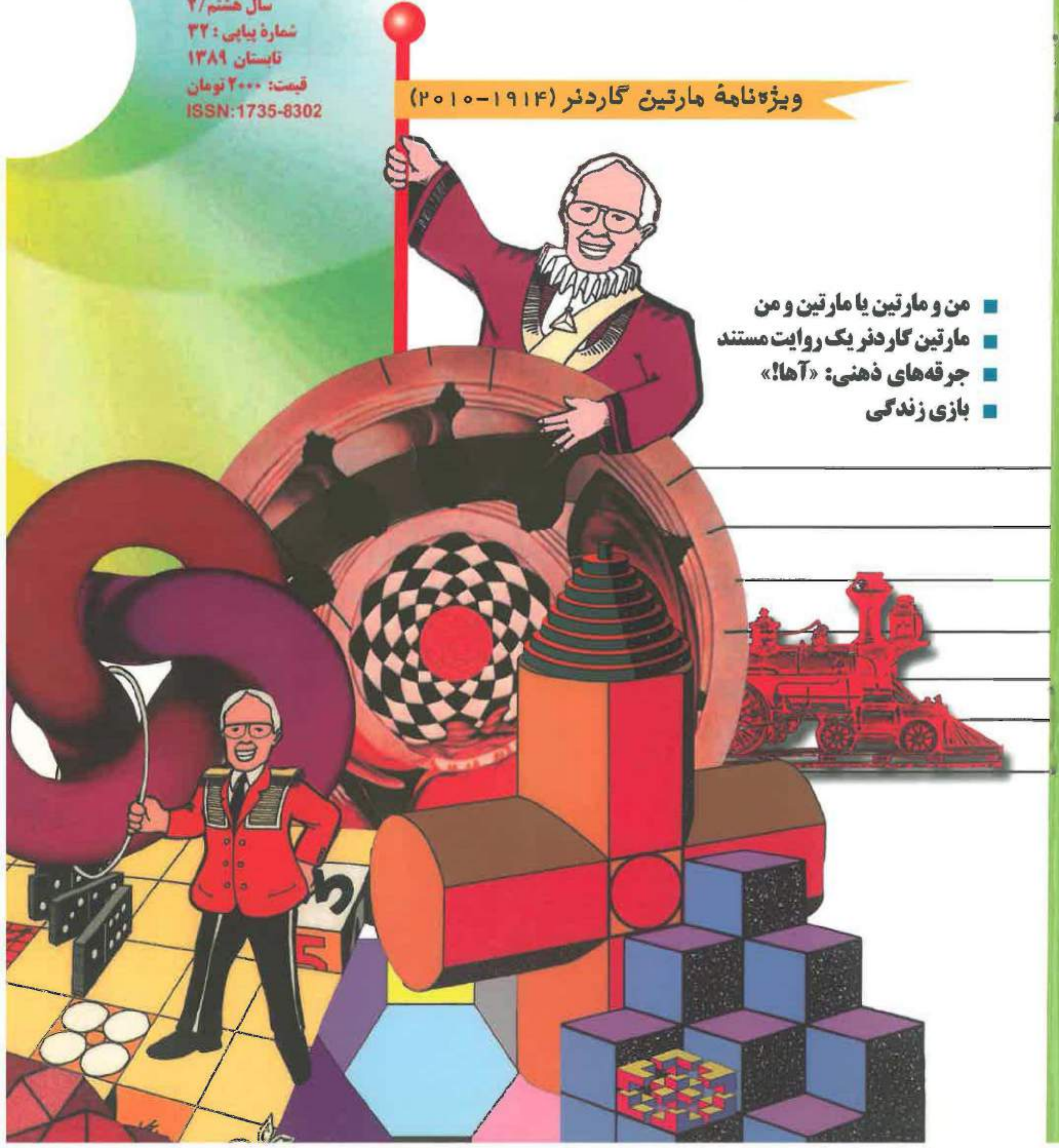
نشریهٔ

ریاضیات

سال هشتم/۲
شمارهٔ پیاپی: ۳۲
تابستان ۱۳۸۹
قیمت: ۲۰۰۰ تومان
ISSN:1735-8302

ویژه‌نامهٔ مارتین گاردنر (۱۹۱۴-۲۰۱۰)



- من و مارتین یا مارتین و من
- مارتین گاردنر یک روایت مستند
- جرقه‌های ذهنی: «آها!»
- بازی زندگی

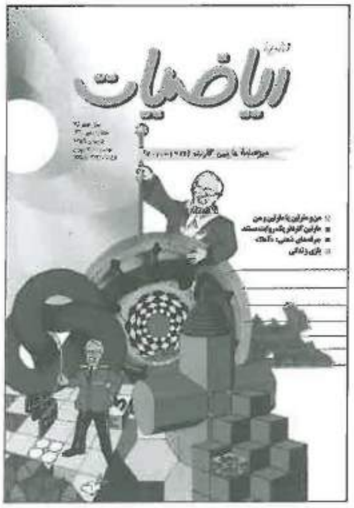
به‌نام خدا

نشریهٔ

ریاضیات

سال هشتم / ۲، شمارهٔ پیاپی ۳۲، تابستان ۱۳۸۹

فهرست:



روی جلد: مارتین گاردنر (۱۹۱۴-۲۰۱۰)

صاحب امتیاز و مدیر مسئول: یحیی تابش
ویراستار اجرایی: سید عباس موسوی
هیئت تحریریه: بهزاد اسلامی مسلّم، امیرحسین اصغری، یحیی تابش، بردیا حسام، محمد صالح زارع‌پور، کسری علیشاهی، سید عباس موسوی، امید نقشینه ارجمند
امور مشترکان: الهه حسامیان
وب‌گاه: www.riaziat.ir
نشانی پست الکترونیکی: nashriye@riaziat.ir
ISSN: 1735-8302

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی/انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان
مسئول فنی: فرید مصلحی
طراح جلد: علیرضا طاهرنجمی
حروفچینی و صفحه‌بندی: هنگامه صادقی
رسامی: فاطمه ثقفی
نمونه‌خوانی: شکوفه صراف
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: پسنا
چاپ و صحافی: خاشع
نشانی مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی:
تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی، شمارهٔ ۱۴، کد پستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱
تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)
وب‌گاه: www.fatemi.ir
نشانی پست الکترونیکی: info@fatemi.ir
نشانی انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان:
تهران، بزرگراه شهید همت، نبش بلوار سردار جنگل، بن‌بست فرزانه غربی، انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان
تلفن: ۴۴۴۵۰۸۰۱
وب‌گاه: www.ysc.ac.ir
نشانی پست الکترونیکی: ysc.edu@gmail.com

مارتین گاردنر

مارتین گاردنر، که به یک «نهاد» ترویج و همگانی کردن ریاضیات تبدیل شده بود، در ۲۲ می ۲۰۱۰ در ۹۵ سالگی درگذشت؛ ولی آثار بی‌بدیلش که چند نسل از آن بهره گرفته بودند، همچنان علاقه‌مندان به ریاضیات را جذب خواهد کرد و در فرهنگ ریاضیات جایگاه ویژه‌ای برای آنها باقی خواهد ماند.

توسعهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، امری ضروری برای توسعهٔ ریاضیات است و این امر با ترویج و همگانی کردن ریاضیات شکل می‌گیرد. برای ترویج و همگانی کردن ریاضیات، بیان مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی به زبان ساده و جذاب و ارائهٔ مباحثی شوق‌آفرین که برای عموم قابل درک و فهم باشد ضروری است و علاوه‌بر آن، سرچشمهٔ جوشندهٔ ریاضیات مسئله است. مسائلی که خلاقیت برانگیز باشند و در قالبی جذاب نظیر بازی یا معما بیان شوند اهمیت زیادی در ایجاد علاقه به ریاضیات دارند. مارتین گاردنر، در ترویج و همگانی کردن ریاضیات یگانهٔ زمان ما بود.

مارتین گاردنر در سال ۱۹۱۴ در شهر تولسای ایالت اوکلاهمای آمریکا به‌دنیا آمد، بعد از تحصیلات دوران دبیرستان هیچ آموزش ویژه‌ای در زمینهٔ ریاضیات نداشت، هرچند تحصیلات کارشناسی خود را در دانشگاه شیکاگو ادامه داد و تحصیلات کارشناسی ارشد خود را نیمه تمام رها کرد، کار حرفه‌ای خود را برای یک نشریهٔ کودکان در همان شهر زادگاهش شروع کرد و رفته‌رفته با مفاهیم و ایده‌های ریاضی آشنا شد. همین موضوع به نوشتن مطالب جذابی در زمینهٔ ریاضیات و بازی‌های ریاضی منجر شد و مقاله‌ای در زمینهٔ بازی‌های ریاضی برای مجلهٔ معتبر ساینتیفیک امریکن نوشت و پیرو آن، برای مدت ۲۵ سال ستون ویژهٔ بازی‌ریاضی را در این نشریه اداره می‌کرد. حضور مرتب و ماهانهٔ او در ساینتیفیک امریکن برای او هزاران هزار مخاطب فراهم کرد و تأثیر ویژه‌ای بر چند نسل از علاقه‌مندان به علوم و ریاضیات به‌جا گذاشت.

مارتین گاردنر ده‌ها کتاب نیز در زمینهٔ همگانی کردن ریاضیات، بازی‌های ریاضی، معماها و غیره نگاشته است که با استقبال وسیعی مواجه شده‌اند. او پس از بازنشستگی از ساینتیفیک امریکن همچنان کار مقاله‌نویسی را در نشریات دیگر ادامه داد و تا واپسین لحظات حیات خود دست از کار نکشید و به خلق آثار ارزنده ادامه داد.

مارتین گاردنر به یک «نهاد» بدل شد، نهادی که نه‌تنها میراثی ارزشمند به‌جا گذاشته است بلکه مسیری را گشوده است که رهپویان زیادی خواهد داشت.

هیئت تحریریه

من و مارتین
یا
مارتین و من

از من خواسته شده است که در مورد مارتین گاردنر چیزی بنویسم؛ ولی چون من خودم را به‌اندازهٔ مارتین گاردنر باهوش حساب می‌کنم و از آنجا که احتمالاً از این شانس برخوردار نخواهم بود که کسی در مورد من چیزی بنویسد (!)، تصمیم گرفته‌ام که اول خودم را معرفی کنم.

من نادر گمنام هستم و در هفدهم شهریور هزار و سیصد و چهل و هشت (۴۸/۶/۱۷) متولد شده‌ام. در خانواده‌ای متوسط بزرگ شده‌ام و از کودکی نبوغی «قابل توجه» در ریاضیات داشته‌ام. البته باید اضافه کنم که با اینکه نبوغ من قابل توجه بود، معمولاً معلم‌های من از قابلیت توجه‌کردنشان استفاده نمی‌کردند؛ اما من امیدوارم و اطمینان دارم که شما خوانندهٔ محترم این سطور به‌خوبی از قابلیت مذکور استفاده خواهید کرد. چیزی که خواهید خواند، یکی از تجربیات دوران دبستان من است که شما را در معرض قضاوت در مورد نبوغ من قرار خواهد داد.

دوران شاد دبستان بود و روز امتحان ریاضی. مطابق معمول خیال من راحت بود و با دیدن ورقهٔ سؤال‌ها خیالم راحت‌تر هم شد. بیشتر سؤال‌ها از نوع جمع کنید، تفریق کنید، ضرب کنید و تقسیم کنید بودند. یکی از آن مسائل لوس و بی‌ربط هم که امروزه به آن مسائل «کاربردی» می‌گویند در امتحان بود. مسئله این بود:

> ۴۸ دانش‌آموز برای عضویت در تیم والیبال مدرسه داوطلب شده‌اند. معلم ورزش تصمیم می‌گیرد که با این ۴۸ نفر چند تیم والیبال تشکیل بدهد و بهترین تیم را انتخاب کند. او چند تیم می‌تواند تشکیل بدهد؟ (یادآوری: هر تیم والیبال، ۶ عضو دارد.)

وقتی که من به این مسئله رسیدم، همهٔ سؤال‌های دیگر را در زمان کوتاهی حل کرده بودم. خُب برای دانش‌آموزی با نبوغ من حل این یکی هم کار ساده‌ای بود. تنها کاری که باید انجام می‌دادم یک تقسیم ساده بود:

$$۴۸ \;\underline{|\;۶}$$

از آنجا که احتمالاً شما، خوانندهٔ محترم، مدت‌هاست که تقسیم طولانی انجام نداده‌اید، من ناچارم که مراحل انجام تقسیم را به‌روشی که در امتحان انجام دادم برای شما بنویسم.

چند تا ۶ توی هشت است؟ البته یکی!

۴۸ | ۶
۱

۱ ضرب در ۶؟ البته ۶!

۴۸ | ۶
۶ ۱

۶ را از ۴۸ کم می‌کنیم:

۴۸ | ۶
۶ ۱

۴۲

از این‌جا به بعد ساده است: کافی است ۴۲ را بر ۶ تقسیم کنیم و مانند قبل ادامه بدهیم:

۴۸ | ۶
۶ ۱۷

۴۲
۴۲

۰

با این حساب، معلم ورزش می‌تواند ۱۷ تیم والیبال تشکیل بدهد. (در حاشیه: امیدوارم که ۱۷ و ۶ و ۴۸، شما را یاد تاریخ تولد من بیندازند؛ چون تنها جنبهٔ جالب این مسئله برای من همین نکته بود.)

تا اینجا من همهٔ سؤال‌های امتحان را حل کرده بودم؛ ولی از آنجا که سؤال‌ها به گونه‌ای نبودند که نبوغ من را برای معلم آشکار کنند، تصمیم گرفتم که حداقل کاری کنم که او خوشش می‌آمد ـ تا به او فرصتی داده باشم که از قابلیت توجه کردنش استفاده کند. بنابراین، فکر کردم که بهتر است درستی جواب را برای تنها مسئلهٔ کاربردی امتحان بررسی کنم (یادآوری: معلم‌ها از بررسی درستی جواب خوششان می‌آید).

خُب، درستی تقسیم را چطور بررسی می‌کنیم؟ معلوم است، با ضرب. امیدوارم که ضرب طولانی را هنوز یادتان باشد، چون من بدون هیچ‌گونه توضیحی فقط آن را می‌نویسم:

۱۷ ×
۶

۴۲
۶

۴۸

تا اینجا تنها نیم ساعت از دو ساعت وقت امتحان گذشته بود و من همهٔ مسئله‌ها را حل کرده بودم؛ اما از آنجا که من علاوه بر نبوغم از شخصیت علمی قابل توجهی هم برخوردار بودم، نمی‌خواستم با دادن ورقه‌ام اعتماد به‌نفس بقیهٔ دانش‌آموزان را ــ که هنوز سخت درگیر حل مسئله‌های امتحان بودند ــ سلب کنم. بنابراین تصمیم گرفتم خود را با تنها کاری که در چنین امتحانی می‌شد انجام داد مشغول نشان بدهم: من درستی تقسیم را با ضرب کردن امتحان کرده بودم، حالا می‌توانستم درستی ضرب را با جمع کردن امتحان کنم. خُب، هفده ضربدر شش، یعنی هفده را شش بار جمع کنیم:

۱۷
۱۷
۱۷
۱۷
۱۷
۱۷

حتماً شما هم با من موافقید که جمع از ضرب و تقسیم آسان‌تر است. در این مورد، کافی است از پایین‌ترین ۷ شروع کنیم و آن را با ۷ بعدی جمع کنیم و همین‌طور ادامه بدهیم تا به بالاترین ۷ برسیم. با این حساب، با ۷ شروع می‌کنیم؛ ۷ و ۷ می‌شود ۱۴، ۱۴ و ۷ می‌شود ۲۱، ۲۱ و ۷ می‌شود ۲۸، ۲۸ و ۷ می‌شود ۳۵، و ۳۵ و ۷ می‌شود ۴۲. حالا که به بالاترین ۷ رسیدیم، ۴۲ را با بالاترین ۱ جمع می‌کنیم و پایین می‌آییم: ۴۲ و ۱ می‌شود ۴۳، ۴۳ و ۱ می‌شود ۴۴، ۴۴ و ۱ می‌شود ۴۵، ۴۵ و ۱ می‌شود ۴۶، ۴۶ و ۱ می‌شود ۴۷، و بالاخره ۴۷ و ۱ می‌شود ۴۸.

۴۲
۱۷
۱۷
۱۷
۱۷
۱۷
۱۷
۴۸

این هم از امتحان ضرب با جمع.

متأسفانه باید بگویم که دیگر کاری از دست من برنمی‌آمد که برای کمک به معلم و باقی همکلاسی‌هایم انجام بدهم، برای همین ورقه‌ای را دادم و رفتم.

* * * * *

من نادر گمنام هستم و از جایی به بعد در زندگی علاقهٔ قابل توجهی به ریاضیات داشته‌ام. البته باید اضافه کنم که مثل هر علاقهٔ دیگری، این علاقه هم در گذر زمان دستخوش تغییر بوده است، گاهی کمتر شده و گاهی بیشتر.

متأسفانه، کمتر شدن علاقهٔ من، عموماً به زمان . . . و به ریاضیات شسته و رفته‌ای که در اختیار ما قرار داده می‌شد برمی‌گردد ــــ ریاضیاتی که با گفتن پاسخ‌ها، لذت به چالش کشیده‌شدن را از ما سلب می‌کرد. اما، لذت به چالش کشیده‌شدن، لذتی است که مارتین گاردنر علاوه بر اینکه آن را خوب می‌شناخت، به‌خوبی می‌دانست که چگونه دیگران را از آن بهره‌مند کند.

مارتین گاردنر ریاضیدان نبود، اما به چند نسل نشان داد که ریاضیات، جالب، هیجان‌انگیز، جادویی و همه جا حاضر است [۲]. او هر موضوع را ابتدا خودش یاد می‌گرفت، و چون لذت کشف کردن را همواره در خود زنده نگه می‌داشت، می‌دانست که چگونه به دیگران هم فرصت و لذت یاد گرفتن را بدهد. او بیش از ۵۰ سال نوشت و مسئله و معما طرح کرد، چون باور داشت «ریاضیات چیزی نیست جز حل مسئله و معما، و علم هم چیزی نیست جز تلاش برای به‌دست آوردن پاسخی بهتر و روشن‌تر برای مسائلی که طبیعت پیش روی ما می‌گذارد» [۱]. او یک معمای کوچک را به مسئله‌ای بزرگ و یک مسئلهٔ بزرگ را به معمایی کوچک تبدیل می‌کرد، و به این ترتیب، ریاضیات را از کنج دنج و خلوت خود خارج می‌کرد و در دسترس عموم قرار می‌داد. من یکی از این «عموم» هستم.

* * * * *

من نادر گمنام نیستم و در تاریخ ۴۸/۶/۱۷ متولد نشده‌ام. باید اعتراف کنم که خود را به اندازهٔ مارتین گاردنر باهوش نمی‌دانم، ولی آن‌قدر هوشمند هستم که هوشمندی او را تشخیص بدهم! در ضمن، می‌دانم که چطور یکی از داستان‌های او را به‌گونه‌ای مطرح کنم که دین خود را به او و سبک او ادا کرده باشم. در واقع، از اسم‌هایی که می‌شد با استفاده از حروف اسم مارتین گاردنر ساخت، «نادر گمنام» از همه جالب‌تر به‌نظر می‌رسید و از ۲۲ سه‌تایی ممکن که می‌شد از آنها در داستان استفاده کرد، فقط یکی به سن من می‌خورد! خود مارتین گاردنر از داستان دیگری و از سه عدد ۷، ۲۳ و ۲۸ استفاده کرده است [۲]. آیا می‌توانید ۲۰ سه‌تایی باقی‌مانده را پیدا کنید؟ (توجه کنید که در هر سه‌تایی، یکی یک‌رقمی است و دوتای دیگر دورقمی هستند.)

امیرحسین اصغری
متولد ۴۷/۷/۱۲
(این سه‌تایی به‌درد نمی‌خورد!)

منابع

[۱] امیرحسین اصغری، بهترین شروع کدام است. رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۶۰-۵۹، ۱۳۷۹.

[2] Martin Gardner, The Colossal Book of Short Puzzles and Problems. W. W. Norton and Company, 2006.

مارتین گاردنر: یک روایت مستند

اشاره: مارتین گاردنر در دنیای ریاضیات جایگاهی یگانه دارد. او بیست‌وپنج سال مداوم ستون بازی‌های ریاضی ساینتیفیک امریکن[1] را نوشت و چشم مردم را به زیبایی و جذابیت ریاضیات باز کرد. آدم‌های زیادی هستند که خواندن این نوشته‌ها مسیر زندگی‌شان را مشخص کرده است و حالا ریاضیدان هستند. ستون او جایی بود که بعضی از مفاهیم مهم ریاضیات مثل بازی زندگی کانوی[2] یا کاشیکاری‌های پنروز[3] برای اولین بار در آن معرفی شدند، و جایی بود برای لذت بردن از معماها و بازی‌های ریاضی. سبک جذاب نوشتنش که همیشه قابل فهم بود و هرگز ملانقطی‌وار نبود، استاندارد جدیدی برای نوشتن ریاضیات برای عموم مردم ایجاد کرد. در ۱۹۸۷ جایزهٔ استیل[4] انجمن ریاضی آمریکا را برای نوشتن مقالات توصیفی «به‌خاطر کتاب‌ها و مقالات زیادش دربارهٔ ریاضیات به‌خصوص ستون بازی‌های ریاضی در ساینتیفیک امریکن» دریافت کرد.

مارتین گاردنر در ۲۱ اکتبر ۱۹۱۴ به‌دنیا آمد. در ۱۹۳۶ از دانشگاه شیکاگو لیسانس فلسفه گرفت. چهار سال در نیروی دریایی ارتش خدمت کرد و بعد به‌عنوان نویسندهٔ داستان‌های کوتاه در شیکاگو مشغول کار شد. اواسط دههٔ ۴۰ به نیویورک رفت و هشت سال برای مجلهٔ کودکانهٔ هامپتی‌ـدامپتی مطلب نوشت. نوشتن ستونش در ساینتیفیک امریکن را در ۱۹۵۷ شروع کرد و تا اوایل دههٔ ۸۰ ادامه داد، و بعد از آن بازنشسته شد و به نوشتن کتاب‌هایش ادامه داد. او بیش از ۵۰ کتاب دربارهٔ ریاضی، فلسفه و ادبیات نوشت. سال ۲۰۰۲ به اوکلاهاما نقل مکان کرد تا در کنار پسرش که در دانشگاه اوکلاهاما استاد آموزش است زندگی کند و در ۲۲ می ۲۰۱۰ در همان‌جا از دنیا رفت. آنچه که می‌خوانید نقل‌قول‌هایی از مارتین گاردنر است که از چند مصاحبه انتخاب شده‌اند.

در دبیرستان معلم فیزیکی داشتم که خیلی روی من اثر گذاشت. می‌خواستم به کلتک[5] بروم و فیزیک بخوانم. برای رفتن به کلتک لازم بود دو سال به کالج بروم؛ بنابراین به دانشگاه شیکاگو رفتم و چسبیدم به فلسفهٔ علم و ماندگار شدم. بالاترین مدرکی که گرفتم لیسانس بود.

* * *

پدرم شعبده‌باز نبود اما چندتایی حقهٔ شعبده‌بازی بلد بود که وقتی پسر کوچکی بودم یادم داد. بعد با یک شعبده‌باز محلی آشنا شدم و ماهنامه و مغازه‌های شعبده‌بازی را کشف کردم. من شعبده‌باز نیستم؛ فقط یک‌بار، وقتی در شیکاگو به کالج می‌رفتم، چند روزی وقت فروش کریسمس در یک فروشگاه زنجیره‌ای شعبده‌بازی کردم. این تنها باری بود که برای شعبده‌بازی پول گرفتم. اما همهٔ عمر یکی از علاقه‌هایم شعبده‌بازی بوده است. چند کتاب شعبده‌بازی هم نوشته‌ام که هنوز در مغازه‌های شعبده‌بازی فروخته می‌شوند.

1. Scientific American 2. John H. Conway 3. Roger penrose
4. AMS Steel Prize for Mathematical Exposition 5. Caltech

* * *

پدرم دکترای زمین‌شناسی داشت. آن‌وقت‌ها تازه تجارت نفت داشت شروع می‌شد. یک شرکت کوچک استخراج نفت داشت که از خودش، یک حسابدار و یک منشی تشکیل می‌شد. مادرم مربی مهدکودک بود. همدیگر را اولین‌بار در دانشگاه کنتاکی دیده بودند.

* * *

کارناپ یکی از قهرمان‌های من است. وقتی در دانشگاه شیکاگو دانشجو بودم، راسل برای یک‌سری سمینار به آنجا آمد. یک‌بار به یکی از این سمینارها رفتم که کارناپ هم آنجا بود و بحث داغی بین کارناپ و راسل دربارهٔ اینکه همسرانشان وجود دارند یا نه درگرفته بود. کارناپ هیچ مایل نبود واقع‌گرا به‌حساب بیاید. در عوض راسل یک واقع‌گرای سرسخت بود که فکر می‌کرد جهان وجود دارد هرچند که هیچ مشاهده‌گری آن را مشاهده نکند.

روز بعد در ساختمان پست دانشگاه کسی از من پرسید دیروز در سمینار راسل چه خبر بود. گفتم راسل سعی می‌کرد کارناپ را قانع کند که زنش وجود دارد اما کارناپ نمی‌خواست قبول کند. درست همین موقع کارناپ وارد شد. با عصبانیت به من نگاه کرد و رفت. این داستان البته عاقبت خوشی نداشت ــ چند وقت بعد در روزنامه خواندم که زن کارناپ خودش را دار زده. نمی‌دانم چرا. راسل هم یکی از قهرمان‌های من است.

