در مربع باشند، چه اتفاق بدی ممکن است بیفتد؟

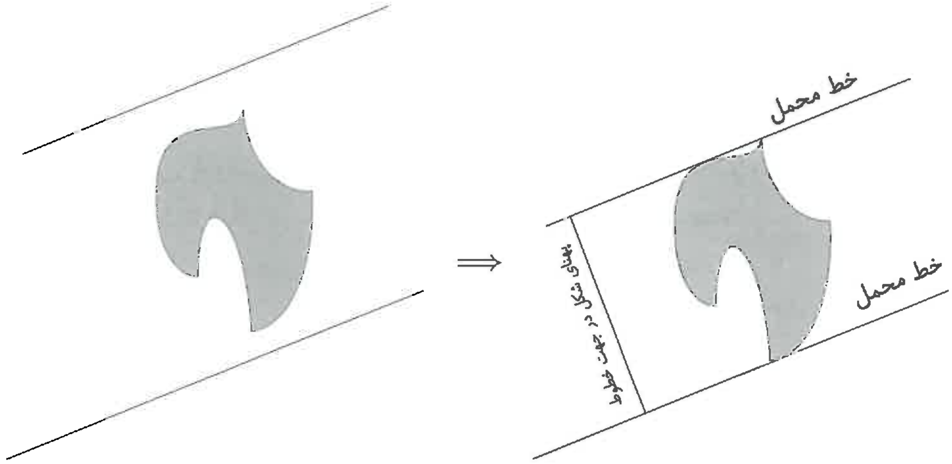
بله! ممکن است در چاه به درون چاه بیفتد! به این شکل نگاه کنید.

چه شکل‌های دیگری می‌شناسید که این خاصیت را دارند؟ آیا چاه‌های مثلثی هم همین دردسر را ایجاد می‌کنند؟ آیا می‌توانید بگویید چرا در مورد دایره این مشکل وجود ندارد؟

بیایید دوباره به چاه مربعی فکر کنیم. چرا در چاه را می‌توانیم در بعضی جهت‌ها به درون چاه بیندازیم؟ دلیل این است که مربع در بعضی جهت‌ها پهن‌تر از بعضی جهت‌های دیگر است. به این شکل نگاه کنید.

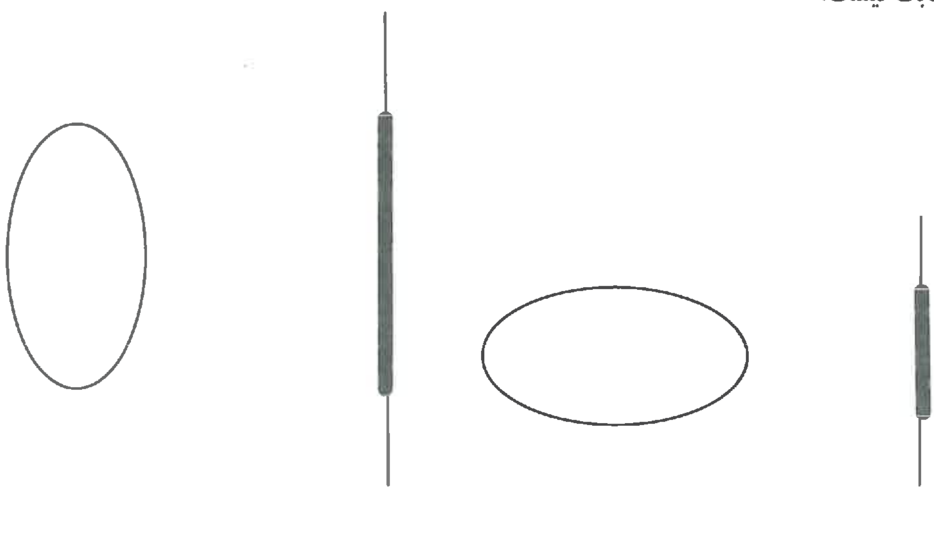


وقتی می‌خواهیم پهنای شکلی را بسنجیم، آن را بین دو انگشت شست و اشاره می‌گیریم، و می‌بینیم که فاصلهٔ دو انگشت چقدر است. با همین راه می‌توانیم پهنای شکل در جهت‌های مختلف را به زبان ریاضی تعریف کنیم. دو خط موازی در نظر بگیرید و شکلی را بین آنها بگذارید. حالا آن‌قدر این خطوط را به یکدیگر نزدیک کنید که هر یک، مربع را در نقطه‌ای قطع کند. این دو خط را در چنین وضعیتی، **خطوط محمل** شکل می‌نامیم. فاصلهٔ خطوط محمل را **پهنای شکل** (در جهت آن خطوط) می‌نامیم.



پهنای دایره در همهٔ جهت‌ها یکسان و برابر قطر دایره است. چنین شکلی را **شکل با پهنای ثابت** می‌نامیم.

به بیان دیگر، شکل با پهنای ثابت شکلی است که وقتی آن را بچرخانیم (یا برعکس، خط را بچرخانیم)، سایه‌ای که از آن در اثر دسته‌ای پرتوی موازی ایجاد می‌شود، طول ثابت داشته باشد. در این شکل می‌بینیم که بیضی شکلی با پهنای ثابت نیست.



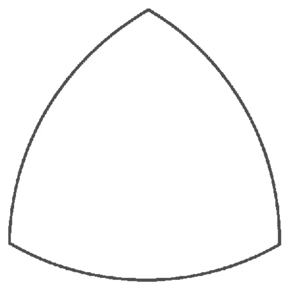
تعبیری از اینکه پهنای مربع ثابت نیست، چنین است: کتابی را روی دو منشور با قاعدهٔ مربع قرار می‌دهیم. با سختی زیاد بالاخره می‌توانیم کتاب را روی این دو منشور حرکت دهیم. اما طی این حرکت، کتاب بالا و پایین می‌رود. در صورتی که اگر حجم‌ها استوانه می‌بودند (و در نتیجه، سطح مقطعشان دایره می‌بود)، کتاب بالا و پایین نمی‌رفت.

آیا می‌توانید ارتباط شکل‌های با پهنای ثابت را با مسئلهٔ چاه بگویید؟ آیا شکل‌های دیگری با پهنای ثابت می‌شناسید؟ اگر نه، سعی کنید پیدا کنید. (راهنمایی: از پرگار استفاده کنید.)

۲. هر چرخی دایره نیست!

اگر تنها شکل با پهنای ثابت، دایره بود، صنعتگران می‌توانستند برای اینکه دایره‌ای بودن سطح مقطع جسمی را بررسی کنند، پهناهای آن را در همهٔ جهت‌ها اندازه بگیرند، و اگر این پهناها یکسان بودند، خیالشان از بابت دایره‌ای بودن سطح مقطع راحت می‌بود. اما این‌طور نیست، زیرا شکل‌های دیگری هم با پهنای ثابت وجود دارند. بی‌نهایت شکل دیگر!

ساده‌ترین شکل با پهنای ثابت که دایره نیست، مثلث رولو نام دارد. فرانتس رولو[1] (ریاضی‌دان و مهندس) اولین کسی بود که متوجه شد این شکل پهنای ثابت دارد، گرچه شکل را بعضی ریاضی‌دانان قبلی هم می‌شناختند.

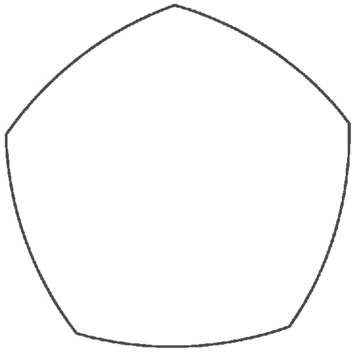


مثلث رولو

برای روش ترسیم مثلث رولو، ابتدا مثلثی متساوی‌الاضلاع به نام ABC رسم کنید. بعد دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ طول ضلع باز کنید و نوک پرگار را روی رأس A قرار دهید، و کمانی بزنید که B و C را به هم وصل کند. همین کار را با رأس‌های دیگر بکنید. حتماً این شکل را رسم کنید و برای خودتان دلیل بیاورید که چرا پهنای این شکل ثابت است.