* * *

تنها درسی که در علوم و ریاضیات گذراندم درسی به‌نام علوم فیزیکی بود که به‌عنوان دانشجوی فلسفه مجبور بودم بگذرانم. سواد ریاضی من بسیار کم است. تا حسابان را می‌دانم و بیشتر از آن تقریباً از هیچ‌چیز سر در نمی‌آورم. فکر می‌کنم برای کسی مثل من که برای مردم می‌نویسد این یک مزیت است. باید از چیزی که می‌نوشتم سر در می‌آوردم و همین موضوع باعث می‌شد طوری بنویسم که خوانندهٔ متوسط بتواند بخواند و بفهمد.

* * *

وقتی دانشجو بودم، هرازگاهی برای مجلات کوچک چیزهایی می‌نوشتم که البته بابت آنها پولی نمی‌دادند. قبل از جنگ دوم مدتی در دفتر روابط عمومی دانشگاه کارم نوشتن خبرهای علمی بود. وقتی از جنگ برگشتم توانستم اولین داستانم را بفروشم. وقتی اولین پول نویسندگی را گرفتم تصمیم گرفتم بقیهٔ عمرم نویسندهٔ آزاد باشم. داستان بعدی که نوشتم دربارهٔ یک پروفسور «بدون طرف» بود. اگر یک نوار کاغذی را بردارید و یک تاب بدهید و دو سر آن را به‌هم بچسبانید، یکی از طرف‌هایش را از دست می‌دهد و یک‌طرفه می‌شود. فکر کردم چه می‌شد اگر کسی راهی پیدا می‌کرد که به‌جای یک طرف، هر دو طرف کاغذ غیب بشود و کاغذ بی‌طرف شود، و این شروع داستان پروفسور بی‌طرف بود. یک سالی با فروش همین داستان‌ها سر کردم و بعد به نیویورک رفتم. حوالی سال ۱۹۴۵ بود. با یک دختر نیویورکی ازدواج کردم. با نویسندگی آزاد زندگی نمی‌چرخید. در یک مجلهٔ کودکانه

به‌نام هامپتی‌ـ‌دامپتی کار پیدا کردم. در خانه کار می‌کردم. برای هر شماره یک داستان کوتاه دربارهٔ ماجراهای دامپتی و یک شعر شامل نصیحت‌های اخلاقی از هامپتی به پسرش می‌نوشتم. هشت سال این‌طوری سر کردم تا وقتی کارم را با ساینتیفیک امریکن شروع کردم.

* * *

کارم را با ساینتیفیک امریکن با مقاله‌ای در مورد تاریخچهٔ وسایل مکانیکی‌ای که مسئله‌های مقدماتی منطق را حل می‌کنند شروع کردم. مقالهٔ دوم را دربارهٔ هگزافلکساگون‌ها[1] نوشتم. یک روز در خانهٔ یک دوست شعبده‌باز یک هگزافلکساگون دیدم که با پارچه ساخته شده بود. دوست شعبده‌بازم گفت هگزافلکساگون‌ها را جماعتی در پرینستون ابداع کرده‌اند که ریچارد فاینمن هم بین آنها بود. به پرینستون رفتم و توانستم با جان توکی[2] صحبت کنم که بعدها ریاضیدان بزرگی شد. وقتی مقاله‌ام چاپ شد، سردبیر من را به دفترش احضار کرد و پرسید آیا آن‌قدر مطلب دارم که بتوانم یک ستون ثابت بنویسم. اولین شمارهٔ ستون بازی‌های ریاضی در ژانویهٔ ۱۹۷۵ منتشر شد. از کار در هامپتی‌ـ‌دامپتی استعفا دادم و دوره افتادم در مغازه‌هایی که کتاب‌های کهنه و دست‌دوم می‌فروختند تا کتاب‌هایی دربارهٔ ریاضیات تفننی پیدا کنم.

* * *

برای هر ستون که می‌نوشتم، چهار یا پنج پوشه داشتم که یادداشت‌ها و تحقیقاتم را توی آنها می‌گذاشتم. هفت هشت مجلهٔ ریاضی را هم که مقاله‌هایی دربارهٔ ریاضیات تفننی چاپ می‌کردند مشترک بودم. کم‌کم یک آپارتمان برای نگهداری پوشه‌ها و کتاب‌هایی که پیدا کرده بودم لازم شد. یک‌بار کنوث[3] خواست که از آرشیو من برای نوشتن «هنر برنامه‌نویسی کامپیوتر» استفاده کند. پیش من آمد و یک هفته‌ای ماند. برای خودش آشپزی می‌کرد و بین کتاب‌ها و پوشه‌ها می‌گشت. یکشنبه هم به نزدیک‌ترین کلیسای لوتری رفت.

* * *

اوایل کار سطح مطالب ریاضی که می‌نوشتم پایین بود اما کم‌کم بهتر شد، چون همزمان با نوشتن ستون‌ها داشتم ریاضی یاد می‌گرفتم. به‌علاوه ریاضیدان‌هایی به کارم علاقه‌مند شده بودند و برایم مطالبی می‌فرستادند. کم‌کم چیزهایی می‌نوشتم که قبلاً جایی چاپ نشده بود. کانوی، گراهام[4] و گولوم[5] برایم مطلب می‌فرستادند. ستونی که راجع به پولیومینوهای گولوم نوشتم اولین معرفی پولیومینوها برای مردم و ریاضیدانان بود. ریاضیدانان زیادی به پولیومینوها علاقه‌مند شدند و کارهای زیادی روی آنها انجام شد.

* * *

یکی از پرخواننده‌ترین ستون‌هایی که نوشتم، ستونی بود که راجع به بازی کانوی نوشتم. یک روز کانوی برایم راجع به کارهایی که داشت انجام می‌داد صحبت می‌کرد. بازی زندگی یکی از آنها بود که شاید به‌نظر خودش از بقیه کم‌اهمیت‌تر بود. ستونی که راجع به بازی زندگی نوشتم واقعاً گرفت. در همهٔ آمریکا آدم‌هایی که به کامپیوتر دسترسی

1. Hexaflexagons 2. John Tukey 3. Donald Knuth 4. Ron Graham 5. Solomon Golomb

داشتند بسیج شده بودند تا برنامه‌هایی برای بازی کردن زندگی بنویسند.

* * *

من، برعکس نویسنده‌هایی که هر روز سر یک ساعت خاص پشت میز می‌نشینند تا بنویسند، برنامهٔ خاصی برای نوشتن ندارم. گاهی یک روز وسط هفته کار را تعطیل می‌کنم و با همسرم بیرون می‌روم. گاهی هم تمام روز یکشنبه را کار می‌کنم. سبک خاصی برای نوشتن ندارم؛ فقط سعی می‌کنم تا آنجا که می‌توانم واضح بنویسم. وقتی به موضوعی علاقه‌مند می‌شوم تحقیق روی آن را شروع می‌کنم. فهرستی از همهٔ چیزهایی که می‌خواهم بگویم تهیه می‌کنم و شروع به نوشتن می‌کنم. همین. تا به‌حال هیچ‌وقت فکر نکرده‌ام که مثلاً جملهٔ اول را چطور باید بنویسم.

* * *

مردم بیشتر از آنچه من هستم من را ریاضیدان یا عضو جامعهٔ ریاضی می‌دانند. عدد اردوش من دو است؛ اما سطح ریاضیاتی که می‌دانم بسیار پایین است. من اکیداً یک ژورنالیست هستم ــ ژورنالیستی که کارهای دیگران را گزارش می‌کند.

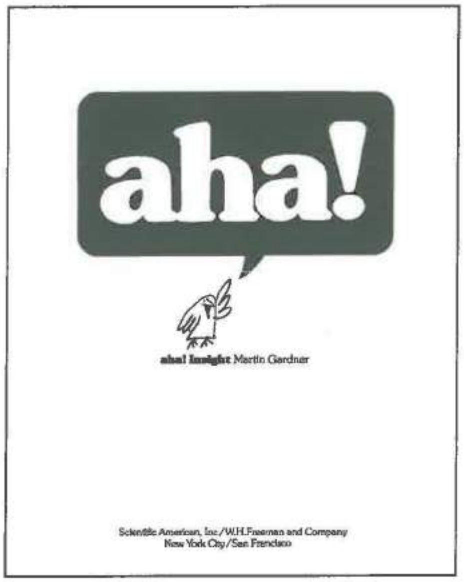
Interview with Martin Gardner, Notices of the American Mathematical Society, vol.52, no. 6, June/July 2005, pp 602-611.

Martin Gardner's Mathematical Games, Mathematical Association of America, 2005.

• ترجمهٔ سیدعباس موسوی

جرقه‌های ذهنی: «آها!»

مارتین گاردنر



شاید برایتان پیش آمده باشد که مسئله‌ای را که در ظاهر بسیار دشوار است، ناگهان با راه‌حلی آسان کنید. اگر چنین باشد، احتمالاً در لحظه‌ای که راه‌حل با جرقه‌ای در ذهنتان آشکار شده، از روی هیجان و ذوق چیزی گفته‌اید، مثل «آها!». این، همان چیزی است که مارتین گاردنر در کتاب «جرقه‌های آها!یی» به دنبالش است. این کتاب شامل چند مقالهٔ کوتاه دربارهٔ ترکیبیات، هندسه، منطق و مانند آنهاست. هر یک از مقاله‌ها با تصاویر طنزآمیزی شروع می‌شود که مسئله‌ای در آنها طرح می‌شود. در تصاویر طنزآمیز ابتدای هر مقاله، پرنده‌ای که روی طرح جلد کتاب هم نقش شده است، حضور دارد، و همیشه وقتی راه‌حلی «آها!»یی ارائه می‌شود، او هم «آها!» می‌گوید! ادامهٔ مقاله معمولاً شامل حل، تعمیم، و ارتباط دادن آن مسئله با موضوعات مشابه است ــ کاری که گاردنر در آن استاد است. این کتاب، خواننده را به دنیای جرقه‌های خلاق ذهنی می‌برد.

گاردنر در مقدمهٔ کتاب مثالی می‌آورد که نشان بدهد مسائل پیچیده ممکن است راه‌حل‌هایی بسیار آسان و غیرمنتظره داشته باشند. او مثالش را از روانشناسی انتخاب کرده است: محققی می‌خواست توانایی شامپانزه‌ها در حل مسائل را بررسی کند. او موزی را از وسط سقف آویزان کرد، طوری که شامپانزه حتی اگر می‌پرید، نمی‌توانست آن را بگیرد. در اتاق فقط تعدادی صندوق پخش شده بود. قرار بود در این آزمایش بررسی شود که شامپانزه می‌تواند

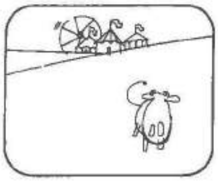
برای رسیدن به موز از این صندوق‌ها استفاده کند یا نه. شامپانزه در گوشه‌ای نشست و منتظر شد تا روانشناس از وسط اتاق رد شود، و وقتی او درست به زیر موز رسید، شامپانزه به‌سرعت به‌روی شانه‌های او پرید و به موز دست یافت!

گاردنر به خواننده این نوید را می‌دهد که توانایی یافتن راه‌حل‌های «آها!»یی لزوماً با سرعت انتقال یا ضریب هوشی بسیار بالا مرتبط نیست. شخصی که چندان سریع فکر نمی‌کند هم، می‌تواند چنین راه‌حل‌هایی را بیابد و از آنها لذت ببرد. البته بین جرقه‌های «آها!»یی و خلاقیت در علم، ارتباط نزدیکی وجود دارد.

در ادامه سه نمونه از مقاله‌های این کتاب را می‌بینید.

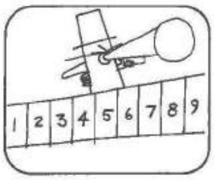
پانزده در جمعه بازار

در جمعه‌بازار همهٔ هیجان‌زده‌اند. البته بجز گاوها!

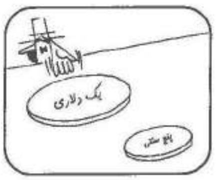


این جمعه، بازی جدیدی به‌نام پانزده در جمعه‌بازار برگزار می‌شود.

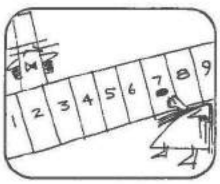
مجری: مردم بیایید جلو! قانون‌ها آسان‌اند. به‌نوبت روی هر یک از عددهای ۱ تا ۹ سکه می‌گذاریم. مهم نیست که اول نوبت چه کسی است.



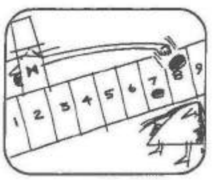
شما سکهٔ پنج سنتی می‌گذارید و من سکهٔ یک دلاری. کسی برنده است که بتواند با سکه‌هایش سه عدد را بپوشاند که حاصل‌جمعشان ۱۵ شود. برنده، همهٔ سکه‌های روی میز را می‌برد.

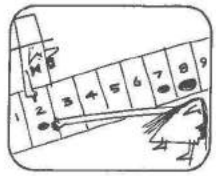


یک‌بار بازی کنیم: این خانم یکی از سکه‌های پنج سنتیش را روی ۷ می‌گذارد. چون ۷ پوشانده شده است، نمی‌توان دوباره رویش را پوشاند. در مورد عددهای دیگر هم همین قانون برقرار است.

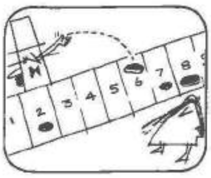


مجری بازی، یکی از سکه‌های یک دلاریش را روی ۸ می‌گذارد.

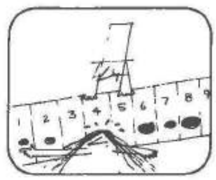




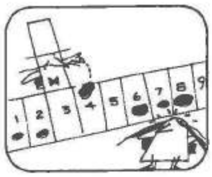
حرکت بعدی خانم این است که سکه‌اش را روی ۲ می‌گذارد تا در نوبت بعد بتواند سکه‌ای روی ۶ بگذارد و به حاصلجمع ۱۵ برسد و بازی را ببرد.



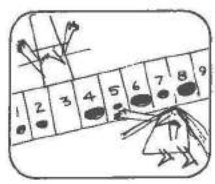
اما مرد با گذاشتن سکه‌اش روی ۶، نقشهٔ او را خنثی می‌کند. حالا اگر بتواند در نوبت بعد، سکه‌اش را روی ۱ بگذارد، برنده است.



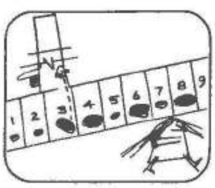
خانم این خطر را می‌بیند و سکه‌اش را روی ۱ می‌گذارد.



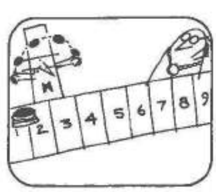
مجری وقتی سکه‌اش را روی ۴ می‌گذارد می‌خندد! خانم وقتی می‌بیند که مرد می‌تواند با انتخاب ۵ در نوبت بعد، بازی را ببرد، می‌خواهد جلوی او را بگیرد.



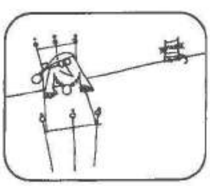
بنابراین، سکه‌ای روی ۵ می‌گذارد.



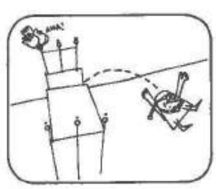
اما مرد سکه‌اش را روی ۳ می‌گذارد و بازی را می‌برد، زیرا حاصلجمع ۸ و ۴ و ۳ می‌شود ۱۵. خانم بیچاره چهار سکهٔ پنج سنتی می‌بازد.



عالیجناب شهردار از بازی خوشش آمد. بعد از اینکه مدت زیادی به آن نگاه کرد، به این نتیجه رسید که مجری از روش محرمانه‌ای استفاده می‌کند تا نبازد.

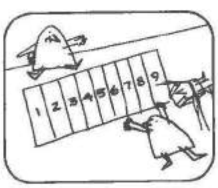


شهردار تمام شب بیدار ماند تا روش را بیابد.



ناگهان، از رختخواب بیرون پرید.

شهردار: آها! می‌دانستم او از روشی استفاده کرده است، و حالا می‌دانم آن روش چیست. امکان ندارد مشتری ببرد.



در ذهن شهردار، چه جرقه‌ای روشن شد؟ شاید شما هم بتوانید کشف کنید که چطور می‌توانید با دوستانتان بازی کنید، طوری که هیچ‌وقت نبازید.

بازی X-O

جرقه‌ای که به حل بازی ۱۵ می‌انجامد این است که این بازی از نظر ریاضی با X-O معادل است! این نکته را می‌توان با استفاده از مربع جادویی سه‌درسه‌ای به‌نام لو-شو فهمید که در چین باستان کشف شد.

برای اینکه زیبایی این مربع را درک کنید، ابتدا همهٔ ترکیب‌های سه رقم را که حاصلجمعشان ۱۵ می‌شود بنویسید (از رقم تکراری و از صفر استفاده نکنید). دقیقاً ۸تا از چنین سه‌تایی‌هایی وجود دارند:

۱ + ۵ + ۹ = ۱۵

۱ + ۶ + ۸ = ۱۵

۲ + ۴ + ۹ = ۱۵

۲ + ۵ + ۸ = ۱۵

۲ + ۶ + ۷ = ۱۵

۳ + ۴ + ۸ = ۱۵

۳ + ۵ + ۷ = ۱۵

۴ + ۵ + ۶ = ۱۵

اکنون به‌دقت به این مربع جادویی سه درسه توجه کنید:

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

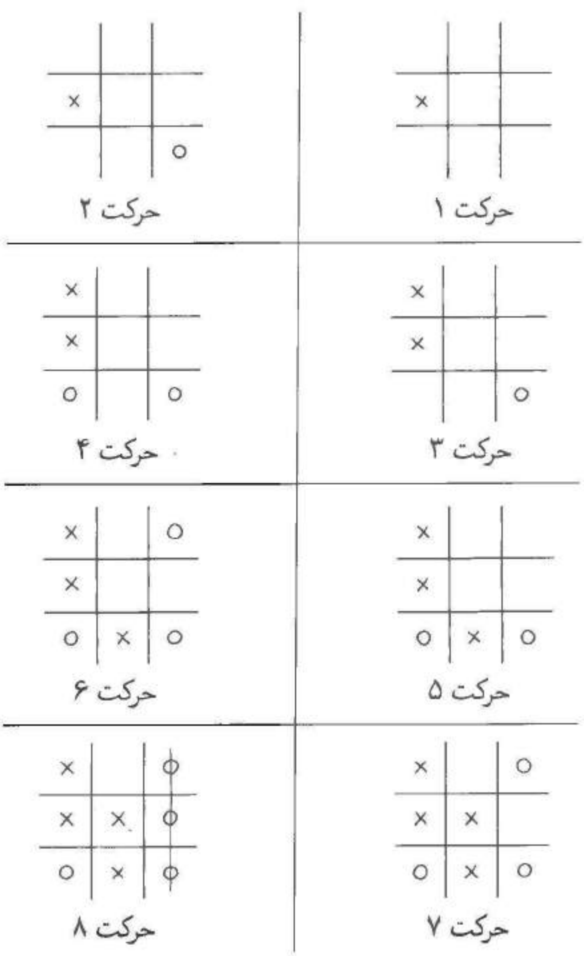
توجه کنید که هشت مجموعه از خانه‌ها وجود دارند که هر یک روی خطی راست قرار می‌گیرند: سه سطر، سه ستون و دو قطر. هر یک از خط‌های راست، یکی از هشت سه‌تایی را مشخص می‌کند و مجموع ارقام رویش برابر ۱۵ است. بنابراین، هر مجموعه از سه رقم که به برد در بازی **جمعه**بازار منجر شود، با سطر، ستون یا قطری از این مربع جادویی مشخص می‌شود.

اکنون آسان است که ببینید بازی جمعه‌بازار با X-Oای که روی مربع جادویی بازی شود، معادل است. مجری، این مربع را روی کارتی که می‌تواند ببیند ولی از دید بقیه مخفی است، نوشته است. فقط یک لو-شو وجود دارد، گرچه می‌توان آن را چرخاند و هر یک از این دوران‌هایش را می‌توان قرینه هم کرد. هر یک از این هشت‌تا برای استفاده در این بازی مناسب است.

وقتی بازی ۱۵ پیش می‌رود، مجری به‌طور ذهنی روی کارتش X-O بازی می‌کند. اگر کسی درست X-O بازی کند، امکان ندارد که ببازد. اگر هر دو بازیکن درست بازی کنند، بازی مساوی می‌شود؛ اما بازیکنان بازی جمعه بازار به این دلیل که متوجه نمی‌شوند که دارند X-O بازی می‌کنند، در موضع ضعف قرار دارند. به‌همین دلیل، مجری راحت‌تر می‌تواند آنها را گیر بیندازد.

بیایید با بازی‌ای که در تصویرها دیدیم و بین خانم و مجری رخ دارد، بازی کنیم تا ببینیم توضیح بالا دقیقاً چگونه به عمل درمی‌آید.

حرکت‌ها در شکل نشان داده‌ایم. مجری با اینکه بازی را شروع نکرد، توانست در حرکت ۶ دامی پهن کند تا مطمئن شود که در حرکت ۸، مستقل از حرکت ۷ خانم، بازی را می‌برد. هرکسی که یاد بگیرد X-O را خوب بازی کند، می‌تواند با استفاده از مربع جادویی، در بازی ۱۵ شکست ناپذیر باشد.



در ریاضیات، وقتی دو چیز از بعضی نظرها مشابه یا معادل‌اند، می‌گویند آن دو چیز یکریخت‌اند. مفهوم یکریختی یکی از مهم‌ترین ایده‌ها در ریاضیات است. موارد زیادی وجود دارند که در آنها مسئله‌ای دشوار پس از تبدیل به مسئله‌ای یکریخت که راه‌حلش را می‌دانیم، به‌آسانی حل می‌شود. ریاضیات در همان حال که پیچیده‌تر می‌شود، متحدتر هم می‌شود، به این معنی که با کشف یکریختی‌ها، آسان‌تر می‌شود. مثلاً، وقتی در سال ۱۹۷۶ ثابت شد که قضیهٔ چهار رنگ صحیح است، فوراً درستی تعداد زیادی از حدس‌های دیگر در شاخه‌های دیگر ریاضی هم ثابت شد، که از قبل معلوم بود که با قضیهٔ چهار رنگ یکریخت‌اند.

برای اینکه مفهوم یکریختی را بهتر درک کنید، این بازی را در نظر بگیرید. بازی با نه کلمهٔ زیر انجام می‌شود:

خبیث
تب
برگ
خمس
تیررس
سگ
خارج
اتو
گیاه

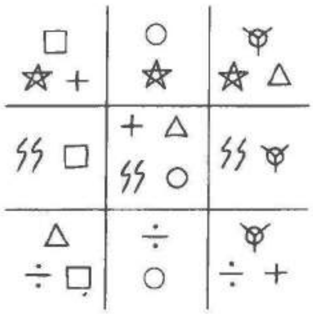
دو بازیکن به‌نوبت کلمه‌ها را خط می‌زنند، یکی با خودکار قرمز و دیگری با خودکار آبی. اولین بازیکنی که سه کلمه را که در یک حرف مشترک هستند خط بزند، برنده است. ممکن است لازم باشد چندین بار بازی کنید تا معلوم شود که این بازی، همان X-O است! یکریختی را می‌توان به‌آسانی با نوشتن کلمه‌ها در خانه‌های بازی X-O طوری که در شکل نشان داده شده است، برقرار کرد:

خبیث	خمس	خارج
تب	تیررس	اتو
برگ	سگ	گیاه

با بررسی‌ای آسان، معلوم می‌شود که هر سه‌تایی از کلمه‌هایی که یک‌حرف مشترک دارند، روی خطی افقی، عمودی یا قطری قرار دارند. بنابراین، این بازی، همانX-O یا همان بازی ۱۵ است.

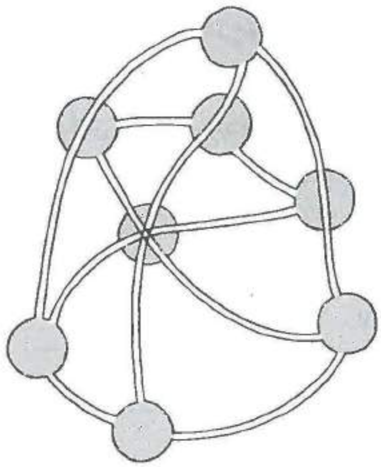
آیا می‌توانید ۹ کلمهٔ دیگر بیابید که برای این بازی مناسب باشند؟ البته لازم نیست کلمه‌ها فارسی باشند. حتی

می‌توانید از مجموعه‌هایی از نمادها استفاده کنید، مانند آنچه در شکل می‌بینید:



بهترین راه برای اینکه همهٔ این بازی‌ها را بازی کنید این است که رقم‌ها، کلمات یا نمادها را روی ۹ کارت بنویسید. کارت‌ها را رو به بالا روی میز قرار بدهید. دو بازیکن نوبتی کارت برمی‌دارند تا یکیشان برنده شود.