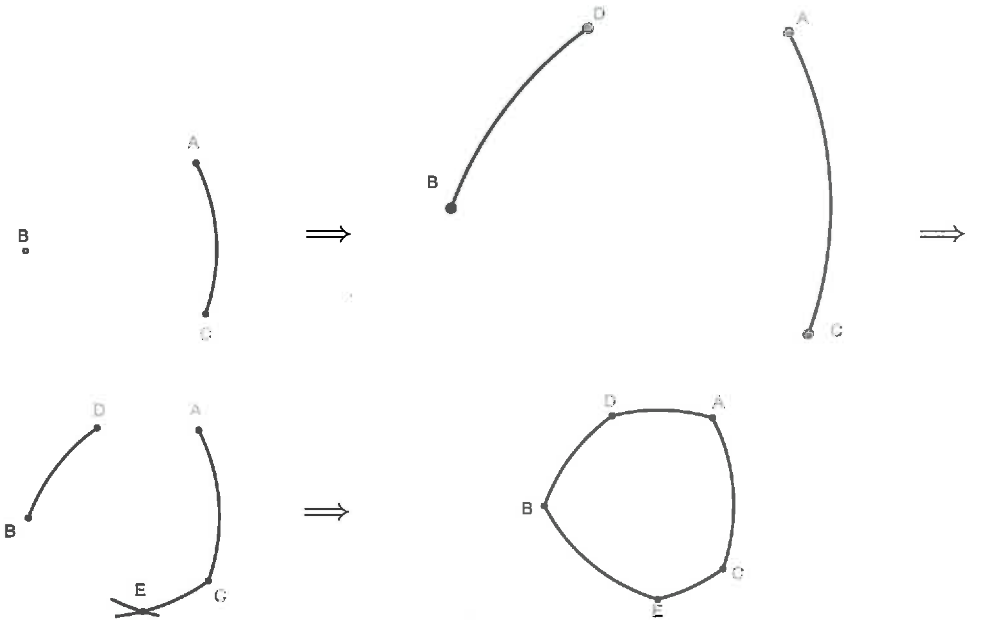
با همین روش، می‌توانید شکل‌های با پهنای ثابت دیگری نیز رسم کنید. مثلاً اگر همین کار را در مورد پنج‌ضلعی منتظم بکنید، به این شکل می‌رسید:

1. Franz Reuleaux (1829-1905)



توجه کنید که این کار را فقط می‌توان در مورد چندضلعی‌هایی با تعداد فرد ضلع کرد. می‌توانید بگویید چرا؟

راهی دیگر برای رسم شکل‌هایی با پهنای ثابت در شکل زیر مشخص شده است. توضیح اینکه، فرض کنید می‌خواهیم شکلی با پهنای ثابت برابر r رسم کنیم. نقطه‌ای مانند B در نظر می‌گیریم و کمانی به شعاع r و به مرکز B می‌زنیم. روی این کمان دو نقطه مانند A و C انتخاب می‌کنیم. کمانی به شعاع r و به مرکز C رسم می‌کنیم طوری که یکی از دو سر این کمان، نقطهٔ B باشد. روی این کمان نقطه‌ای مانند D انتخاب می‌کنیم. به مرکز D کمانی به شعاع r رسم می‌کنیم که یکی از دو سرش، C باشد. اگر بخواهیم ترسیم را تمام کنیم، روی این کمان نقطهٔ E را طوری انتخاب می‌کنیم که فاصله‌اش تا نقطهٔ A برابر r باشد. در این صورت، می‌توانیم کمان DA را به مرکز E و شعاع r رسم کنیم. با رسم کمان BE به مرکز A و کمان AD به مرکز E (هر دو به شعاع r)، کار به پایان می‌رسد.



فکر کنید که اگر بخواهیم تعداد کمان‌ها از پنج بیشتر باشد، چگونه باید این کار را ادامه دهیم. در اینجا هم باید تعداد کمان‌ها فرد باشد.

شاید با این مثال‌ها به نظر برسد که تمام شکل‌های با پهنای ثابت، از تعدادی کمان تشکیل شده‌اند. اما چنین نیست. شکلی با پهنای ثابت وجود دارد که هیچ قسمتی از آن، هر چند کوچک، کمانی از دایره نیست!

بیایید محیط مثلث رولو با پهنای یک را محاسبه کنیم. پس طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در ابتدای کار، یک واحد است. هر یک از کمان‌های مثلث رولو، شصت درجه‌اند. بنابراین طول هر یک از این کمان‌ها، $\frac{1}{6}$ محیط دایره با شعاع یک، یعنی $\frac{\pi}{3}$ است. بنابراین محیط مثلث رولو برابر است با π. این عدد با محیط دایره به قطر ۱ (که آن هم شکلی با پهنای ثابت برابر یک است) برابر است! آیا این صرفاً تصادف است؟ خیر!

قضیهٔ باربیه[1]. همهٔ شکل‌های با پهنای ثابت برابر a، محیط برابر دارند.

نتیجهٔ ۱ . محیط هر شکل با پهنای ثابت a، برابر πa است.

اثبات قضیهٔ باربیه را می‌توانید در انتهای همین مقاله بخوانید. نتیجهٔ ۱ را خودتان ثابت کنید (راهنمایی: از دایره استفاده کنید).

قضیه‌ای به نام **نابرابری محیطی** وجود دارد که بنابر آن، بین شکل‌هایی که محیط یکسان دارند، مساحت دایره با آن محیط از همه بیشتر است. بنابراین با توجه به قضیهٔ باربیه، می‌توانیم بگوییم که

نتیجهٔ ۲ . بین تمام شکل‌های با پهنای ثابت برابر a، دایره بیشترین مساحت را دارد.

در نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ پیاپی ۲۱، شهریور ۱۳۸۴ می‌توانید اثباتی کوتاه از قضیهٔ نابرابری محیطی بخوانید. می‌توان ثابت کرد که بین همهٔ شکل‌های با پهنای ثابت برابر a، مثلث رولو کمترین مساحت را دارد.

۳. هر گردی، کره نیست!

می‌توانیم در مورد اجسام سه‌بعدی هم تعریفی برای جسم با پهنای ثابت داشته باشیم. البته تعریف این نیست که سایهٔ این اجسام روی هر صفحه مساحت یکسان دارد، بلکه حجم با پهنای ثابت حجمی است که اگر آن را بین هر دو صفحهٔ موازی‌ای قرار دهیم و صفحه‌ها را تا حد ممکن به هم نزدیک کنیم، فاصلهٔ دو صفحه عددی ثابت باشد. کره این خاصیت را دارد، زیرا فاصلهٔ هر دو صفحه به شکلی که گفته شد، برابر قطر کره است.

اگر حجمی پهنای ثابت داشته باشد، می‌توانیم روی آن کتابی قرار دهیم و کتاب را در جهت‌های دلخواه حرکت بدهیم، بدون آنکه بالا و پایین برود. با دوران مثلث رولو حول یکی از محورهای تقارنش، می‌توانیم چنین حجمی با پهنای ثابت بیابیم:

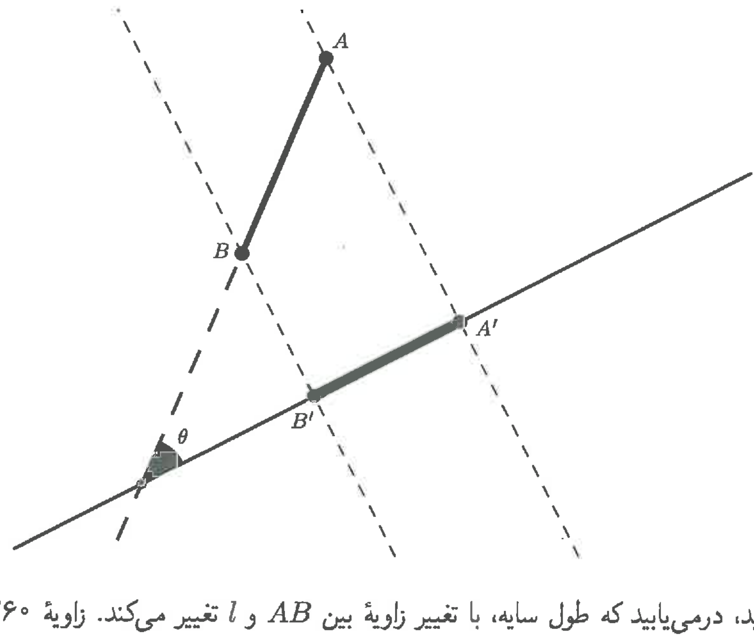
1. Joseph Emile Barbier (1839-1889)

بی‌نهایت حجم با پهنای ثابت وجود دارند. متأسفانه در مورد اجسام با پهنای ثابت، مشابهِ سه‌بعدیِ قضیهٔ باربیه برقرار نیست.

اکنون به اثبات قضیهٔ باربیه می‌پردازیم.

اثبات. در ابتدای مقاله، از تعبیر سایهٔ شکل روی خطوط مختلف استفاده کردیم، وگفتیم وقتی این سایه روی همهٔ خطوط، طول برابر داشته باشد، می‌گوییم شکل دارای پهنای ثابت است.