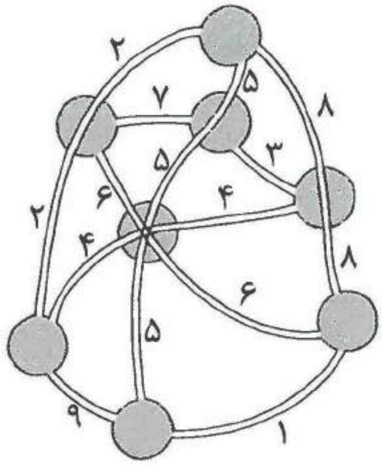
حالا که یکریختی این بازی‌ها را فهمیده‌اید، این بازی شبکه‌ای را در نظر بگیرید که روی نقشه‌ای مانند آنچه در شکل می‌بینید، بازی می‌شود.



هشت شهر با جاده‌هایی به‌هم وصل‌اند. یکی از بازیکن‌ها خودکاری قرمز دارد و دیگری آبی. به‌نوبت جاده‌ای را انتخاب می‌کنند و تمامش را رنگ می‌کنند. توجه کنید که بعضی جاده‌ها از روی شهرها می‌گذرند، و در این موارد هم باید تمام طول جاده رنگ شود.

اولین کسی که سه جاده را رنگ کند که هر سه به یک شهر وارد می‌شوند، برنده است. در اولین نگاه، به نظر می‌رسد که این بازی هیچ ارتباطی با بازی‌هایی که تا الان بررسی کرده‌ایم ندارد. اما این بازی هم با X–O معادل است!

یکریختی با عددگذاری جاده‌ها به شکل صفحهٔ بعد معلوم می‌شود.



هر جاده با خانه‌ای در مربع جادویی متناظر است. هر شهر با خطی راست و گذرا از سه خانه در مربع جادویی متناظر است. مانند قبل، یکریختی کامل شد. هرکسی که X-O را کاملاً درست بازی کند، این یکی را هم کاملاً درست بازی خواهد کرد.

در شکل بعد، یکی از ۸۸۰ مربع جادویی چهاردرچهار را می‌بینید (در این شمارش، دوران‌ها به‌حساب نیامده‌اند). حاصلجمع جادویی برابر است با ۳۴. آیا با استفاده از این مربع می‌توانید روشی کاملاً درست برای بازی۳۴ ــ یعنی بازی‌ای که در آن بازیکنان به‌نوبت عددهای ۱ تا ۱۶ را انتخاب می‌کنند و عدد تکراری نباید انتخاب شود، و بازیکنی برنده است که چهار عدد با حاصلجمع۳۴ بیابد ــ پیدا کنید؟ آیا این بازی با بازی چهاردرچهار X-O یکریخت است؟ پاسخ منفی است. می‌توانید بگویید چرا؟

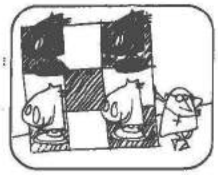
۱۴	۱	۱۲	۷
۱۱	۸	۱۳	۲
۵	۱۰	۳	۱۶
۴	۱۵	۶	۹

آیا امکان دارد که قوانین X-O را طوری عوض کنیم که الگوهایی تشکیل‌شده از چهار خانه به‌غیر از خطوط راست هم مجاز باشند، تا بین این دو بازی، یکریختی برقرار شود؟

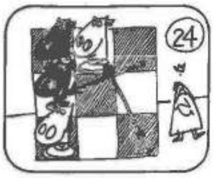
Gardner, M. *Aha! Insight*, Scientific American, 1978, pp. 116-120.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

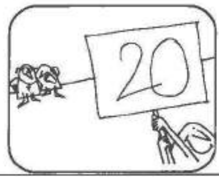
تعویض جای اسب‌ها



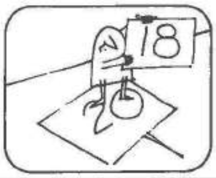
آقای بیشاپ در جلسه‌ای در باشگاه شطرنج معمایی طرح کرد.
آقای بیشاپ: جای اسب‌های سفید و اسب‌های سیاه را در کمترین تعداد حرکت عوض کنید.



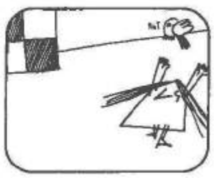
پسری در دو حرکت اول کاری کرد که در شکل می‌بینید و ۲۴ حرکت طول کشید تا اسب‌های سفید را به بالا ببرد و اسب‌های سیاه را پایین بیاورد.



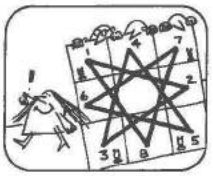
پسر دیگری این کار را در ۲۰ حرکت تمام کرد.



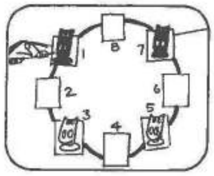
ولی هیچ‌کس نتوانست این کار را در کمتر از ۱۸ حرکت انجام بدهد، تا وقتی که خانم فیش سر رسید.



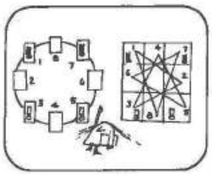
خانم فیش: آها! من می‌توانم با فقط ۱۶ حرکت معما را حل کنم و می‌توانم ثابت کنم که با کمتر از این تعداد نمی‌شود!



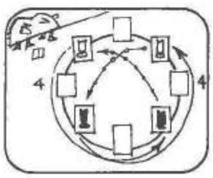
خانم فیش قبل از اینکه توضیحش را شروع کند، نموداری رسم کرد که در آن خط‌های راست حرکات ممکن اسب‌ها را مشخص می‌کردند.



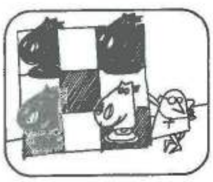
اگر خط‌های راست را طناب فرض کنیم، هشت خانهٔ صفحهٔ مانند دانه‌های روی گردنبند هستند. می‌توانیم این گردنبند را بازکنیم تا به‌شکل دایره دربیاید.



هر حرکت روی صفحه‌ای که اسب‌ها روی آن هستند، مانند حرکت روی دایره است. برای اینکه جای اسب‌ها را عوض کنیم، باید آنها را در یک جهت روی دایره حرکت بدهیم.



بله، خانم فیش درست می‌گوید و در پایان، هریک از چهار اسب، چهار حرکت می‌کند که می‌شود ۱۶ حرکت، و کمتر از این تعداد هم کافی نیست.



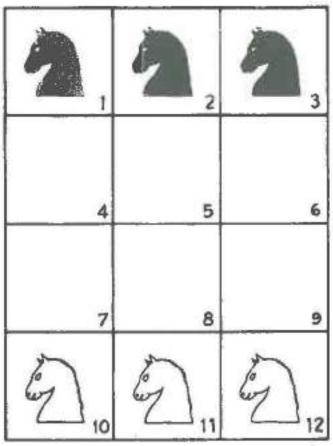
خانم فیش به‌جای یکی از اسب‌های سفید، اسبی خاکستری گذاشت و از اعضای باشگاه خواست که جای اسب سفید و اسب خاکستری را در کمترین تعداد حرکت عوض کنند. به‌نظر شما، چرا وقتی این سؤال را پرسید، لبخندی به لب داشت؟

اسب‌ها و ستاره

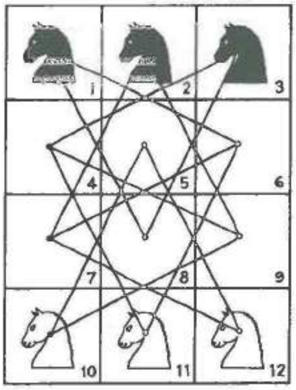
خانم فیش مسئلهٔ اسب‌ها را به مسئله‌ای معادل تبدیل کرد که راه‌حل «آها!»یی آسانی داشت. مسئله‌ای را که طرح کرد می‌توان با همان روش جالب قبلی حل کرد. وقتی خانه‌ها را با طناب به هم وصل می‌کنیم و آنها را باز می‌کنیم تا دایره‌ای به‌وجود بیاید، می‌بینیم که اسب‌ها این ترتیب دوری را دارند: سیاه، سیاه، خاکستری، سفید. خانم فیش لبخند می‌زد، چون می‌دید که نمی‌توان جای اسب سفید و اسب خاکستری را عوض کرد. ترتیب اسب‌ها ناورداست زیرا هیچ اسبی نمی‌تواند با حرکت در روی دایره در دو جهت ممکن، از روی اسبی دیگر بپرد. متوجهید که چرا؟

با حرکت روی دایره در جهت عقربه‌های ساعت، اسب سفید همیشه دقیقاً قبل از اسب خاکستری است. اگر امکان می‌داشت که جای اسب سفید و خاکستری عوض شود، آنگاه ترتیب دوری می‌بایست عوض شود و اسب خاکستری می‌بایست دقیقاً قبل از اسب سفید می‌بود، که غیرممکن است؛ زیرا برای این کار باید یکی از این اسب‌ها از روی دو اسب سیاه بپرد. با تغییر دادن مسئله به مسئله‌ای دربارهٔ ترتیب توپولوژیک چهار نقطه روی خمی بسته می‌رسیم. اکنون روشی آسان برای اثبات ناممکن بودن تغییر این ترتیب یافته‌ایم، که هر روش دیگری از آن بسیار دشوارتر است. مطمئنم اگر سعی کنید مسئله را به‌روشی دیگر حل کنید، این حرف را تصدیق می‌کنید.

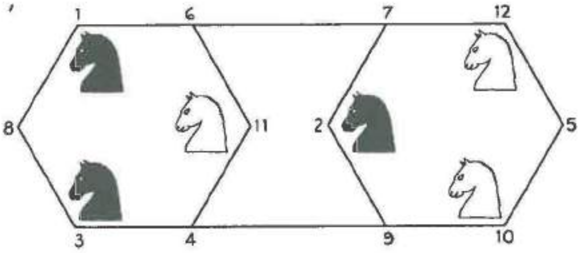
آیا این دو مسئلهٔ تعویض جای اسب را دوست داشتید؟ پس به این مسئلهٔ کمی دشوارتر توجه کنید. مسئله‌ای را که در صفحهٔ ۴ × ۳ در شکل نشان داده شده است ببینید. مانند قبل، باید جای سه اسب سفید و سه اسب سیاه را عوض کنیم، طوری که اسب‌های سیاه در سطر پایین و اسب‌های سفید در سطر بالا قرار بگیرند، و این کار با کمترین تعداد حرکت‌ها انجام بشود.



در این حالت، نمودار معادل، پیچیده‌تر است. شکل را ببینید.



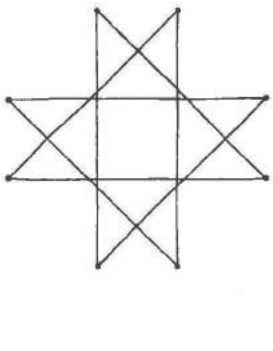
این نمودار، همهٔ حرکت‌های ممکن را نشان می‌دهد. اگر فرض کنیم که نمودار از طناب و دانه تشکیل شده است، برخلاف مسئلهٔ قبل نمی‌توانیم طناب را بازکنیم تا به دایره برسیم، اما می‌توانیم نمودار را به شکلی مانند شکل زیر بازکنیم:



عددهای شکل بالا متناظرند با شماره‌های خانه‌ها در دو شکل قبل.

مسئلهٔ تعویض جای اسب‌های سیاه و سفید در این نمودار معادل است با مسئلهٔ اصلی، اما حالا یافتن راه‌حل آسان‌تر است. ببینید که آیا می‌توانید ۱۶ حرکتی را که با آن مسئله حل می‌شود، بیابید؟

در معمایی قدیمی که آن‌هم با تحلیلی مشابه حل می‌شود، از نموداری ستاره‌ای مانند شکل زیر استفاده می‌شود. برای این معما به هفت سکه نیاز دارید.



مسئله این است: سکه‌ای روی یکی از نقطه‌های ستاره بگذارید و آن را روی خطی سیاه حرکت بدهید تا به نقطه‌ای دیگر برسید. سپس سکهٔ دیگری روی نقطه‌ای خالی از ستاره بگذارید و آن را مثل قبل، حرکت بدهید تا به نقطه‌ای خالی برسید. این کار را آن‌قدر ادامه بدهید تا همهٔ هفت سکه روی نقطه‌های ستاره قرار گیرند.

خواهید دید که اگر طرحی دقیق برای حرکت دادن و قرار دادن سکه‌ها نداشته باشید، در موقعیتی گیر می‌افتید که نمی‌توانید دیگر ادامه بدهید. مسئله، طرح روشی برای قرار دادن و حرکت دادن هفت سکه با توجه به قانون‌هاست. آیا می‌توانید این روش را بیابید؟

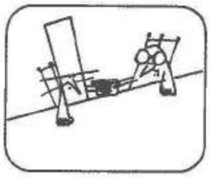
نمودار ستاره‌ای را می‌توان مانند نمودار دو مسئلهٔ اول به نمودار دایره‌ای تبدیل کرد. اکنون به‌سادگی می‌توان هفت سکه را قرار داد و حرکت داد. راه‌های زیادی برای این کار وجود دارد. یکی از روش‌ها این است که هر حرکتی که می‌خواهید با اولین سکه بکنید. از آن به بعد، سکه را طوری بگذارید و حرکت بدهید که در پایان به نقطه‌ای برسد که سکهٔ قبلی آن را خالی کرده است.

این معما را به دوستانتان بدهید. تعداد کمی از آنها می‌توانند آن را حل کنند، حتی اگر به‌سرعت به آنها نشان دهید که چگونه حل می‌شود!

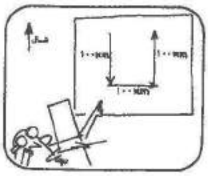
Gardner, M. *Aha! Insight*, Scientific American, 1978, pp. 36-37.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی مسلّم

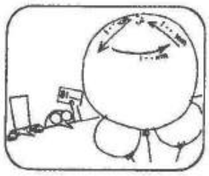
پروازی در سه مسیر



روزی **دان**، شرط‌بند معروف، دوستش **دیک** را دید. دیک خلبان است.



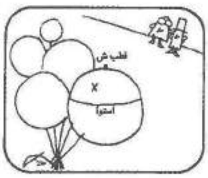
دان: یک دلار شرط می‌بندم نمی‌توانی این مسئله را حل کنی: خلبانی ۱۰۰ کیلومتر به طرف جنوب پرواز کرد. بعد ۱۰۰ کیلومتر به‌طرف شرق، و بعد ۱۰۰ کیلومتر به طرف شمال، و با این سه حرکت به سرجای اولش برگشت. از کجا شروع کرد؟



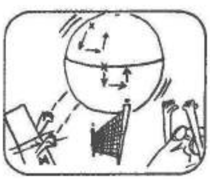
دیک: قبول. شرط می‌بندیم. این مسئله جدید نیست. نقطهٔ شروعش قطب‌شمال است.

دان: درست بود! بفرما، این هم یک دلارت. یک دلار دیگر شرط می‌بندم که هیچ نقطهٔ شروع دیگری نمی‌توانی پیدا کنی.

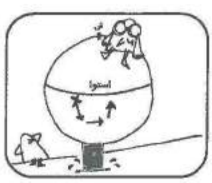
دیک مدتی طولانی به مسئله فکر کرد.



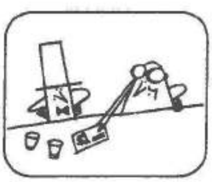
دیک: هیچ نقطهٔ شروع دیگری وجود ندارد. می‌توانم ثابت کنم. فرض کن خلبان از هر جایی بین قطب شمال و استوا حرکتش را شروع کند.



دیک: واضح است که نمی‌تواند به‌جایی برگردد که از آن شروع کرده است، و اگر از نقطه‌ای روی استوا شروع کند، نقطهٔ پایان تقریباً ۱۰۰ کیلومتر دورتر از نقطهٔ شروع است.

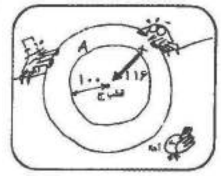


دیک: و اگر از نقطه‌ای جنوب استوا شروع کند، فاصله‌اش در پایان تا نقطهٔ شروع، حتی از ۱۰۰ کیلومتر هم بیشتر می‌شود.

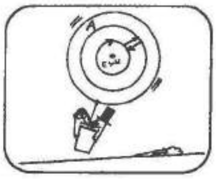


دان: قبول. آیا می‌خواهی شرط را دوبرابر کنیم، بر سر اینکه آیا نقطهٔ شروعی غیر از قطب شمال وجود دارد یا نه؟ دیک شرط بست و باخت. آیا می‌توانید بگویید چرا؟

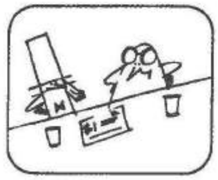
دان: فرض کن خلبان در نقطه‌ای روی مداری با فاصلهٔ ۱۱۶ کیلومتر از قطب جنوب حرکتش را شروع کند. اول ۱۰۰ کیلومتر به جنوب حرکت می‌کند.



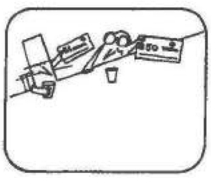
حالا وقتی ۱۰۰ کیلومتر به‌طرف شرق می‌رود، یک دور کامل حول قطب جنوب می‌زند. پس وقتی ۱۰۰ کیلومتر به‌طرف شمال حرکت می‌کند، به نقطهٔ شروعش برمی‌گردد. درست است؟



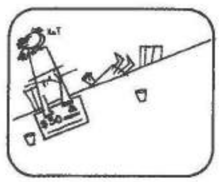
دیک: درست است.
بیا، این هم دو دلارت.
دان: می‌خواهی یک دلار دیگر شرط ببندیم بر سر اینکه نقطهٔ دیگری نمی‌توان پیدا کرد؟
دیک: یعنی نقطه‌ای به‌جز قطب شمال و غیر از نقاط روی دایرهٔ A
دان: بله. منظورم همین است.



دیک: قبول.
اصلاً سر ۵۰ دلار شرط می‌بندم که پیدا نمی‌شود.



بیچاره دیک بازهم باخت. به‌نظر شما، دیک چه «آها!»یی را بازهم نادیده گرفت؟



نقاط شروع

دیک در شرط‌بندی دوم هم باخت، چون این نکته در ذهنش جرقه نزد که خلبان می‌تواند از نقطه‌ای آن‌قدر نزدیک به قطب جنوب حرکت را شروع کند که وقتی ۱۰۰ کیلومتر در جهت شرق حرکت می‌کند، دوبار حول قطب جنوب بچرخد. به این ترتیب، دایره‌ای جدید پیدا می‌کنیم که هر نقطه‌اش جواب اولین مسئله‌ای است که دان گفت. مشابهاً، خلبان می‌تواند ازنقطه‌ای روی دایره‌ای نزدیک‌تر به قطب شروع کند، و این بار، با پروازش در جهت شرق، سه‌بار حول قطب بچرخد، یا چهاربار، و یا هر عدد طبیعی دیگر. بنابراین، پاسخ مسئله، مجموعهٔ نقاط دایره‌هایی هم‌مرکز است. مرکز همهٔ این دایره‌ها قطب جنوب است، و فاصله‌شان تا قطب جنوب به ۱۰۰ نزدیک می‌شود.

حالا به مسئلهٔ خلبان دیگری توجه کنید، که در آن، خم جالبی روی کره که به خم ثابت‌زاویه یا خط لوزی معروف

است، پیدا می‌شود. خلبانی پروازش را از روی استوا در جهت شمال شرقی شروع می‌کند. پروازش در کجا به‌پایان می‌رسد؟ طول مسیرش چقدر است؟ مسیرش چه‌شکلی است؟

شاید تعجب کنید، اما مسیرش مارپیچی است که نصف‌النهارهای زمین را با زاویهٔ ثابت قطع می‌کند و دقیقاً در قطب شمال به‌پایان می‌رسد. مسیر، مارپیچی کروی است که به‌دور قطب شمال می‌پیچد، و بی‌نهایت بار حول آن می‌چرخد. خلبان را نقطه‌ای متحرک در نظر بگیرید. به‌طرز تناقض‌آمیزی، با اینکه این نقطه بی‌نهایت بار حول قطب می‌چرخد، طول مسیر متناهی است، و می‌توان آن را محاسبه کرد. بنابراین، اگر خلبان (یا همان نقطه) با سرعت ثابت حرکت کند، می‌تواند در زمانی متناهی به‌قطب شمال برسد.

وقتی خم ثابت‌زاویه را روی نقشه‌ای مسطح رسم می‌کنیم، بسته به اینکه از چه روشی برای ترسیم نقشه‌ای استفاده کنیم، به شکل‌های مختلفی می‌رسیم. یکی از روش‌های معروف، افکنش مرکاتور است، که نقشه‌های معمول جهان با آن رسم می‌شوند. در این افکنش، نصف‌النهارها خطوط راست موازی‌اند، و مدارها نیز چنین‌اند. ضمناً هر مدار بر هر نصف‌النهار عمود است. روی این نقشه، خم مورد نظر، خطی راست است. به‌همین دلیل است که نقشهٔ مرکاتور این‌قدر برای خلبان‌ها و ملوان‌ها مفید است؛ اگر کشتی یا هواپیما با جهت ثابتی از قطب‌نما حرکت کنند، مسیر حرکتشان خطی راست می‌شود که می‌توان آن را به‌راحتی روی نقشه نشان داد.

حالا اگر خلبان در قطب شمال باشد و در جهت جنوب غربی حرکت کند چه رخ می‌دهد؟ این، برعکسِ مسئلهٔ قبل است. مسیر بازهم خم ثابت‌زاویه است، اما این دفعه نمی‌توان معلوم کرد که در چه نقطه‌ای به استوا می‌رسد. در حقیقت، خم می‌تواند در هر نقطه‌ای به استوا برسد. این حکم را می‌توانید با برعکس کردن زمان ثابت کنید: با شروع از هر نقطه‌ای از استوا و پرواز عقب‌عقب، به قطب شمال می‌رسیم. البته، اگر خلبان از قطب شمال شروع کند و از استوا هم بگذرد، خم ثابت‌زاویه‌اش به دور قطب جنوب خواهد پیچید.

فرض کنید در قطب شمال صفحه‌ای بر کره مماس شده است که با استوا موازی است، و خم ثابت‌زاویه روی آن افکنده شده است. در این‌صورت، تصویر خم روی این صفحه، مارپیچی هم‌زاویه (لگاریتمی) است. این مارپیچ، خطوط شعاعی را با زاویه‌ای ثابت قطع می‌کند.

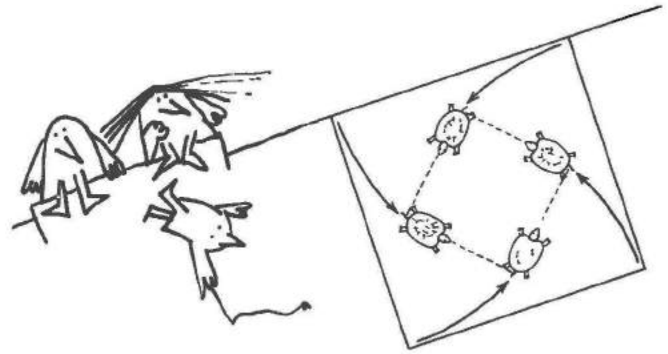
مسئلهٔ چهارحشره هم مسئله‌ای معروف دربارهٔ مسیرهاست که به مارپیچ لگاریتمی مربوط است، و البته راه‌حلی با «آها!»یی زیبا دارد که در آن از محاسبات طولانی اجتناب می‌شود. این مسئله را با داستانی دربارهٔ خانوادهٔ پیتزا و لاکپشت‌های دست‌آموزشان بیان می‌کنیم.

تام پیتزا چهار لاکپشتش به نام‌های ابنر[1]، برتا[2]، چارلز[3] و دلایلا[4] را به این صورت آموزش داده است که ابنر همیشه به‌طرف برتا حرکت می‌کند، برتا همیشه به‌طرف چارلز، چارلز به‌طرف دلایلا و دلایلا به‌طرف ابنر می‌رود (با توجه به حروف ابتدای نامشان، A به دنبال B، B به دنبال C، Cبه دنبال D، و D به دنبال A). تام چهار لاکپشت

1. Abner 2. Bertha 3. Charles 4. Delilah

را به ترتیب الفبایی نام‌هایشان در چهار رأس اتاقی مربعی قرار داده است. او و پدر و مادرش می‌خواهند ببینند که چه رخ می‌دهد.

آقای پیتزا گفت: «خیلی جالب است پسرم. هر لاکپشت مستقیماً به‌طرف لاکپشت سمت راستش حرکت می‌کند. سرعتشان هم یکسان است. به همین دلیل، در هر لحظه، در چهار رأس مربعی قرار دارند.» شکل را ببینید.



تام گفت: «بله بابا. مربع هم به‌تدریج کوچک و کوچک‌تر می‌شود. نگاه کن! لاکپشت‌ها دقیقاً در مرکز به یکدیگر رسیدند.»

فرض کنید هر لاکپشت با سرعت ثابت یک سانتی‌متر بر ثانیه حرکت می‌کند و طول ضلع اتاق مربعی‌شکل برابر ۳ متر است. چقدر طول می‌کشد تا لاکپشت‌ها در مرکز به‌یکدیگر برسند؟ البته باید فرض کنیم که لاکپشت‌ها نقطه هستند.

آقای پیتزا سعی کرد که مسئله را با استفاده از حسابان و ماشین‌حسابش حل کند. ناگهان خانم پیتزا داد زد: «پیرونی! حسابان لازم نیست. ساده است. پنج دقیقه طول می‌کشد.»

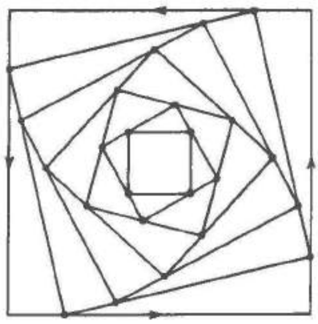
چه چیزی در ذهن خانم پیتزا جرقه زد؟

دو لاکپشتِ کنار هم را در نظر بگیرید، مثلاً ابنر و برتا را. در هر لحظه، برتا دقیقاً با زاویهٔ قائمه نسبت به ابنر (که به‌دنبال برتا می‌رود) حرکت می‌کند. ابنر مستقیم به‌طرف برتا می‌رود، اما برتا مستقیم به‌طرف چارلز می‌رود. به‌همین دلیل است که چهار لاکپشت همیشه در رأس‌های مربعی قرار دارند. حرکت برتا هیچ‌وقت در جهت یا در خلاف جهت ابنر نیست (یعنی سرعت برتا مؤلفه‌ای در جهت یا در خلاف جهت ابنر ندارد)، پس این حرکت برتا از فاصلهٔ برتا با ابنر نه کم می‌کند و نه به آن می‌افزاید. بنابراین می‌توان حرکت برتا را در نظر نگرفت؛ انگار که برتا در رأس اتاق بماند و ابنر روی ضلع اتاق به‌طرفش حرکت کند.

این جرقه، کلید حل است. طول خمی که ابنر می‌پیماید باید دقیقاً برابر طول ضلع اتاق باشد. طول ضلع ۳۰۰ سانتی‌متر است و سرعت ابنر برابر است با ۱ سانتی‌متر بر ثانیه، پس ۳۰۰ ثانیه یا همان ۵ دقیقه طول می‌کشد که ابنر به برتا برسد. همین حرف در مورد سه لاکپشت دیگر هم درست است. بنابراین، پس از ۵ دقیقه، هر چهار

لاکپشت در مرکز مربع به یکدیگر می‌رسند.

با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای ریاضی می‌توانید شکل مسیرهای لاکپشت‌ها را در قسمت‌های کوچک زمانی رسم کنید، به این‌صورت که در پایان هر قسمت از زمان، چهار ضلع مربع را رسم کنید. نتیجه، الگویی است که در شکل می‌بینید.



آیا می‌توانید مسئله را به رأس‌های چندضلعی‌ای منتظم تعمیم بدهید؟ اول مثلث متساوی‌الاضلاع را بررسی کنید، سپس پنج‌ضلعی را. اگر طول ضلع چندضلعی داده شده باشد، آیا می‌توانید دستوری عمومی برای یافتن طول مسیر پیدا کنید؟ در حالت حدی، وقتی تعداد لاکپشت‌ها (نقطه‌ها) نامتناهی باشد، و حرکت از رأس‌های چندضلعی‌ای با نامتناهی رأس شروع شود، چه رخ می‌دهد؟ آیا لاکپشت‌ها به‌هم می‌رسند؟ اگر لاکپشت‌ها از رأس‌های اتاقی مستطیلی شکل که مربعی نیست شروع کنند، چه رخ می‌دهد؟

در مسئلهٔ اصلی، فرض کنید که بعد از اینکه چهار لاکپشت در مرکز مربع به‌هم می‌رسند، متوجه شوند که از یکدیگر بدشان می‌آید، و در جهت دور شدن حرکت کنند، یعنی هریک به‌طور مستقیم در جهت دور شدن از لاکپشت سمت چپش حرکت کند. آیا لزوماً لاکپشت‌ها به چهار رأس اتاق باز می‌گردند؟

Gardner, M. *Aha! Insight*, Scientific American, 1978, pp. 41-44.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی‌مسلّم

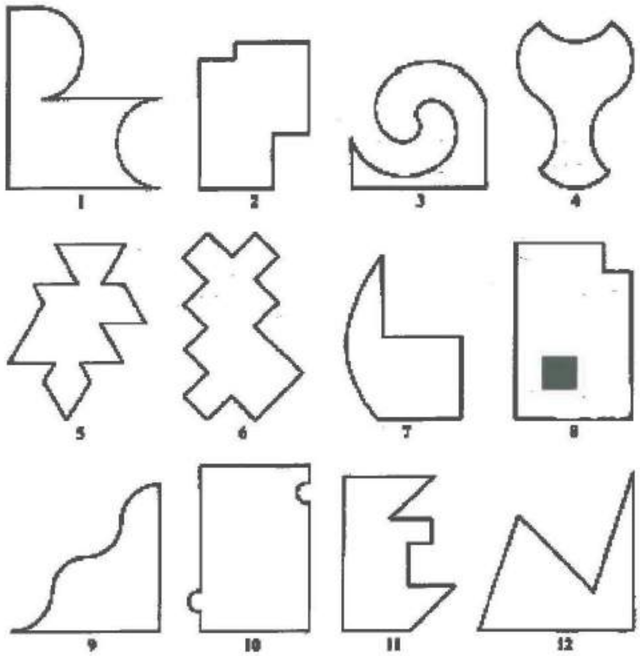
تقسیم شکل‌ها به چند قسمت برابر

مارتین گاردنر

در بعضی معماهای معروف، که معمولاً در کتاب‌های قدیمی پیدا می‌شوند، لازم است شکلی به دو، سه یا چند قسمت برابر تقسیم شود. گاهی منظور از «برابر»، همنهشت (قابل انطباق) است، وگاهی فقط برابری مساحت‌ها مورد نظر است. در این مقاله، به چند مسئله از این نوع می‌پردازیم و در حل بعضی از آنها به مباحثی پیشرفته در ریاضیات برخواهیم خورد.

بیایید با آسان‌ترین نوع این مسئله‌ها شروع کنیم: شکلی را به دو قسمت همنهشت تقسیم کنید (تصویر آینه‌ای هر شکل را با آن همنهشت در نظر می‌گیریم). ممکن است گمان کنید که این‌گونه مسائل را به‌راحتی می‌توان حل کرد، اما بعضی از آنها ممکن است واقعاً دشوار باشند. تا جایی که می‌دانم، الگوریتمی کلی برای اینکه بدانیم شکلی را می‌توان به دو یا چند قسمت همنهشت تقسیم کرد یا نه، وجود ندارد، و قضیه‌های جالب دربارهٔ این سؤال هم نادرند.

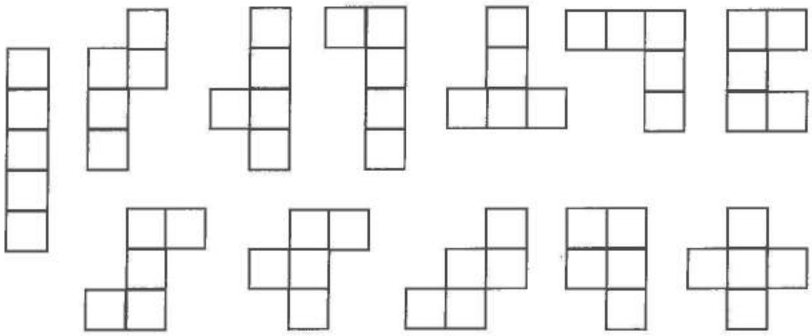
هر یک از شکل‌های ۱ را می‌توان به دو قسمت همنهشت تقسیم کرد. وقتی شکلی سوراخ داشته باشد، مسئلهٔ تقسیمش دشوارتر می‌شود.



شکل ۱

توجه کنید که در شکل ۱، فقط شمارهٔ ۴ نوعی تقارن دارد: تقارن محوری. محور تقارن به‌طور عمودی از وسط شکل می‌گذرد. آشکار است که هر شکلی را که تقارن محوری داشته باشد و هر جسمی را که صفحهٔ تقارن داشته باشد می‌توان با برش روی محور یا صفحهٔ تقارن، به دو قسمت همنهشت تقسیم کرد. آیا اگر شکلی محور تقارن داشته باشد، حتماً باید روی محور تقارن به دو قسمت تقسیم شود تا آن دو قسمت همنهشت باشند؟ نه! شکل ۱، شمارهٔ ۴ مثالی است که نشان می‌دهد چنین نیست. روشی دیگر بیابید که در آن، شمارهٔ ۴ به دو قسمت همنهشت تقسیم شود.

وقتی می‌خواهیم شکلی را به n قسمت همنهشت تقسیم کنیم، اگر n زیاد شود، مسئله دشوار و دشوارتر می‌شود، به‌خصوص اگر شکل آن قسمت‌ها مشخص شده باشد. در شکل ۲، مسئله‌ای جالب وجود دارد: چند تا پنج مربعی[1] را می‌توان به چهار قسمت همنهشت تقسیم کرد؟ همه را، به‌جز سه‌تا. برایم جالب بود که نه‌تای باقی‌مانده را می‌توان به‌طور یکتا، به‌نحوی تقسیم کرد که قسمت‌ها، باز هم پنج مربعی باشند. منتها کوچک‌تر. آیا می‌توانید آن سه پنج مربعی‌ای را که گفتم، بیابید؟



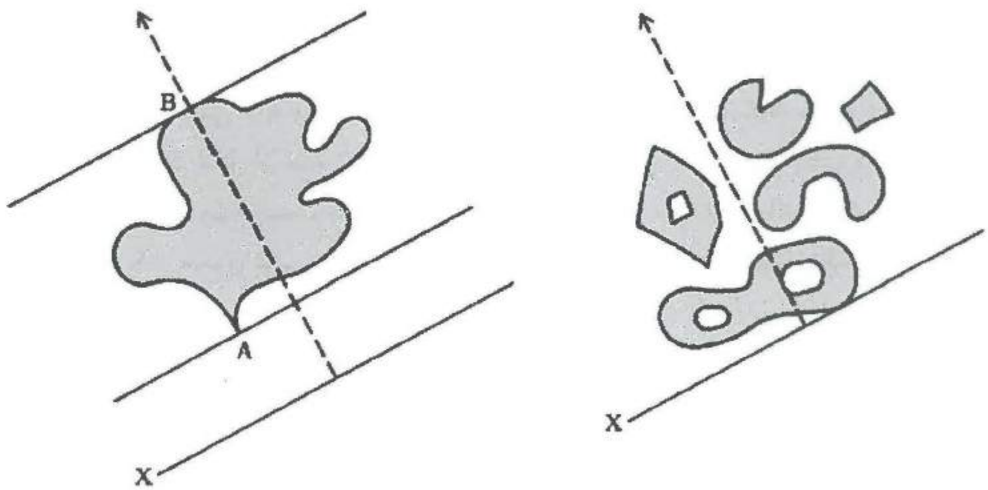
شکل ۲ دوازده پنج مربعی

بیایید شرط همنهشت بودن را حذف کنیم، و به برابر بودن مساحت‌های n قسمت اکتفا کنیم. به‌نظر می‌رسد که شهوداً آشکار است که اگر شکلی داشته باشیم، می‌توانیم با خطی راست آن را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کنیم، اما شاید آشکار نباشد که این خط را می‌توانیم به موازات هر خطی بیرون شکل که بخواهیم، رسم کنیم. برای اثبات این حکم، از قضیه‌ای معروف استفاده می‌کنیم: هر تابع پیوسته در بازهٔ $[A, B]$ مینیمم و ماکسیمم دارد و نیز هر مقدار دلخواهی بین مینیمم و ماکسیمم را نیز به خود می‌گیرد. به‌عنوان مثال، اگر در کوهنوردی روی خط راست از نقطهٔ A به نقطهٔ B بروید، ارتفاع شما نسبت به مکانتان به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، و بنابر قضیه‌ای که ذکر شد، روی مسیر دست‌کم یک نقطه (و اگر در حرکتتان بالا و پایین بروید، تعداد بیشتری نقطه) وجود دارد که ارتفاعتان در آن نقطه کمترین مقدار است، دست‌کم یک نقطه وجود دارد که ارتفاعتان در آن نقطه بیشترین مقدار است، و هر ارتفاعی بین این دو ارتفاع هم در دست‌کم یک نقطه از مسیر رخ می‌دهد.

1. Pentomino

ممکن است حکم قضیه به‌نظر واضح بیاید، اما اثبات قضیه چندان آسان نیست، و نیز با این قضیه می‌توان نتیجه‌هایی گرفت که اصلاً هم واضح نیستند!

به ناحیهٔ هاشورخوردهٔ شکل ۳، سمت چپ توجه کنید. خط x خطی دلخواه بیرون شکل است.



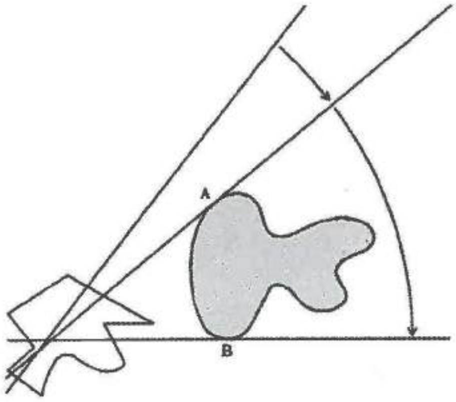
شکل ۳ اثبات قضیه‌ای دربارهٔ نصف کردن مساحت

می‌خواهیم ثابت کنیم که می‌توان خطی موازی با x از میان شکل گذراند که مساحت را دقیقاً نصف کند. فرض کنید خطی به‌آرامی طوری که همیشه موازی x باشد، در جهت برداری که خط‌چین شده است، حرکت کند. خط در نقطهٔ A به شکل می‌رسد و در نقطهٔ B از آن خارج می‌شود. وقتی خط روی ناحیه حرکت می‌کند، مساحت شکل در زیر خط تابعی پیوسته است از فاصلهٔ خط از نقطهٔ A. این مساحت در A برابر صفر و در B ماکسیمم است. بنابر قضیه‌ای که گفتیم، نقطه‌ای روی پاره‌خط AB وجود دارد که مساحت زیر خطی موازی x که از این نقطه می‌گذرد، نصف مساحت کل است. پس این همان خط مطلوب است.

اثباتی که دیدید به‌قدری کلی است که درستی قضیه را نه‌تنها در مورد شکل‌های یک تکهٔ بی‌سوراخ و سوراخ‌دار، بلکه دربارهٔ شکل‌های چند تکه نتیجه می‌دهد. با نگاهی به شکل سمت راست در شکل ۳ قانع می‌شوید که موازی هر خط داده‌شده، می‌توان خطی رسم کرد که حاصلجمع مساحت نواحی هاشورخورده در دو طرف آن خط، یکسان باشد.

فرض کنید مانند شکل ۴، دو ناحیه در صفحه داریم. آیا می‌توان خطی رسم کرد که هر یک از دو ناحیه را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کند؟ ثابت می‌کنیم که جواب مثبت است. ابتدا ناحیهٔ سفیدرنگ را با خطی که از ناحیهٔ خاکستری نمی‌گذرد به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کنید. خط را طوری بچرخانید که همچنان ناحیهٔ سفید را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کند (بنابر قضیهٔ قبل می‌دانیم که می‌توان این کار را انجام

داد). همان‌طور که در شکل ۴ دیده می‌شود، این خط ناحیهٔ خاکستری را اولین بار در A قطع می‌کند و در پایان در نقطهٔ B از آن خارج می‌شود. زمانی که خط، ناحیهٔ خاکستری را از نقطهٔ A تا نقطهٔ B می‌پیماید، مساحت ناحیهٔ خاکستری در بالای خط به‌طور پیوسته از صفر به ماکسیمم می‌رسد. بنابراین جایی هست که این خط ناحیهٔ خاکستری‌رنگ را نیز به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم می‌کند.



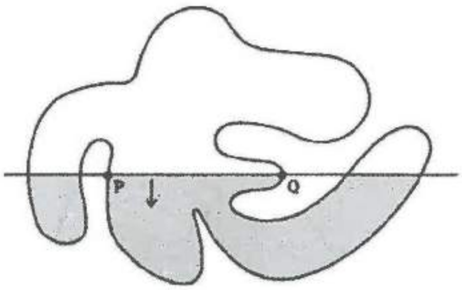
شکل ۴ اثبات قضیهٔ ساندویچ همبرگر در صفحه

قضیه‌ای که ثابت کردیم، قضیه‌ای معروف است و به فضاهایی با بعد بیشتر تعمیم می‌یابد. به‌عنوان مثال، اگر سه جسم در فضای سه‌بعدی داده شده باشند، می‌توان با صفحه‌ای هر یک را به دو قسمت با حجم برابر تقسیم کرد. به این حکم «قضیهٔ ساندویچ همبرگر» می‌گویند، زیرا اگر آن را در مورد ساندویچ همبرگر تعمیم‌یافته‌ای که شامل دو قطعه نان و یک قطعه گوشت است به‌کار ببریم، معلوم می‌شود که این سه تکه، هر شکلی که داشته باشند و هر جایی که باشند، می‌توان ساندویچ را طوری با صفحه‌ای تقسیم کرد که در آنها، هر یک از تکه‌های نان و تکهٔ گوشت به دو قسمت با حجم برابر تقسیم شود.

برای اثبات تعمیم قضیه در بعدهای بالا به ریاضیاتی قوی نیاز است، اما در بعدهای دو و سه نتیجهٔ مطلوب از قضیه‌ای که در ابتدا ذکر کردیم به‌آسانی ثابت می‌شود. هر دو اثبات به معنایی راهی برای پیدا کردن خط یا صفحهٔ مطلوب به‌دست می‌دهد، اما این کار در عمل آسان نیست. با وصل کردن مرکز جرم شکل (یا جسم) کاری از پیش نمی‌رود، زیرا خط (یا صفحه‌ای) گذرا از این نقطه لزوماً آن را به دو قسمت با مساحت (یا حجم) برابر تقسیم نمی‌کند.

اگر شکلی یک تکه و بدون سوراخ داشته باشیم که لزوماً هم محدب نیست، آیا حتماً خطی وجود دارد که هم محیطش را نصف کند و هم مساحتش را؟ باز هم جواب مثبت است، و درستیش شبیه آخرین اثبات ثابت می‌شود. مانند شکل ۵، خطی رسم کنید که محیط را نصف کند و در نقاط P و Q به محیط برخورد کند. اگر وقتی این خط را امتداد می‌دهیم مساحت را هم نصف کند، آنچه را که می‌خواستیم یافته‌ایم. اکنون فرض کنید این خط، مساحت را نصف نکند. به این خط برداری وصل کنید که جهتش در ابتدا به‌طرف قسمت کوچک‌تر مساحت است. حالا

نقاط P و Q را طوری در جهت عقربه‌های ساعت به‌دور محیط حرکت بدهید که همیشه محیط نصف شود. با این کار، جهت خط گذرا از نقاط P و Q به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، و مقدار «مساحت قسمتی که بردار نشان می‌دهد منهای مساحت قسمت دیگر»، به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. بعد از اینکه خط ۱۸۰ درجه بچرخد سر جای اولش باز می‌گردد، ولی اکنون جهت بردار برعکس شده است.



شکل ۵ اثبات قضیه‌ای دربارهٔ نصف کردن همزمان مساحت و محیط

به اختلاف «مساحت قسمتی که بردار نشان می‌دهد منهای مساحت قسمت دیگر» توجه کنید. این اختلاف در ابتدای کار منفی بوده و در انتها مثبت شده است؛ بنابراین جایی هست که این تفاضل صفر است، که یعنی خطی از بین خطوطی که محیط را نصف می‌کنند، مساحت را نیز نصف می‌کند. این قضیه را نیز می‌توان به فضاهای با بعد بالاتر تعمیم داد.

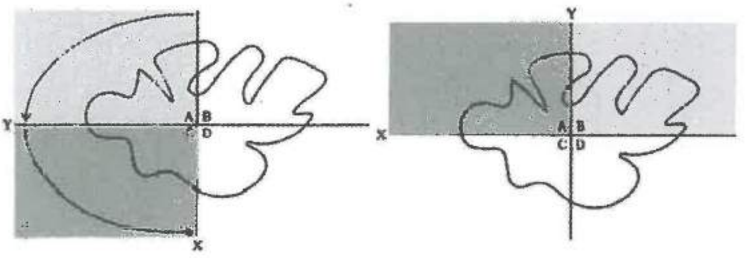
قضیه‌ای دیگر که آن هم زیباست و درستیش در اولین نگاه واضح نیست، این است که هر ناحیه‌ای را می‌توان با دو خط عمود برهم به چهار قسمت با مساحت‌های برابر تقسیم کرد. اثبات زیبا و ظریف است.

فرض کنید صفحه‌ای از کاغذ شفاف با خط عمود برهم به‌نام‌های X و Y داریم. ربع بالا سمت چپ خاکستری تیره است و ربع بالا سمت راست خاکستری روشن. صفحه را طوری روی ناحیه قرار بدهید که خط افقی زیر آن باشد و خط عمودی سمت راستش. صفحه را بلغزانید تا جایی که خط X ناحیه را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کند. سپس صفحه را طوری بلغزانید که X روی خودش حرکت کند، تا آنجا که Y نیز ناحیه را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کند. روی ناحیه (و نه روی صفحه)، مانند شکل بالایی در شکل ۶، چهار قسمت حاصل را با A، B، C و D نامگذاری کنید.

با این روش، A به‌علاوهٔ B برابر می‌شود با C به‌علاوهٔ D و نیز A به‌علاوهٔ C برابر می‌شود با B به‌علاوهٔ D. با کم کردن برابری دوم از برابری اول، به‌دست می‌آوریم که $B - C = C - B$ که یعنی $B = C$. درنتیجه $A = D$.

اگر A با B برابر باشد، ناحیه به چهار قسمت با مساحت برابر تقسیم شده است. اکنون فرض کنید چنین نباشد و B از A بزرگ‌تر باشد. بنابراین «مساحت ناحیهٔ خاکستری تیره منهای مساحت ناحیهٔ خاکستری روشن» مقداری مثبت دارد.

اکنون صفحه را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت ۹۰ درجه بچرخانید، طوری که در این دوران همچنان X ناحیه را به دو قسمت برابر تقسیم کند، و نیز Y ناحیه را به دو قسمت برابر تقسیم کند. نقطهٔ تقاطع X و Y ممکن است در طول این دوران جابه‌جا شود، اما این نقطه در پایان سر جایی است که قبل از دوران بود. فقط اکنون جای X و Y عوض شده است. به شکل ۶ نگاه کنید.



شکل ۶ روش چهار قسمت کردن ناحیه با استفاده از دو خط عمود برهم

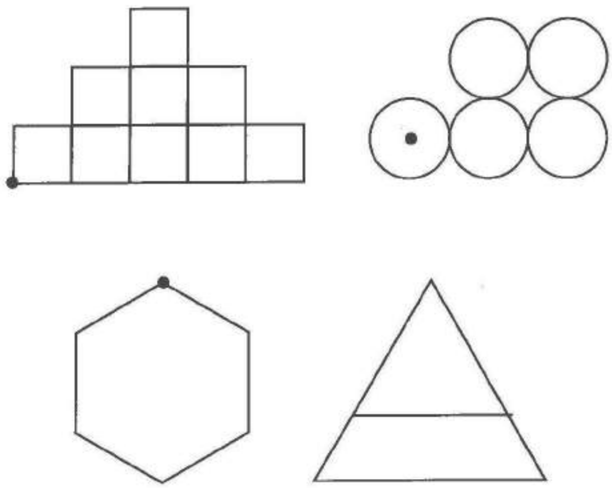
اکنون ناحیهٔ خاکستری روشن برابر است با A و ناحیهٔ خاکستری تیره برابر است با C، و چون $B = C$، مساحت ناحیهٔ خاکستری تیره نیز برابر است با B. پس جای مساحت ناحیه‌های خاکستری روشن و خاکستری تیره هم عوض شده است. درنتیجه، «مساحت ناحیهٔ خاکستری تیره منهای مساحت ناحیهٔ خاکستری روشن» منفی شده است. اکنون می‌توان از قضیهٔ اساسی این مقاله استفاده کرد: مقدار «مساحت ناحیهٔ خاکستری تیره منهای مساحت ناحیهٔ خاکستری روشن» نسبت به زاویه‌ای که صفحه را با آن دوران داده‌ایم، با تغییر زاویه از ۰ تا ۹۰ درجه، به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. این مقدار با دوران از عددی مثبت به عددی منفی می‌رسد؛ بنابراین در جایی این مقدار برابر صفر است، و در آنجاست که مساحت ناحیهٔ خاکستری روشن با مساحت ناحیهٔ خاکستری تیره برابر است، و درنتیجه ناحیه به چهار قسمت با مساحت برابر تقسیم می‌شود.

این قضیه را نیز می‌توان به فضاهایی با بعد بیشتر تعمیم داد. مثلاً هر جسمی را می‌توان با سه صفحه که هر دوتایشان برهم عمودند، به هشت قسمت با حجم برابر تقسیم کرد.

همانند قضیه‌های قبل، این قضیه کمک عملی زیادی در پیدا کردن این دو خط عمود نمی‌کند. مثلاً بنابر این قضیه می‌دانیم که می‌توان مثلثی با ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ را با دو خط عمود را به چهار قسمت با مساحت برابر تقسیم کرد؛ اما پیدا کردن این دو خط آسان نیست. من راهی آسان برای این کار نمی‌دانم. در شکل ۷ چهار مسئله تقسیم مساوی آسان‌تر از این مسئله وجود دارد. البته برای حل آنها هم به ابتکار نیاز دارید.