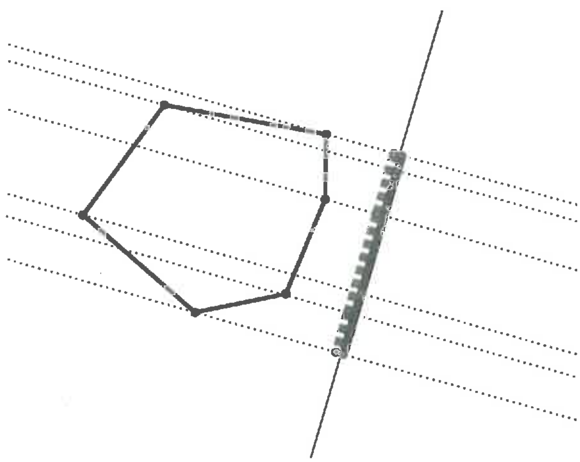
پاره‌خطی مانند AB با طول b در نظر بگیرید، و فرض کنید l خطی باشد که با امتداد AB زاویهٔ θ بسازد. در این صورت با توجه به شکل معلوم می‌شود که طول سایهٔ AB برابر است با $|b\cos\theta|$. در این شکل، سایهٔ AB، پاره‌خط $A'B'$ است. مثلاً اگر زاویهٔ گفته شده، قائمه باشد طول سایه برابر صفر است، و اگر زاویه صفر درجه باشد، طول سایه برابر با b است.



اگر کمی فکر کنید، درمی‌یابید که طول سایه، با تغییر زاویهٔ بین AB و l تغییر می‌کند. زاویهٔ ۳۶۰ درجه را به ۶

زاویهٔ مساوی °۰، °۶۰، °۱۲۰، °۱۸۰، °۲۴۰ و °۳۰۰ تقسیم کنید. طول‌های سایه‌های AB روی خط‌هایی که با امتداد آن، این زاویه‌ها را می‌سازند، به‌ترتیب عبارتند از b، $\frac{1}{2}b$، $\frac{\sqrt{3}}{2}b$، b، $\frac{1}{2}b$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}b$. اگر از این اعداد میانگین بگیریم، به عدد $\frac{3+\sqrt{3}}{6}b$ می‌رسیم. اکنون تعداد زاویه‌ها را زیاد و زیادتر می‌کنیم، و میانگین طول سایه‌ها را محاسبه می‌کنیم. این میانگین به عددی نزدیک می‌شود که آن را **پهنای میانگین** AB می‌نامیم. اگر طول AB دوبرابر یا یک‌سوم شود، چون طول هر یک از سایه‌هایش با همین نسبت تغییر می‌کند، پهنای میانگینش هم به‌ترتیب دوبرابر یا یک‌سوم می‌شود. پس اگر پهنای میانگین پاره‌خط به طول یک، برابر w باشد، پهنای میانگین هر پاره‌خط به طول b برابر bw است.

اکنون چندضلعی و خطی مانند l مطابق شکل در نظر بگیرید. طول سایهٔ چندضلعی روی خط l برابر است با پهنای چندضلعی در جهت عمود بر l. با توجه به شکل زیر معلوم می‌شود که سایه‌های ضلع‌های چندضلعی روی خط، دوبار سایهٔ محیط چندضلعی را می‌پوشاند:



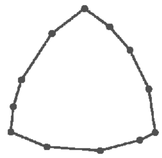
پس حاصل‌جمع طول سایه‌های ضلع‌ها روی خط l برابر است با دوبرابر طول سایهٔ محیط چندضلعی روی خط l. اکنون اگر خط l را با زوایای مختلف بچرخانیم و تساوی بالا را به‌ازای هر یک بنویسیم، می‌توانیم با میانگین گرفتن از هر یک از طرفین تساوی بنویسیم

$$\text{حاصل‌جمع پهنای میانگین ضلع‌ها} = \text{دوبرابر میانگین پهنای چندضلعی}$$

اگر طول ضلع‌ها برابر b، c، d، e، f و g باشد، حاصل جمع پهنای میانگین آنها برابر است با $w(b+c+d+e+f+g)$، یعنی حاصل‌ضرب محیط چندضلعی در عدد ثابت w. این حکم در مورد هر چندضلعی دلخواهی برقرار است.

حالا اگر شکلی با پهنای ثابت برابر a داشته باشیم، چندضلعی‌ای رسم می‌کنیم که خیلی به آن شبیه است.

مثلاً این چندضلعی شبیه مثلث رولو است:



اکنون با استفاده از دستور بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\text{محیط چندضلعی} \times w = \text{دوبرابر میانگین پهنای چندضلعی}$$

اگر چندضلعی خیلی شبیه شکل با پهنای ثابت a باشد، می‌توانیم فرض کنیم که محیط چندضلعی با محیط شکل برابر است و پهنای چندضلعی را در هر جهت می‌توانیم همان پهنای شکل بدانیم که در همهٔ جهت‌ها برابر a است. پس میانگین پهنای این چندضلعی هم عددی ثابت است. پس

$$\text{محیط شکل} \times w = ۲a$$

یعنی

$$\text{محیط شکل} = \frac{۲a}{w}$$

پس همهٔ شکل‌های با پهنای ثابت برابر a، محیط برابر دارند. ■

تمرین. ثابت کنید فاصلهٔ هر دو نقطه روی محیط یا درون شکل با پهنای ثابتی برابر a، حداکثر برابر a است.

تمرین. ثابت کنید هر شکل با پهنای ثابت، هر خط محمل را فقط در یک نقطه قطع می‌کند (راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید).

منابع

1. Martin Gardner, *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, 1991.

2. Hans Radmacher, Otto Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, translated by Herbert Zuckerman, Princeton University Press, 1957.

از باب تفریح

سیدعباس موسوی

۱. تعدادی سکه روی میز بگذارید و چشمانتان را ببندید. از دوستتان بخواهید تعدادی از سکه‌ها را پشت‌ورو کند. او می‌تواند هربار، هرکدام از سکه‌ها را، هر چندبار که خواست، پشت‌ورو کند، فقط باید با هربار پشت‌ورو کردن بگوید «پشت‌ورو». از دوست‌تان بخواهید یکی از سکه‌ها را با انگشت بپوشاند. چشمانتان را باز کنید. حالا شما می‌توانید با نگاه کردن به سکه‌ها بگویید سکه‌ای که پوشانده، به کدام رو است. چطور؟

۲. چهل‌وپنج چوب‌کبریت در یک قطعه فوم فروکنید طوری که سر رنگی آنها رو به بالا باشد. در هر حرکت می‌توانید دقیقاً شش چوب‌کبریت را پشت‌ورو کنید. می‌توانید در حرکت‌های مختلف یک چوب‌کبریت را چندبار پشت‌ورو کنید. می‌توانید به این ترتیب همهٔ چوب‌کبریت‌ها را پشت‌ورو کنید، یعنی کاری کنید که سرهای رنگی آنها همه رو به پایین باشد؟

۳. بیست‌وشش لیوان پلاستیکی، همه رو به بالا، به ردیف روی زمین بچینید. از ابتدای ردیف همه لیوان‌ها را پشت‌ورو کنید. دوباره از ابتدای ردیف لیوان‌ها را یکی در میان پشت‌ورو کنید، دفعهٔ بعد لیوان‌ها را دوتا در میان و بعد سه‌تا در میان پشت‌ورو کنید و این کار را ادامه دهید تا آخرین بار که لیوان‌ها را بیست‌وپنج‌تا در میان پشت‌ورو می‌کنید. حالا کدام لیوان‌ها رو به بالا باقی می‌مانند؟

گزارش چهل‌ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۱۴ تا ۲۲ جولای ۲۰۰۸، مادرید ـ اسپانیا

امید نقشینه ارجمند، دانشگاه صنعتی شریف

تابستان امسال، چهل‌ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی از ۱۴ تا ۲۲ جولای ۲۰۰۸ در مادرید، پایتخت اسپانیا، برگزار شد و تیم شش‌نفرهٔ جمهوری اسلامی ایران با کسب یک مدال طلا و پنج مدال نقره در بین ۹۷ کشور و حضور ۵۲۸ دانش‌آموز در رتبهٔ پنجم تیمی قرار گرفت.