در اولین مسئله باید کل ناحیهٔ شامل نه مربع را با خطی گذرا از P به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کنید.

در مسئلهٔ دوم باید مساحت کل شکل شامل پنج دایره را با خطی گذرا از P به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کنید.



شکل ۷ چهار مسئله دربارهٔ تقسیم مساوی

در مسئلهٔ سوم باید مساحت شش ضلعی منتظم را با رسم دو خط گذرا از P به سه قسمت با مساحت برابر تقسیم کنید.

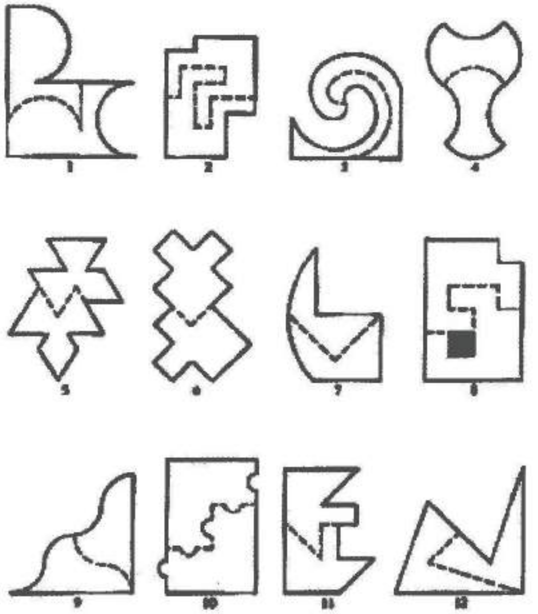
در مسئلهٔ چهارم باید با رسم **خمی** با کمترین طول ممکن، مثلث متساوی‌الاضلاع را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کنید. در شکل پاره‌خطی را می‌بینید که مثلث را به‌درستی به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کرده است، اما خمی وجود دارد که طولش از طول این پاره‌خط هم کمتر است.

پاسخ‌ها

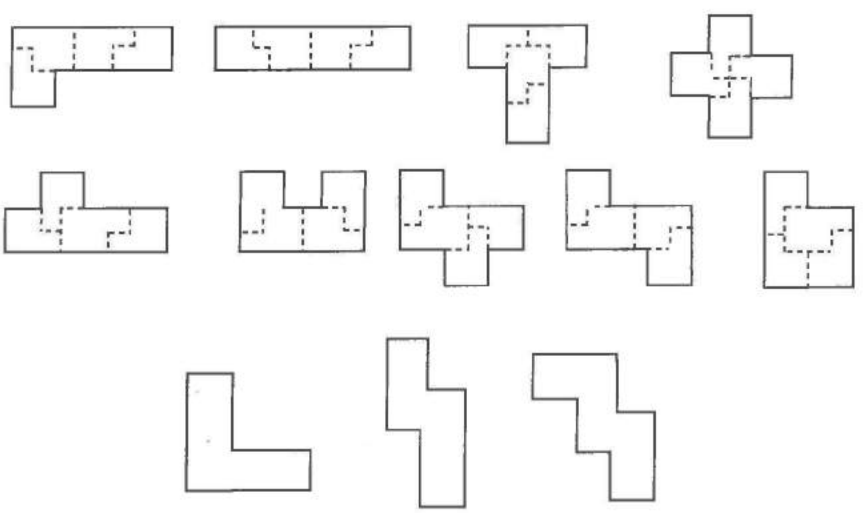
مسئله‌های شکل ۱ در شکل ۸ حل شده‌اند. در شکل ۹، نشان داده‌ایم که هر یک از ۹ پنج‌مربعی چگونه به چهار قسمت همنهشت تقسیم می‌شود. سه پنج‌مربعی خالی آنهایی هستند که نمی‌توان آنها را به چهار قسمت همنهشت تقسیم کرد.

در شکل ۱۰ پاسخ چهار مسئلهٔ انتهای مقاله را می‌بینید. برای نصف کردن مساحت‌های نه مربع، مربعی به آنها اضافه کنید (مربعی را که با خط‌چین رسم شده است). سپس با رسم AB نقطهٔ C را بیابید، و P را به C وصل کنید. اگر طول ضلع مربع‌ها ۱ باشد، CD برابر $\frac{1}{4}$ خواهد بود و به‌آسانی می‌توان دید که PC شکل اصلی را نصف می‌کند. برای نصف کردن پنج دایره، دایره‌ای را که با خط‌چین رسم شده است اضافه کنید. خطی که از مرکز دو دایره گذشته است آشکارا مساحت کل را نصف می‌کند.

شش‌ضلعی پایینی در شکل ۱۰ با وصل کردن P به C و D سه قسمت می‌شود. این دو نقطه، وسط‌های دو ضلع‌اند. فرض کنید مساحت مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر ۱ باشد. مساحت PAB برابر ۱ است. بنابراین مساحت

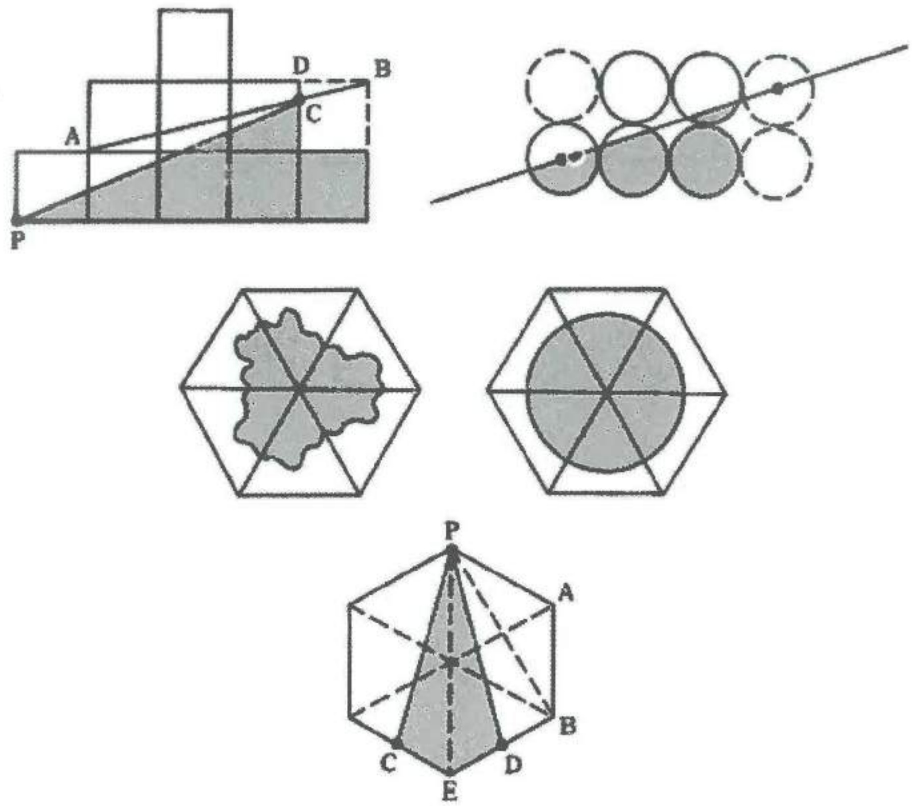


شکل ۸ پاسخ مسئله‌های نصف کردن



شکل ۹ تقسیم پنج‌مربعی‌ها به سه چهار قسمت همنهشت

PBE برابر ۲ است و نتیجه حاصل می‌شود. من راه‌حلی برای سه قسمت کردن پنج‌ضلعی منتظم پیدا نکردم که همین‌قدر آسان باشد.



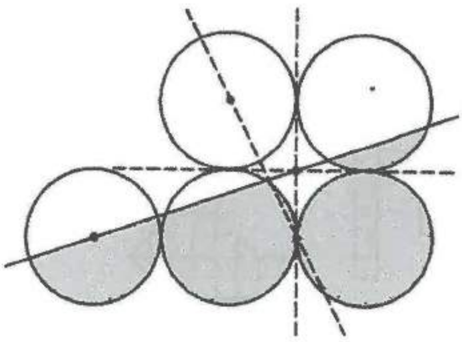
شکل ۱۰ راه‌حل چهار مسئله نصف کردن

دو شش‌ضلعی وسطی در شکل ۱۰ اثبات این است که کوتاه‌ترین خمی که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را نصف می‌کند، کمانی از دایره است. شکل این خم هرچه می‌بود، وقتی آن را نسبت به قطرهای مشخص‌شدهٔ شش‌ضلعی قرینه می‌کردیم، خمی بسته تشکیل می‌شد. این خم مساحت شش‌ضلعی را هم نصف می‌کند، و درنتیجه مساحت داخل خم مقداری مشخص است. شکلی که مساحتی مشخص دارد ولی محیطش کمترین مقدار ممکن است، دایره است. بنابراین خم نصف‌کننده با کمترین طول در داخل هر مثلث، کمانی از دایره است.

ضمیمه

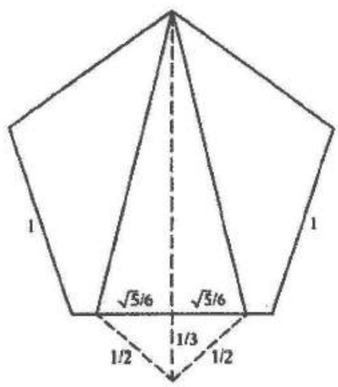
در راه‌حل من برای نصف کردن مساحت شکل پنج دایره‌ای، لازم بود دایره‌ای اضافه رسم شود. بعضی خوانندگان راه‌حل‌هایی فرستاده‌اند که در آنها این کار لازم نیست. به شکل ۱۱ نگاه کنید. واضح است که خط (آن که خط‌چین نیست) پنج دایره را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم می‌کند. برای رسم این خط، لازم است دو خط خط‌چین عمود برهمی که در شکل می‌بینید، رسم شوند. شخصی راه‌حلی فرستاده است که در آن این ترسیم هم لازم نیست. او توضیح می‌دهد که هر خطی که از نقطهٔ تماس دو دایره می‌گذرد، آن دو دایره را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم

می‌کند. اکنون اگر طوری چنین خطی رسم شود که از مرکز دایره‌ای دیگر هم بگذرد و آن دو دایره در دو طرف خط قرار بگیرند، شکل پنج دایره‌ای به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم می‌شود. خط خط‌چینی (جز دو خط خط‌چین عمود برهم) که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، از چنین خط‌هایی است. پنج‌تا از این نوع خط‌ها وجود دارند.



شکل ۱۱ راه‌حلی دیگر برای مسئلهٔ نصف کردن شکل پنج دایره‌ای

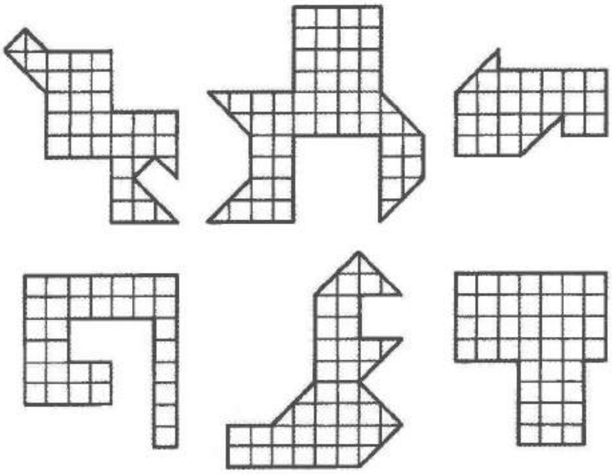
همان‌طور که گفتم، راه آسانی برای سه قسمت کردن پنج‌ضلعی با خطی که از یکی از رأس‌هایش می‌گذرد نمی‌شناسم. شخصی راه‌حلی را که در شکل ۱۲ می‌بینید ارائه کرد. فرض شده است که طول ضلع پنج‌ضلعی برابر ۱ است.



شکل ۱۲ تقسیم پنج‌ضلعی به سه قسمت با مساحت برابر

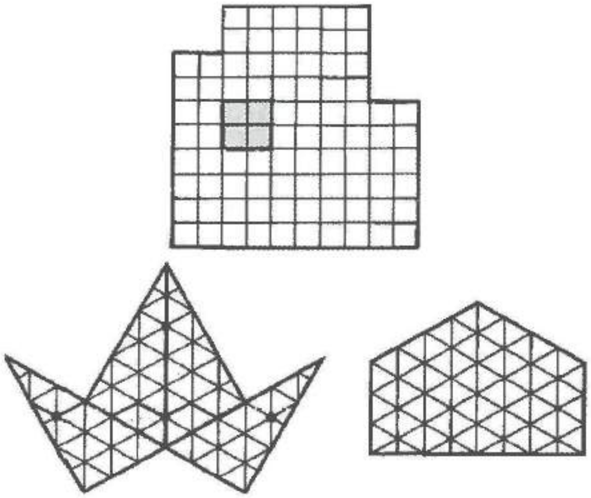
بعد از اینکه مسئلهٔ چهار قسمت کردن با استفاده از خطوط عمود برهم را شرح دادم، گفتم که این کار در مورد مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۳، ۴ و ۵ دشوار است. دو نفر راه‌حلی برای این مسئله برایم فرستادند که دشوارتر از آن است که اینجا بیاورمش. یکی از آنها ثابت کرد که این ترسیم یکتاست.

در شکل ۱۳ نمونه‌ای از مسائل نصف کردن را می‌بینید. خطوط شبکه فقط برای این رسم شده‌اند که شکل واضح‌تر شود. هیچ شرطی روی خطوطی که باید رسم شوند، وجود ندارد.



شکل ۱۳ مسئله‌های بیشتری در مورد نصف کردن

در مسئله‌ای که در شکل بالایی در شکل ۱۴ می‌بینید، باید شکل را به سه چند مربعی همنهشت تقسیم کنید. شکل پایینی سمت چپ به چهار مثلث همنهشت تقسیم شده است. شما باید به‌روشی دیگر همین کار را بکنید. شکل پایینی سمت راست را باید به چهار شکل همنهشت تقسیم کنید. در هر سهٔ این معماها، خطوط تقسیم‌کننده روی شبکه قرار دارند.



شکل ۱۴ سه قسمت کنید (شکل بالا)؛ چهار قسمت کنید (شکل‌های پایین)

Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*. Freeman, 1989.

• ترجمهٔ بهزاد اسلامی‌مسلّم

بازی زندگی

مارتین گاردنر

اشاره: مارتین گاردنر سه مقاله دربارهٔ بازی زندگی[1] در ستون «بازی‌های ریاضی» مجلهٔ «ساینتیفیک امریکن» نوشت. انتشار اولین مقاله در ۱۹۷۰ چنان هیجانی در محیط‌های آکادمیک ایجاد کرد که بر آن نام جنون زندگی گذاشتند. هزاران ساعت از وقت کامپیوترهای دانشگاه‌ها و شرکت‌های بزرگ (که در اوایل دههٔ هفتاد بسیار محدود و گران بود) به‌صورت قانونی و غیرقانونی صرف بازی زندگی شد. این سه مقاله نمونه‌ای عالی از نقشی هستند که مارتین گاردنر در جامعهٔ ریاضی بازی کرد. او طوری می‌نوشت که برای مردم عادی قابل فهم بود و در عین حال سؤال‌هایی می‌پرسید که ریاضیدانان درجه‌اول را درگیر می‌کرد. با اینکه تحصیلات دانشگاهی در ریاضیات نداشت، با ریاضیدانان خوب زیادی ارتباط داشت و زبان آنها را می‌فهمید و می‌توانست دستاوردهای آنها را به زبان مردم ترجمه کند. او شاید ریاضیدانی تراز اول نبود، اما نوشته‌هایش باعث تولید حجم زیادی از ریاضیات تراز اول شد.

متنی که می‌خوانید ترجمهٔ خلاصه‌ای از این سه مقاله است. به‌یاد داشته باشید که متن زمانی نوشته شده که کامپیوتر وسیله‌ای عمومی و در دسترس مردم عادی نبوده است. حالا که کامپیوتر همه‌جا پیدا می‌شود، برای اینکه از مقاله بیشتر لذت ببرید، یک نسخهٔ کامپیوتری از بازی زندگی پیدا کنید [2] و روبه‌روی کامپیوتر بنشینید و خواندن را شروع کنید.

بخش اول (۱۹۷۰)

بیشتر کارهای جان اچ. کانوی[3]، ریاضیدان برجسته، در حوزهٔ ریاضیات محض است. درکنار این کارهای جدی، او از ریاضیات تفننی هم لذت می‌بَرَد. او با اینکه در این زمینه بسیار پرکار است، به‌ندرت چیزی در این زمینه منتشر می‌کند. در این مقاله معروف‌ترین ساختهٔ ذهن او را معرفی می‌کنیم: یک بازی یک‌نفره به‌نام «زندگی»[4]. برای لذت بردن از این بازی، باید یک صفحهٔ چهارخانهٔ بزرگ و چندین مهرهٔ یک‌شکل داشته باشید.

بازی با چینش دلخواهی از مهره‌ها روی صفحه، که کانوی به آن ارگانیسم می‌گوید، شروع می‌شود. در هر نوبت بازی، با اِعمال «قوانین ژنتیکی» کانوی روی چینش اولیه، نسل بعدی ارگانیسم را به‌دست می‌آوریم و این کار را ادامه می‌دهیم تا ببینیم در طول زمان چه بر سر آن می‌آید. قوانین کانوی قوانینی هستند دربارهٔ تولد، بقا و مرگ ارگانیسم‌ها. او این قوانین را با صرف وقت زیاد طوری طراحی کرده است که این سه خاصیت را داشته باشند:

1. Game of Life

۲. می‌توانید ازGolly استفاده کنید. آدرس http://golly.sourceforge.net را ببینید.

3. John H. Conway   4. Life

- هیچ چینش یا ارگانیسمی وجود ندارد که بتوان به‌آسانی ثابت کرد جمعیت آن با گذشت زمان بدون محدودیت رشد خواهد کرد.
- چینش‌هایی وجود دارند که به‌نظر می‌آید جمعیتشان بدون محدودیت رشد می‌کند.
- چینش‌های ساده‌ای وجود دارند که پیش از اینکه زندگیشان به پایان برسد، برای مدت زمان قابل توجهی رشد و تغییر می‌کنند. زندگی ارگانیسم‌ها به یکی از این سه شکل به پایان می‌رسد: ناپدید شدن از روی صفحه، تبدیل شدن به یک چینش پایدار یا طبیعت بی‌جان[1] که با گذر زمان تغییر نمی‌کند، و وارد شدن به‌یک چرخهٔ نوسان که در آن دوتا یا بیشتر الگو به‌ترتیب یکی پس از دیگری تا ابد تکرار می‌شوند.

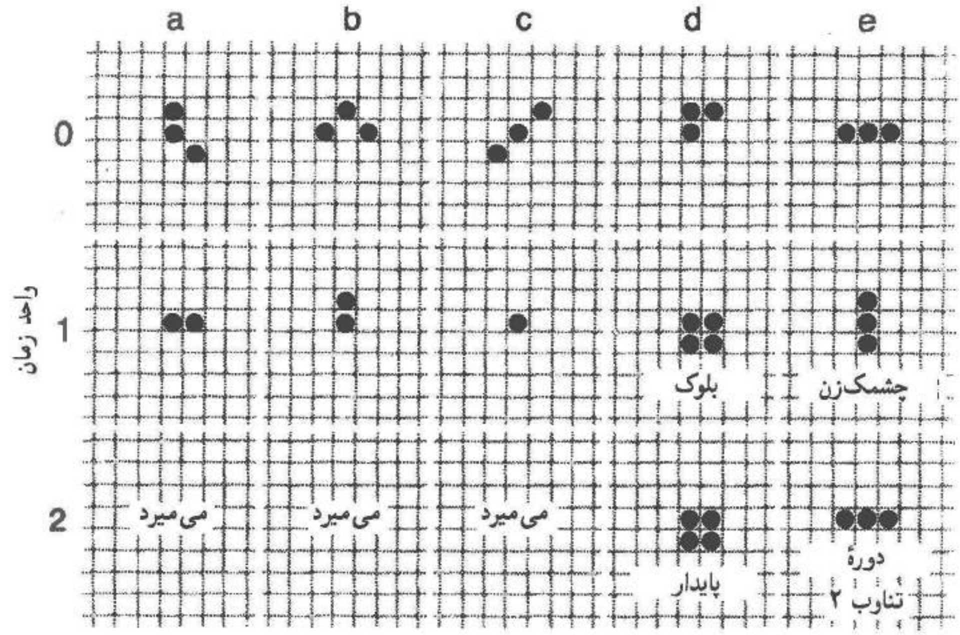
خلاصه، این قوانین طوری طراحی شده‌اند که رفتار و سرنوشت ارگانیسم‌ها جالب و غیرقابل پیش‌بینی باشد. قوانین بسیار ساده هستند:

- **بقا**: هر مهره که ۲ یا ۳تا از هشت خانهٔ همسایهٔ اطرافش پر باشد، در نسل بعد هم زنده می‌ماند (یعنی در جای خودش باقی می‌ماند).
- **مرگ**: هر مهره که ۴تا یا بیشتر از خانه‌های همسایه‌اش پر باشند از ازدیاد جمعیت و هر مهره که یکی یا کمتر از خانه‌های همسایه‌اش پر باشند از تنهایی در نسل بعد می‌میرد (یعنی باید مهره را از روی صفحه برداریم).
- **تولد**: هر خانهٔ خالی که دقیقاً ۳تا از همسایه‌هایش پر باشند در نسل بعد متولد می‌شود (یعنی باید یک مهره در آن بگذاریم).

همهٔ مرگ‌ها و تولدها در هر نسل همزمان اتفاق می‌افتند و همه با هم یک نوبت یا حرکت بازی یا یک واحد زمان را تشکیل می‌دهند و ارگانیسم را به نسل بعد می‌برند.

چند چینش ساده را بررسی می‌کنیم تا ببینیم چه اتفاقی برای آنها می‌افتد. یک ارگانیسم یا چینش تک‌مهره‌ای یا دومهره‌ای، هرکجای صفحه که باشد، بعد از گذشت یک واحد زمان محو می‌شود. الگوی سه‌تایی هم در یک حرکت خواهد مرد، مگر اینکه حداقل یکی از مهره‌ها دو همسایه داشته باشد. در شکل ۱ سرنوشت پنج الگوی سه‌تایی را، که در حرکت اول نمی‌میرند، نشان داده‌ایم. سه‌تای اول در حرکت دوم می‌میرند. در مورد c به این نکته دقت کنید که زنجیره‌ای مورب از مهره‌ها، به هر طولی، در هر واحد زمان دو مهرهٔ ابتدا و انتهایش را از دست می‌دهد. الگوی d در حرکت دوم به یک «بلوک»[2] تبدیل می‌شود که الگویی پایدار است. الگوی e ساده‌ترین الگو از مجموعه الگوهایی است که به آنها «الاکلنگ»[3] می‌گوییم؛ الگوهایی که با دورهٔ تناوب ۲ واحد زمان نوسان می‌کنند. این الگو بین یک ستون سه‌تایی افقی و یک ستون سه‌تایی عمودی نوسان می‌کند. کانوی نام آن را «چشمک‌زن»[4] گذاشته است.

1. Still Life 2. Block 3. Flipflop 4. Blinker



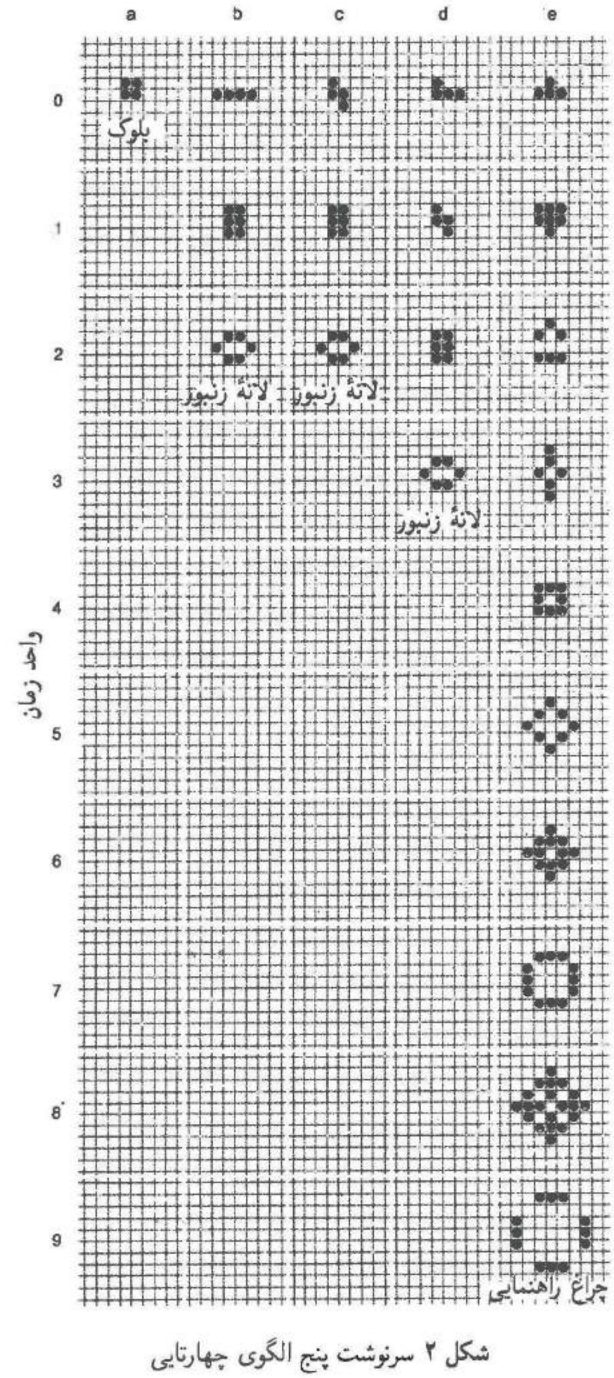
شکل ۱ سرنوشت پنج الگوی سه‌تایی

در شکل ۲ سرنوشت پنج الگوی چهار مهره‌ای (به‌شکل ترومینوها[1]) نشان داده‌ایم. الگوی a، همان‌طور که قبلاً دیدیم، یک الگوی پایدار یا «طبیعت‌بی‌جان»[2] است. چهارتایی‌های b و c به یک الگوی پایدار دیگر به‌نام «لانه زنبور»[3] می‌رسند. سرنوشت الگوی e از بقیه جالب‌تر است: بعد از ۹ حرکت این الگو به چهار چشمک‌زن جدا از هم تبدیل می‌شود که به آن «چراغ راهنمایی»[4] می‌گویند.

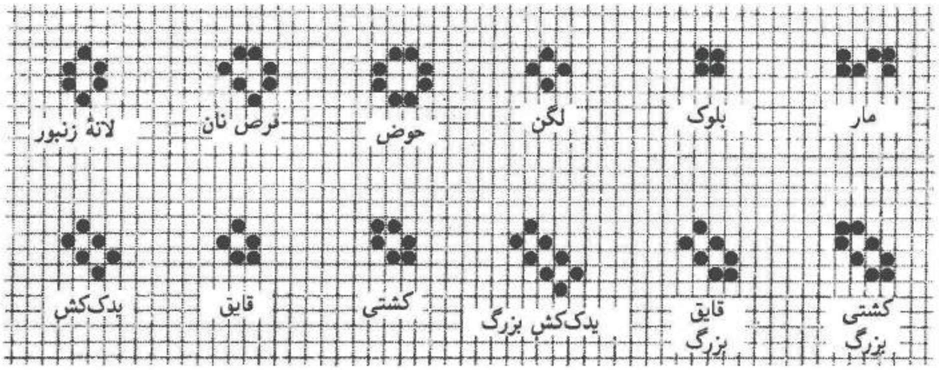
خواننده می‌تواند این تجربه را با دوازده الگوی پنج‌تایی به‌شکل پنتومینوها ادامه بدهد. در این‌صورت، درخواهد یافت که از این دوازده الگو ۵تا قبل از حرکت پنجم می‌میرند. دوتا به «قرص نان»[5] (شکل ۳ را ببینید) تبدیل می‌شوند و چهارتا به چراغ راهنمایی.

تنها پنتومینویی که زندگی طولانی‌تری دارد، R پنتومینو است (الگوی a در شکل ۴). کانوی این الگو را تا ۴۶۰ واحد زمان دنبال کرد. در این زمان این الگو چند «گلایدر»[6] تولید می‌کند. در بخش جواب‌ها به سرنوشت R پنتومینو برمی‌گردیم. به‌عنوان تمرین، خواننده می‌تواند سرنوشت الگوهایی را که در شکل ۴ می‌بینند پیدا کند.

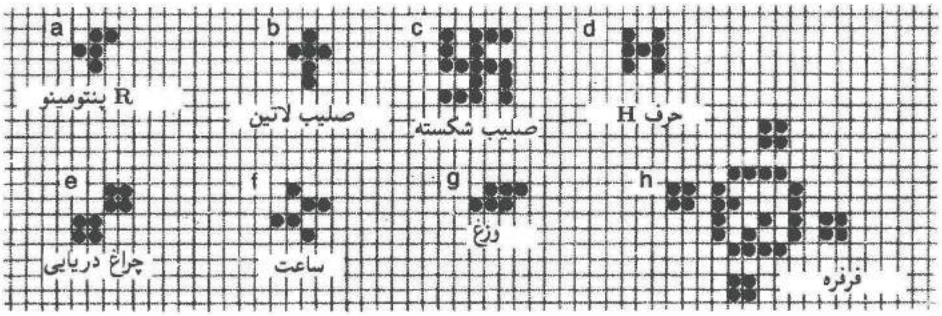
1. Tetrominoes 2. Still Life 3. Beehive 4. Trafic Lights 5. Loaf 6. Glider



شکل ۲ سرنوشت پنج الگوی چهارتایی



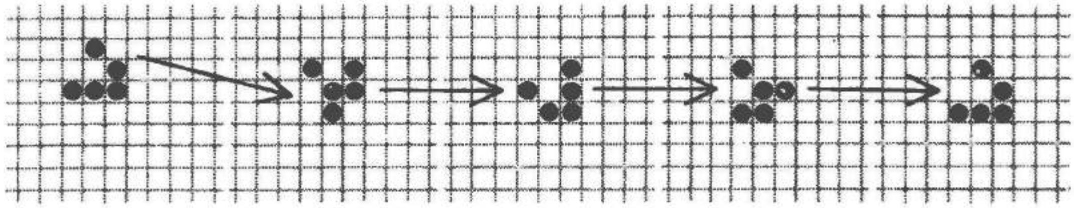
شکل ۳ معمول‌ترین فرم‌های پایدار



شکل ۴ R پنتومینو و تمرین‌ها

یکی از مهم‌ترین کشفیات کانوی، الگویی پنج مهره‌ای است که نام آن را گلایدر گذاشته است؛ موجودی که حرکت می‌کند. بعد از دو حرکت، این الگو نسبت به یک خط مورب منعکس می‌شود. بعد از دو حرکت دیگر، دوباره منعکس می‌شود و شکل اولیهٔ خودش را یک خانه جلوتر و یک خانه پایین‌تر از جای اولیه بازسازی می‌کند؛ درست مثل اینکه الگوی اولیه یک خانه به جلو و یک خانه به پایین حرکت کرده باشد (شکل ۵ را ببینید). کانوی به‌سرعت حرکت شاه روی صفحهٔ شطرنج، یعنی یک خانه در هر حرکت، «سرعت نور» گفت؛ چون این بالاترین سرعتی است که در صفحهٔ بازی زندگی می‌تواند اتفاق بیفتد. هیچ الگویی نمی‌تواند با جابه‌جا شدن بر اثر بازسازی (مثل گلایدر) به این سرعت برسد. کانوی ثابت کرد که حداکثر سرعت ممکن در جهت قطر صفحه، یک‌چهارم سرعت نور است. چون گلایدر بعد از چهار حرکت یک خانه در جهت قطر جلو می‌رود، پس سرعت آن یک‌چهارم سرعت نور است.

کانوی همچنین نشان داد که سرعت حرکت یک الگوی متناهی در جهت افقی یا عمودی نمی‌تواند از یک‌دوم سرعت نور بیشتر شود. آیا می‌توانید الگوی نسبتاً ساده‌ای پیدا کنید که با این سرعت حرکت کند؟ به‌خاطر داشته باشید که برای به‌دست آوردن سرعت حرکت چنین ارگانیسمی، باید تعداد واحدهای زمانی‌ای که طول می‌کشد تا ارگانیسم



شکل ۵ گلایدر

خودش را از نو بسازد بشماریم و تعداد خانه‌هایی را که در این مدت جابه‌جا شده است بر آن تقسیم کنیم. مثلاً اگر بازسازی یک ارگانیسم چهار واحد زمان طول بکشد و در این مدت دو خانه جابه‌جا شود، سرعت آن نصف سرعت نور است. پیدا کردن موجوداتی که با روش بازسازی در صفحه حرکت می‌کنند بسیار مشکل است. کانوی، غیر از گلایدر، سه‌تای دیگر از این موجودات پیدا کرده است و نام آنها را «کشتی فضایی»[1] گذاشته است. گلایدر یک کشتی فضایی سبک‌وزن است. باقی کشتی‌ها مهره‌های بیشتری دارند. در بخش جواب‌ها دربارهٔ آنها توضیح می‌دهم.

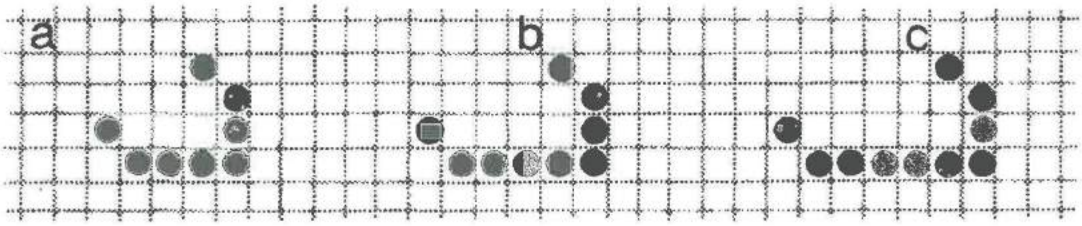
کانوی سرنوشت الگوهایی را که از کنارهم گذاشتن n مهره در یک ردیف ساخته می‌شوند تا $n = ۲۰$ بررسی کرده است. قبلاً وضعیت را تا $n = ۴$ توضیح داده‌ایم. سرنوشت پنج مهرهٔ کنار هم به چراغ راهنمایی ختم می‌شود. شش مهره به‌کلی محو می‌شوند. هفت مهره به کندو[2] تبدیل می‌شوند(کندو شامل چهار لانه زنبور است که دوتای آنها ۹۰ درجه چرخیده‌اند). هشت مهره به چهار بلوک و چهار لانه زنبور تبدیل می‌شوند. نه مهره دو مجموعه چراغ راهنمایی تولید می‌کنند. ده مهره به یک ارگانیسم نوسانی با دورهٔ تناوب ۱۵ تبدیل می‌شوند. یازده مهره به دو چشمک‌زن، دوازده مهره به دو لانه زنبور و سیزده مهره به دو چشمک‌زن تبدیل می‌شوند. چهارده و پانزده مهره به‌کلی محو می‌شوند. شانزده مهره به چراغ راهنمایی بزرگ (تشکیل‌شده از ۸ چشمک‌زن) تبدیل می‌شوند. هفده مهره به دو بلوک تبدیل می‌شوند. هجده و نوزده مهره محو می‌شوند و بیست مهره هم دو بلوک می‌سازند.

پاسخ‌ها

از بین الگوهای شکل ۴، الگوی b بعد از ۵ واحد زمان و الگوهای c و d بعد از ۶ واحد زمان محو می‌شوند. سه الگوی بعدی الاکلنگی هستند. در الگوی آخر، بخش میانی الگو در هر حرکت ۹۰ درجه می‌چرخد، در حالی‌که بخش بیرونی ثابت می‌ماند. کانوی به این گونه الگوها «میز بیلیاردی» می‌گوید.

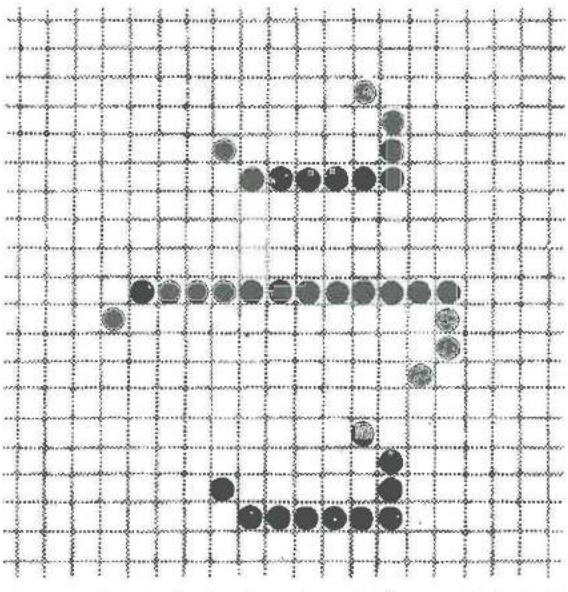
سه کشتی فضایی دیگر (بجز گلایدر) در شکل ۶ دیده می‌شوند. هر سه با نصف سرعت نور، افقی و به‌سمت راست تصویر حرکت می‌کنند.

1. Spaceship 2. Honey Farm



شکل ۶ سه کشتی فضایی دیگر غیر از گلایدر

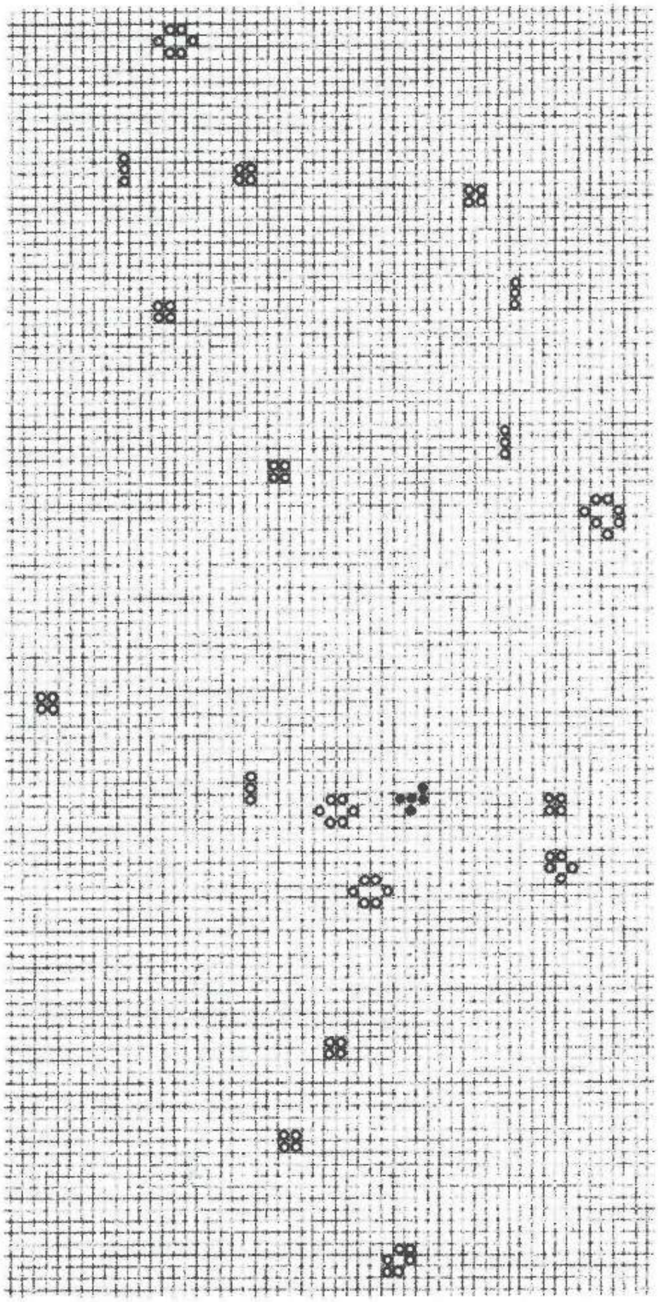
اگر طول بخش پایینی کشتی را از ۶ مهره بیشتر کنید، کشتی به‌محض حرکت ردهایی تولید می‌کند که باعث می‌شوند کشتی نابود شود. برای ساختن کشتی‌های بزرگ‌تر، باید کشتی بزرگ‌تر را با دوتا یا بیشتر کشتی کوچک‌تر اسکورت کنیم. این کشتی‌های کوچک‌تر از تشکیل الگوهایی که جلوی حرکت کشتی را می‌گیرند جلوگیری می‌کنند. شکل ۷ چنین کشتی‌ای را نشان می‌دهد. کشتی‌های بزرگ‌تر به اسکورت‌های بیشتری احتیاج دارند.



شکل ۷ یک کشتی بزرگ که دو کشتی کوچک آن را اسکورت می‌کنند.

اما سرنوشت عجیب R پنتومینو. این الگو بعد از ۱۱۰۳ حرکت به یک نوسانگر با دورهٔ تناوب ۲ تبدیل می‌شود. ۶ گلایدر ساخته می‌شوند و به اطراف می‌روند، و به‌علاوه، چهار چشمک‌زن، یک کشتی، یک قایق[1]، یک قرص نان، چهار لانه زنبور و هشت بلوک هم تولید می‌شوند. این جواب را ابتدا گری فلیپسکی و برد مورگان از دانشگاه کیس وسترن به دست آوردند. شکل ۸ را ببینید.

1. Boat

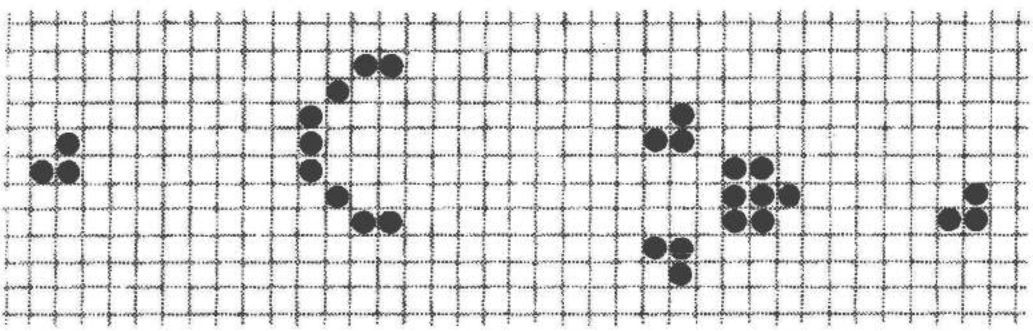


شکل ۸ سرنوشت R پنتومینو

بخش دوم (۱۹۷۱)

کانوی سعی کرده قوانین بازی زندگی را طوری طراحی کند که تعداد الگوهایی که جمعیتشان به‌سرعت رشد می‌کند و تعداد الگوهایی که فوراً ناپدید می‌شوند خیلی زیاد نباشد. کانوی حدس زد که هیچ الگویی با جمعیت متناهی نمی‌تواند بدون حد رشد کند و جایزه‌ای ۵۰ دلاری برای اثبات یا رد این حدس قبل از پایان سال ۱۹۷۰ در نظر گرفت. جایزه در نوامبر ۱۹۷۰ به گروهی که در پروژهٔ هوش مصنوعی در دانشگاه ام. آی. تی کار می‌کردند پرداخت شد. این گروه به‌کمک برنامه‌ای که برای نمایش زندگی روی صفحهٔ اسیلوسکوپ ساخته بودند، یک کشف جالب و تکان‌دهنده کردند: «تفنگ گلایدر»[1].

الگویی که در شکل ۹ می‌بینید به‌یک تفنگ گلایدر تبدیل می‌شود که بعد از چهل واحد زمان، اولین گلایدر را به بیرون شلیک می‌کند و بعد از آن به نوسانگری با دورهٔ تناوب تبدیل می‌شود که هر ۳۰ واحد زمان یک گلایدر شلیک می‌کند. هر گلایدر ۵ مهره به جمعیت اضافه می‌کند و بنابراین جمعیت این الگو بدون هیچ حدی در طول زمان بیشتر و بیشتر می‌شود.

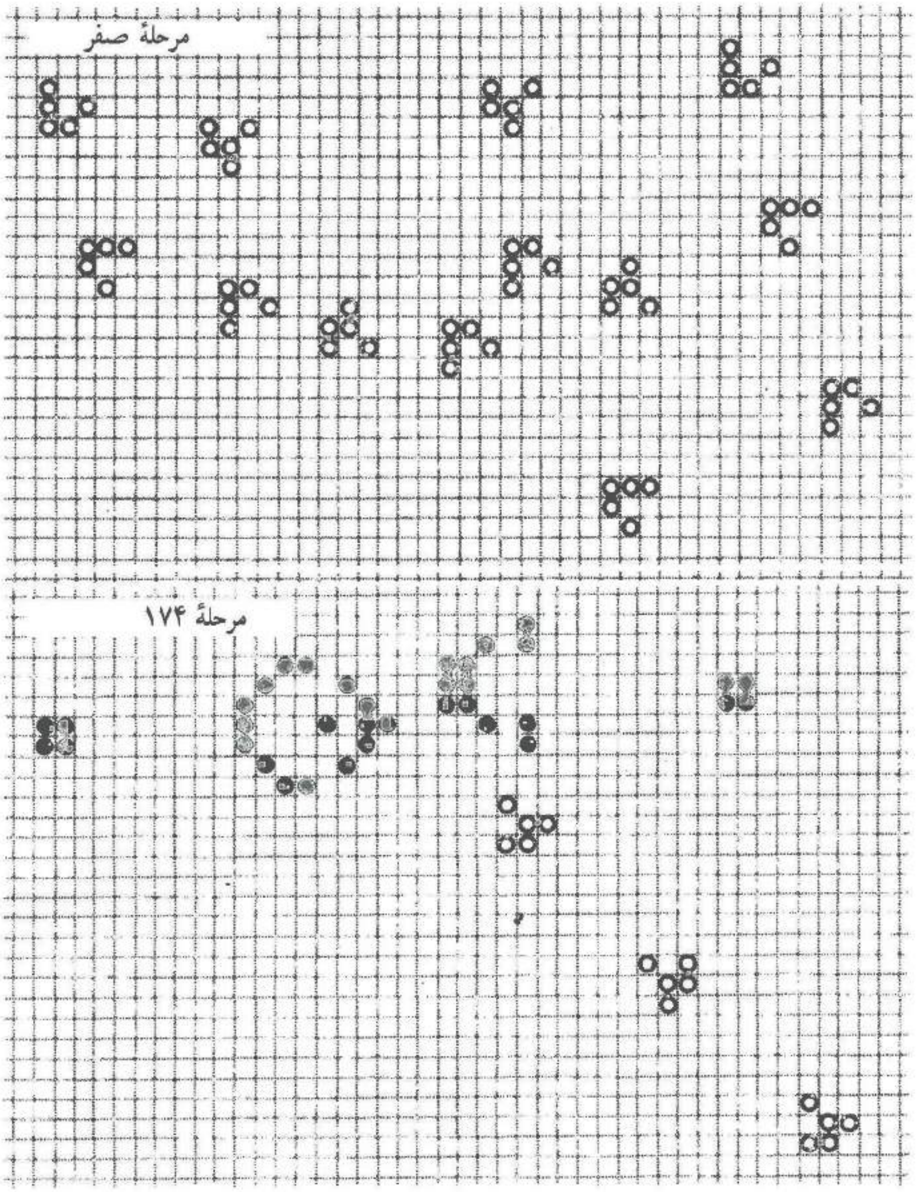


شکل ۹ تفنگ گلایدر

تفنگ گلایدر گروه را به کشفیات جالب‌تری رساند: الگویی شامل ۱۳ گلایدر که بعد از برخورد به‌هم یک تفنگ گلایدر می‌سازند (شکل ۱۰). گروه توانست الگوهایی پیدا کند که گلایدرهایی را که به آنها می‌رسند، می‌خورند. همچنین الگوهایی پیدا کرد که می‌توانند گلایدری را که به آنها می‌رسد با زاویه‌های مختلف برگردانند. آنها متوجه شدند برخورد رشته‌هایی از گلایدرها که پشت سرهم حرکت می‌کنند می‌تواند منجر به پدیده‌های جالبی شود.

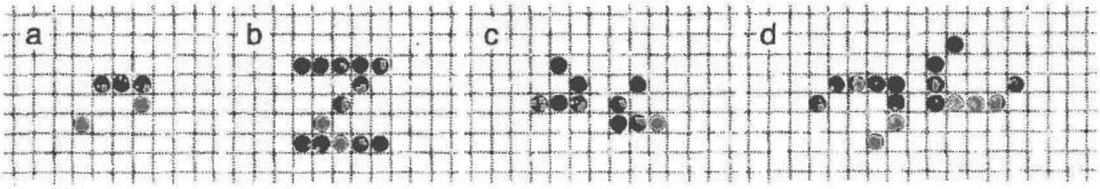
گروه ۱۴ الگو هم پیدا کرد که همگی بعد از یک واحد زمان به گلایدر تبدیل می‌شوند. الگوی a در شکل ۱۱ یکی از آنهاست. آیا می‌توانید چندتای دیگر مثال بزنید؟ الگوی b بعد از ۱۲ واحد زمان به دو گلایدر تبدیل می‌شود که در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند. الگوی c دو گلایدر را در موقعیتی قرار داده که بعد از برخورد

1. Glider Gun



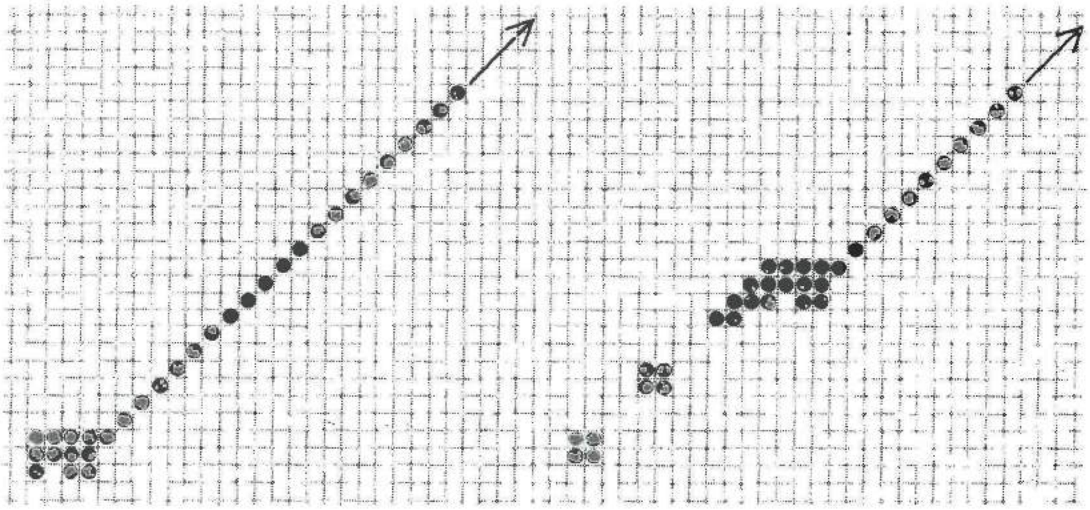
شکل ۱۰ چینشی از ۱۳ گلایدر که بعد از برخورد با هم یک تفنگ گلایدر می‌سازند.