از راست به چپ: امید نقشینه ارجمند (سرپرست)، محمد مهدی یزدی، کسری احمدی، نیما حمیدی، میلاد بخشی‌زاده، امیر سپهری، محمد جهانگشاهی، محسن بهرامگیری (سرپرست)، خورخه (راه‌نما)

المپیاد ریاضی در ایران، هفده ماه تلاش علمی برای ورود به تیم ملی

برای عضویت در تیم المپیاد دانش‌آموزان باید چهار مرحله را طی کنند. در آزمون چندگزینه‌ای مرحلهٔ اول در حدود ۱۵۰۰ نفر برگزیده می‌شوند. آزمون مرحلهٔ دوم مشابه المپیاد بین‌المللی با شش سؤال تشریحی در دو روز متوالی برگزار می‌شود و در حدود ۴۰ نفر برگزیدهٔ این آزمون در یک دورهٔ دو ماههٔ تابستانی شرکت می‌کنند. در پایان این دوره دوازده نفر مدال طلا می‌گیرند تا وارد مرحلهٔ آموزشی بعدی شوند و بعد از چند آزمون شش نفر تیم انتخاب

می‌شوند. فاصلهٔ زمانی بین برگزاری آزمون مرحلهٔ اول که معمولاً در اواسط بهمن هر سال برگزار می‌شود و اعزام تیم به مسابقات جهانی که در اواسط تیر انجام می‌شود حدود هفده ماه است. البته دانش‌آموزانی که آرزوی عضویت در تیم ملی المپیاد ریاضی را دارند قطعاً از مدت‌ها قبل از برگزاری آزمون مرحلهٔ اول مطالعات علمی را شروع می‌کنند.

تیم امسال را کسری احمدی و میلاد بخشی‌زاده هر دو از تهران، محمد جهانگشاهی و نیما حمیدی هر دو از کرج، امیر سپهری از زنجان و محمدمهدی یزدی از یزد تشکیل دادند. این تیم همراه با گروه سرپرستی متشکل از آقایان دکتر رزوان، جمالی، نقشینه و دکتر بهرامگیری به چهل‌ونهمین المپیاد ریاضی در مادرید اعزام شد. در تصحیح برگه‌ها هم آقایان حاتمی و نریمان، دو نفر از المپیادی‌های سابق که برای یک دورهٔ علمی موقت در آلمان به‌سر می‌بردند، برای چند روز به این گروه پیوستند.

استانبول، مادرید و گرانخا

روز پنج‌شنبه ۲۰ تیرماه سرگروه تیم ایران، دکتر رزوان همراه جمالی پس از توقفی چندساعته در فرودگاه شهر استانبول وارد مادرید شدند و سپس برای شرکت در جلسات انتخاب سؤال به شهر گرانخا که در ۱۰۰ کیلومتری شمال مادرید واقع است منتقل شدند. دو روز بعد اعضای تیم ایران همراه با دو سرپرست دیگر در ظهر ۲۲ تیر به شهر مادرید رسیدند و مورد استقبال نمایندگانی از سفارت ایران و مسئولین برگزاری المپیاد در اسپانیا قرار گرفتند.

روش برگزاری المپیاد بین‌المللی ریاضی

هر ساله، معمولاً سه ماه قبل از آغاز المپیاد، میزبان از هر کشور درخواست می‌کند تا حداکثر شش سؤال پیشنهادی خود را به‌صورت محرمانه بفرستند. در این مرحله میزبان هیچ سؤالی پیشنهاد نمی‌کند و دیگران نیز باید سؤالات پیشنهادی خود را مخفی نگه دارند. سپس میزبان توسط کمیته‌ای متشکل از اساتید دانشگاه، معلمین و خبرگان حل مسئله، سؤالات ارسالی را بررسی می‌کند و فهرستی کوتاه شامل حدود سی سؤال را در چهار شاخهٔ ترکیبیات، جبر، نظریه اعداد و هندسه انتخاب می‌کند. این سؤالات باید در حد ریاضیات دبیرستانی قابل فهم و قابل حل باشند. به‌علاوه در انتخاب این سؤالات به زیبایی و بکر بودن آنها نیز توجه می‌شود. در مرحلهٔ بعد هیئت ژوری که از سرگروه‌های کشورهای شرکت‌کننده تشکیل شده با کمک ناظران و برگزارکنندگان در جلساتی که چند روز قبل از مسابقات به شکل محرمانه تشکیل می‌شود شش سؤال را برای یک مسابقه دوروزه انتخاب می‌کنند. پس از این انتخاب کشور پیشنهاددهندهٔ شش سؤال مشخص می‌شود و تمام راه‌حل‌های موجود برای این شش سؤال به‌دقت بارم‌بندی می‌شود. در تمام این مراحل تصمیم‌ها با رأی‌گیری بین سرگروه‌ها انجام می‌شود و میزبان مانند بقیه یک رأی دارد.

دانش‌آموزان در دو امتحان چهار و نیم ساعته به شکل انفرادی شرکت می‌کنند و می‌بایست به زبان خود پاسخ

سؤالات را بنویسند. سرپرستان تیم وظیفه دارند محتوای برگه‌ها را برای مصححین توضیح دهند. این روش بر پایهٔ صداقت و اعتماد بنا شده است.

امسال دو سؤال ایران در شاخهٔ نظریهٔ اعداد و یک سؤال در شاخهٔ هندسه در فهرست کوتاه پذیرفته شده بود ولی ایران سؤالی در قسمت نهایی نداشت. ترکیب شش سؤال نهایی در جدول زیر مشخص شده است.

سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶
هندسه (روسیه)	جبر (اتریش)	نظریهٔ اعداد (لیتوانی)	جبر (کرهٔ جنوبی)	ترکیبیات (فرانسه)	هندسه (روسیه)

می‌توانید مسایل را به زبان‌های مختلف در این آدرس ببینید:

http://www.imo-official.org/problems.aspx

نتایج مسابقه

پس از برگزاری امتحان روز اول تصور می‌کردیم که میلاد و محمدمهدی هر سه سؤال را حل کرده‌اند ولی بعداً مشخص شد که میلاد در نوشتن یک نابرابری در حل سؤال سه اشتباه کرده است. روز دوم هم محمدمهدی در مورد سؤال پنج مرتکب اشتباهی شده بود که راه‌حلش را دچار مشکل اساسی کرد. در طول دو روز و نیم تصحیح برگه‌ها به پایان رسید. نتایج در کل راضی‌کننده بود. محمدمهدی در روز اول و کسری در روز دوم تمام سؤالات را پاسخ داده بودند و این نشان می‌دهد که گرفتن نمرهٔ کامل دور از دسترس دانش‌آموزان ایران نبوده است. در این مسابقات تنها دو نفر از تیم چین و یک نفر از تیم آمریکا، البته با نژاد شرقی، موفق به کسب نمرهٔ کامل شدند.

	سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	جمع	مدال
کسری احمدی	۷	۷	۱	۷	۷	۷	۳۶	طلا
میلاد بخشی‌زاده	۷	۷	۲	۷	۷	۰	۳۰	نقره
نیما حمیدی	۷	۲	۳	۷	۷	۰	۲۶	نقره
محمد جهانگشاهی	۷	۷	۰	۷	۷	۲	۳۰	نقره
امیر سپهری	۷	۷	۱	۷	۷	۰	۲۹	نقره
محمدمهدی یزدی	۷	۷	۷	۷	۲	۰	۳۰	نقره
جمع	۴۲	۳۷	۱۴	۴۲	۳۷	۹	۱۸۱	
میانگین کل	۴٫۹۸	۲٫۵۶	۰٫۸۰	۴٫۴۰	۲٫۰۸	۰٫۲۶	۱۵٫۰۸	
میانگین طلایی‌ها	۶٫۹۸	۶٫۳۶	۵٫۸۵	۶٫۸۹	۶٫۷۰	۱٫۸۵	۳۴٫۶۴	

در مورد سؤال سه تقریباً همهٔ اعضای تیم به تصور این‌که با سؤال مشکلی مواجه هستند سعی کرده بودند با ابزارهای قوی آن را حل کنند ولی بعد از امتحان به این نتیجه رسیدند که در این مورد اشتباه کرده‌اند و توان حل آن را با روش‌های نسبتاً ساده داشته‌اند! میانگین کل نشان می‌دهد که این سؤال بعد از سؤال شش سخت‌ترین سؤال است ولی برای کسانی که مدال طلا گرفته‌اند این سؤال با سؤال‌های دیگر، غیر از سؤال شش تفاوت چشمگیری ندارد. سؤال شش که در شاخهٔ هندسه بود سؤال بسیار سختی بود که تنها کسری و یازده نفر از دانش‌آموزان تیم‌های دیگر موفق شدند آن را کامل حل کنند.

طبق روال همیشگی، امتحان المپیاد ریاضی شامل شش مسئلهٔ هفت نمره‌ای است. تیم ایران که سال گذشته با مجموع ۱۴۳ امتیاز از ۲۵۲ امتیاز ممکن، در مکان دوازدهم قرار گرفته بود امسال با کسب ۱۸۱ امتیاز به رتبهٔ پنجم دست یافت.

	سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	کل
رتبهٔ تیم ایران	۱	۷	۱۳	۱	۵	۵	۵
نسبت به میانگین کل	۱/۲۰	۲/۰۶	۲/۴۸	۱/۳۶	۲/۵۴	۴/۹۴	۱/۷۱
نسبت به میانگین ده تیم اول	۱/۰۲	۱/۰۲	۰/۶۰	۱/۰۲	۱/۰۴	۱/۴۵	۰/۹۹

توجه به جدول بالا نشان می‌دهد که اعضای تیم ایران، همان‌طور که خود نیز متوجه شدند، در سؤال سه در رقابت با تیم‌های قوی عقب ماندند و با نگاهی به ریز نتایج می‌توان دید که اگر نمرهٔ این سؤال را کلاً حذف کنیم تیم ایران بعد از چین و آمریکا سوم می‌شود.

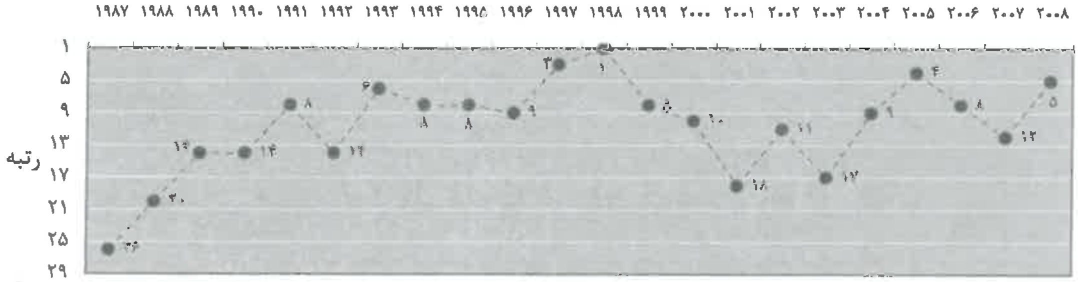
جدول زیر وضعیت ده تیم اول امسال را در مقایسه با ده سال گذشته، ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۷، بیان می‌کند.

	چین	روسیه	آمریکا	کرهٔ جنوبی	ایران	تایلند	کرهٔ شمالی	ترکیه	تایوان	مجارستان
نمرهٔ تیمی در سال ۲۰۰۸	۲۱۷	۱۹۹	۱۹۰	۱۸۸	۱۸۱	۱۷۵	۱۷۳	۱۷۰	۱۶۸	۱۶۵
میانگین رتبه در ۱۰ سال گذشته	۱/۲	۲/۷	۳/۸	۶/۲	۹/۸	۲۶/۷	۸	۱۷/۳	۸/۶	۱۱/۵

در این سال‌ها بیست تیم دست‌کم یک‌بار در بین ده تیم اول قرار گرفته‌اند که به‌ترتیب میانگین رتبه در ۱۰ سال

گذشته اینها هستند: چین، روسیه، آمریکا، کرهٔ جنوبی، بلغارستان، ویتنام، کرهٔ شمالی، تایوان، رومانی، ایران، ژاپن، مجارستان، اکراین، آلمان، روسیهٔ سفید و ترکیه.

تیم ایران در سال ۱۹۹۷ مقام سوم، در سال ۱۹۹۸ مقام اول و در سال ۲۰۰۵ مقام چهارم المپیاد جهانی ریاضی را کسب کرده بود و رتبهٔ اخیر، بعد از آن سه سال، بهترین نتیجهٔ تیمی ایران محسوب می‌شود. نمودار زیر وضعیت تیم ایران را از اولین حضور در سال ۱۹۸۷ تاکنون نشان می‌دهد. روند صعودی تا سال ۱۹۹۸، سپس روندی نزولی تا سال ۲۰۰۲ و روندی نسبتاً صعودی تا امروز.



کلام پایانی

گفتن این نکته لازم است که نتایج المپیاد بین‌المللی ریاضی، «آینهٔ تمام‌نمای وضعیت ریاضیات در ایران» نیست. حتی اگر موضوع را به وضعیت ریاضیات در دبیرستان‌های ایران محدود کنیم، باز هم از برتری تیم ایران بر تیم کشوری دیگر نمی‌توان نتیجه گرفت که وضعیت ریاضیات در دبیرستان‌های ما بهتر است. هر چند بسیاری از کشورها مانند ما تیم خود را به شکل حرفه‌ای آموزش می‌دهند، اختلاف سطح آموزش تیم ایران با آموزش عمومی ریاضیات در دبیرستان‌ها در مقایسه با بسیاری از کشورهای پیشرفته بسیار بیشتر است. این نکته بسیار حایز اهمیت است که بدون آموزش عمومی درست، تربیت نخبه نیز نتیجهٔ لازم را نخواهد داد. اگر بخواهیم ببینیم که جریان المپیاد در کشور مفید بوده است یا نه، علاوه به توجه به آیندهٔ علمی چند نفر محدودی که هر ساله در این عرصه می‌درخشند باید تأثیر این مسابقات بر جریان عمومی ریاضی دبیرستانی نیز بررسی شود. واقعیت این است که بنیان‌گذاران اولیهٔ المپیاد ریاضی در ایران وکسانی که در این سال‌ها مسئولیت این جریان را به عهده داشته‌اند مسابقهٔ جهانی وکسب افتخار را تنها وسیله‌ای برای گسترش ریاضیات در کشور می‌دانند.

مسئله‌های المپیاد بین‌المللی ریاضیات

۱۶ و ۱۷ جولای ۲۰۰۸، مادرید ـ اسپانیا

مسئلهٔ ۱. در مثلث حادةالزاویهٔ ABC، H مرکز ارتفاعی است. دایرهٔ گذرنده از H به مرکز وسط پاره‌خط BC، خط BC را در A_1 و A_2 قطع می‌کند. به‌طور مشابه دایرهٔ گذرنده از H به مرکز وسط پاره‌خط AC، خط AC را در B_1 و B_2 قطع می‌کند و دایرهٔ گذرنده از H به مرکز وسط پاره‌خط AB، خط AB را در C_1 و C_2 قطع می‌کند. ثابت کنید A_1، A_2، B_1، B_2، C_1 و C_2 روی یک دایره هستند.

مسئلهٔ ۲. الف) ثابت کنید نامساوی $\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqslant 1$ به‌ازای هر سه عدد حقیقی مثل x و y و z مخالف یک و با شرط $xyz=1$ برقرار است.
ب) ثابت کنید تساوی به‌ازای بینهایت سه‌تایی (x,y,z) از اعداد گویای مخالف یک با شرط $xyz=1$ رخ می‌دهد.

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید تعداد اعداد طبیعی مانند n به‌طوری که n^2+1 عامل اولی بزرگ‌تر از $2n+\sqrt{2n}$ دارد نامتناهی است.

مسئلهٔ ۴. تمام توابع مثل $f:(0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ را بیابید که به‌ازای هر x، y، z و wی مثبت با شرط $wx=yz$،

$$\frac{f(w)^2+f(x)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

مسئلهٔ ۵. دو عدد طبیعی n و k با زوجیت یکسان و شرط $k\geqslant n$ داده شده‌اند. فرض کنید $2n$ لامپ با شماره‌های $1,2,\ldots,2n$ داریم که هر کدام می‌توانند روشن یا خاموش باشند و در ابتدا همهٔ لامپ‌ها خاموش هستند. منظور از دنباله، دنباله‌ای متشکل از چند مرحله است که در هر مرحله دقیقاً یکی از لامپ‌ها را تغییر وضعیت می‌دهیم (از روشن به خاموش یا از خاموش به روشن).

N را تعداد دنباله‌های kـمرحله‌ای بگیرید که پس از انجام آن k مرحله، وضعیت لامپ‌های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ‌های $n+1$ تا $2n$ خاموش باشد. متناظر M را تعداد دنباله‌های kـمرحله‌ای بگیرید که پس از انجام آن k مرحله، وضعیت لامپ‌های ۱ تا n روشن و وضعیت لامپ‌های $n+1$ تا $2n$ خاموش باشد با این محدودیت که وضعیت لامپ‌های $n+1$ تا $2n$ را در هیچ مرحله‌ای تغییر ندهیم. حاصل $\frac{N}{M}$ را بیابید.

مسئلهٔ ۶. فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محدب با شرط $AB \neq BC$ باشد. دایره‌های محاطی مثلث‌های ABC و ADC را به‌ترتیب با ω_1 و ω_2 نشان می‌دهیم. فرض کنید دایره‌ای مثل ω وجود داشته باشد به‌طوری که بر امتداد BA از طرف A و بر امتداد BC از طرف C مماس باشد و همچنین بر خطوط AD و CD نیز مماس باشد. ثابت کنید مماس‌های خارجی مشترک دو دایرهٔ ω_1 و ω_2 روی ω با یکدیگر برخورد می‌کنند.

راه‌حل‌های مسائل المپیادی ریاضی

امید حاتمی‌ورزنه

۱. مثلث ABC قائم‌الزاویه با طول اضلاع صحیح و ارتفاع‌های با طول صحیح است. محیط این مثلث حداقل چقدر است؟

راه‌حل. کمترین مقدار محیط برابر با ۶۰ است که مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع (۱۵ و ۲۰ و ۲۵) و ارتفاع ۱۲ این خاصیت را داراست. فرض کنیم x، y و z اضلاع مثلثی قائم‌الزاویه باشند و h را طول ارتفاع وارد بر وتر آن مثلث می‌گیریم. اگر فرض کنیم $d = (x, y, z)$ می‌توانیم بنویسیم $z = cd$ و $y = bd$ و $x = ad$ و ضمناً $(a, b, c) = ۱$، به این ترتیب $h = \frac{xy}{z} = \frac{abd}{c}$ و چون $(a, b, c) = ۱$ و $a^۲ + b^۲ = c^۲$، باید $(ab, c) = ۱$ در نتیجه $c \mid d$ بنابراین $c \leqslant d$ (چون هر دو مثبت هستند). محیط مثلث برابر است با $x + y + z = d(a + b + c)$، بنابراین حداقل محیط برابر است با $c(a + b + c)$، از طرفی اگر قرار دهیم $c = d$ ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع $(ca, cb, c^۲)$ عددی صحیح می‌شود. می‌دانیم (a, b, c) یک سه‌تایی فیثاغورثی با ب.م.م یک هستند، پس اعداد طبیعی مثل m و n وجود دارند که

$$\begin{cases} a = m^۲ - n^۲ \\ b = ۲mn \\ c = m^۲ + n^۲ \end{cases}$$

پس محیط برابر است با $(m^۲ + n^۲)(۲m^۲ + ۲mn)$ که باید کمترین مقدار آن را محاسبه کنیم. چون $۰ < n < m$ باید $n \geqslant ۱$ و $m \geqslant ۲$، پس محیط برابر است با $۶۰ = (۱ \times ۲ \times ۲ + ۲^۲ \times ۲)(۱^۲ + ۲^۲)$.
حال می‌توان دید مثلث با اضلاع $(۲۰, ۱۵, ۲۵)$ تمام شرایط را دارد و محیط آن هم برابر با ۶۰ است. ■

۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=۰}^{n} ۲^k \binom{n}{k}^۲$$

راه‌حل اول: از سمت راست تساوی شروع می‌کنیم، در ابتدا چون $\sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} = ۲^k$،

$$\sum_{k=۰}^{n} ۲^k \binom{n}{k}^۲ = \sum_{k=۰}^{n} \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} \binom{n}{k}^۲ = \sum_{i=۰}^{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} \binom{n}{k}^۲$$

با استفاده از دو اتحاد

$$\binom{k}{i}\binom{n}{k}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$$

$$\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}\binom{n}{k}=\binom{۲n-i}{n}$$

(که اتحاد دوم از مقایسهٔ ضریب x^n در دو طرف تساوی

$$(۱+x)^{n-i}(۱+x)^n=(۱+x)^{۲n-۱}$$

حاصل می‌شود) نتیجه می‌شود

$$\sum_{k=۰}^{n}۲^k\binom{n}{k}^۲=\sum_{i=۰}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}\binom{n}{k}^۲=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}\binom{n}{k}$$
$$=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\binom{۲n-i}{n}$$

اگر قرار دهیم $k=n-i$،

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\binom{۲n-i}{n}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

راه‌حل دوم. $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را با $[n]$ نشان می‌دهیم و D را مجموعهٔ زوج‌های مرتب به شکل (A,B) می‌گیریم که A زیرمجموعهٔ $[n]$ و B زیرمجموعهٔ n عضوی از $[۲n]$ باشد که $A\cap B=\varnothing$. تعداد اعضای D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

الف) فرض کنید $n \leqslant k \leqslant ۰$ و M زیرمجموعهٔ k عضوی از $[n]$ باشد و A را مکمل M در $[n]$ می‌گیریم.
چون $|A|=n-k$، B زیرمجموعه‌ای nـعضوی از $M\cup\{n+۱,n+۲,\ldots,۲n\}$ است،
بنابراین می‌دانیم برای انتخاب آن $\binom{n+k}{k}$ حالت داریم، ضمناً برای انتخاب M نیز $\binom{n}{k}$ حالت داریم،
پس

$$|D|=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}$$

ب) فرض کنید $\circ \leqslant k \leqslant n$ و $B_{۱}$ را زیرمجموعه‌ای kـعضوی از $\{n+۱, n+۲, \dots, ۲n\}$ و $B_{۲}$ را زیرمجموعه‌ای kـعضوی از $[n]$ می‌گیریم. C را مکمل $B_{۲}$ در $[n]$ می‌گیریم، قرار می‌دهیم $B = B_{۱} \cup C$ و مجموعهٔ A را هم به دلخواه از ۲^k زیرمجموعهٔ $B_{۲}$ انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب هرکدام از $B_{۱}$ و $B_{۲}$، $\binom{n}{k}$ حالت داریم، بنابراین:

$$|D| = \sum_{k=\circ}^{n} ۲^k \binom{n}{k}^{۲}$$

نکته: اتحاد کلی‌تر زیر نیز درست است.

اگر m عددی طبیعی باشد و $m \leqslant n$ آنگاه

$$\sum_{k=\circ}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=\circ}^{m} ۲^k \binom{m}{k}\binom{n}{k}$$

با قرار دادن $m = n$ می‌توان اتحاد خواسته شده در مسئله را به‌دست آورد. ■

۳. فرض کنید $a, b, c > \circ$. ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴a^{۲}+ab+۴b^{۲}}} + \sqrt{\frac{b^{۲}}{۴b^{۲}+bc+۴c^{۲}}} + \sqrt{\frac{c^{۲}}{۴c^{۲}+ca+۴a^{۲}}} \leqslant ۱$$

راه‌حل. بنابر نابرابری کوشی-شوارتز

$$\sqrt{\frac{a^{۲}}{۴a^{۲}+ab+۴b^{۲}}} + \sqrt{\frac{b^{۲}}{۴b^{۲}+bc+۴c^{۲}}} + \sqrt{\frac{c^{۲}}{۴c^{۲}+ac+۴a^{۲}}} \leqslant$$

$$\sqrt{[(۴c^{۲}+ac+۴a^{۲})+(۴a^{۲}+ab+۴b^{۲})+(۴b^{۲}+bc+۴c^{۲})]\left(\sum_{\text{دوری}} \frac{a^{۲}}{(۴c^{۲}+ac+۴a^{۲})(۴a^{۲}+ab+۴b^{۲})}\right)}$$

پس کافی است ثابت کنیم

$$\sum_{\text{دوری}} \frac{a^{۲}}{(۴c^{۲}+ac+۴a^{۲})(۴a^{۲}+ab+۴b^{۲})} \leqslant \frac{۱}{۸a^{۲}+۸b^{۲}+۸c^{۲}+ab+ac+bc}$$

که پس از مخرج مشترک‌گیری و ساده‌کردن معادل است با

$$۸\sum_{\text{دوری}} a^{۴}bc + ۸\sum_{\text{دوری}} a^{۳}b^{۳} + ۳\sum_{\text{متقارن}} a^{۳}b^{۲}c \geqslant ۶۶a^{۲}b^{۲}c^{۲}$$

اما بنابر نابرابری حسابی-هندسی

$$\sum_{\text{دوری}} a^{3}b^{3} \geqslant 3a^{2}b^{2}c^{2}, \qquad \sum_{\text{دوری}} a^{4}bc \geqslant 3a^{2}b^{2}c^{2}$$

$$\sum_{\text{متقارن}} a^{3}b^{2}c \geqslant 6a^{2}b^{2}c^{2}$$

که با جمع زدن این سه نابرابری حکم نتیجه می‌شود. ■

۴. فرض کنید در مثلث ABC، $\angle C = 90^\circ$ و M را وسط وتر AB در نظر بگیرید. H نقطه‌ای روی AB است که $CH \perp AB$ و P نقطه‌ای داخل مثلث است که $AP = AC$. ثابت کنید PM زاویهٔ BPH را نصف می‌کند، اگر و فقط اگر $\angle A = 60^\circ$.