به‌کلی محو می‌شوند و الگوی d هم شامل دو کشتی است که بعد از برخورد محو می‌شوند. با پیدا شدن گلایدرها و سایر الگوهایی که به آنها اشاره کردیم، این ایده پیدا شده که شاید بتوان روی صفحهٔ زندگی، یک ماشین محاسبه‌گر ساخت. ماشین محاسبه‌گری مثل ماشین‌های محاسبه‌گر الکترونیکی، که در آن جریان گلایدرها جای سیم‌ها را بگیرد.



شکل ۱۱ الگوهایی برای تولید و محو کردن گلایدرها

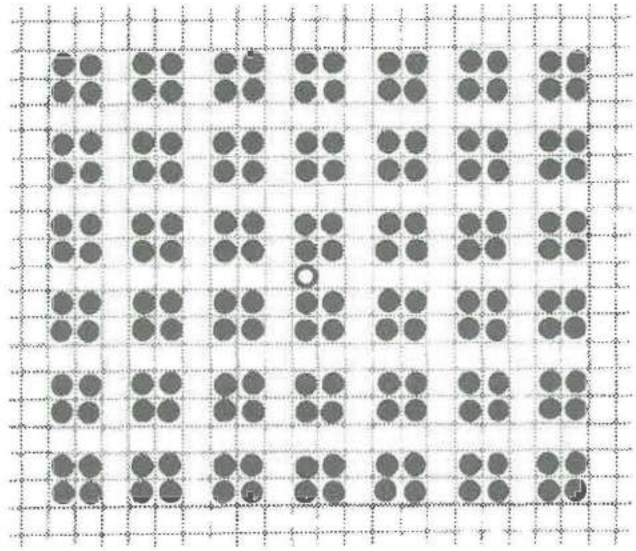
گروه تجربیاتی هم با الگوهای نامتناهی انجام داد. «دروگر»[1] یک الگوی قطری نامتناهی است که انتهای آن با سرعت نور حرکت می‌کند و بلوک‌هایی از خود به‌جا می‌گذارد (شکل ۱۲).



شکل ۱۲ دروگر ـ رشتهٔ مهره‌ها به سمت فلش تا بی‌نهایت ادامه دارد.

آنها تجربیاتی هم روی الگوهای منظم نامتناهی که نام آنها را «محیط کشت»[2] گذاشتند انجام دادند. شکل ۱۳ یکی از این محیط‌های کشت را نشان می‌دهد. اگر یک مهره (مثل یک ویروس) در نقطه‌ای بین چهار بلوک بگذاریم، محیط آن را در دو حرکت محو می‌کند و به‌حال اول برمی‌گردد. اما اگر ویروس را در نقطهٔ نشان داده شده در شکل ۱۳ بگذاریم یک به‌هم‌ریختگی وسیع در الگو ایجاد می‌کند: یک ناحیهٔ بیضوی که با سرعت نور به چهار طرف گسترش پیدا می‌کند و الگو را تخریب می‌کند.

1. Harvester 2. Agar



شکل ۱۳ یک محیط کشت ـ الگو از چهار طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد.

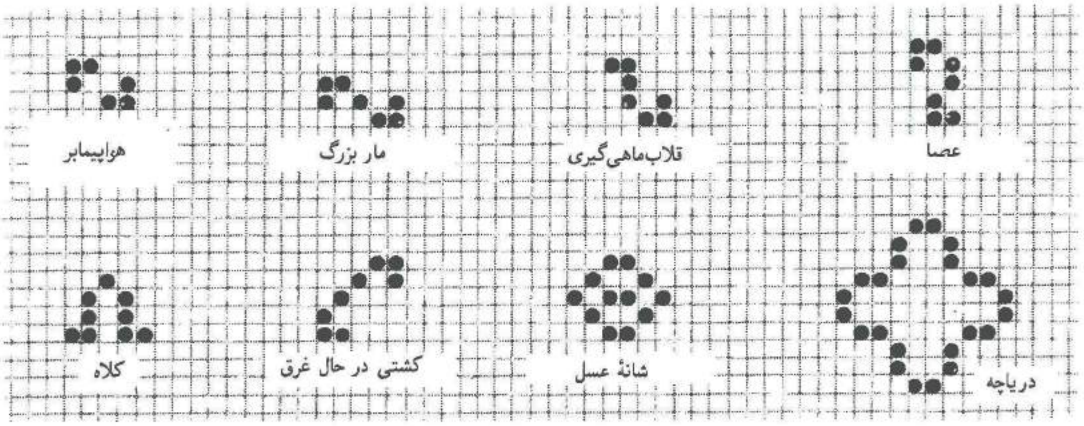
بخش سوم (۱۹۸۱)

از وقتی دو بخش قبلی را نوشته‌ام، کشفیات زیادی در مورد بازی زندگی انجام شده است. می‌شود و باید یک «دائرةالمعارف زندگی» برای ثبت الگوهای جالب شناخته‌شده منتشر کرد. سعی می‌کنم مهمترین نتایج در مورد بازی زندگی را که از زمان انتشار مقالهٔ دوم تا امروز به‌دست آمده‌اند در این مقاله فهرست کنم. اولین و مهم‌ترین گروه علاقه‌مندان به بازی زندگی که در مقالهٔ قبلی به آنها اشاره کردم، در ام. آی. تی. در اطراف ویلیام گاسپر[1] شکل گرفت که حالا برای شرکت زیراکس کار می‌کند. اواسط دههٔ هفتاد، فعال‌ترین گروه علاقه‌مندان به زندگی در بخش کنترل کامپیوتری شرکت هانی‌ول[2] در ماساچوست بودند. اواخر دههٔ هفتاد بیشترین تحرکات در زمینهٔ بازی زندگی در دانشگاه واترلو دیده می‌شد. بیشتر چیزهایی که گزارش می‌کنم دستاوردهای این گروه‌هاست.

همهٔ الگوهای پایدار که از ۱۳ تا یا کمتر مهره تشکیل شده‌اند از مدت‌ها قبل شناسایی شده بودند. بلوک و لگن[3] تنها فرم‌های پایدار ۴ مهره‌ای هستند. قایق تنها الگوی پایدار ۵ مهره‌ای است. چهارتا از پنج فرم پایدار ۶ مهره‌ای را در شکل ۳ نشان داده‌ایم. پنجمین الگو «هواپیمابر»[4] است که در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. چهار الگوی پایدار هفت مهره‌ای وجود دارد. «قلاب ماهی‌گیری»[5] کوچک‌ترین الگوی پایداری است که هیچ نوع تقارنی ندارد.

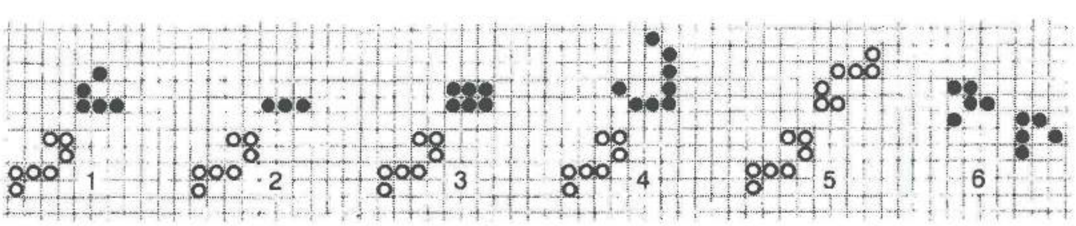
1. William Gosper 2. Honeywell 3. Tub 4. Aircraft Carrier 5. Fishhook

قایق، «یدک‌کش»[1] و «کشتی در حال غرق شدن»[2] را می‌توانیم به هر طول دلخواه بکشیم و «دریاچه»[3] را می‌توانیم هر چقدر بخواهیم بزرگ کنیم و به آن تعداد دلخواهی قایق و یدک‌کش و کشتی در حال غرق شدن اضافه کنیم و همچنان الگوی پایداری داشته باشیم. در کل، ۹ الگوی پایدار ۸ مهره‌ای وجود دارد و ۱۰ الگوی ۹ مهره‌ای، ۲۵ الگوی ۱۰ مهره‌ای، ۴۶ الگوی ۱۱ مهره‌ای، ۱۲۱ الگو با ۱۲ مهره و ۱۴۹ الگوی پایدار ۱۳ مهره‌ای وجود دارد.



شکل ۱۴ باز هم الگوهای پایدار

گروه گاسپر در ۱۹۷۱ متوجه شدند که قلاب ماهی‌گیری می‌تواند الگوهای مختلفی را بخورد و سپس خود را بازسازی کند. چهار تصویر اول در شکل ۱۵ قلاب ماهی‌گیری را در حال خوردن چهار الگوی مختلف نشان می‌دهند. در تصویر پنجم، دو قلاب ماهی‌گیری برای خوردن هم موضع گرفته‌اند، اما توانایی زیاد آنها در بازسازی خودشان از خورده شدنشان توسط همدیگر جلوگیری می‌کند و این الگو با دورهٔ تناوب ۳ نوسان می‌کند.

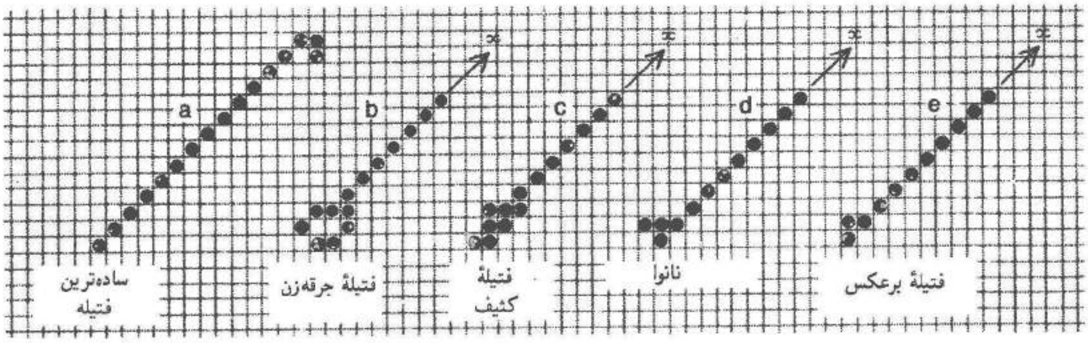


شکل ۱۵ قلاب ماهی‌گیری در حال خوردن الگوهای مختلف

یک دستهٔ دیگر از الگوهای زندگی که بررسی‌های زیادی روی آنها انجام شده، گروهی هستند که گروه فعال در هانی‌ول روی آنها نام «فتیله»[4] گذاشته‌اند. فتیله‌ها باریکه‌هایی از مهره‌ها به‌صورت افقی، عمودی یا مورب هستند

1. Barge 2. Sinking Ship 3. Lake 4. Fuse

که مثل فتیله‌های انفجاری از یک سر به‌سمت سر دیگر می‌سوزند. ساده‌ترین فتیله در شکل ۱۶ نشان داده شده است (الگوی a). این فتیله به‌سمت سر بالایی می‌سوزد. فتیلهٔ b جرقه‌هایی تولید می‌کند که زود ناپدید می‌شوند. فتیله‌ای کثیف مثل الگوی c در حال سوختن اضافاتی تولید می‌کند و باقی‌می‌گذارد. فتیلهٔ d که نامش را «نانوا»[1] گذاشته‌اند، در حالی‌که می‌سوزد یک رشته قرص نان تولید می‌کند. فتیلهٔ e بعد از تولید مقداری اضافات به‌یک فتیلهٔ تمیز تبدیل می‌شود. این اضافات شامل ۳ بلوک، ۳ لانه زنبور، ۲ چشمک‌زن، یک کشتی و ۴ گلایدر هستند. نام آن را فتیلهٔ برعکس گذاشته‌اند، چون اول منفجر می‌شود و بعد شروع به سوختن می‌کند. چهار فتیلهٔ آخر همگی الگوهایی نامتناهی هستند و با دورهٔ تناوب نوسان می‌کنند.



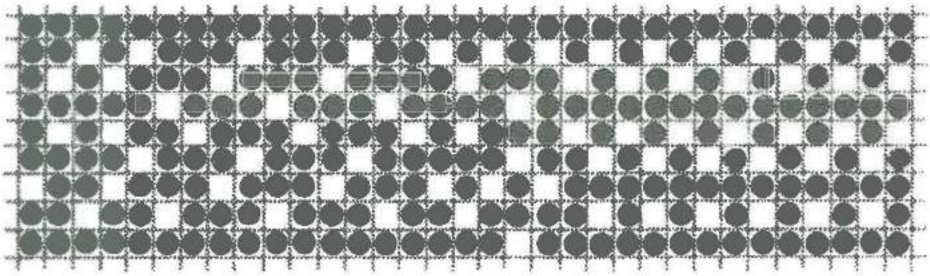
شکل ۱۶ فتیله‌ها

یکی از مسائل جالب در مورد بازی زندگی، وجود الگوهایی است که به آنها «باغ عدن»[2] می‌گویند. اینها الگوهایی هستند که هیچ الگویی نمی‌تواند به آنها تبدیل شود؛ بنابراین هیچ وقت ممکن نیست در یک بازی ظاهر شوند مگر به‌عنوان الگوی اولیه. ری اسمیت از دانشگاه نیویورک ثابت کرد که چنین الگوهایی وجود دارند. البته اثبات او اطلاعی دربارهٔ نحوهٔ پیداکردن چنین الگویی نمی‌دهد. نخستین الگوی باغ عدن را راجربنکز[3] در ۱۹۷۱ و با جستجوی مفصل کامپیوتری پیدا کرد. این الگو که در یک مستطیل ۹ × ۳۳ جا می‌گیرد، شامل ۲۲۶ مهره است (شکل ۷ را ببینید). تنها باغ عدن دیگری که تا به حال شناخته‌شده در دانشگاه بردو فرانسه پیدا شده و در یک مستطیل ۶ × ۱۲۲ جا می‌شود.

هر الگو طبق قوانین بازی زندگی در نسل بعد فقط به‌یک الگوی دیگر تبدیل می‌شود، یعنی هر الگو فقط یک الگوی فرزند دارد؛ اما عکس این مطلب درست نیست. یک الگوی مشخص ممکن است بیش از یک الگوی پدر داشته باشد که همگی در یک حرکت به آن تبدیل شوند. به‌همین دلیل جستجو برای یافتن یک باغ عدن مشکل است. به‌ازای هر الگو، باید تمام الگوهایی را که ممکن است به آن تبدیل شوند پیدا کنیم.

اگر عالم یک بازی زندگی بسیار بزرگ بود، می‌شد پرسید آیا در آن یک الگوی باغ عدن وجود دارد که از هیچ الگویی ساخته نشده باشد و نیاز به خلق شدن داشته باشد؟ به‌هر حال این حقیقت که الگویی که فرزند یک باغ

1. Baker 2. Garden of Eden 3. Roger Banks



شکل ۱۷ اولین باغ عدن شناخته‌شده

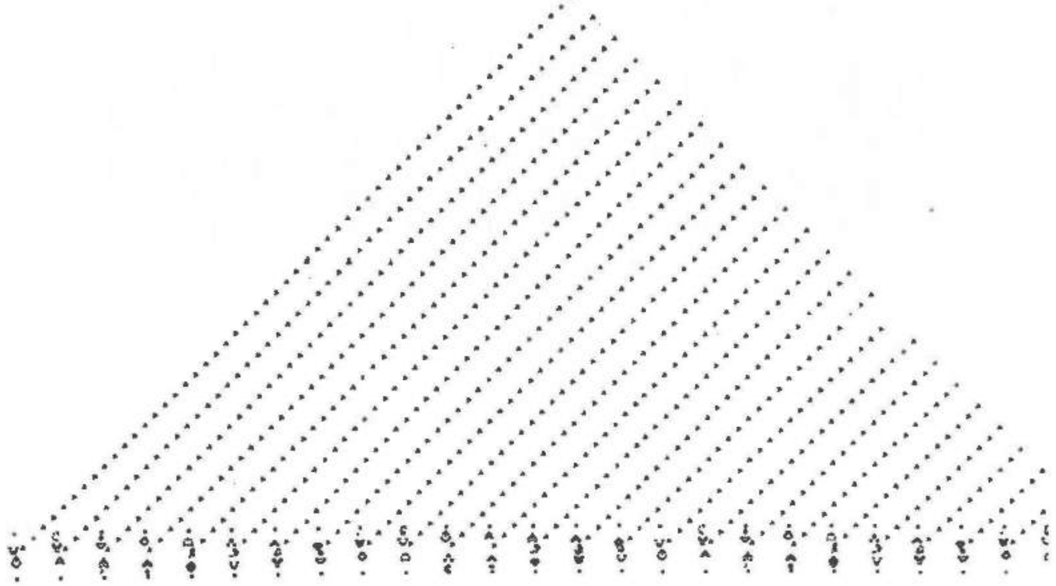
عدن باشد ممکن است پدر دیگری غیر از آن باغ عدن هم داشته باشد، باعث شد کانوی ۵۰ دلار جایزه برای این سؤال تعیین کند که آیا الگویی وجود دارد که یک الگوی پدر داشته باشد اما هیچ الگوی پدربزرگی نداشته باشد؟ جواب این سؤال هنوز پیدا نشده است.

دستهٔ دیگر از الگوهای جالب زندگی که در ام. آی. تی. پیدا شدند، الگوهای زایا[1] هستند ــ الگوهایی که جمعیتشان با سرعت بسیار بالا زیاد می‌شود. شکل ۱۸ یکی از این الگوها را نشان می‌دهد. نقاط کوچکی که در تصویر می‌بینید گلایدر هستند که حدود ۱۰۰۰ تا از آنها در مثلث بزرگ محصور شده‌اند. این الگوی زایا از ۱۰ قطار دودی[2] تشکیل شده است که به‌سمت شرق حرکت می‌کنند. قطارها طوری طراحی شده‌اند که به‌جای دود، گلایدر تولید می‌کنند. این گلایدرها با هم برخورد می‌کنند و تفنگ‌هایی تشکیل می‌دهند که شروع به شلیک گلایدر می‌کنند. در تصویری که می‌بینید، ۳۰ تفنگ هرکدام یک گلایدر در هر نوبت بازی شلیک می‌کنند. دیدن فعالیت این الگوی جالب روی صفحهٔ کامپیوتر به‌یادماندنی‌ترین بخش بازدید من از ام. آی. تی. بود.

در بخش قبلی این مقاله که در ۱۹۷۱ در ساینتیفیک امریکن چاپ شد پرسیدم که آیا می‌شود روی صفحهٔ بازی زندگی یک ماشین محاسبه‌گر ساخت. خوشحالم که گزارش بدهم که کانوی در کمبریج و گاسپر در ام. آی. تی. مستقلاً توانسته‌اند مدلی از یک ماشین تورینگ روی صفحهٔ بازی زندگی بسازند. ماشین تورینگ مدل اصلی ماشین‌های محاسبه‌گر است؛ ماشینی که می‌تواند هر چیز قابل محاسبه‌ای را محاسبه کند. توصیف دقیق الگویی که برای این کار ساخته‌شده پیچیده‌تر از آن است که اینجا توضیح داده شود. کانوی در کتاب «روش‌های برد»[3] این الگو را توصیف کرده است. داشتن یک ماشین تورینگ روی صفحهٔ بازی زندگی به این معنی است که بازی زندگی می‌تواند هر محاسبه‌ای را که قوی‌ترین کامپیوترهای الکترونیکی انجام می‌دهند، انجام بدهد. مثلاً می‌شود با استفاده

1. Breeder 2. Puffing Train

3. E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winnig ways: for your mathematical plays.* vol 2. Academic press, 1982.



شکل ۱۸ یک الگوی زایا

از تعدادی تفنگ گلایدر و قلاب ماهی‌گیری و الگوهای دیگر، سیستمی ساخت که دنباله‌ای از گلایدرها با فاصله‌هایی در جاهای مناسب تولید کند که e یا پی یا هر عدد دیگر را تا هر تعداد رقم اعشار محاسبه کند. البته این محاسبه محاسبهٔ کارامدی نیست، اما به‌هر حال «ممکن» است. کافی است صفحه‌ای به‌اندازهٔ کافی بزرگ و نبوغ لازم برای طراحی چنین ماشینی را داشته باشیم.

کانوی ادعا کرده است که ساخت الگوهایی که بتوانند الگوهایی دقیقاً شبیه خودشان تولید کنند هم ممکن است؛ البته هنوز اثبات این موضوع را منتشر نکرده است. کانوی می‌گوید اگر مجموعه‌ای به‌اندازهٔ کافی بزرگ از مهره‌هایی را که به تصادف روی صفحه چیده شده‌اند در زمان کافی در نظر بگیریم، ممکن است به‌تصادف الگوهایی از این دست ــ که می‌توانند خودشان را تکثیر کنند ــ در بین آنها پیدا شود، و از بین چنین الگوهایی آنها که برای ادامهٔ حیات مناسب‌تر باشند باقی می‌مانند.

من ترجیح می‌دهم «ممکن است» را با «محتمل است» عوض کنم، اما به‌هر حال چشم پوشیدن از شباهت‌های زیاد بین بازی زندگی و فرایند تکامل زیستی بسیار مشکل است.

Martin Gardner, *Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements*. Freeman, 1983

● ترجمهٔ سیدعباس موسوی

بازی «جور»

بهزاد اسلامی مسلّم

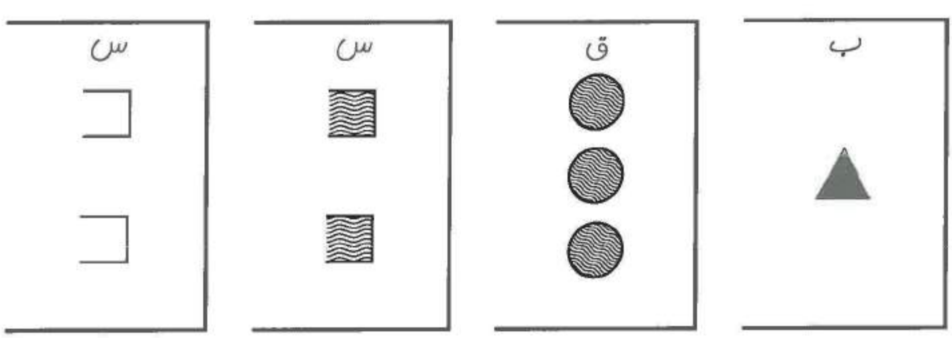
مارشا فالکو[1] متخصص ژنتیک جمعیت بود و دربارهٔ بیماری صرع بین سگ‌های گرگی تحقیق می‌کرد. برای اینکه اطلاعات ژنتیکی سگ‌ها را نمایش بدهد، روی کارت‌هایی شکل‌هایی رسم کرد و سپس به‌دنبال الگویی بین این اطلاعات گشت؛ اما بعد دریافت که از این کارت‌ها می‌توان برای بازی هم استفاده کرد! این‌گونه بود که بازی «جور»[2] در ۱۹۷۴ متولد شد. در این مقاله، ابتدا با بازی آشنا می‌شوید و سپس چند مسئلهٔ ریاضی دربارهٔ این بازی می‌بینید. پیشنهاد می‌کنیم راه‌حل‌ها را قبل از اینکه سعی کنید مسئله‌ها را خودتان حل کنید، نخوانید.

معرفی بازی

در بازی از دسته‌ای کارت استفاده می‌شود که این ویژگی‌ها را دارند:

- شکل روی هر کارت، یا دایره است یا مربع یا مثلث.
- در هر کارت، تعداد شکل‌ها ۱ یا ۲ یا ۳ است.
- در هر کارت، همهٔ شکل‌ها یا توپرند یا توخالی یا هاشورخورده.
- در هر کارت، همهٔ شکل‌ها یا قرمزند یا سبز یا بنفش.

در این مقاله، چون امکان نمایش رنگ وجود ندارد، بالای هر کارت یکی از حروف «ق»، «س» یا «ب» را می‌نویسیم.