راه‌حل. ω را دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC می‌گیریم. P روی این دایره قرار دارد. محل برخورد ω با خطوط PH، MH و CH را به‌ترتیب Q، N و D می‌نامیم. چون $MA = MC$ در نتیجه $\angle A = 60^\circ$ اگر و فقط اگر $\triangle AMC$ متساوی‌الاضلاع باشد، یعنی اگر و فقط اگر M روی ω باشد، یعنی N روی M قرار داشته باشد، پس کافی است ثابت کنیم PM نیمساز $\angle BPH$ است، اگر و فقط اگر N و M یکی باشند. AH ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین $\triangle ACD$ است، بنابراین H وسط پاره‌خط CD است. اگر قوت H را نسبت به دایرهٔ ω بنویسیم،

$$PH \cdot HQ = CH \cdot HD = CH^{2}$$

از طرفی چون CH ارتفاع متناظر با وتر در مثلث $\triangle ABC$ است،

$$CH^{2} = AH \cdot HB$$

پس

$$PH \cdot HQ = AH \cdot HB$$

در نتیجه چهارضلعی $APBQ$ محاطی است، بنابراین در دایرهٔ ω باید

$$\angle QAB = \angle QAN = 2\angle QPN = 2\angle HPN$$

و چون N روی HB قرار دارد، PN زاویه $\angle HPB$ را نصف می‌کند، پس PM نیمساز $\angle BPH$ است، اگر و فقط اگر N و M یکی باشند. ■

۵. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geqslant ۳$، اعدادی طبیعی و متمایز مانند $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$ و a_n وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر عدد مانند i که $۱ \leqslant i \leqslant n$،

$$\frac{a_۱a_۲\cdots a_n}{a_i} \equiv ۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } a_i)$$

راه‌حل. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، عددهای $a_۱$، $a_۲$، $\ldots$ و a_n را می‌یابیم. به روشی استقرایی، اعدادی مانند $a_۱$، $\ldots$ و $a_{n-۱}$ می‌یابیم به‌طوری که به‌ازای هر عدد مانند i که $۱ \leqslant i \leqslant n-۱$،

$$\frac{a_۱a_۲\cdots a_{n-۱}}{a_i} \equiv -۱ \quad (\text{به پیمانهٔ } a_i) \qquad (*)$$

تعریف کنید $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$. در این صورت

$$\frac{a_۱a_۲}{a_۲} = a_۱ \equiv -۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } ۳)$$

و

$$\frac{a_۱a_۲}{a_۱} = a_۲ \equiv ۱ \equiv -۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } ۲)$$

اکنون فرض کنید $a_۱$، $\ldots$ و a_k به شکلی باشند که به‌ازای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant k$،

$$\frac{a_۱\cdots a_k}{a_i} \equiv -۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } a_i)$$

اکنون تعریف کنید

$$a_{k+۱} = a_۱\cdots a_k + ۱$$

پس

$$\frac{a_۱\cdots a_{k+۱}}{a_{k+۱}} = a_۱\cdots a_k \equiv -۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } a_{k+۱})$$

و اگر $i \neq k+۱$، آنگاه

$$\frac{a_۱\cdots a_{k+۱}}{a_i} \equiv -a_{k+۱} \equiv -۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } a_i)$$

بنابراین می‌توانیم اعداد $a_۱$، $\ldots$ و $a_{n-۱}$ را با شرط $(*)$ به‌دست بیاوریم. اکنون تعریف می‌کنیم

$$a_n = a_۱\cdots a_{n-۱} - ۱$$

در این‌صورت، اگر $i \neq n$ آنگاه

$$\frac{a_۱ \cdots a_n}{a_i} \equiv -a_n \equiv ۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } a_i)$$

و

$$\frac{a_۱ \cdots a_n}{a_n} \equiv ۱ \qquad (\text{به پیمانهٔ } a_n)$$

و حکم ثابت می‌شود.

برای مثال، به‌ازای $n = ۳$ دنبالهٔ

$$a_۱ = ۲, \quad a_۲ = ۳, \quad a_۳ = ۵$$

و به‌ازای $n = ۴$ دنبالهٔ

$$a_۱ = ۲, \quad a_۲ = ۳, \quad a_۳ = ۷, \quad a_۴ = ۴۱$$

به‌دست می‌آید. ■

۶. تمام توابع مانند f، $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ را بیابید به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مثبت مانند x و y،

$$f(x)f(y) = ۲f(x + yf(x))$$

راه‌حل. ادعا می‌کنیم f تابع ثابت ۲ است. با بررسی چند حالت، این ادعا را ثابت می‌کنیم. اگر x عددی حقیقی و مثبت باشد و $f(x) < ۱$، اگر تعریف کنیم $y = \frac{x}{۱ - f(x)}$ آنگاه $y > ۰$ و نیز $x + yf(x) = y$. با جاگذاری این x و y در معادلهٔ صورت مسئله، به تساوی $f(x)f(y) = ۲f(y)$ می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم $f(x) = ۲$ که با فرض $f(x) < ۱$ در تناقض است. بنابراین به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x، $f(x) \geqslant ۱$. اگر y عددی حقیقی و مثبت باشد به‌طوری که $f(y) < ۲$، آنگاه عددی حقیقی و مثبت مانند $x_۰$ در نظر بگیرید و به‌طور استقرایی تعریف کنید

$$x_{n+۱} = x_n + yf(x_n)$$

در این‌صورت به‌ازای هر n، $f(x_n) = \left(\frac{f(y)}{۲}\right)^n f(x_۰)$. بنابراین $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = ۰$ و این تساوی با حکمی که در بالا به‌دست آوردیم (که به‌ازای هر x، $f(x) \geqslant ۱$) در تناقض است. پس به‌ازای هر عدد مثبت مانند y، $f(y) \geqslant ۲$. پس اگر x و y مثبت باشند،

$$f(x) \leqslant \frac{f(x)f(y)}{۲} = f\big(x + yf(x)\big)$$

بنابراین f صعودی است. اگر دو عدد مثبت مانند x_1 و x_2 موجود باشند به‌طوری که $f(x_1) = f(x_2)$ و $x_1 < x_2$، آنگاه به‌ازای هر عدد مثبت مانند t، $f(x_1 + t) = f(x_2 + t)$ (کافی است در معادلهٔ صورت مسئله یک‌بار فرض کنید $y = \frac{t}{f(x_1)}$ و بار دیگر فرض کنید $y = \frac{t}{f(x_2)}$). بنابراین مقدار f از جایی به بعد برابر مقدار ثابت ۲ است. اکنون عددی مثبت مانند x در نظر بگیرید و عددی مانند Y را آن‌قدر بزرگ فرض کنید که به‌ازای هر عدد مانند y که $y \geqslant Y$، $f(y) = ۲$. فرض کنید $y \geqslant Y$ و $yf(x) \geqslant Y$. بنابر فرض مسئله،

$$f(x)f(y) = ۲f\big(x + yf(x)\big)$$

در این‌صورت $f(x) = ۲$ و چون x دلخواه بود، نتیجه می‌شود f برابر تابع ثابت ۲ است. پس اگر f تابع ثابت ۲ نباشد، اکیداً صعودی است. چون $۲f\big(x + yf(x)\big) = f(x)f(y) = ۲f\big(y + xf(y)\big)$، نتیجه می‌شود $x + yf(x) = y + xf(y)$. بنابراین $f(y) = \frac{x-y}{x} + \frac{y}{x}f(x)$. پس عددی مثبت مانند a وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر x، $f(x) = ax + ۱$ که با این حکم که به‌ازای هر عدد مثبت مانند x، $f(x) \geqslant ۲$ در تناقض است. پس f تابع ثابت ۲ است. ∎

• ویراستهٔ محمدسعید سرافراز

راه‌حل‌های «از باب تفریح»

سیدعباس موسوی

۱. هربار پشت‌ورو کردن، زوجیت سکه‌هایی را که به پشت قرار گرفته‌اند تغییر می‌دهد. پس مثلاً اگر تعداد سکه‌هایی که به پشت قرارگرفته‌اند در ابتدا زوج باشد و زوج بار «پشت‌ورو» بشنویم، باید زوج تا سکه به پشت باقی مانده باشد.

۲. برای رسیدن به وضعیتی که همهٔ چوب‌کبریت‌ها پشت‌ورو باشند باید هرکدام از آنها فردبار پشت‌ورو شده باشند و چون تعداد کل آنها فرد است، تعداد کل پشت‌وروکردن‌ها باید فرد باشد. اما طبق قانون بازی تعداد پشت‌وروکردن‌ها همیشه مضربی از ۶ است.

۳. لیوانی که در جای nـام قرار دارد به‌ازای هر مقسوم‌علیه n یک‌بار پشت‌ورو می‌شود. فقط اعداد مربع کامل تعداد فردی مقسوم‌علیه دارند.

«دفاعیهٔ یک ریاضی‌دان»

مهتاب ضرغام

آیا واقعاً ارزشش را دارد که به مطالعهٔ جدی ریاضیات بپردازیم؟ اهمیتِ داشتن پاسخی قانع‌کننده برای این پرسش، از سوی کسی که ریاضیات را به‌عنوان حرفهٔ خود انتخاب کرده است و یا در آستانهٔ این انتخاب قرار دارد، بسیار روشن است؛ همان‌طور که شایسته است فیلسوفان، مهندسان برق، شعرا و یا فوتبالیست‌ها توجیهی برای زندگی حرفه‌ای خود داشته باشند.