1. Marsha Jean Falco   2. Game of Set

مسئلهٔ ۱. چند کارت در یک دست کامل کارت‌های بازی «جور» وجود دارد؟

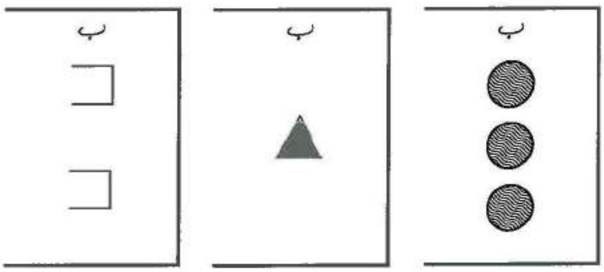
راه‌حل. هر کارت در هر یک از چهار ویژگی رنگ، شکل، پرشدگی و تعداد می‌تواند ۳ حالت داشته باشد؛ بنابراین تعداد کارت‌های یک دست کامل برابر است با ۸۱ = ۳ × ۳ × ۳ × ۳. ■

قوانین بازی. فرض کنید سه کارت پیدا کرده‌ایم که این چهار ویژگی را دارند که

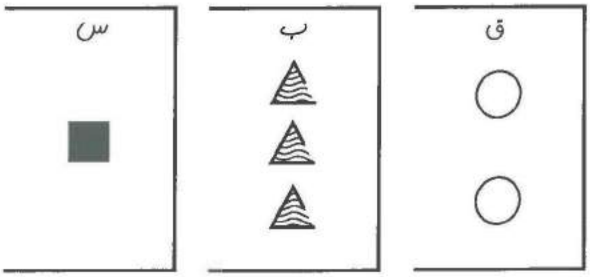
- هر سه کارت، شکل یکسان دارند **یا** کارتی با دایره، کارتی با مثلث و کارتی با مربع داریم.
- در هر سه کارت، تعداد برابر است **یا** اینکه کارتی با ۱، کارتی با ۲ و کارتی با ۳ شکل داریم.
- هر سه کارت یک‌رنگ دارند **یا** کارتی سبز، کارتی قرمز و کارتی بنفش داریم.
- هر سه کارت، به‌طور مشابه پر شده‌اند **یا** کارتی با شکل‌های خالی، کارتی با شکل‌های توپر و کارتی با شکل‌های هاشورخورده داریم.

به این سه کارت، «جور» می‌گوییم؛ به‌عبارت دیگر، سه کارتی که بتوان در موردشان گفت «دوتا... و یک‌دانه...»، «جور» نیستند و در غیر این‌صورت، جور هستند:

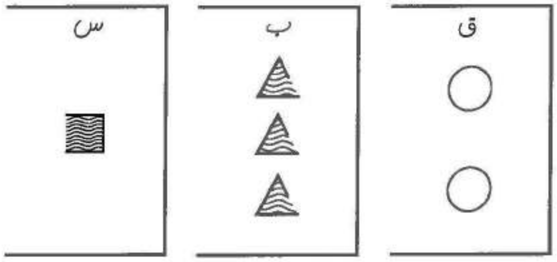
مثلاً، این سه کارت «جور» هستند:



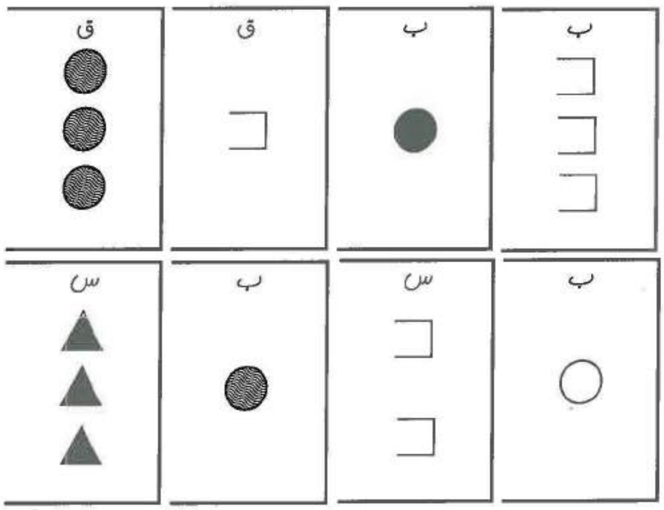
این سه کارت هم «جور» هستند:



اما این سه کارت، نه:



مسئلهٔ ۲ . در بین کارت‌های شکل زیر، چندتا «جور» مختلف وجود دارد؟ چرا؟



راه‌حل. دوتا. ■

در بازی «جور»، دو نفر یا بیشتر بازی می‌کنند. در ابتدای بازی، بازیگردان دستهٔ کارت‌ها را بُر می‌زند و ۱۲ تا از کارت‌ها را روی میز می‌گذارد. هر یک از بازیکنان، سعی می‌کند **جورها** را پیدا کند. هرکسی که جوری پیدا می‌کند، می‌گوید «جور!» و آن سه کارت را برمی‌دارد. بازیگردان به‌جای این سه کارت، از دستهٔ کارت‌ها سه کارت جدید روی میز می‌گذارد و بازی ادامه می‌یابد. در پایان، برنده کسی است که بیشترین تعداد جور را برداشته باشد. البته در ابتدای بازی، یا در هر مرحله‌ای از آن، ممکن است هیچ «جور»ی در بین کارت‌های روی میز پیدا نشود. در این‌صورت بازیگردان ابتدا سه کارت از دسته به میز اضافه می‌کند، و این کار را تا زمانی که بین کارت‌های روی میز «جور»ی یافت نشود، ادامه می‌دهد.

مسئله‌ها

از این قسمت مقاله به بعد به بازی کار چندانی نداریم، و در عوض چند مسئله دربارهٔ این بازی می‌آوریم.

مسئلهٔ ۳ . اگر از دستهٔ کامل کارت‌ها، دوتا کارت بیرون بکشیم، آیا حتماً کارت سومی در دسته وجود دارد که این سه کارت «جور» باشند؟ اگر بله، آیا حتماً فقط یک کارت با این خاصیت وجود دارد یا ممکن است بیشتر از یک کارت پیدا شود؟ چرا؟

راه‌حل. بله، و فقط یک کارت می‌توان یافت. باید به هر یک از ویژگی‌های رنگ، تعداد، شکل، پرشدگی جداگانه توجه کنیم. اگر شکل دو کارت اول یکسان بود، شکل کارت سوم هم باید همان باشد، و اگر متفاوت بودند، شکل کارت سوم، شکلی است که روی دو کارت نیست. به‌همین ترتیب، با توجه به هر ویژگی در دو کارت اول، معلوم می‌شود که وضعیت کارت سوم در آن ویژگی چیست، و درنتیجه کارت سوم به‌طور یکتا مشخص می‌شود. ■

مسئلهٔ ۴ . سؤالی مشابه مسئلهٔ قبل: از دستهٔ کامل کارت‌ها، یک کارت بیرون می‌کشیم. چندتا «جور» مختلف می‌توانیم با برداشتن دو کارت دیگر از کارت‌های باقی‌مانده پیدا کنیم؟

راه‌حل. وقتی یک کارت بیرون می‌کشیم، با بیرون آوردن هر کارت دیگر از ۸۰ کارت باقی‌مانده می‌توانیم مانند مسئلهٔ بالا کارت سومی بیابیم که با این دو کارت «جور» تشکیل بدهد. اما اگر از ۸۰ کارت، کارت x را بیرون بیاوریم و بعد کارت سوممان y باشد، موقعیتی هم وجود دارد که از ۸۰ کارت، کارت y را بیرون آورده‌ایم و درنتیجه، این بار کارت سوممان x است. این دو «جور» با هم فرقی ندارند؛ بنابراین تعداد جورهایی که با داشتن یک کارت می‌توانیم تشکیل بدهیم برابر است با $۸۰ \div ۲ = ۴۰$. ■

مسئلهٔ ۵ . در یک دستهٔ کامل کارت جور، چندتا «جور» مختلف وجود دارد؟

راه‌حل. می‌توانیم از مسئلهٔ ۳ استفاده کنیم. هر دوتا کارت را با دقیقاً یک کارت می‌توانیم کامل کنیم و «جور» تشکیل بدهیم؛ بنابراین باید تعداد جفت کارت‌ها را پیدا کنیم. همان‌طور که حساب کردید، تعداد کل کارت‌های یک دسته برابر است با ۸۱. بنابراین تعداد جفت کارت‌ها برابر است با ۸۰×۸۱. اما این عدد را باید بر $۳!$ تقسیم کنیم، چون در هر جور، ترتیب مهم نیست و تعداد جایگشت‌های ۳ کارت برابر است با $۳!$. بنابراین تعداد کل جورها برابر است با $\frac{۸۱ \times ۸۰}{۳!} = ۱۰۸۰$. ■

مسئلهٔ ۶ . سه کارت را به‌تصادف از دستهٔ کارت‌ها بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه این سه کارت «جور» تشکیل بدهند چقدر است؟

راه‌حل. شاید در نگاه اول مسئله خیلی سخت به‌نظر برسد، اما با توجه به مسئلهٔ ۳ می‌توانیم مسئله را حل کنیم.

به دو کارت اولی که بیرون کشیده شده است توجه کنید. از ۷۹ = ۲ − ۸۱ کارت دیگر، یکی و فقط یکی هست که با این دو کارت «جور» تشکیل می‌دهد. بنابراین، احتمال اینکه کارت سوم با این دو کارت «جور» تشکیل بدهد، برابر است با $\frac{۱}{۷۹}$، و این همان احتمال مطلوب است. ■

مسئلهٔ ۷ . از یک دست کارت، حداکثر چند کارت را می‌توانیم طوری روی میز بگذاریم که هیچ «جور»ی تشکیل نشود؟

بیایید ابتدا به‌حالت ساده‌تری از این مسئله فکر کنیم. اگر کارت‌ها فقط یک ویژگی داشتند، مثلاً فقط شکل داشتند، چند کارت می‌توانستیم پیدا کنیم که هیچ جوری بینشان نباشد؟ با این فرض، فقط سه کارت داریم: مربع، دایره، مثلث. بنابراین پاسخ برابر است با ۲.

حالا فرض کنید کارت‌ها دو ویژگی داشتند، مثلاً شکل و تعداد. در این‌صورت، خیلی سخت نیست که با آزمایش و خطا بفهمیم که پاسخ برابر است با ۴.

به‌نظر می‌رسد که اگر تعداد ویژگی‌ها را به سه‌تا برسانیم، کار سخت‌تر می‌شود، و وقتی تعداد را به چهار برسانیم، محاسبه واقعاً سخت می‌شود. قبل از اینکه پاسخ مسئلهٔ ۷ را ببینید، به این دو قضیه توجه کنید:

قضیهٔ ۱ . جواب مسئلهٔ ۷، از ۵۵ کمتر است. یعنی هر ۵۵ کارتی که انتخاب کنیم، حتماً «جور»ی دارند.

برهان. فرض کنید ۵۵ کارت روی میز گذاشته باشیم که هیچ «جور»ی بینشان وجود نداشته باشد. در این‌صورت، از هر یک از ۱۰۸۰ «جور»ی که می‌توانستیم با ۸۱ کارت تولید کنیم، دست‌کم یک کارت بیرون از این ۵۵ کارت است. بنابر مسئلهٔ ۴، هر یک از ۲۶ کارت باقی‌مانده می‌تواند در ۴۰ «جور» ظاهر شود. بنابراین، حداکثر ۱۰۴۰ = ۴۰ × ۲۶ «جور» می‌توان ساخت که دست‌کم یکی از این ۲۶ کارت در آنها حضور دارند. اما هیچ «جور»ی وجود ندارد که هیچ‌یک از این۲۶ کارت را لازم نداشته باشد؛ پس تعداد «جور»ها باید ۱۰۴۰ باشد. اما می‌دانیم که تعداد «جور»ها، ۱۰۸۰تاست. بنابراین، در بین ۵۵ کارت اول، حتماً «جور»ی یافت می‌شود. ■

قضیهٔ ۲ . جواب مسئلهٔ ۷، از ۴۷ کمتر است. یعنی هر ۴۷ کارتی که انتخاب کنیم، حتماً «جور»ی دارند.

برهان. فرض کنیم ۴۷ کارت پیدا کرده‌ایم که بین آنها هیچ «جور»ی وجود ندارد. بنابراین اگر دو کارت را از بین آنها انتخاب کنیم، کارت سومی که با این دو «جور» تشکیل می‌دهد، هیچ‌یک از این کارت‌ها نیست. پس «جور»هایی که با استفاده از هر دوتا کارت از این ۴۷ کارت می‌توانیم تشکیل بدهیم، متمایزند. بنابراین، با توجه به مسئلهٔ ۳، با استفاده از این ۴۷ کارت و کارت‌های باقی‌مانده، $\binom{۴۷}{۲}$ = ۱۰۸۱ «جور» مختلف می‌توانیم بسازیم. اما می‌دانیم که تعداد کل «جور»ها برابر است با ۱۰۸۰؛ پس فرض اولمان غلط است؛ یعنی هر دستهٔ ۴۷تایی‌هم «جور» دارد. ■

پاسخ مسئلهٔ ۷ برابر ۲۰ است. این پاسخ را می‌توان با رایانه حساب کرد. آیا می‌توانید برنامه‌ای رایانه‌ای بنویسید که پاسخ مسئلهٔ ۷ را حساب کند؟ برای دیدن ۲۰ کارت که هیچ «جور»ی تشکیل نمی‌دهند، به‌نشانی http://www.setgame.com/set/noset.htm نگاهی بیندازید.

مسئلهٔ ۸ . عباس استدلال کرده است که عدد ۲۰ نمی‌تواند پاسخ مسئلهٔ ۷ باشد: همان‌طورکه در مسئلهٔ ۳ دیدیم، هر دوتا کارت دقیقاً با یک کارت دیگر «جور» تشکیل می‌دهند. بنابراین، وقتی کارت‌ها را از دسته در می‌آوریم و روی میز می‌گذاریم، به‌ازای هر دوتا کارتی که روی میز گذاشته‌ایم، باید یک کارت در دسته موجود باشد که با این دوتا کارت «جور» تشکیل دهد. فرض کنیم بتوانیم طوری ۲۰ کارت روی میز بگذاریم که «جور» تشکیل ندهند. تعداد انتخاب‌های ۲ کارت از ۲۰ کارت روی میز برابر است با $۱۹۰ = \binom{۲۰}{۲}$، یعنی در دسته باید ۱۹۰ کارت باقی مانده باشد! چون کل کارت‌ها ۸۱تا هستند، پس بین این ۲۰ کارت حتماً کارت‌هایی هستند که با هم جور تشکیل می‌دهند.

آیا می‌توانید بگویید کجای استدلال عباس ایراد دارد؟

قضیه‌ای دیگر را در ادامه می‌خوانید. این قضیه مربوط است به اینکه در پایان بازی «جور»، چه تعداد کارت ممکن است بی‌استفاده باقی بمانند.

قضیهٔ ۳ . دو نفر با یک دست کامل «جور» بازی کرده‌اند. هریک تعدادی «جور» از روی میز برداشته‌اند و سه کارت در دستهٔ کارت‌ها باقی مانده است. در این‌صورت، این سه کارت هم «جور» هستند!

برهان. به‌جای اینکه هر یک از ویژگی‌ها را با نام‌هایشان مشخص کنید، می‌توانید این‌طور فرض کنید که در مورد ویژگی رنگ، رنگ هرکارت می‌تواند رنگ ۱، ۲ یا ۳ باشد. شکل هرکارت می‌تواند شکل ۱، ۲ یا ۳ باشد. پرشدگی هم می‌تواند از نوع ۱، ۲ یا ۳ باشد.

به ویژگی رنگ توجه کنید. مجموع عددهای رنگ دریک دست کامل، برابراست با $(۳ \times ۲۷) + (۲ \times ۲۷) + ۲۷ = ۱۶۲$ که مضرب ۳ است. در هر «جور» هم، مجموع عددهای رنگ یا برابر است با $۳ = ۱ + ۱ + ۱$ (اگرکارت‌ها همرنگ باشند) یا $۶ = ۳ + ۲ + ۱$ (اگرکارت‌ها سه رنگ مختلف داشته باشند). بنابراین، هم مجموع رنگ‌ها در دست کامل کارت‌ها مضرب ۳ است، و هم مجموع رنگ‌ها در هر «جور» مضرب ۳ است. پس با حذف هر «جور» از دستهٔ کارت‌ها، مجموع عددهای رنگ‌های کارت‌های باقی‌مانده، باز هم بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود. بنابراین، در سه کارتی که در صورت مسئله گفته شد هم مجموع عددهای رنگ‌ها بر ۳ بخش‌پذیر است. این اتفاق چگونه ممکن است بیفتد؟ فقط در صورتی‌که عددهای رنگ‌های کارت‌ها، ۱ و ۲ و ۳ باشند، یا اینکه همه ۱ باشند، یا اینکه همه ۲ باشند، یا اینکه همه ۳ باشند. در حالت‌های دیگر، مجموع بر ۳ بخش‌پذیر نیست. بنابراین، شرط «جور» بودن در مورد رنگ سه کارت آخر برقرار است.

با استدلالی کاملاً مشابه، معلوم می‌شود که شرط «جور» بودن در مورد شکل، تعداد و پرشدگی سه کارت آخر نیز برقرار است.

پس سه کارت آخر، «جور» هستند. ■

اگر با همنهشتی آشنا باشید، می‌توانید ارتباط برهان بالا را با همنهشتی به‌پیمانهٔ ۳ ببینید: سه کارت، «جور» هستند، اگر و فقط اگر در هر ویژگی، جمع عددهای مربوط به آن ویژگی به‌پیمانهٔ ۳ برابر صفر شود.

سخن آخر

بازی «جور» را از دست ندهید! می‌توانید کارت‌های بازی را بسازید و در بین دوستان و خانواده، با این بازی ریاضی سرگرم شوید. بازی جور انواع دیگری هم دارد. در نشانی http://en.wikipedia.org/wiki/Set_(game) می‌توانید انواع دیگر این بازی را یاد بگیرید.

شاید دوست داشته باشید که هر روز، برای پاسخ به معمای روزانه وب‌گاه «جور» تلاش کنید. اگر این‌طور است، می‌توانید به نشانی http://www.setgame.com/set/puzzle_frame.htm بروید.

منابع

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Set_(game)

[2] http://omino.com/set/

[3] www.math.yorku.ca/~zabrocki/set/joyofset.pdf

[4] http://www.math.rutgers.edu/~maclagan/papers/set.pdf

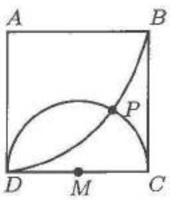
نمونه سؤال‌های مرحلهٔ اول المپیاد ریاضی

میلاد بخشی‌زاده

۱. دو ذره در طول ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ در جهت $A \to B \to C \to A$ به‌طور همزمان و با سرعت مساوی شروع به حرکت می‌کنند. یکی از نقطهٔ A شروع می‌کند و دیگری از نقطهٔ وسط $\overline{BC}$. وسط پاره‌خط واصل دو ذره، مسیری را طی می‌کند که مرز ناحیه‌ای مثل R است. نسبت مساحت R به مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ چیست؟

الف) $\frac{۱}{۱۶}$ ب) $\frac{۱}{۱۲}$ ج) $\frac{۱}{۹}$ د) $\frac{۱}{۶}$
ه) $\frac{۱}{۴}$

۲. $ABCD$ مربعی با طول ضلع ۴ است و M وسط پاره‌خط $\overline{CD}$ است. دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ را در نقاط P و D قطع می‌کند. فاصلهٔ P از $\overline{AD}$ چقدر است؟



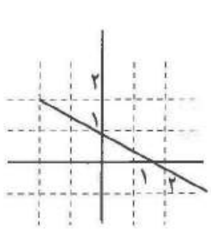
الف) ۳ ب) $\frac{۱۶}{۵}$
ج) $\frac{۱۳}{۴}$ د) $۲\sqrt{۳}$
ه) $\frac{۷}{۲}$

۳. جمله‌های پنجم و هشتم دنبالهٔ هندسی‌ای به‌ترتیب !۷ و !۸ هستند. جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

الف) ۶۰ ب) ۷۵ ج) ۱۲۰ د) ۲۲۵ ه) ۳۱۵

۴. نمودار خط $y = mx + b$ در شکل روبه‌رو نشان داده شده است. کدام درست است؟

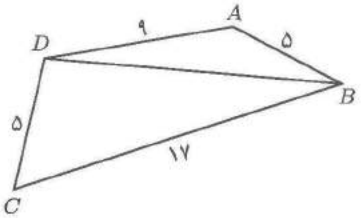
الف) $mb < -۱$
ب) $-۱ < mb < ۰$
ج) $mb = ۰$
د) $۰ < mb < ۱$
ه) $mb > ۱$



۵. فرض کنید n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که بر ۲۰ بخش‌پذیر است، $n^۲$ مکعب کامل است و $n^۳$ مربع کامل است. n چند رقم دارد؟

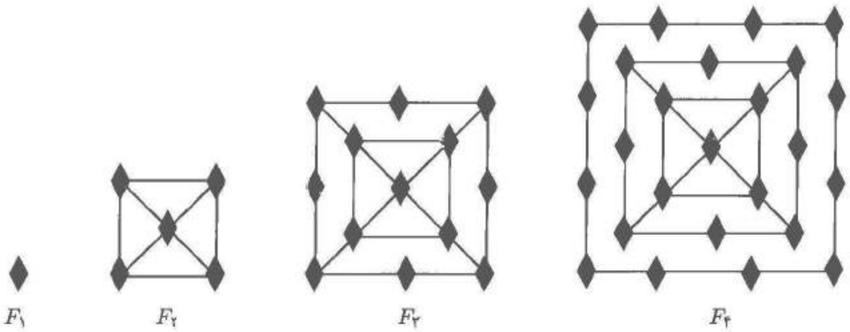
الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ ه) ۷

۶. در چهار ضلعی $ABCD$ می‌دانیم $AB = ۵$، $BC = ۱۷$، $CD = ۵$ و $DA = ۹$ و طول BD عددی صحیح است. طول BD چقدر است؟



الف) ۱۱ ب) ۱۲
ج) ۱۳ د) ۱۴
ه) ۱۵

۷. شکل‌های $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ و $F_۴$ که در زیر نشان داده شده‌اند چهار عنصر ابتدای دنباله‌ای از شکل‌ها هستند. به‌ازای $n \geqslant ۳$، F_n از روی $F_{n-۱}$ به این طریق ساخته می‌شود که $F_{n-۱}$ را درون مربعی بزرگ‌تر قرار می‌دهیم و روی هر ضلع از مربع جدید یک لوزی بیشتر از تعداد لوزی‌های روی ضلع‌های بیرونی $F_{n-۱}$ قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال، $F_۳$ سه لوزی دارد. چند لوزی در شکل $F_{۲۰}$ وجود دارد؟

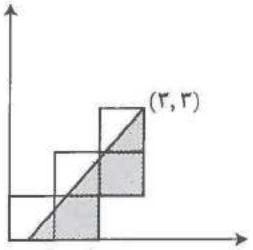


الف) ۴۰۱ ب) ۴۸۵ ج) ۵۸۵ د) ۶۲۶ ه) ۷۶۱

۸. رأس‌های مثلثی نقطه‌های $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(۶m,۰)$ هستند و خط $y = mx$ مثلث را به دو مثلث با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. مجموع مقادیر ممکن برای m چیست؟

الف) $-\frac{۱}{۳}$ ب) $-\frac{۱}{۶}$ ج) $\frac{۱}{۶}$ د) $\frac{۱}{۳}$
ه) $\frac{۱}{۲}$

۹. ۵ مربع واحد مطابق شکل در صفحهٔ مختصات قرارگرفته‌اند. خط واصل نقاط $(۳,۳)$ و $(a,۰)$ کل ناحیه را به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. a چند است؟



الف) $\frac{۱}{۲}$

ب) $\frac{۳}{۵}$

ج) $\frac{۲}{۳}$

د) $\frac{۳}{۴}$

هـ) $\frac{۴}{۵}$

۱۰. فرض کنید $f(x+۳) = ۳x^۲ + ۷x + ۴$ و $f(x) = ax^۲ + bx + c$. مقدار $a+b+c$ چقدر است؟

الف) -۱ ب) ۰ ج) ۱ د) ۲

هـ) ۳

انتشارات فاطمی
www.fatemi.ir

منابع آموزشی برای مرحله‌ی اول المپیادهای علمی

۴۳ عنوان

سرویراستاران مجموعه:

ریاضی یحیی تابش
فیزیک محمود بهمن آبادی
شیمی منصور عابدینی
نجوم منصور وصالی
کامپیوتر یحیی تابش
زیست‌شناسی محمد کرام‌الدینی

مجموعه‌ی منابع آموزشی برای مرحله‌ی اوّل المپیادهای علمی شامل **بیش از ۴۰ عنوان** کتاب درسی و کتاب تمرین و مسائل است که براساس برنامه‌های درسی المپیادهای داخلی کشور در رشته‌های **ریاضی**، **کامپیوتر**، **فیزیک**، **نجوم**، **شیمی**، **زیست‌شناسی** و **ادبیات فارسی** طراحی شده است. این مجموعه را جمعی از مؤلفان باتجربه که در تدریس کلاس‌های المپیاد سابقه‌ی ممتد دارند و استادانی که سرپرستی تیم‌های المپیاد جهانی را برعهده داشته‌اند تألیف و ویرایش کرده‌اند.

انتشارات
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان در زمینه‌ی کتاب‌های
مورد نیاز المپیادهای دانش‌آموزی اقدام به چاپ و انتشار
کتاب‌های مفید در رشته‌های مختلف نموده است.

جهت تهیه‌ی کتاب‌ها و کسب اطلاعات بیشتر
می‌توانید با شماره‌های

۴۴ ۴۵ ۰۸ ۰۱

۴۴ ۴۳ ۵۶ ۸۷

تماس بگیرید و یا به آدرس اینترنتی

WWW.YSC.AC.IR

مراجعه فرمایید.

مسابقه‌ی ریاضی کانگورو

۲۰۰۲-۲۰۱۰

طرح مشترک با انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان

انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان

انتشارات فاطمی

- ارتقاء درک ریاضی دانش‌آموزان
- تقویت اعتماد به‌نفس دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی
- درک بهتر کاربرد ریاضی در فعالیت‌های روزانه