کتاب دفاعیهٔ یک ریاضی‌دان در این باره است. این کتاب راگادفری هرولد هاردی، ریاضی‌دان برجستهٔ انگلیسی، در شصت‌ودو سالگی، زمانی که به زعم خودش دیگر دوران خلاقیت ریاضی او به‌سر رسیده نوشته است و همان‌طور که از عنوان کتاب پیدا است، سعی کرده است از ارزش ریاضیات و ارزشمندی زندگیش که صرف ریاضیات شده است دفاع کند.

اما این همهٔ کتاب دفاعیه نیست. کتاب با مقدمه‌ای نسبتاً بلند دربارهٔ زندگی هاردی به قلم چارلز اسنو آغاز می‌شود که جذابیت آن اگر بیشتر از اصل دفاعیات هاردی نباشد کمتر از آن نیست. اسنو خود فیزیک‌دان و در عین حال نویسنده بوده است؛ تقریباً سی سال از هاردی کوچک‌تر بوده و در دو دههٔ پایانی عمر هاردی رابطهٔ بسیار نزدیکی با او داشته است. همهٔ این عوامل کمک کرده‌اند تا نوشتهٔ اسنو تصویری دست‌اول و بسیار خواندنی از زندگی و شخصیت هاردی ارائه دهد.

هاردی در خانواده‌ای متوسط و بافرهنگ به دنیا آمد. از همان کودکی باهوش به نظر می‌رسید. در دو سالگی می‌توانست هر عددی تا چند میلیون را بنویسد و در مدرسه در همهٔ درس‌ها نفر اول می‌شد، ولی در عین حال بسیار کم‌رو و خجالتی بود؛ طوری که به گفتهٔ خودش گاهی سعی می‌کرده به سؤالات پاسخ نادرست بدهد تا از عذاب دریافت جایزه در مقابل جمع معاف شود!

به گفتهٔ اسنو «ذهن او بسیار روشن و دقیق بود. آن‌قدر دقیق که در مقایسه با آن ذهن هرکس دیگر قدری آشفته و تاریک می‌نمود. او مانند اینشتن یا رادرفرد نابغهٔ بزرگی نبود. خودش با صراحت همیشگیش می‌گفت که این کلمه هر معنایی داشته باشد او ابداً نابغه نیست و در بهترین حالت، در مدتی کوتاه، رتبهٔ پنجم را در میان بهترین ریاضی‌دانان

محض داشته است . . . ولی از جنبهٔ دیگر هاردی به‌وضوح برتر از اینشتن یا رادرفرد یا هر نابغهٔ بزرگ دیگر است، و آن این است که هر کار فکری را، خواه مهم بود یا غیرمهم یا سرگرمی محض، به یک کار هنری تبدیل می‌کرد.»

شاید همین ویژگی است که سبب می‌شود برجسته‌ترین وجه ریاضیات در نظر او زیبایی درونی حقایق آن و جنبهٔ هنری و خلاقانهٔ کار ریاضی باشد. «ریاضی‌دان، مانند نقاش یا شاعر، نقش‌پرداز است. ولی نقش‌های او ماندگارترند چون از ایده ساخته می‌شوند . . . ایده‌های ریاضی باید همچون رنگ‌های نقاشی یا واژه‌های شعر به‌گونه‌ای هماهنگ به هم بپیوندند. نخستین محکّ زیبایی است. ریاضیات زشت در این جهان ماندگار نیست.»

حساب دیفرانسیل و انتگرال

ویراست هفتم

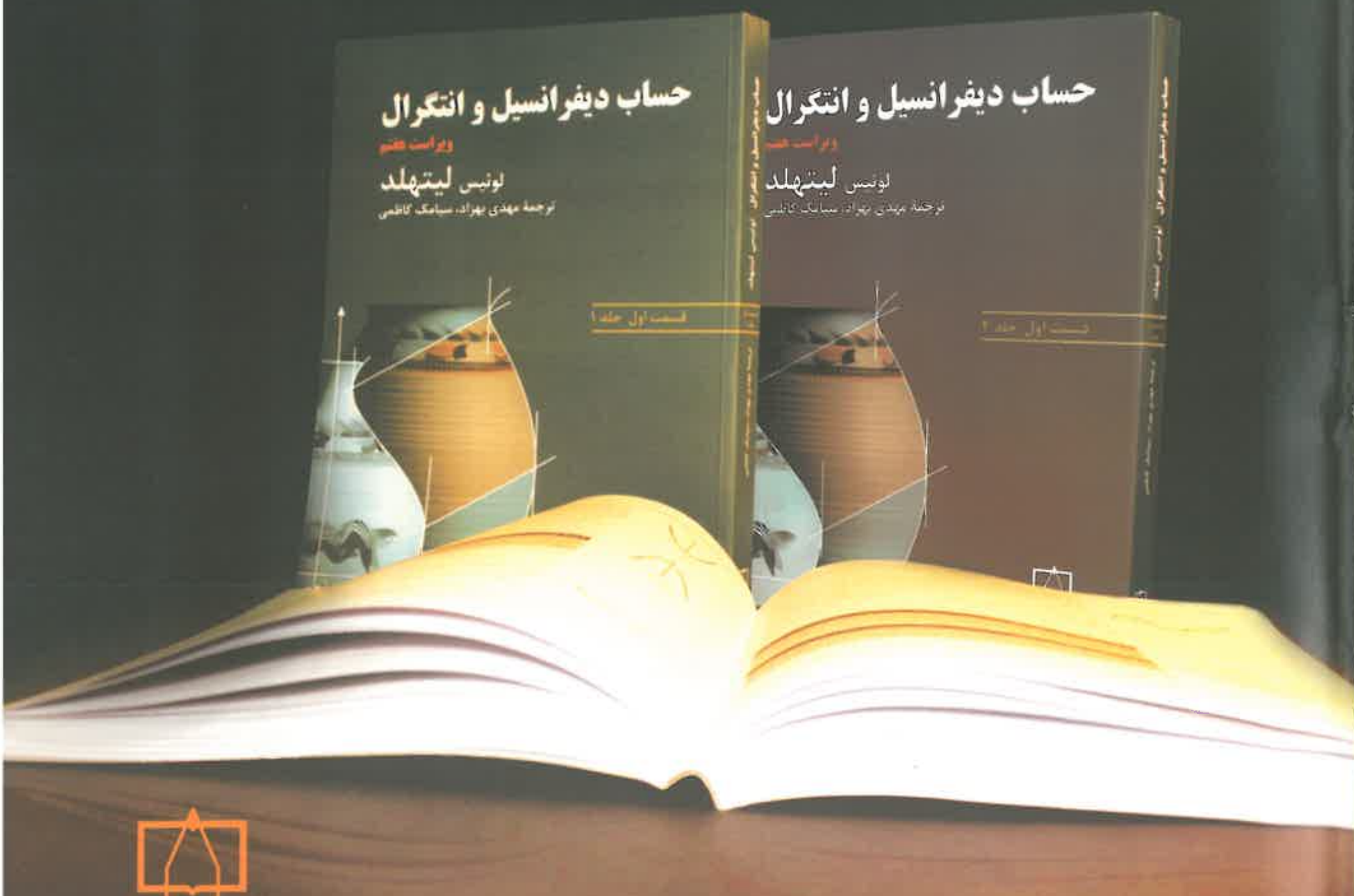
لوئیس **لیتهلد**

ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی

یکی از کتاب‌های خوب برای بخش عمده‌ای از مخاطبان، به‌ویژه دانشجویان رشته‌های فنی ــ مهندسی و علوم‌پایه، کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال لیتهلد است. قریب به اتفاق استادان درس ریاضی عمومی ۱ و ۲ رشته‌های فنی ــ مهندسی و علوم‌پایه این کتاب را تدریس کرده‌اند و یا دست کم خوب می‌شناسند.

کتاب حاضر ترجمه‌ای است سلیس و روان از آخرین ویرایش این کتاب که به‌وسیلهٔ دو تن از سرشناس‌ترین استادان و مترجمان کتاب‌های دانشگاهی به‌ویژه در موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت گرفته است.

ترجمهٔ کتاب در دو قسمت منتشر می‌شود: قسمت اول شامل دو جلد است که متناسب با درس ریاضی عمومی ۱ و قسمت دوم در یک جلد متناسب با درس ریاضی عمومی ۲ عرضه می‌شود.



انتشارات فاطمی

www.fatemi.ir